

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Челябинского
Государственного университета



С.В. Таскаев

14040

О Т З Ы В

ведущей организации о диссертации Тахира Халида Мизхира Тахира
«Теоремы сравнения краевых задач для
функционально-дифференциальных уравнений и их применение к
исследованию вопросов существования и оценок решений»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 —
дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление.

Актуальность темы диссертации

Диссертация Тахира Х.М.Т. посвящена задачам разрешимости и оценкам решений задачи Коши и краевых задач для линейных и нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Отметим, что теория функционально-дифференциальных уравнений является не только современным и активно развивающимся разделом общей теории дифференциальных уравнений, но также и ее широким обобщением, позволяющим с единых позиций рассматривать многие классы дифференциальных уравнений. К таким уравнениям, в частности, относятся дифференциальные уравнения с запаздывающим и отклоняющимся аргументом, уравнения нейтрального типа, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения с импульсными воздействиями и многие другие. Основой теории является представление о функционально-дифференциальном уравнении как об операторном уравнении в пространстве абсолютно непрерывных функций. Поэтому она позволяет применять мощный и эффективный аппарат современного функционального анализа. С основными положениями теории функционально-дифференциальных уравнений можно ознакомиться по монографиям Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной (1991, 2000, 2002 гг.), Н.В. Азбелева, П.М. Симонова (2001 г.).

Необходимо отметить вклад в эту теорию исследований Р. Беллмана, Е.С. Жуковского, А.М. Зверкина, В.Б. Колмановского, Н.Н. Красовского, А.Д. Мышкиса, С.Б. Норкина, В.Р. Носова, В.В. Обуховского, А.Л. Скубачевского, С.Н. Шиманова, Л.Э. Эльсгольца.

Важнейшими вопросами теории функционально-дифференциальных уравнений, наряду с вопросами разрешимости задачи Коши и краевых задач, являются вопросы об оценках решений линейных функционально-дифференциальных уравнений. Фундаментальные результаты по данной тематике получены Н.В. Азбелевым, функционально-дифференциальные неравенства исследовались участниками Пермского семинара, условия применимости теоремы Чаплыгина к линейным краевым задачам получены Н.В. Азбелевым и А.И. Домошницким.

Связь утверждений об оценках решений линейных функционально-дифференциальных уравнений, аналогичных теореме Чаплыгина о дифференциальном неравенстве, с положительностью функции Коши и фундаментального решения рассматриваются также и в диссертации Тахира Х. М. Т. Здесь получены новые теоремы сравнения для задачи Коши и краевых задач, исследуются такие свойства, как однозначная разрешимость, справедливость неравенства типа Чаплыгина, неотрицательность решения. Предлагаются оценки на разность между соответствующими линейными и нелинейными операторами, при которых нелинейное уравнение сохраняет требуемые свойства линейного уравнения: разрешимости, однозначной разрешимости и положительной разрешимости.

Оценка содержания диссертации и ее завершенность

Целью диссертации является разработка методов исследования функционально-дифференциальных уравнений, основанных на их сравнении с эталонными уравнениями, обладающими требуемыми свойствами. С помощью этих методов автору удалось получить оценки решений, а также условия существования и единственности решений задачи Коши и краевых задач для различных функционально-дифференциальных уравнений. Диссертация состоит из введения, двух глав, 6 параграфов, разделенных на пункты, заключения и списка литературы, включающего 71 наименование. Полный объем диссертации — 124 страницы.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, дается общая характеристика рассматриваемого в диссертации круга вопросов,

приведен обзор работ предшественников по данной проблеме, определена цель работы и сформулированы основные полученные результаты. Также здесь приведен список конференций и семинаров, на которых докладывались результаты диссертации.

Первая глава, состоящая из четырех параграфов, посвящена исследованию линейных функционально-дифференциальных уравнений. В §1.1 сначала приведены необходимые сведения из монографии Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной о линейном функционально-дифференциальном уравнении общего вида. Далее здесь получены два основных утверждения: теорема сравнения задач Коши и теорема сравнения краевых задач. Для конкретных задач эти утверждения позволяют получать условия однозначной разрешимости, неотрицательности функции Коши, функции Грина и фундаментального решения соответствующего однородного уравнения. Чтобы применить полученные результаты, автор выбирает «эталонную» краевую задачу, обладающую соответствующими свойствами и по приведенному правилу строит некоторый новый оператор. Если спектральный радиус данного оператора меньше единицы, то рассматриваемая задача однозначно разрешима. Чтобы получить условия неотрицательности функции Грина и фундаментального решения, автор определяет специальный оператор и проверяет его положительность. В параграфах 1.2–1.4 рассматривается применение полученных утверждений к конкретным функционально-дифференциальным уравнениям с постоянными и переменными коэффициентами. Получены условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи, определена ее функция Грина, а также условия положительности функции Коши и функции Грина.

Во второй главе исследуются нелинейные функционально-дифференциальные уравнения вида

$$\mathcal{L}x = Fx, \quad (1)$$

где $\mathcal{L} : AC \rightarrow L$ — линейный оператор, $F : AC \rightarrow L$ — нелинейный оператор. В § 2.1 исследуется задача Коши для уравнения (1). Используется сравнение нелинейного уравнения с «эталонным» эволюционным линейным уравнением $\mathcal{L}x = y$, для которого задача Коши предполагается однозначно разрешимой. Автор доказывает, что если нелинейное уравнение отличается от линейного на непрерывный вольтерров оператор \tilde{F} , то исследуемая задача Коши разрешима и любое локальное решение про-

должаемо до глобального или предельно продолженного решения. Если оператор \tilde{F} является вольтеррово q -липшицевым, а функция Коши «эталонного» уравнения удовлетворяет неравенству $|\mathcal{C}(t, s)| \leq 1/q$, то задача Коши для нелинейного уравнения имеет единственное глобальное или предельно продолженное решение, и всякое локальное решение является его частью. Показано, что при дополнительном предположении о равномерной вольтерровой q -липшицевости оператора \tilde{F} задача Коши имеет единственное глобальное решение и всякое локальное решение является его частью. Проводится исследование задачи Коши в случае, когда рассматриваемое уравнение отличается от «эталонного» линейного уравнения на вольтерров монотонный оператор \tilde{F} . В этом случае, если для задачи Коши линейного уравнения справедливо функционально-дифференциальное неравенство типа Чаплыгина (то есть его функция Коши неотрицательна), то и для исследуемого нелинейного уравнения также имеет место соответствующее функционально-дифференциальное неравенство типа Чаплыгина. Полученные результаты о задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения общего вида применяются к некоторым конкретным уравнениям вида (1).

В целом диссертация Тахира Х. М. Т. является вполне завершенным исследованием по ряду направлений, касающихся вопросов разрешимости и оценок решений задачи Коши и краевых задач для линейных и нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Все основные утверждения сформулированы в виде теорем и строго доказаны. Диссертантом рассмотрены вопросы разрешимости, однозначной разрешимости, справедливости неравенств типа Чаплыгина, неотрицательности решения, а также оценивания решений задачи Коши и краевых задач для линейных и нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. Основным методом исследования является метод сравнения исследуемой задачи с некоторой «эталонной задачей», обладающей требуемыми свойствами.

Несомненными достоинствами работы Тахира Х. М. Т. являются следующие:

1. Доказаны теоремы сравнения линейных функционально-дифференциальных уравнений с начальными и краевыми условиями.

2. Получены условия неотрицательности функции Коши и функции Грина двухточечной краевой задачи «эталонных» уравнений с запаздыванием и нейтрального типа с постоянным коэффициентом p .

3. При помощи сравнения с «эталонным» линейным уравнением получены условия разрешимости, однозначной разрешимости и даны оценки решений задачи Коши для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений общего вида.

4. Получены условия разрешимости, однозначной разрешимости и даны оценки решений двухточечной краевой задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

Результаты работы Тахира Х. М. Т. и примененные методы могут быть использованы при проведении исследований по теории функционально-дифференциальных уравнений и при чтении специальных курсов для студентов и магистров в Институте математики и механики УрО РАН, в Московском, Владимирском, Воронежском, Пермском, Тамбовском, Челябинском и Ярославском государственных университетах.

Критический анализ диссертации

К диссертации имеется несколько незначительных замечаний.

1. Термин «функционально-дифференциальное уравнение» в отношении операторного уравнения (1.1.1) с линейным ограниченным оператором \mathcal{L} никак не комментируется. Читателю приходится либо на веру принимать тот факт, что это, действительно, некое функционально-дифференциальное уравнение, либо считать, что функционально-дифференциальным называется любое уравнение вида (1.1.1), задача Коши $x(0) = \alpha$ для которого однозначно разрешима, а ее решение представимо в виде (1.1.2), как в условиях теоремы 1.1.1. Кстати, такое требование к линейному уравнению (1.1.1) используется на протяжении всей диссертации, однако в явном виде формулируется только в первых двух теоремах.

2. В диссертацию можно было бы добавить некоторые определения. Например, не приведено определение решения линейного функционально-дифференциального уравнения (это уместно было бы сделать на с. 15). Для нелинейного уравнения определение решения дано (с. 62). Далее, в теореме 1.1.3 (с. 24) и ее следствиях используется понятие спектрального радиуса оператора. Думаю, что уместно было бы привести некоторые

сведения о спектре оператора и его спектральном радиусе, например, перед теоремой 1.1.3.

3. Во второй главе доказан ряд очень интересных теорем, но, на мой взгляд, недостает конкретных примеров функций f , определяющих нелинейный оператор в пп. 2.1.3 и 2.2.3.

4. В небольшом количестве имеются огрехи в оформлении работы. На с. 8 диссертации, строка 2 снизу, (и на с. 13 в автореферате, строка 4 снизу) вместо «применяется» необходимо написать «применяются». В некоторых формулах скобки несоразмерны содержимому, например, во второй строке на с. 100, в последних двух строках на с. 101. В списке литературы диссертации (работа [29]) и автореферата (работа [5]) неправильно указаны страницы — написано С. 82–85, должно быть С. 75–81. В автореферате на с. 7, строка 3 снизу, вместо $f(s)$ надо написать $y(s)$. В автореферате на с. 10, строки 1 и 2 снизу, и на с. 11, строка 3 сверху, во всех суммах верхний предел суммирования $k - 1$ надо поменять на n , а индекс суммирования n заменить другим символом.

Приведенные замечания не снижают общего положительного впечатления от диссертационной работы.

Выводы

Диссертация Тахира Х. М. Т. посвящена актуальным задачам исследования разрешимости и оценок решений задачи Коши и краевых задач для различных функционально-дифференциальных уравнений.

Основные результаты диссертации оформлены в виде теорем, доказательства которых отвечают современным требованиям математической строгости. Теоретические результаты иллюстрируются многочисленными примерами. Работа обладает внутренним единством и завершенностью. Оформление диссертации отвечает современным требованиям. Результаты диссертации опубликованы в полном объеме в статьях в ведущих научных изданиях.

Автореферат диссертации полностью отражает ее содержание.

Диссертация Тахира Х. М. Т. является законченным исследованием, содержащим ряд глубоких результатов по теории функционально-дифференциальных уравнений.

Считаю, что диссертация Тахира Халида Мизхира Тахира «Теоремы сравнения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений и их применение к исследованию вопросов существования и оце-

нок решений» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а Тахир Х. М. Т. вполне заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

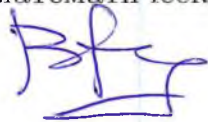
Отзыв утвержден на заседании кафедры математического анализа Челябинского государственного университета, протокол № 8 от 20.03.2020.

Проректор по учебной работе

Челябинского государственного университета,

доктор физико-математических наук,

профессор



Владимир Евгеньевич Федоров,

20.03.2020

454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129,

ФГБОУ ВО «ЧелГУ», учебный корпус 1, каб. 232, тел. (351)799-71-06.

E-mail: uch_rabota@csu.ru, kar@csu.ru

