

## ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

Плышевой Светланы Петровны

**«Сценарии возникновения метастойчивых структур  
в квазилинейных уравнениях параболического типа»,**

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление

В диссертационной работе Плышевой С.П. основным предметом изучения выбрано исследование пространственно-временных структур в краевых задачах типа «реакция-диффузия». Эти структуры важны для описания явлений и процессов в ряде различных прикладных областей науки, например, радиофизики, механики, нелинейной оптики и теории горения. Стационарные пространственно неоднородные структуры представляют значительный интерес при исследовании процессов, описываемых нелинейными параболическими уравнениями. Среди этих уравнений особого внимания заслуживают задачи типа «реакция-диффузия», поэтому большой интерес представляет изучение классического уравнения Гинзбурга–Ландау, особенно в случае малых значений коэффициента диффузии. В частности, имеется необходимость в построении и исследовании пространственно-временных структур, характерных для такой задачи. Другой моделью, в которой требуется построение и исследование условий возникновения пространственно-временных структур, является задача, описывающая процесс изотермического разделения фаз концентрации, где неизвестная функция представляет собой концентрацию одной из компонент бинарной смеси. Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях с заданной концентрацией компонентов является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния. Для моделирования этого явления применяется уравнение Кана–Хилларда, изучение которого представляет значительный интерес. Таким образом, тема диссертационная работа С.П. Плышевой, посвящённой асимптотическому анализу качественного

поведения решений и выявлению пространственно-временных структур в задачах параболического типа, является актуальной.

### **Структура и содержание работы**

Диссертационная работа Плышевой С.П. объемом 140 страниц состоит из введения, трех глав, заключения, списка иллюстраций, списка литературы и приложения. Список литературы содержит 91 наименование, в работе имеется 29 рисунков.

Во введении обосновывается актуальность темы, характеризуется ее научная разработанность, формулируются цели и задачи исследования, объект и предмет исследования, научная новизна и положения, выносимые на защиту, а так же практическое значение полученных результатов и апробация работы.

В первой главе автор исследует уравнение Гинзбурга–Ландау с условиями типа Неймана на отрезке. На основе метода центральных многообразий доказаны теоремы о существовании пространственно неоднородных стационарных решений. Также на основе метода Галеркина проведен анализ формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений, рождающихся в результате бифуркации типа «вилка». В этой же главе исследованы сценарии возникновения метастабильных структур (медленно меняющихся решений), возникающих в результате седло-узловых бифуркаций.

Во второй главе методами, представленными в первой главе, выполнен бифуркационный анализ уравнения Кана–Хилларда с условиями типа Неймана на отрезке, описаны условия существования и форма решений этих уравнений в зависимости от бифуркационного параметра, а также проанализирована устойчивость рождающихся пространственно-неоднородных структур. Сценарии эволюции метастабильных структур с несколькими точками перехода изучались численно.

В третьей главе работы асимптотическими методами выполнено исследование локальной динамики краевой задачи Кана–Хилларда. В пункте 3.2 исследовано качественное поведение решений уравнения, которое

является модификацией (расширением) уравнения Кана–Хилларда, с периодическими условиями и условиями Неймана. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и исследованы фазовые перестройки, происходящие в данной динамической системе в однородном и неоднородном случаях. В пункте 3.3 для обобщенного уравнения Кана–Хилларда с периодическими краевыми условиями показано, что в некоторой области фазового пространства его локальная динамика описывается с помощью бифуркации Андронова–Хопфа. Построена нормальная форма, с помощью которой удастся определить характер ответвляющихся от однородного состояния равновесия решений. Найдены условия возникновения пространственно-неоднородного периодического решения и построена его асимптотика. В последней части главы рассматривается сингулярно возмущенный случай, для которого построен аналог нормальной формы и доказано утверждение о соответствии пространственно-неоднородных решений полученной бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и рассматриваемой краевой задачи.

В Заключение кратко суммируется итог работы, намечаются направления дальнейших исследований.

### **Научная новизна диссертации**

В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1. Выполнено оригинальное исследование динамики формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений при изменении бифуркационного параметра (уменьшении и отходе от бифуркационного значения в область надкритичности).
2. Получены и исследованы сценарии возникновения метаустойчивых структур в параболических задачах с условиями на отрезке.
3. Показано, что задача о динамике и устойчивости состояния равновесия расширенной модели уравнения Кана-Хилларда расслаивается на континуальное (зависящее от некоторого параметра) семейство более специализированных краевых задач.

Как правило, рассматриваемые критические случаи имеют размерность 1 или 2.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны как специалистам, работающим в области функционально-дифференциальных уравнений и функционального анализа, так и в исследованиях прикладного характера, особенно это касается исследования пространственно-неоднородных решений уравнения Кана–Хилларда.

**Достоверность** описанных результатов и выводов подтверждаются соответствующими аналитическими и численными **обоснованиями**. Выносимые на защиту положения являются новыми.

Отмечу некоторые **замечания**, возникшие при анализе диссертации.

1. Вторая и третья главы работы посвящены уравнению Кана–Хилларда, для которого следовало бы дать более широкую физическую постановку задачи для лучшего понимания смысла входящих переменных и параметров.
2. В главах 1 и 2, в соответствующих разделах приводятся бифуркационные значения параметра диффузии и собственные числа из спектра устойчивости задачи. Форма представления этих данных оставляет желать лучшего. Эти значения для лучшего обзора и анализа должны были быть помещены в таблицу и при необходимости вынесены в приложение.
3. В главе 3 выкладки в доказательствах теорем хотелось бы видеть более подробными.
4. Пространственно-неоднородные решения, полученные в третьей главе, стоило проиллюстрировать, тем более что для метастабильных структур, полученных в предыдущих главах, графики приведены.

Эти недостатки не являются критическими и не искажают общего благоприятного впечатления от работы.

Представленная Плышевской С.П. диссертация является самостоятельным, законченным, актуальным **научным исследованием**. Изложенные в работе результаты **опубликованы** в достаточном количестве печатных научных работ, в том числе в 7 статьях в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ. Основные положения исследования были представлены на большом количестве всероссийских научных и научно-технических **конференций**, докладывались на научных **семинарах**.

**Автореферат** достаточно полно отражает структуру, содержание и основные положения диссертации, дает представление о рассматриваемых задачах, используемых методах исследования и полученных результатах.

Считаю, что диссертация «Сценарии возникновения метаустойчивых структур в квазилинейных уравнениях параболического типа» **соответствует** всем требованиям положения «О порядке присуждения ученых степеней», а ее автор Плышевская Светлана Петровна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02, профессор, заведующий кафедрой математики физического факультета Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова,



Н.Н. Нефедов

29 октября 2019 г.

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, физический факультет, кафедра математики физического факультета Московского государственного

университета имени М.В.Ломоносова;  
E-mail: nefedov@phys.msu.ru; тел. +7 (495) 939-48-59

Подпись профессора Н.Н. Нефедова удостоверяю  
Декан физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Профессор



Н.Н.Сысоев