ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе Бенараб Сарры

«Теоремы об операторных неравенствах в исследовании краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Диссертационная работа Бенараб Сарры посвящена развитию одного из важнейших инструментов исследования дифференциальных уравнений – теорем сравнения типа теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. В диссертации предлагаются подобные утверждения и тематически близкие утверждения о существовании и оценках решений, о существовании минимальных и наименьших решений для систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Получены теоремы о дифференциальных неравенствах для задачи Коши, периодической краевой задачи и задачи управления. Доказанные в диссертации утверждения позволяют получать оценки решений, необходимые в исследованиях различных теоретических вопросов (устойчивость, задачи управления и оптимального управления, приближенные методы) и в приложениях к математическим моделям физических процессов, технических систем и др.

В классической теореме Чаплыгина рассматривается задача Коши для скалярного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Утверждается, что его любое решение оценивается решением соответствующего дифференциального неравенства. За более чем сто лет со времени доказательства этой теоремы ее распространению на системы уравнений, на краевые задачи, на другие классы функциональных уравнений, многочисленным приложениям утверждений о дифференциальных неравенствах к различным задачам теории дифференциальных, интегральных, функционально-дифференциальных уравнений было посвящено огромное число исследований и научных публикаций. Благодаря работам Н.В. Азбелева, Р. Беллмана, Л.М. Березанского, А.Б. Васильевой, А.И. Домошницкого, Е.С. Жуковского, М.А. Красносельского, Н.С. Курпеля, В. Лакшмикантама, С. Лила, Я.Д. Мамедова, Н.Н. Нефедова, А.И. Перова, Р. Рабчука, В. Уолтера, З.Б. Цалюка, Б.А. Шувара и др. авторов результаты об оценках решений, аналогичные теореме Чаплыгина, стали важным разделом современной теории дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старшей производной, и более общих функционально-дифференциальных уравнений. Несмотря на столь значительный интерес исследователей к дифференциальным неравенствам, в литературе практически отсутствуют неравенства для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. А как верно отмечено в диссертации и автореферате, утверждения аналогичные теореме Чаплыгина могли бы играть значительную роль в различных вопросах теории уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.

Распространение теорем сравнения типа теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах на уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, сопряжено со значительными трудностями. В частности, к таким уравнениям не удается применить известные результаты о неподвижных точках монотонных операторов. В недавних работах А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского были получены утверждения о точках совпадения двух отображений: накрывающего и монотонного, действующих из одного частично упорядоченного пространства. В следующих работах эти утверждения были распространены на операторные уравнения общего вида в частично упорядоченных пространствах, порождаемые накрывающими отображениями. В отличие от теорем о неподвижных точках, этот результат можно применять к дифференциальным уравнениям, и соответствующие исследования были начаты теми же авторами и их учениками. В диссертации Бенараб Сарры предложена и осуществлена идея рассмотрения операторных уравнений, порождаемых отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. Такие отображения, конечно же, не могут быть накрывающими или монотонными, поэтому автором предложены совершенно иные условия разрешимости рассматриваемых уравнений. Тем не менее, из доказанных в диссертации утверждений могут быть выведены результаты цитируемых работ о точках совпадения и решениях более общих операторных уравнений. Результаты диссертации об операторных уравнениях представляют самостоятельный теоретический интерес. В диссертации на основании этих результатов получены теоремы типа Чаплыгина для систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.

Сформулируем основные результаты диссертации.

1. Теоремы о точках совпадения и о решениях операторных уравнений:
   - условия существования и оценки точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество с бинарным отношением;
   - условия существования и оценки точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение;

– условия устойчивости точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение.
– условия существования и оценки решений операторных уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество с бинарным отношением;
– условия существования и оценки решений операторных уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество, на котором не задано бинарное отношение.

2. Теоремы сравнения типа теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах:
– утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений системы функциональных уравнений в пространстве измеримых функций;
– утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений задачи Коши для системы неявных дифференциальных уравнений;
– утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений периодической краевой задачи для системы неявных дифференциальных уравнений;
– утверждения (типа теоремы Чаплыгина) о существовании и оценках решений системы управления для неявных дифференциальных уравнений

Все представленные к защите результаты являются новыми, оригинальными. Определения и утверждения сформулированы логически точно и ясно. Все утверждения доказаны, имеются иллюстративные примеры, а также примеры, подтверждающие существенность основных достаточных условий.

Основные положения диссертации опубликованы в 12 работах, из которых 7 работ опубликовано в журналах из перечня ВАК (в том числе три работы в изданиях, входящих в системы цитирования Web of Science Core Collection и Scopus, и две работы в издании, индексирующемся в Web of Science Russian Science Citation Index). Результаты диссертации докладывались автором на научных конференциях и семинарах по тематике работы.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Основные результаты вносят вклад в развитие теории дифференциальных уравнений, в развитие методов теории операторов и функционального анализа. Результаты диссертации могут также использоваться при анализе математических моделей физических процессов, механических систем, задач управления.

Приведем краткий обзор структуры и содержания диссертации. Диссертация состоит из введения, основной части, изложенной в двух главах, содержащих по два параграфа, разделенные на пункты, заключения, списка обозначений и списка литературы.

Во введении содержится обзор современных результатов по тематике работы, обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, дано краткое описание диссертационного исследования, приведена информация о публикациях и выступлениях автора на научных семинарах и конференциях.

В главе 1 рассмотрены абстрактные уравнения с отображениями, определенными на частично упорядоченном пространстве X, со значениями в множестве Y, на котором либо задано рефлексивное бинарное отношение, либо вообще не определено никакое бинарное отношение. Таким образом, упорядоченность на Y не предполагается. В первом случае для отображений удается ввести аналог понятий упорядоченного накрывания и монотонности. Это позволило в параграфе 1.1 диссертации получить распространение теорем о точках совпадения, а в параграфе 1.2 – теорем об операторном уравнении вида $\Phi(x, x) = \tilde{y}$, где отображение $\Phi\colon X \times X \to Y$ по первому аргументу является упорядоченно накрывающим, а по второму – антитонным. Здесь также определяется понятие устойчивости решений операторного уравнения и получены условия такой устойчивости. Если на Y не определено бинарное отношение, автором предлагается оригинальный подход, позволяющий определить цепь последовательных приближений, нижняя граница которой оказывается минимальным решением рассматриваемого уравнения. С использованием такой идеи в параграфе 1.2 рассмотрено операторное уравнение $F(x, x) = G(x, x)$, порожденное отображениями $F, G\colon X \times X \to Y$. Это уравнение общего вида, его частными случаями являются уравнение неподвижной точки (если $X = Y$, $F(x, u) = x$, $G(x, \cdot) = const$), уравнение точки совпадения (если $F(x, \cdot) = const$, $G(x, \cdot) = const$), уравнение с фиксированной правой частью (если $G(\cdot, \cdot) = const = \tilde{y}$). В теореме 1.2.3 получены условия существования решения этого общего уравнения, дана его оценка, установлено существование минимального решения.

В главе 2 рассмотрены функциональные и дифференциальные уравнения. Эта глава также содержит два параграфа. В параграфе 2.1 доказана теорема о разрешимости и двусторонних оценках решений системы неявных функциональных уравнений в пространстве измеримых функций, аналогичная теореме Чаплыгина. Этот результат еще и близок известной лемме Филиппова об измеримом выборе в ситуации, когда многозначное отображение имеет значениями отрезок $[u(t), v(t)]$ в пространстве R^n (где функции u, v измеримы). Но в отличие от леммы Филиппова порождающая уравнение функция не должна удовлетворять условию Каратеодори: эта функция по первому аргументу измерима, а по каждой компоненте второго аргумента – непрерывна справа. Более того, при этих условиях установлено существование наименьшего среди решений, принадлежащих конусному отрезку $[u, v]$ пространства измеримых функций.

В параграфе 2.2 рассмотрены системы не разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений первого порядка и, как следствие, скалярные уравнения n-го порядка. Все полученные здесь результаты основаны на результатах главы 1 об уравнениях с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. Параграф 2.2 содержит три пункта. В пункте 2.2.1 исследуется задача Коши, для которой доказано утверждение о существовании решения, производная которого удовлетворяет двусторонней оценке. Уравнения в системе порождаются функциями $f_i: [0,1] \times R^n \times R^n \times R \to R, \quad i = 1, \dots, n$, измеримыми по первому аргументу, монотонными и непрерывными справа по каждой компоненте второго и третьего аргументов и непрерывными по последнему четвертому аргументу. Также доказано, что в множестве решений, удовлетворяющих полученным оценкам, существует решение с наименьшей производной. Таким образом, в принятых на функции $f_i, \quad i = 1, \dots, n,$ условиях уточняется известный результат о существовании нижнего решения, которое оказывается не только наименьшим, но и имеющим наименьшую производную. Из теоремы 2.2.1 выведено утверждение о существовании и оценках решений задачи Коши для скалярного уравнения n-го порядка, не разрешенного относительно старшей производной. В пункте 2.2.1 рассмотрена периодическая краевая задача, для которой доказано утверждение типа теоремы Чаплыгина о существовании решения, получена его двусторонняя оценка, и установлено существование решения, для которого значение некоторого линейного дифференциального оператора минимально. В доказательстве, для сведения периодической краевой задачи к операторному уравнению в частично упорядоченном пространстве измеримых функций, используется вспомогательная периодическая краевая задача, функция Грина которой знакопостоянна. В пункте 2.2.3 исследуются две задачи управления для системы не разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений первого порядка: с начальным условием и с периодическим условием. Для таких систем управления также доказаны утверждения о существовании решений, их двусторонних оценках, о существовании решения, для которого значение некоторого линейного дифференциального оператора минимально.

В заключении приведен краткий обзор основных результатов диссертации и намечены направления будущих исследований.

Автореферат полно, достоверно и достаточно подробно отражает все основные положения диссертации.

К диссертации имеются следующие замечания.

1. В пункте 2.2.2 получено распространение теоремы Чаплыгина на периодическую краевую задачу для системы дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Можно было бы как следствие этого результата получить условия существования и оценки периодических решений соответствующей системы. Исследование периодических решений важно, в том числе, для приложений к задачам физики, механики, техники.
2. Было бы интересно, наряду с периодической рассмотреть и другие важные для приложений краевые задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной, и прежде всего, апериодическую задачу $x(0) + x(1) = 0$.
3. В пункте 2.2.3 получен аналог теоремы Чаплыгина для управляемых систем. Этот результат позволяет устанавливать разрешимость и получать оценки решений. Значимость исследования только бы возросла, если бы автор несколько расширил границы исследования и рассмотрел возможность применения полученных утверждений для анализа задач управления, например, задачи о достижимости требуемых значений решения или о достижении экстремума функционала (возможно, на конкретных примерах, а не в общем случае).
4. В формуле Тейлора на стр. 88 опечатки: отсутствует множитель t^{m-1}, отсутствует степень у множителя $(t-s)$ под интегралом.

Указанные замечания не влияют на корректность и важность полученных результатов, не умаляют значимости диссертационного исследования.

Диссертация представляет собой законченную научно-квалификационную работу, выполненную на актуальную тему. В диссертации разработаны эффективные методы исследования задачи Коши, краевых задач, задач управления для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, основанные на результатах об операторных уравнениях с отображениями, определенными на частично упорядоченном пространстве. Автором получены важные результаты, являющиеся существенным вкладом в общую теорию дифференциальных уравнений.

Диссертация Бенараб Сарры «Теоремы об операторных неравенствах в исследовании краевых задач и задач управления для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной» соответствует требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г., № 842, предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, автор диссертации Бенараб Сарра заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры уравнений в частных
производных и теории вероятностей
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Воронежский государственный университет»

Провоторов Вячеслав Васильевич

25 марта 2022 г.

тел. 8 9507581514,

e-mail wwprov@mail.ru

Адрес: 394036, г. Воронеж, Университетская пл., 1,

ВГУ, математический факультет

Подпись профессора ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» В.В. Провоторова удостоверяю:

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Воронежский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)
Подпись Провоторова В.В.
Заверяю начальник отдела кадров
должность
О.И. Зверева 25 03 20 22
расшифровка подписи