ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе **Бенараб Сарры «Теоремы об операторных неравенствах в исследовании краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной»**, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

В диссертационной работе Бенараб Сарры предлагается обобщение результатов об операторных неравенствах и о точках совпадения, известных для отображений частично упорядоченных пространств, на отображения, действующие из частично упорядоченного пространства в неупорядоченное множество. На этой основе в диссертации исследуются задача Коши, периодическая краевая задача и задачи управления для систем дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Основное внимание уделяется получению утверждений о дифференциальных неравенствах, позволяющих устанавливать существование решений, определять оценки решений, исследовать порядковую структуру решений. Предлагаемые в диссертации утверждения аналогичны теореме Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, которая широко используется в различных вопросах теории уравнений, разрешенных относительно старшей производной (в том числе, для исследования задач устойчивости, управления, оптимального управления, для получения методов приближенного решения). Дифференциальным неравенствам, их обобщениям и распространениям посвящено большое число публикаций. Утверждения, аналогичные теореме Чаплыгина, доказаны для многих классов функциональных уравнений: для интегральных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с запаздыванием, с авторегулируемым запаздыванием, с отклоняющимся аргументом, других функционально-дифференциальных уравнений, разностных и гибридных уравнений. Дифференциальные и функционально-дифференциальные неравенства для краевых задач исследовались в работах Н.В. Азбелева, С.А. Гусаренко, А.И. Домошницкого, М.А. Красносельского, В. Лакшмикантама, В.П. Максимова, А.А. Мартынюка, Дж.С. Панга, А.И. Перова, Л.Ф. Рахматуллиной, и мн. др. авторов. Однако, в этих исследованиях рассматривались уравнения в нормальной форме, разрешенные относительно старшей производной. Для уравнений неявного вида, не разрешенных относительно старшей производной, получение утверждений о дифференциальных неравенствах является **актуальной** и до сих пор практически не рассматривавшийся задачей.

Возможности для распространения теорем типа Чаплыгина на дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, открывают исследования упорядоченно накрывающих отображений. Операторные уравнения, порожденные действующими в частично упорядоченных пространствах накрывающими отображениями, исследованы в работах А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского, Т.Н. Фоменко. В последнее время начато применение полученных в этих работах результатов к неявным дифференциальным и интегральным уравнениям. В диссертационной работе Бенараб Сарры определение упорядоченного накрывания и утверждения об операторных уравнениях, основанные на этом понятии, распространены на случай, когда отображения действуют из частично упорядоченного пространства в множество, обладающее рефлексивным бинарным отношением. Более того, в диссертационной работе получены результаты об уравнениях, порожденных отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество, элементы которого не связаны каким-либо бинарным отношением. Эти результаты основаны на принципиально иной предложенной автором идее определения цепи последовательных приближений к решению уравнения. Полученные новые результаты об операторных уравнениях позволили получить в диссертации аналоги теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах для систем дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

В диссертации получены **следующие основные результаты:**

- условия существования и оценки точки совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество с бинарным отношением или в множество, на котором не задано бинарное отношение. Кроме того, получены условия существования минимального элемента в множестве точек совпадения таких отображений и условия устойчивости точек совпадения таких отображений;
- условия существования и оценки решений операторных уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество с бинарным отношением или в множество, на котором не задано бинарное отношение. Кроме того, получены условия существования минимального элемента в множестве решений таких уравнений;
- утверждения о существовании и оценках в пространстве измеримых функций решений системы функциональных уравнений, о существовании наименьшего решения;
- утверждения (аналогичные теореме Чаплыгина) о существовании и оценках решений задачи Коши или периодической краевой задачи для системы неявных дифференциальных уравнений и о существовании решения с наименьшим значением дифференциального оператора;
- утверждения (аналогичные теореме Чаплыгина) о существовании и оценках решений системы управления для неявных дифференциальных уравнений и о существовании решения с наименьшим значением дифференциального оператора.

Несомненный **теоретический и прикладной интерес** представляют и результаты диссертации об операторных уравнениях, и полученные на их основе результаты о задаче Коши, о периодической краевой задаче и о задачах управления для системы дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Представленные к защите результаты являются новыми, оригинальными. Все положения диссертации обоснованы и все представленные утверждения доказаны, установлена их связь с известными результатами. Демонстрируются примеры операторных, функциональных, дифференциальных уравнений, для исследования которых эффективны полученные в диссертации методы и результаты.

Основные положения диссертации опубликованы в 12 работах, из которых 7 работ опубликовано в журналах из перечня ВАК (в том числе 3 работы в журналах, входящих в системы цитирования Web of Science Core Collection и Scopus, и 2 работы в журнале, индексирующемся в Web of Science Russian Science Citation Index). Результаты диссертации были представлены автором в докладах на научных конференциях и семинарах.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Основные результаты вносят вклад в развитие теории дифференциальных уравнений и теории управления, в развитие методов теории операторов в частично упорядоченных пространствах. Результаты диссертации могут также использоваться при анализе физических, биологических процессов, технических систем.

Дадим краткое описание структуры и содержания диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, содержащих по два параграфа, разделенных на подпараграфы, заключения, списка обозначений и библиографического списка, содержащего 117 работ и изложена на 119 страницах.

Во введении содержится обзор современных исследований по тематике работы, сформулированы цель и задачи работы, приведено краткое описание диссертации, даны сведения о публикациях и выступлениях на научных семинарах и конференциях.

В главе 1 рассмотрены уравнения, порождаемые отображениями, определенными на частично упорядоченном пространстве. Рассмотрены две ситуации: когда на множестве значений отображений задано рефлексивное бинарное отношение и когда на этом множестве не задано никакое бинарное отношение. В первой ситуации автором предложено распространение понятий упорядоченного накрывания и монотонности отображений, и с использованием этих понятий получены условия существования и оценки точки совпадения двух отображений, условия существования минимального элемента в множестве точек совпадения, условия устойчивости точек совпадения, исследована задача об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающего отображения. Перечисленные результаты являются обобщением и распространением результатов А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского о накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств. Далее в главе 1 рассматриваются операторные уравнения общего вида, порождаемые отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество, элементы которого не связаны никаким отношением. Частными случаями рассматриваемого уравнения являются уравнения, определяющие неподвижную точку и точку совпадения, а также операторные уравнения с фиксированной правой частью. Получены условия существования и оценки решений этого общего уравнения, условия существования в множестве решений минимального элемента.

В главе 2 на основании результатов главы 1 предлагаются теоремы о неявных функциональных и дифференциальных неравенствах, аналогичные теореме Чаплыгина. В параграфе 2.1 доказана теорема о существовании и двусторонних оценках решений системы неявных функциональных уравнений в пространстве измеримых функций. Отметим, что функция, порождающая рассматриваемое уравнение, не предполагается удовлетворяющей условиям Каратеодори. Также показано, что среди решений существует наименьшее. Поскольку функции, задающие оценки решений, сами являются решениями соответствующей системы функциональных неравенств, это утверждение можно считать аналогом теоремы Чаплыгина.

В параграфе 2.2 рассмотрены системы дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. От задающих дифференциальные уравнения функций требуется измеримость по первому аргументу, монотонность и непрерывность справа по каждой компоненте второго и третьего векторных аргументов и непрерывность по четвертому аргументу. Таким образом, эти функции не обязаны удовлетворять условиям Каратеодори и не обязаны быть монотонными по последнему аргументу. Параграф 2.2 содержит три подпараграфа. В п. 2.2.1 для задачи Коши доказано утверждение о существовании решения, получена двусторонняя оценка производной решения, также показано, что в множестве решений существует решение с наименьшей производной. Из этих результатов выведено утверждение о существовании и оценках решений задачи Коши для скалярного уравнения n-го порядка, не разрешенного относительно старшей производной. Полученные утверждения аналогичны теореме Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. В следующем п. 2.2.2 для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений исследуется периодическая краевая задача. Получено утверждение о существовании решения, удовлетворяющего двусторонней оценке, установлено существование решения, для которого значение заданного линейного дифференциального оператора минимально. Оценки решений удовлетворяют соответствующим дифференциальным неравенствам и неравенствам в краевых условиях, то есть полученные утверждения являются аналогами теоремы Чаплыгина. В пункте 2.2.3 исследуются задачи управления, динамика которых описывается системой не разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений первого порядка, при заданных начальных или периодических краевых условиях. Множество допустимых управлений представляет собой отрезок в пространстве измеримых функций. Получены утверждения о существовании решений, удовлетворяющих двусторонним оценкам, о существовании решения, для которого значение некоторого линейного дифференциального оператора минимально.

В заключении приведен обзор результатов диссертации, предложены задачи для будущих исследований, решение которых может быть получено методами, основанными на полученных в диссертации утверждениях об операторных уравнениях.

Автореферат достаточно полно, подробно и точно отражает все основные положения диссертации.

К диссертации имеются **следующие замечания.**

1. В параграфе 2.1 получены условия существования наименьшей функции среди решений функционального уравнения, удовлетворяющих двусторонней оценке. Несложно заметить (если вместо отношения $\leq$ на множестве измеримых функций ввести отношение $\geq$), что из доказанного утверждения следует существование также и наибольшего решения. Этот факт заслуживает быть отмеченным в параграфе 2.1. Аналогичное замечание к приведенным в параграфе 2.2 утверждениям о существовании решения дифференциального уравнения, имеющего наименьшую производную. Следовало отметить, что из этого результата следует существование решения с наибольшей производной.
2. Для операторных уравнений в главе 1 получены условия существования минимального решения, но вопрос о существовании наименьшего решения не рассматривался. В то же время, для систем функциональных и дифференциальных уравнений в главе 2 получены условия существования наименьших решений. В этих утверждениях существенно используются свойства оператора Немыцкого. Тем не менее, остается вопрос: существует ли в условиях утверждений главы 1 наименьшее среди решений операторных уравнений. Возможно, автору следовало привести пример уравнения, в множестве решений которого есть минимальный элемент, но нет наименьшего. И тогда было бы интересно получить дополнительные условия, гарантирующие существование наименьшего решения.
3. Было бы интересно рассмотреть математические модели физических, биологических или технических процессов, которые описываются исследуемыми в диссертации системами уравнений.
4. Полученные в параграфе 2.1 результаты о системе функциональных уравнений в пространстве измеримых функций допускают распространение на функциональные уравнения с отклоняющимся аргументом. Такое распространение не представляется необходимым для данного диссертационного исследования, а данное замечание можно считать предложением для дальнейших исследований диссертанта.
5. Отметим несколько опечаток в тексте и в формулах. На стр. 4 отсутствует пробел между словами «множество возрастающих» и в формуле $x \in X$ множество обозначено строчной буквой. На стр. 7 следует переставить местами ссылки [111, 107]. На стр. 9 дважды слово «неупорядоченные» надо написать в единственном числе. На стр. 47 во второй фразе последнего абзаца доказательства теоремы 1.1.3 пропущена запятая между двумя формулами. Такая же опечатка на стр. 55, в строке 2 снизу. На стр. 58 в строке 12 сверху перепутаны символы в формуле. На стр. 77 в строке 6 сверху в формуле надо заменить w на 0. На стр. 88 в строке 7 снизу несколько опечаток в формуле (пропущены степени). На стр. 92 в строке 3 снизу дважды подряд написан предлог «по».

Замечания имеют рекомендательный характер, а отмеченные недостатки не уменьшают значимость работы и не снижают высокой ее оценки.

Вывод: Диссертация **Бенараб Сарры** представляет собой законченную научно-квалификационную работу, выполненную на актуальную тему. Автором предложены эффективные методы исследования вопросов существования решений и получения оценок решений функциональных уравнений, систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, основанные на авторских результатах об операторных уравнениях. В диссертации получены важные результаты по теории дифференциальных уравнений. Диссертация **Бенараб Сарры «Теоремы об операторных**

неравенствах в исследовании краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной» соответствует требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г., № 842, предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор **Бенараб Сарра** заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

28 марта 2022 года

Официальный оппонент:

Заслуженный работник высшей школы Российской Федерации,
заведующий кафедрой теории управления
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»,
доктор физико-математических наук,
профессор по кафедре теории управления,

Жабко Алексей Петрович

телефон +7 812 428-48-68
e-mail zhabko.apmath.spbu@mail.ru
Адрес: 394043, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9
СПбГУ, факультет ПМ–ПУ, кафедра теории управления