

## ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертационной работе

Бенараб Сарры

**«Теоремы об операторных неравенствах в исследовании  
краевых задач и задач управления для дифференциальных  
уравнений, не разрешенных относительно производной»,**

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,

динамические системы и оптимальное управление

Диссертационная работа С. Бенараб посвящена получению теорем сравнения для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции. Если известно решение  $u$  дифференциального неравенства  $f(t, u, \dot{u}) \geq 0$ , такие теоремы гарантируют существование решения  $x$  дифференциального уравнения  $f(t, x, \dot{x}) = 0$ , удовлетворяющего неравенствам  $x(0) \leq u(0)$  и  $\dot{x}(t) \leq \dot{u}(t)$ ,  $t \geq 0$ . Первые утверждения такого типа для дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной, были получены более 100 лет назад С.А. Чаплыгиным. В классической теореме Чаплыгина рассматривалось скалярное уравнение с непрерывной правой частью. Утверждение теоремы Чаплыгина становится неверным для скалярных уравнений с правой частью, удовлетворяющей условиям Каратеодори, и для систем даже с непрерывной правой частью. Проблемам распространения теоремы Чаплыгина на задачу Коши, краевые задачи, задачи управления для систем дифференциальных уравнений, порождаемых функциями, удовлетворяющими условиям Каратеодори, посвящены многочисленные публикации. Также актуальными являются проблемы получения теорем сравнения для интегральных, функционально-дифференциальных уравнений. Результаты о дифференциальных и интегральных неравенствах подробно представлены в монографиях Н.В. Азбелева, Э. Беккенбаха и Р. Беллмана,

В. Воултера, В. Лакшмикантама и С. Лила, Я.Д. Мамедова, Р. Рабчука, Я. Сърски. Несмотря на обширность литературы, посвященной теоремам сравнения для дифференциальных уравнений, соответствующие результаты для неявных – не разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений практически не известны. Таким образом, тема диссертационной работы С. Бенараб актуальна и пока мало изучена. Востребованность таких результатов очевидна и в самой теории дифференциальных уравнений и в приложениях к математическим моделям существенно нелинейных процессов. Оценки решений, которые могут быть получены из теорем сравнения, также применимы в методах приближенного и численного решения соответствующих уравнений. В связи с этим напомним, что целью классической теоремы Чаплыгина было обоснование метода приближенного решения дифференциальных уравнений и получение гарантированных оценок приближений.

В многочисленных работах по неравенствам типа Чаплыгина для дифференциальных, интегральных, функционально-дифференциальных уравнений как правило используются результаты о неподвижных точках монотонных операторов в частично упорядоченных пространствах. Однако применение таких результатов к неявным дифференциальным уравнениям затруднено и, в ряде случаев, невозможно, если уравнение не удастся разрешить относительно производной. Эффективным инструментом исследования неявных уравнений могут стать результаты об операторных уравнениях с упорядоченно накрывающими отображениями. Понятие упорядоченного накрывания было предложено в работе [A.V. Arutyunov., E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, 179:1 (2015), 13-33] в связи с задачей о точках совпадения отображений частично упорядоченных пространств. В следующих работах этих авторов были исследованы задачи о возмущениях упорядоченно накрывающих отображений, установлена связь между результатами о накрывании в частично упорядоченных и в метрических пространствах, предложены ос-

нованные на упорядоченном накрывании методы исследования неявных дифференциальных и интегральных уравнений.

В диссертации предлагается распространение результатов о точках совпадения и о возмущениях накрывающих отображений на отображения, действующие из частично упорядоченного пространства в неупорядоченное множество, и на этой основе разрабатываются методы исследования задачи Коши, краевых задач и систем управления для неявных дифференциальных уравнений. Основными результатами диссертационной работы С. Бенараб являются:

утверждения о существовании, оценках устойчивости точек совпадения двух отображений, действующих из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным бинарным отношением и в множество, на котором не задано бинарное отношение;

утверждения о существовании и оценках решений операторных уравнений с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным бинарным отношением и в множество, на котором не задано бинарное отношение;

утверждения о существовании и оценках решений системы функциональных уравнений в пространстве измеримых функций;

утверждения (типа теоремы сравнения Чаплыгина) о существовании и оценках решений задачи Коши, периодической краевой задачи и задач управления для системы неявных дифференциальных уравнений.

Полученные С. Бенараб результаты являются новыми, они полностью представлены в 12 статьях, из которых 7 – в научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов кандидатской диссертации, апробированы на конференциях, школах молодых ученых, научных семинарах. Результаты имеют значение для теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории управления. Используемые в диссертации методы и подходы могут быть использованы в исследовании интегральных, интегро-дифференциальных уравнений, и могут быть распространены на дифференциальные и интегральные включения. Результаты о точках сов-

падения и об операторных уравнениях с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество, представляют интерес для нелинейного анализа.

В целом диссертационная работа С. Бенараб является самостоятельным оригинальным исследованием, она отвечает всем требованиям положения «О порядке присуждения ученых степеней». Соискатель проявил при работе над диссертацией самостоятельность, настойчивость, научную интуицию, трудолюбие. Полученные результаты свидетельствуют о квалификации и научной зрелости автора. Считаю, что Бенараб Сарра заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01, доцент, ведущий научный сотрудник научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования». ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Жуковский Сергей Евгеньевич

392000, Тамбов, ул. Интернациональная, 33, ТГУ имени Г.Р. Державина, научно-образовательный центр «Фундаментальные математические исследования», E-mail: [s-e-zhuk@yandex.ru](mailto:s-e-zhuk@yandex.ru); тел. +7 915 402 2132

