

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной и исследовательской деятельности федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Южный федеральный университет»



Метелица А. В.

2021 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу на соискание
ученой степени доктора физико-математических наук

Загоры Дмитрия Александровича

«Спектральный анализ и асимптотика решений задач механики
вязкоупругих сред»,

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

В диссертации Д.А. Загоры рассматриваются линейные интегро-дифференциальные уравнения и некоторые задачи механики сплошных сред, описываемые такими уравнениями. Изучаются вопросы асимптотического поведения решений, проводится спектральный анализ уравнений, и решаются вопросы представления решений. Впервые вопросы устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, в связи с задачей о малых движениях вязкоупругого тела, изучались в работах Дафермоса. В дальнейшем этот круг вопросов рассматривался в многочисленных работах как зарубежных, так и российских авторов. Спектральный анализ уравнений, вопросы базисности систем корневых элементов и вопросы представления решений являются в настоящее время классическими. Автору удалось найти новый метод получения асимптотических формул в задачах о вынужденных колебаниях, обнаружить и описать ряд новых качественных эффектов.

Актуальность темы. Проблемы, связанные с исследованием экспоненциальной и полиномиальной устойчивости решений для различных сис-

тем, в том числе и абстрактных, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями, связанные со спектральным анализом интегро-дифференциальных уравнений, являются весьма актуальными при изучении широкого спектра задач механики сплошной среды, в частности, для моделей жидкостей Олдройта, Максвелла и Кельвина-Фойгта, для моделей описывающих эмульсии и суспензии, полимерные растворы, моделей с эффектами памяти, и многими другими. К настоящему времени пробелом в исследованиях оставались вопросы существования и поведения решений абстрактных интегро-дифференциальных уравнений с операторными ядрами, содержащими некоммутирующие коэффициенты, и, естественно, в связи с этим, недостаточно исследованными оставались и некоторые приложения в механике сплошных сред. Именно устранению указанного пробела для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений и их приложений посвящена диссертационная работа. Таким образом, тема диссертационной работы безусловно является актуальной.

Основной целью диссертационной работы является исследование равномерной экспоненциальной устойчивости полугрупп для некоторых систем гиперболического типа, исследование асимптотического поведения решений этих систем при нагрузках, близких к почти периодическим; спектральный анализ генераторов полугрупп; исследование моделей релаксирующих жидкостей, моделей Ильюшина вязкоупругих тел, моделей Олдройта и Максвелла сжимаемых жидкостей; доказательство теорем существования и единственности решений задач Коши для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с переменными операторными коэффициентами.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитированной литературы из 204 наименований. Общий объем диссертационной работы составляет 293 стр.

По теме диссертации опубликовано 25 работ, в том числе 13 из списка, рекомендованного ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертационного исследования.

Во введении приведен обзор и анализ имеющейся литературы, определены цели диссертационной работы.

В первой главе рассматриваются операторные блок-матрицы, связанные с интегро-дифференциальными уравнениями гиперболического типа. Доказываются теоремы о равномерной экспоненциальной устойчивости сильно непрерывных полугрупп, порождаемых этими операторами. Дока-

зываются асимптотические формулы для решений задач Коши для неполного интегро-дифференциального операторного уравнения и для одной специальной системы операторных уравнений. Эти формулы находят применение в конкретных задачах теории вязкоупругости, рассматриваемых в главах 2, 3, 4. Проводится спектральный анализ рассмотренных генераторов, доказываются утверждения о структуре спектра, утверждение о пересчете корневых элементов генераторов и ассоциированных с ними операторных пучков. Доказывается теорема о базисности Рисса системы корневых элементов генератора в одном частном случае. Эта теорема применяется в главах 2, 3.

Во второй главе изучается задача о малых движениях идеальной либо вязкой релаксирующей жидкости, целиком заполняющей ограниченную равномерно вращающуюся область трехмерного пространства. Исследуемые модели обобщают модели баротропного газа. Доказаны асимптотические формулы для решений рассматриваемых задач при внешних нагрузках, близких к почти периодическим (для модели идеальной жидкости – в случае, когда область не вращается). Для модели, содержащей вязкую жидкость, доказано, что существенный спектр пучка, ассоциированного со спектральной задачей, состоит из конечного числа отрезков на действительной оси. Обнаружено, что к отрезкам в спектре приводит учет стратификации жидкости по плотности в состоянии относительного равновесия. Часть существенного спектра возникает из-за учета эффектов памяти и отвечает новым апериодически затухающим волновым движениям в жидкости. Доказано, что если система не вращается, то может быть не более конечного числа апериодически затухающих колебательных режимов. В случае, когда система не вращается и находится в невесомости, доказано, что система корневых элементов оператора, ассоциированного с задачей, образует р-базис в соответствующем гильбертовом пространстве. В этом случае найдено разложение решения динамической задачи по соответствующей системе элементов. Для модели, содержащей идеальную жидкость, установлена аналогичная структура спектра на действительной оси. Кроме того, существенный спектр содержит также отрезок мнимой оси – точкам этого спектра обычно отвечают т.н. внутренние инерционные волны в идеальной жидкости. Показано, что учёт эффектов памяти в модели идеальной баротропной жидкости приводит к экспоненциальной устойчивости этой модели (в случае отсутствия вращения). В конце главы рассмотрен частный случай изучаемой системы, полностью подчиняющийся результатам первой главы.

В третьей и четвертой главе исследуются модели Ильюшина вязко-

упругих тел, и модели Олдройта и Максвелла вязкоупругих жидкостей. Первая модель Ильюшина, названная гиперболической, описывается неполным интегро-дифференциальным уравнением второго порядка. Вторая модель, названная параболической, – это модель Кельвина-Фойгта вязкоупругого тела, она характеризуется наличием в уравнении дополнительного слагаемого, характеризующего скорость смещения частиц в теле. Заметим, что модели Олдройта и Максвелла для несжимаемых линейных и нелинейных вязкоупругих жидкостей исследовались ранее в работах Осколкова А.П. и его учеников. Перечисленные модели исследуются операторными методами. Во всех изученных случаях автор сводит задачу к исследованию дифференциально-операторного уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве и исследует соответствующий операторный блок. Показано, что все возникающие операторные блоки можно разделить на два типа со схожими спектральными свойствами. Первый тип операторных блоков возникает в модели вязкой релаксирующей жидкости, модели Кельвина-Фойгта и в модели Олдройта. Спектр этих блоков локализован в окрестности действительной оси. Таким образом, эти операторы близки в каком-то смысле к самосопряженным. В случаях, когда существенный спектр состоит из конечного числа точек, найдены достаточные условия p -базисности системы корневых элементов. Как следствие, получены разложения решений динамических задач. Второй тип операторных блоков возникает в модели идеальной релаксирующей жидкости, первой модели Ильюшина и в модели Максвелла вязкоупругой жидкости. Спектр этих блоков локализован в некоторой вертикальной полосе. В некоторых частных случаях система корневых элементов операторного блока образует p -базис в соответствующем пространстве. Для каждой модели единым методом решается вопрос о вынужденных движениях.

Пятая глава посвящена исследованию вопросов разрешимости задач Коши для линейных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Рассматриваются случаи, когда в укороченном уравнении второго порядка без интегрального члена имеется доминирующий оператор и этот оператор задан на постоянной области определения. Ядро интегрального слагаемого каждый раз подчинено главному оператору. Основным инструментом исследования служит теорема Като о разрешимости линейных эволюционных уравнений.

О достоверности полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Рассматриваемые интегро-дифференциальные уравнения и

системы трактуются в операторной форме и специальным образом сводятся к задачам Коши для дифференциально-операторных уравнений первого порядка в некоторых гильбертовых пространствах. Все результаты диссертационной работы формулируются в виде математических теорем и сопровождаются строгими доказательствами. В работе применяются методы функционального анализа, методы теории дифференциально-операторных уравнений и теория полугрупп операторов, спектральная теория операторов и операторных пучков.

Наибольшую **практическую значимость** имеют метод отыскания асимптотических формул, который может быть использован для численных расчетов в задачах о движениях вязкоупругих систем при внешних нагрузках специального вида; теоремы о равномерной экспоненциальной устойчивости полугрупп с генераторами специального вида и теоремы о спектре таких генераторов, которые могут быть использованы при исследовании устойчивости систем с памятью (для ядер экспоненциального типа); результаты исследования конкретных физических моделей; теоремы об однозначной разрешимости для изучаемых классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными переменными операторными коэффициентами, которые могут быть использованы при исследовании различных систем с эффектами памяти.

Оценивая работу в целом, можно сказать, что она представляет собой оригинальный математический труд, вносящий в исследование задач механики вязкоупругих сред существенный вклад. Методы, найденные автором, могут быть применены и в других задачах.

По диссертации имеются следующие замечания.

1. Отсутствуют некоторые конкретные ссылки, например, стр. 22. «... спектрального сдвига с применением теоремы Л.Герхарта..». Уместно было бы привести ссылку, в частности, Gearhart, Larry, Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space. Trans. Am. Math. Soc.236, 385–394(1978).
2. Текст диссертации написан весьма сухо.
3. Неоправданно использование местоимения «мы», в частности, на стр. 88, 112, 126, 134, 215. Лучше было бы использовать безличную форму изложения.

Вышесказанные замечания не влияют на положительную оценку диссертации и не ставят под сомнение результаты работы.

Результаты диссертации могут быть использованы в МГУ им. М.В. Ломоносова, Южном федеральном университете, Воронежском госу-

дарственном университете и ряде других научных учреждений, исследования которых связаны с проблемами динамики вязкоупругих сред.

Тема диссертации актуальна, а положения и выводы, содержащиеся в ней, являются новыми и полностью обоснованными. Результаты диссертации опубликованы в 13 статьях в журналах, включенных в перечень ведущих рецензируемых научных изданий ВАК.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Исследование соответствует специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

В силу изложенного выше, диссертационная работа Загоры Дмитрия Александровича «Спектральный анализ и асимптотика решений задач механики вязкоупругих сред» полностью соответствует требованиям ВАК «О присуждении ученых степеней», а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв подготовлен заведующим кафедрой Вычислительной математики и математической физики Института математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича, доктором физико-математических наук, профессором Жуковым Михаилом Юрьевичем (344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, Южный федеральный университет),

тел. +7(863) 2-975-111(214)

e-mail: myzhukov@sfnedu.ru

Отзыв о диссертации обсужден и утвержден на заседании кафедры вычислительной математики и математической физики института математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича (протокол № 3 от 14 апреля 2021 года)

Зав. каф. вычислительной математики
и математической физики, д.ф.-м.н. профессор

 М.Ю. Жуков



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Личную подпись <u>Жукова М.Ю.</u>
ЗАВЕРЯЮ:
Ведущий специалист по управлению персоналом <u>М.Ю. Жуков</u>
<u>20 апреля 2021 г.</u>