На правах рукописи

Петренко Ирина Анатольевна

Оптимизация распределенного воздействия на стационарный поток

Специальность: 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Владимир — 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Давыдов Алексей Александрович
Официальные оппоненты:	Бортаковский Александр Сергеевич доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математическая кибернетика» МАИ Канатников Анатолий Николаевич доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана
Ведущая организация:	ИПС им. А.К. Айламазяна РАН

Защита состоится 29 декабря 2014 г. в 17 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета ДМ 212.025.08 при Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, д. 11, корп. 7 ВлГУ, ауд. 237. Факс (4922) 53-25-75, 33-13-91; e-mail: oid@vlsu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте www.vlsu.ru Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, с авторефератом – на сайтах http://vak2.ed.gov.ru/catalogue/ и http://diss.vlsu.ru

Автореферат разослан «____» ноября 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета ДМ 212.025.08 Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена задачам моделирования и оптимального управления системами, описываемыми уравнениями с диффузией, течением и реакцией, возникающими в различных областях науки и техники. Круг таких систем достаточно обширен. Так, в работе Доменико и Шварца[1] исследуется модель переноса загрязняющего вещества в потоке, приведены аналитические и численные подходы к решению поставленных модельных уравнений, а также примеры приложений построенных численных решений. В работе Холмса и др.[2] модель Фишера, которая представляет собой уравнение диффузии-реакции с нелинейной (логистической) функцией роста, изучается для моделирования популяционной экологии, в которой организмы предполагаются движущимися согласно броуновскому закону. В этой же работе рассмотрено уравнение с диффузией и линейной функцией роста, представляющее собой модель KISS изменения размера ареала питания фитопланктона, необходимого для поддержания его цветения. Для обеих моделей построены фазовые траектории и выявлено их асимптотическое поведение при больших временах. Ранее изучались также и подобные модели систем с управлением. Попытки численной оптимизации таких управляемых систем были сделаны достаточно давно[3] и вполне успешно. Также активное развитие получили методы симуляции поведения системы при тех или иных параметрах для выработки системы ограничений и методов управления для достижения поставленных целей[4].

В настоящей работе проводится качественный анализ таких моделей и в ряде случаев строится аналитическое решение задач оптимального управления. В конкретных прикладных задачах практическое применение методов теории оптимального управления[5] наталкивается на ряд трудностей. Например, в случае минимаксного функционала встает вопрос о существовании оптимального управления и только после этого – о его структуре.

---

[1]Domenico P.A., Schwartz F.W. Physical and Chemical Hydrogeology.- Wiley, 1997

[2]Partial differential equations in ecology: Spatial interactions and population dynamics / E.E Holmes, M.A Lewis, J.E Banks, R.R Veit // Ecology.- 1994.- Vol. 75(1).- P. 17-29.

[3]Beck M.B. Real-time Control of Water Quality and Quantity.- IIASA, 1978; Bogobowicz A., Soko lowski J. Modelling and control of water quality in a river section // System Modelling and Optimization.- 1984.- Vol. 59.- P. 403-414.

[4]Beck M.B., Latten A., Tong R.M. Modelling and Operational Control of the Activated Sludge Process in Wastewater Treatment.- IIASA, 1978; Loucks D.P., van Beek E. Water Resources Systems Planning and Management. An Introduction to Methods, Models and Applications.- UNESCO Publishing, 2005.

[5]Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач.- М.: Наука, 1974; Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения.- Новосибирск: Научная книга, 1999; Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson R.G. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints // Society for Industrial and Applied Mathematics.- 1995.- Vol. 37.- P. 181-218.

Более сложными оказываются системы, описываемые уравнениями в многомерном пространстве с диффузией, течением и реакцией. В этом случае нами рассмотрена модель, имеющая распределенное на некотором конечном участке управление, для которой доказано существование оптимального решения в случаях интегрального и минимаксного функционалов при наличии ограничений (технологических и/или ёмкостных) как на управляющее воздействие, так и на параметры среды.

Цель работы. Целью данной работы является анализ и решение задач оптимизации для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с диффузией, течением и реакцией, включающей распределенное управление.

Методы исследований. Исследования проводились с использованием методов теории дифференциальных уравнений, теории оптимального управления и функционального анализа.

Научная новизна. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- получена структура оптимального управления для задач в одномерном фазовом пространстве, описываемых дифференциальным уравнением с течением, линейным членом реакции и минимаксным либо интегральным функционалом в случаях наличия либо отсутствия диффузии;
- получена структура оптимального управления для задачи, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением с диффузией, течением и билинейным членом реакции с минимаксным либо интегральным функционалом;
- для рассматриваемого типа задач с многомерным фазовым пространством доказана теорема существования оптимального решения.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Все основные результаты в ней формулируются в виде математических теорем и сопровождаются строгими доказательствами. Практическая ценность работы состоит в возможности приложения полученных результатов к решению оптимизационных задач, возникающих при моделировании широкого класса экологических и технологических процессов. Результаты работы будут полезны при чтении специальных курсов для студентов математических, естественно-научных и инженерных специальностей университетов.

Основные результаты, выносимые на защиту, получены в рамках выполнения исследовательских проектов по различным программам и грантам. В том числе:

- проект 7774 программы «УМНИК» Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере;
- проекты 10-01-91004-АНФ_а, 11-01-97517-р_центр_а Российского фонда фундаментальных исследований;
- гранты НШ-709.2008.1, НШ 8462.2010.1, НШ-4850.2012.1 Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации;
- проекты №2.1.1/5568, 2.1.1/12115 Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы»;
- стипендия Президента Российской Федерации для обучения за рубежом студентов и аспирантов российских вузов в 2010/2011 учебном году.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на многочисленных научных семинарах и международных конференциях. Среди которых

- Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2007, 2009, 2011, 2013);
- Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Льва Семёновича Понтрягина (Москва, 2008);
- IV межотраслевая научно-техническая конференция аспирантов и молодых ученых с международным участием «Вооружение. Технология. Безопасность. Управление.» (Ковров, 2009);
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010, 2012);
- Международная конференция «Управление и оптимизация неголономных систем»(Переславль-Залесский, 2011);
- семинар «Нелинейный анализ и его приложения»(ВлГУ, Владимир, 2009, 2010, 2011);
- семинар «Функциональный анализ и дифференциальные уравнения», посвященном 70-летию проф. В.В. Жикова (ВГГУ, Владимир, 2010);
- семинар программы Динамические системы Международного института прикладного системного анализа (Австрия, Лаксенбург, 2009);

- Workshop «Renewable resources, Sustainability, and Search» (Германия, Гейдельберг, 2013).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных изданиях [1-12]. Статьи [1] и [11] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов кандидатской диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, и списка литературы. Полный объем диссертации **74** страницы текста с **21** рисунком. Список литературы содержит **41** наименование.

Краткое изложение содержания работы

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приведен краткий обзор работ предшественников по данной проблеме, даны постановки задач и сформулированы основные полученные результаты.

В **первой главе** рассмотрена задача оптимизации распределенного воздействия на однородную сплошную среду, движущуюся с постоянной скоростью. Под воздействием мы понимаем или насыщение среды некоторым веществом (например, выброс загрязнения) или отбор какой-либо ее компоненты (например, фильтрация фитопланктона аквакультурой) с помощью размещения имеющегося ресурса в заданной ограниченной области D потока с гладкой или кусочно-гладкой границей.

Обозначив через w концентрацию изучаемого вещества в потоке, а через v – постоянную положительную скорость течения, которую считаем направленной вдоль оси Ox_1, получим следующее уравнение изменения этой концентрации

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x_1} = a^2 \Delta w - \gamma(w - Y) - u_1 w + u_2.$$

Здесь t – время, a^2 – коэффициент диффузии, Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным x, $x = (x_1, ..., x_d)$, γ – коэффициент, характеризующий скорость естественного восстановления фонового значения концентрации Y, а u_1 и u_2 – измеримые компоненты вектора управления u, характеризующие распределённые ресурсы отбора и выброса вещества, соответственно.

Предполагается, что среда совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^d$, где и контролируются ее показатели.

Начальная концентрация вещества в потоке задана функцией

$$w(x,0) = w_0(x),$$

у которой отклонение от фонового (постоянного) значения Y, $Y \geqslant 0$, предполагается ограниченным в норме $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Поставленная задача заменой $\tilde{w} = w - Y$ (и, соответственно, $\tilde{w}_0 = w_0 - Y$, для начальной концентрации) сводится к задаче

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x_1} = a^2 \Delta w - (\gamma + u_1)w + u_2 - u_1 Y, \tag{1}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \tag{2}$$

где знак «тильда» у новой переменной опущен.

Компоненты управления мы предполагаем зависящими лишь от пространственной переменной x, измеримыми и ограниченными, то есть такими, что выполнены неравенства

$$0 \leqslant u_1(x) \leqslant \bar{u}_1, \quad 0 \leqslant u_2(x) \leqslant \bar{u}_2. \tag{3}$$

Такие управления будем называть *допустимыми*.

Теорема (см. теорему 1.1 диссертации)**.** *Задача Коши (1), (2) однозначно разрешима для любого допустимого управления и любой начальной функции $w_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Более того, при $t \to \infty$ её решение стабилизируется на решении y соответствующего стационарного уравнения*

$$a^2 \Delta y - v\frac{\partial y}{\partial x_1} - (\gamma + u_1)y = -u_2 + u_1 Y. \tag{4}$$

Это решение принадлежит пространству $W_2^1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и удовлетворяет неравенствам $\|y\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ и $\|y\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \max\left\{\frac{1}{\gamma}\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}, 1\right\}$ с некоторой константой C, где $f = -u_2 + u_1 Y$.

В силу данной теоремы разумно решать оптимизационные задачи для предельного распределения вещества в среде, удовлетворяющего эллиптическому уравнению (4). Это распределение мы и будем понимать всюду далее под состоянием среды. Для него формулируются две оптимизационные задачи, отличающиеся по своему прикладному содержанию.

Задача $\mathbf{P_1}$: Найти управляющее воздействие с заданной L_1-нормой (ёмкостью)

$$C_i = \int\limits_D u_i dx \left(= \int\limits_{\mathbb{R}^d} u_i dx \right), \quad i = 1, 2,$$

удовлетворяющей (технологическому) ограничению по размещению управления

$$C_i \leqslant \bar{u}_i \int\limits_D dx, \quad i = 1, 2,$$

вытекающему из (3), для которого максимальное значение абсолютной величины соответствующего решения y будет минимальным. Это приводит к следующей задаче оптимизации

$$I(u, y) \to \min,$$

где

$$I(u, y) = \max_{x \in \mathbb{R}^d} |y(x)|.$$

Прикладной смысл данной задачи заключается в минимизации максимума изменения естественного состояния среды (показателя y) за счет распределения заданных ёмкостей выброса C_2 и отбора C_1.

Задача $\mathbf{P_2}$: Во этой задаче разрешены лишь управляющие воздействия, для которых соответствующее решение y отклоняется от нуля не более, чем на заданное значение $\bar{y} \geqslant 0$, то есть

$$|y| \leqslant \bar{y}.$$

Целью же оптимизации является максимизация функционала

$$J(u, y) = k_1 \|u_1\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} + k_2 \|u_2\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_D (k_1 u_1 + k_2 u_2)\, dx.$$

При заданных значениях констант k_1 и k_2 (каждая из которых, вообще говоря, может быть и положительной – в случае, если соответствующая компонента управления приносит прибыль – и неположительной – в противном случае) получаем следующую задачу оптимизации

$$J(u, y) \to \max.$$

Прикладной смысл этой задачи следующий: необходимо максимизировать доход – результат выброса и отбора, – при наличии ограничения на предельную допустимую концентрацию исследуемого вещества в потоке. При этом доход является линейной функцией от объёма управления, заданного нормой в пространстве $L_1(\mathbb{R}^d)$, а знаки коэффициентов k_1 и k_2 отвечают за то, приносят соответственно отбор и выброс доход или расходы. В частности, известны примеры, когда в прикладных задачах один из этих коэффициентов положителен, а другой – нет.

Управления, удовлетворяющие ограничениям той или иной задачи, будем называть *допустимыми для* этой *задачи.*

Основным результатом первой главы является следующая

Теорема (см. теоремы 1.2 и 1.3 диссертации)**.** *Для каждой из задач P_1 и P_2 существует допустимое управление, доставляющее ее решение.*

Во **второй главе** для задач P_1 и P_2 дано аналитическое решение в одномерном случае при отсутствии отбора, то есть при $\bar{u}_1 = C_1 = k_1 = 0$. При этом в качестве области D выбран отрезок $[x_1, x_2]$, а уравнение имеет вид

$$a^2 y'' - vy' - \gamma y = -u.$$

Вне интервала $[x_1, x_2]$ это уравнение является однородным и его решение имеет вид

$$y(x) = A_1 e^{\varphi_1 x} + A_2 e^{\varphi_2 x},$$

где A_1 и A_2 – произвольные постоянные, $\varphi_{1,2}$ – корни характеристического уравнения:

$$\varphi_{1,2} = \frac{v}{2a^2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4a^4} + \frac{\gamma}{a^2}},$$

которые в силу положительности v и γ имеют разные знаки. Мы упорядочим их следующим образом:

$$\varphi_1 < 0 < \varphi_2.$$

При таком порядке, в силу ограниченности решения на бесконечности и знаков собственных чисел, получим

$$y(x) = \begin{cases} A_2 e^{\varphi_2 x}, & x \leqslant x_1, \\ A_1 e^{\varphi_1 x}, & x \geqslant x_2, \end{cases}$$

и, следовательно, выполнены равенства

$$y'(x_1) = \varphi_2 y(x_1), \quad y'(x_2) = \varphi_1 y(x_2).$$

Для задач P_1 и P_2 найдена структура оптимального решения в классах постоянных, измеримых и обобщенных управлений при наличии либо отсутствии диффузии.

Для задачи P_1 постоянное управление определяется однозначно и имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \frac{C}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

В частности, решение задачи P_1 в классе постоянных управлений существует лишь при $C \leqslant 2\bar{u}b$ и совпадает с единственным допустимым управлением из этого класса.

Теорема (см. теорему 2.1 диссертации)**.** *В классе постоянных управлений оптимальным в задаче P_2 является управление, задаваемое формулой*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \mathrm{u}, & x \in [x_1, x_2], \end{cases} \tag{5}$$

с u *равным* $\frac{\bar{y}\gamma}{1 - e^{\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1-\varphi_2}(x_1-x_2)}}$, *если* $\bar{y} \leqslant \frac{\bar{u}}{\gamma}\left(1 - e^{\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1-\varphi_2}(x_1-x_2)}\right)$, *и* $\bar{u}$ *в противном случае.*

Если постоянное управление с максимальной плотностью $\bar{u}$ недопустимо, то значение функционала можно увеличить, отказавшись от постоянства управления.

Теорема (см. теорему 2.4 диссертации)**.** *Оптимальным в задаче P_1 является управление*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \bar{u}, & x \in [x_1, \alpha) \cup (\beta, x_2], \\ \gamma\bar{y}, & x \in [\alpha, \beta], \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\alpha = x_1 + \frac{1}{\varphi_1}\ln\left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right), \quad \beta = x_2 + \frac{1}{\varphi_2}\ln\left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right), \tag{7}$$

а величина $\bar{y}$, задающая оптимальное значение функционала этой задачи, вычисляется как

$$\bar{y} = \frac{\bar{u}}{\gamma}\left(1 - \frac{\frac{\gamma\left(x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}}\right)}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)}}{W\left(\frac{\gamma\left(x_2-x_1-\frac{C}{\bar{u}}\right)}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)} e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)}}\right)}\right),$$

где W – W-функция Ламберта.

Теорема (см. теорему 2.2 диссертации)**.** *Оптимальное управление в задаче P_2 кусочно-постоянно и имеет вид (6), (7).*

Заметим, что при ослаблении ограничения (3), то есть при увеличении $\bar{u}$, отрезки $[x_1, \alpha)$ и $(\beta, x_2]$ уменьшаются, превращаясь в точки при $\bar{u} \to +\infty$, а объём управления, распределенного на этих отрезках, равен

$$\bar{y}\sqrt{v^2 + 4a^2\gamma}\,\ln\left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right)^{-\frac{\bar{u}}{\gamma\bar{y}}},$$

что при $\bar{u} \to +\infty$ стремится к $\bar{y}\sqrt{v^2 + 4a^2\gamma}$. При этом внутри интервала (α, β) управление u по-прежнему принимает значение $\gamma\bar{y}$. Таким образом, при снятии ограничения (3), получаем оптимальные управления из класса обобщенных функций, которые определяются следующим утверждением (здесь δ_ξ обозначает дельта-функцию, сосредоточенную в точке ξ, а $\chi_{[x_1,x_2]}$ – характеристическую функцию отрезка $[x_1, x_2]$):

Теорема (см. теорему 2.5 диссертации)**.** *Управление* $u = -\frac{\gamma\bar{y}}{\varphi_1}\delta_{x_1} + \frac{\gamma\bar{y}}{\varphi_2}\delta_{x_2} + \gamma\bar{y}\chi_{[x_1,x_2]}$ *является оптимальным в классе обобщенных управлений в задаче* P_2.

Теорема (см. теорему 2.6 диссертации)**.** *Управление*

$$u = \frac{C}{x_2 - x_1 + \frac{\sqrt{v^2+4\gamma a^2}}{\gamma}}\left(\frac{\delta_{x_2}}{\varphi 2} - \frac{\delta_{x_1}}{\varphi 1} + \chi_{[x_1,x_2]}\right)$$

является оптимальным в классе обобщенных управлений в задаче P_1.

Аналогичные теоремы доказаны для случая отсутствия диффузии.

Наконец, в последней, **третьей главе** для задач P_1 и P_2 дано аналитическое решение в одномерном случае при отсутствии выброса и течения, то есть при $\bar{u}_2 = C_2 = k_2 = 0$ и $v = 0$. При этом в качестве области D выбран отрезок $[-b, b]$, а уравнение и граничные условия имеют вид

$$a^2 y'' - (\gamma + u)\, y = uY, \quad y'(-b) = \frac{\sqrt{\gamma}}{a} y(-b), \quad y'(b) = \frac{\sqrt{\gamma}}{a} y(b).$$

Для этих задач найдена структура оптимального решения в классах постоянных и измеримых управлений.

Для задачи P_1 постоянное управление определяется однозначно и имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-b, b], \\ \frac{C}{2b}, & x \in [-b, b]. \end{cases}$$

Значит, решение задачи P_1 в классе постоянных управлений существует лишь при $C \leqslant 2\bar{u}b$ и совпадает с единственным допустимым управлением из этого класса.

Теорема (см. теорему 3.1 диссертации)**.** *Оптимальным в классе постоянных управлений в задаче* P_2 *является управление, задаваемое формулой*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-b, b], \\ \mathrm{u}, & x \in [-b, b]. \end{cases}$$

где u – *корень уравнения*

$$\frac{\mathrm{u}Y}{\gamma + \mathrm{u}}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+\mathrm{u}}}{a}b\right) + \sqrt{\gamma+\mathrm{u}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+\mathrm{u}}}{a}b\right)} - 1\right) = -\bar{y},$$

если

$$\frac{\bar{u}Y}{\gamma + \bar{u}}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+\bar{u}}}{a}b\right) + \sqrt{\gamma+\bar{u}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+\bar{u}}}{a}b\right)} - 1\right) \leqslant -\bar{y},$$

и $\bar{u}$ *в противном случае.*

Теорема (см. теорему 3.4 диссертации)**.** *Оптимальным в классе измеримых управлений в задаче P_1 является управление*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-b, b], \\ \bar{u}, & x \in [-b, \alpha) \cup (\beta, b], \\ \frac{\gamma \bar{y}}{Y - \bar{y}}, & x \in [\alpha, \beta], \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\alpha = -b + \frac{a}{\sqrt{\gamma + \bar{u}}} \left(\operatorname{arcsh} \frac{\sqrt{\gamma \bar{u}} Y}{\bar{u}(Y - \bar{y}) - \gamma \bar{y}} - \operatorname{arcsh} \sqrt{\frac{\gamma}{\bar{u}}} \right), \quad \beta = -\alpha, \tag{9}$$

а величина $\bar{y}$, задающая оптимальное значение функционала этой задачи, вычисляется согласно равенству

$$\frac{2a}{\sqrt{\gamma + \bar{u}}} \left(\bar{u} - \frac{\gamma \bar{y}}{Y - \bar{y}} \right) \left[\operatorname{arcsh} \frac{\sqrt{\gamma \bar{u}} Y}{\bar{u}(Y - \bar{y}) - \gamma \bar{y}} - \operatorname{arcsh} \sqrt{\frac{\gamma}{\bar{u}}} \right] + \frac{2b\gamma \bar{y}}{Y - \bar{y}} = C.$$

Теорема (см. теорему 3.2 диссертации)**.** *В случае $\bar{y} < \frac{Y}{2}$ оптимальное в классе измеримых управление в задаче P_2 кусочно-постоянно и имеет вид (8), (9).*

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Алексею Александровичу Давыдову за постановку задач, руководство и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Давыдов А.А., Пастрес Р., Петренко И.А. Одномерное распределение выброса загрязнения в одномерный поток // Труды Института математики и механики.- 2010.- Т. 16, №5.- С. 30-35.

2. Кукшина Е.О., Целоусова И.А. Алгоритм и программный продукт для усредненной оптимизации распределенных систем // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов, Суздаль.- 2007.- С. 36.

3. Петренко И.А. Оптимизация емкости завода аквакультуры при наличии экологических ограничений // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина. Тезисы докладов. - 2008.- С. 384-385.

4. Петренко И.А. Минимизация воздействия загрязняющих выбросов путём перераспределения их источников // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов, Суздаль.- 2009.- С. 187.

5. Петренко И.А. Оптимизация распределенного выброса загрязняющего вещества в поток воды // Вооружение. Технология. Безопасность. Управление. Материалы IV межотраслевой конференции с международным участием. Часть 1.- 2009.- Р. 229-239.

6. Петренко И.А. Теорема существования и система оптимальности для задачи, описываемой уравнением эллиптического типа с интегральным функционалом // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов, Суздаль.- 2011.- С. 166-167.

7. Петренко И.А. Разрешимость задачи оптимального управления для транспортного уравнения с минимаксным функционалом // Международная конференция «АНАЛИЗ и ОСОБЕННОСТИ», посвященная 75-летию Владимира Игоревича Арнольда: Тезисы докладов, Москва.-2012.- С. 87-89.

8. Петренко И.А. Теорема существования решения задачи оптимального управления для транспортного уравнения с интегральным функционалом // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: Тезисы докладов, Суздаль. - 2012.- С. 138.

9. Петренко И.А. Модель изменения концентрации вещества в потоке жидкости // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов, Суздаль.- 2013.- С. 188-189.

10. Петренко И.А., Тимофеева В.А. Решение задачи оптимизации, описываемой уравнением эллиптического типа с интегральным функционалом // Международная конференция «Управление и оптимизация неголономных систем»: Тезисы докладов, Переславль-Залесский.- 2011.- С. 29-30.

11. Optimization of shellfish production carrying capacity at a farm scale. / D. Brigolin, A. Davydov, R. Pastres, I. Petrenko // Applied Mathematics and Computation.- 2008.- Vol. 204.- P. 532-540.

12. Petrenko I.A. Aquaculture and water quality: modeling and control // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: Тезисы докладов, Суздаль.- 2010.- С. 231-232.

Подписано в печать 29.10.14
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. ____. Тираж 100 экз.
Заказ №
Издательство