ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу
Владимирова Антона Алексеевича
«Некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных операторов в тройках пространств Соболева»,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Представленная диссертация посвящена вопросам, связанным с представлением неограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ ограниченными операторами, отображающими „нижнюю“ компоненту тройки гильбертовых пространств

$$\mathfrak{D} \xrightarrow{I} \mathfrak{H} \xrightarrow{I^*} \mathfrak{D}^*$$

в верхнюю. Данная конструкция тесно связана с хорошо известным в спектральной теории представлением секториальных операторов полуторалинейными формами, однако обладает рядом дополнительных методических достоинств.Первая глава Первая глава излагает некоторые общие факты соответствующей теории (в частности, при этом удаётся с единой точки зрения установить ряд результатов спектральной теории операторных матриц, в предшествующих работах M. Langer, C. Tretter и других получавшихся как независимые). Остальные главы относятся к более конкретной теории обыкновенных дифференциальных операторов в тройках

$$W_2^n[0;1] \to L_2[0;1] \to W_2^{-n}[0;1].$$

Такой выбор объекта исследования позволяет рассматривать в том числе ситуации, когда коэффициенты определяющего оператор дифференциального выражения представляют собой обобщённые функции. Изучение такого рода задач в общей постановке было в конце 1990-х годов начато в работах А. А. Шкаликова, В. А. Садовничего, и некоторых других авторов. Из числа более „классических“ объектов исследования, допускающих включение в используемую в представленной диссертации конструкцию, могут быть отмечены струны с произвольным распределением массы (М. Г. Крейн, 1950-е), а также некоторые многоточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, тематика проведённого исследования представляется актуальной.

Центральным результатом второй главы диссертации является теория осцилляции собственных функций положительных самосопряжённых операторов с сингулярными коэффициентами. Допущение к рассмотрению в качестве коэффициентов и правых частей дифференциального уравнения обобщённых функций позволило автору диссертации приложить к задаче известную для „гладкой“ ситуации технику знакорегулярности, ранее обычно считавшуюся в общем случае неприменимой. При этом удалось получить существенно более простые доказательства результатов об осцилляции собственных функций и осцилляционности функций Грина, чем известные для частных случаев рассмотренных задач ранее (Р. Ч. Кулаев, 2015). Следует отметить, что для случая гладкости коэффициентов соответствующие результаты (технически устанавливаемые с использованием обобщённых функций) также являются новыми.

Третья глава посвящается задаче о точных априорных оценках собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, потенциал которой изменяется внутри сферы пространства $L_1[0;1]$ (возможно, с некоторым весом). Такая задача в ряде частных (либо близких по формулировке) случаев изучалась ранее многими авторами (например, Ю. В. Егоровым, В. А. Кондратьевым, В. А. Винокуровым и В. А. Садовничим). В представленной диссертации указан ряд случаев, когда потенциал, минимизирующий либо максимизирующий нижнюю границу спектра, оказывается обобщённой функцией (не принадлежащей изначально рассматривавшемуся классу потенциалов). Полученные результаты прилагаются также к задаче о нахождении точных оценок спектра лапласианов на графах (известные ранее для соответствующих случев оценки были, вообще говоря, неточными).

Вторую половину диссертации, состоящую из четвёртой, пятой и шестой глав, занимает изучение спектральных свойств струн с самоподобными весами. В отличной от используемой в диссертации постановке такая задача изучается долгое время (можно отметить, например, работу T. Uno, I. Hong, 1959, посвящённую установлению порядка спектральной асимптотики в ситуации, когда функцией распределения массы струны является канторова лестница). В начале 1990-х годов на основе метода теории восстановления (J. Kigami, M. L. Lapidus; M. Solomyak, E. Verbitsky) для указанных задач была найдена асимптотика

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln \lambda) + o(1)]$$

где D — явно определяемый на основе параметров самоподобия весовой функции порядок, а s — некоторая периодическая непрерывная функция. Однако более детальное описание свойств функции s в ситуации так называемого „арифметического“ самоподобия (в особенности относящееся к вопросу о возможности вырождения этой функции в константу) не было получено на основе метода теории восстановления и составило известную проблему (А. И. Назаров, 2004; U. Freiberg, 2011). Для широкого класса „канторовски“ самоподобных весов решение этой проблемы дано в шестой главе представленной диссертации на основе нового метода, сочетающего в себе элементы теории осцилляции собственных функций дифференциальных операторов, теории меры и теории регуляризованных следов.

Среди основных результатов диссертации следует особо отметить следующие.

1. Во второй главе построено распространение техники знакорегулярности на случай граничных задач для дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами. В ряде предшествующих работ других авторов эта техника была объявлена на случай задач указанного рода принципиально непереносимой. Построенная при этом автором теория позволяет получить простые и прозрачные доказательства фактов, ранее известных лишь в частных случаях (Р. Ч. Кулаев, 2015), причём требовавших для своего установления значительной технической работы.

2. В третьей главе показывается естественный характер возникновения потенциалов-обобщённых функций в ряде задач, изначально упоминания таких потенциалов не содержавших. Речь здесь идёт о точных априорных оценках собственных значений оператора Штурма–Лиувилля, потенциал которых изменяется внутри сферы пространства $L_1[0,1]$ (возможно, с некоторым весом). При этом, в частности, получают дальнейшее развитие и общетеоретическое обоснование некоторые старые результаты (Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, 1984), в значительной степени имевшие характер примеров.

3. В шестой главе на основе нового подхода, комбинирующего элементы теории осцилляции собственных функций дифференциальных операторов, теории меры и теории регуляризованных следов, для широкого класса арифметически самоподобных функций (а именно, функций так называемого „канторовского типа самоподобия“) найден отрицательный ответ на известный в литературе (А. И. Назаров, 2004; U. Freiberg, 2011) вопрос о возможности функции s из асимптотического представления

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln \lambda) + o(1)]$$

для считающей функции спектра струны с самоподобным распределением массы вырождаться в константу.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и сопровождены строгими математическими доказательствами. Основные результаты диссертации опубликованы в журналах из списка ВАК и докладывались на ряде международных научных конференций и научно-исследовательских семинаров.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа А. А. Владимирова «Некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных операторов в тройках пространств Соболева» является законченным научным исследованием, соответствует «Положению о присуждении учёных степеней» и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации к диссертационным работам на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. Её автор, Владимиров Антон Алексеевич, заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:

Султанаев Яудат Талгатович,
доктор физико-математических наук (специальность 01.01.02),
профессор кафедры математики и статистики
Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы

Почтовый адрес: 450008, Республика Башкортостан, г. Уфа, улица Октябрьской революции, 3а

Подпись Я.Т. Султанаева
Заверяю: Начальник отдела документационного обеспечения
ФГБОУ ВО «БГПУ им. М.Акмуллы»