Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

На правах рукописи

ТИХОМИРОВ
РОМАН НИКОЛАЕВИЧ

Операторные оценки многомасштабного усреднения для эллиптических уравнений

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук,
профессор Пастухова Светлана Евгеньевна

Владимир – 2017

Оглавление

Введение

1. Настоящая работа посвящена операторным оценкам Изучаются скалярные эллиптические уравнения второго порядка. Можно выделить три класса задач:

a) классические задачи усреднения;

b) задачи многомасштабного усреднения;

c) локально-периодические задачи.

Опишем постановку задачи в случае классического усреднения.

Во всем пространстве $\mathbb{R}^d$ рассмотрим эллиптическое уравнение

$$u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d),\ -\mathrm{div}(a^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon(x)) + u^\varepsilon(x) = f(x),\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{0.1}$$

Здесь $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$, ε – малый параметр, $a(y)$ – измеримая симметрическая 1-периодическая матрица с ячейкой периодичности $Y = [-1/2, 1/2)^d$, подчиненная условию ограниченности и эллиптичности

$$\lambda\xi^2 \leq a(y)\xi\cdot\xi \leq \lambda^{-1}\xi^2 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^d,\ \lambda > 0. \tag{0.2}$$

Матрица $a^\varepsilon(x)$ сильно осциллирует при $\varepsilon \to 0$.

Решение уравнения (0.1) существует и в силу энергетической оценки ограничено в соболевском пространстве $H^1(\mathbb{R}^d)$. Само уравнение (0.1) понимается в смысле выполнения интегрального тождества. Можно доказать, что u^ε сходится в $L^2(\mathbb{R}^d)$ при $\varepsilon \to 0$ к некоторой функции u. Требуется найти уравнение, которому удовлетворяет предельная функция u и оценить разность $\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. Для достижения этих целей часто применяется метод асимптотических разложений, широко представленный, например, в монографиях [1], [2], [3], [4], [5]. Напомним этот метод на примере классической задачи усреднения.

Выпишем формально асимптотическое разложение решения задачи (0.1),

$$u^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y) + \ldots,\ y = \frac{x}{\varepsilon}, \tag{0.3}$$

где $u_1(x,y),\ u_2(x,y),\ \ldots$ – периодичны по y. Нулевое приближение $u(x)$ оказывается решением усредненной задачи, а для отыскания функций $u_1,\ u_2,\ \ldots$ имеется рекуррентная процедура. Усредненная матрица и усредненная задача определяются следующим образом.

Пусть $H^1_{per}(Y)$ – соболевское пространство периодических функций с нулевым средним. В силу неравенства Пуанкаре для периодических функций норму в этом пространстве можно определить как

$$\|\varphi\|_{H^1_{per}(Y)} = \|\nabla\varphi\|_{L^2(Y)}.$$

Введем периодические задачи

$$\begin{gathered} N_j \in H^1_{per}(Y),\ \mathrm{div}_y[a(y)(e^j + \nabla N_j(y))] = 0, \\ j = 1, 2, \ldots, d, \end{gathered} \tag{0.4}$$

где $e^1, e^2, \dots, e^d$ – канонический базис в $\mathbb{R}^d$.

Усредненная матрица определяется равенством

$$a^0 = \langle a(I + \nabla_y N) \rangle, \tag{0.5}$$

где $N(y) = \{N_1(y), N_2(y), \dots, N_d(y)\}$, I – единичная матрица,

$$\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_Y = \int\limits_Y \cdot \, dy \ - \ \text{среднее по ячейке периодичности.}$$

Матрица a^0 является постоянной симметрической и положительно определенной.

Нулевое приближение u есть решение усредненной задачи

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d), \ -\mathrm{div}(a^0 \nabla u(x)) + u(x) = f(x). \tag{0.6}$$

Эта задача того же вида, что и исходная, но значительно проще, благодаря постоянству матрицы a^0.

Метод асимптотических разложений приводит к равенству

$$u_1(x, y) = N(y) \cdot \nabla u(x).$$

В разложении (0.3) ограничимся первыми двумя слагаемыми, так что первым приближением будет

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon u_1(x, y) = u(x) + \varepsilon N(y) \cdot \nabla u(x), \ y = \frac{x}{\varepsilon}. \tag{0.7}$$

Слагаемое

$$\varepsilon N(y) \cdot \nabla u(x)$$

в (0.7) принято называть корректором.

Теперь рассмотрим многомасштабное усреднение. Пусть для простоты и наглядности масштабов всего два. В этом случае матрица $a^\varepsilon(x)$ в уравнении (0.1) имеет структуру

$$a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}\right), \ \delta = \delta(\varepsilon), \ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, \tag{0.8}$$

где $a(y, z)$ 1-периодична по y и z, ячейкой периодичности является единичный куб

$$Z = Y = [-1/2, 1/2)^d.$$

Для того чтобы $a^\varepsilon(x)$ была измеримой функцией, требуем каратеодориевость матрицы $a(y, z)$. Предполагаем также, что матрица $a(y, z)$ подчинена условию ограниченности и эллиптичности типа (0.2).

Усредненная матрица a^0 определяется в два шага. На первом шаге вводится "промежуточная" усредненная матрица $\hat{a}(y)$ с помощью соотношений

$$\hat{a}(y) = \langle a(y,\cdot)(I + \nabla_z M(y,\cdot))\rangle_Z, \tag{0.9}$$

где $M(y,z) = \{M_1(y,z), M_2(y,z), \ldots, M_d(y,z)\}$, функции $M_j(y,z)$ по переменной z суть решения задач на ячейке периодичности

$$\begin{gathered} M_j(y,\cdot) \in H^1_{per}(Z),\ \mathrm{div}_z[a(y,z)(e^j + \nabla_z M_j(y,z))] = 0, \\ j = 1,2,\ldots,d, \end{gathered} \tag{0.10}$$

а y является здесь параметром.

"Окончательная" усредненная матрица получается на втором шаге в результате повторного усреднения, то есть

$$a^0 = \langle \hat{a}(I + \nabla_y N)\rangle_Y,$$

где $N(y) = \{N_1(y), N_2(y), \ldots, N_d(y)\}$, а $N_j(y)$ – решение периодической задачи

$$N_j \in H^1_{per}(Y),\ \mathrm{div}_y[\hat{a}(y)(e^j + \nabla_y N_j(y))] = 0,\ j = 1,2,\ldots,d. \tag{0.11}$$

Усредненные матрицы $\hat{a}(y)$, a^0 будут, как и в чисто периодическом случае, симметрическими и удовлетворяющими условию эллиптичности и ограниченности типа (0.2). Соответствующие задачи на ячейке и усредненное уравнение однозначно разрешимы.

Здесь сделаем замечание. Если поменять порядок усреднения, то есть сначала усреднять исходную матрицу (0.8) по y, а потом по z, то получим, вообще говоря, другую усредненную матрицу a^0 (см. гл. 2, §7). Таким образом, можно сказать, что ситуация несимметрична по отношению к переменным y и z в матрице $a^\varepsilon(x)$. В частности, это относится и к условию Каратеодори: в нашем случае матрица $a(y,z)$ должна быть непрерывна по y для почти всех z и измерима по z для всех y.

В случае локально-периодического усреднения матрица $a^\varepsilon(x) = a(x, \frac{x}{\varepsilon})$ зависит от быстрой переменной $y = \frac{x}{\varepsilon}$ и медленной переменной x, по которой нет периодичности. Процедура усреднения проводится только по быстрой переменной, что дает усредненную матрицу $a^0(x)$, зависящую от медленной переменной x.

Вопросы многомасштабного и локально-периодического усреднения затрагивались во многих работах: A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou [1]; M. Briane, G. Allaire [6]; J.-L. Lions, D. Lukkassen, L.E. Person, P. Wall [7]; A. Braides, V. Chiado Piat, A. Defranceschi [8]; А.М. Мейрманов[9]-[11]; Д.И. Борисов [12]; Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин [13] и других, при этом использовались различные методы.

2. В литературе по классическому усреднению доказаны многочисленные оценки погрешности усреднения вида

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le c\varepsilon, \tag{0.12}$$

$$\|u^\varepsilon - u - \varepsilon u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le c\varepsilon^2,$$

В этих оценках константы c зависят от гладкости нулевого приближения u, которая, в свою очередь, определяется гладкостью правой части f. Чтобы оценка (0.12) получила операторный смысл, она должна иметь вид

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{0.13}$$

где константа C уже не зависит от f. В этом случае из неё следует оценка для разности резольвент

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A_0 + I)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon, \tag{0.14}$$

где $A_\varepsilon = -\mathrm{div} a(\frac{x}{\varepsilon})\nabla$, а $A_0 = -\mathrm{div} a^0\nabla$ – действующие в $L^2(\mathbb{R}^d)$ неотрицательные самосопряженные операторы.

Впервые оценка вида (0.14) для широкого класса линейных эллиптических уравнений была установлена М.Ш. Бирманом и Т.А. Суслиной [14]. Спектральным, или блоховским методом ими были изучены помимо скалярного эллиптического уравнения различные векторные уравнения (например, система теории упругости). Анализ векторных задач оказался существенно более сложным из-за проблем, связанных с теорией возмущений. В.В. Жиков [15] предложил другой подход для доказательства операторных оценок, основанный на специальном анализе первого приближения с привлечением дополнительного параметра интегрирования. Этот метод получил существенное развитие в работах В.В. Жикова и С.Е. Пастуховой [16]-[18]. Универсальность метода Жикова – Пастуховой была продемонстрирована в работах [15]-[35], где рассматривались различные эллиптические и параболические уравнения, в том числе вырождающиеся и нелинейные, четвертого и более высокого порядка, а также система теории упругости. Там же изучались задачи и в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с условиями Дирихле и Неймана на границе.

3. Опишем метод В.В. Жикова на примере классической задачи усреднения. Выделим основные этапы.

i) Для первого приближения $v^\varepsilon(x)$ (см. (0.7)) имеем

$$\nabla v^\varepsilon(x) = (I + \nabla_y N(y))\nabla u(x) + \varepsilon\nabla^2 u(x) N(y),\ \ y = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Рассмотрим разность потоков

$$a(y)\nabla v^\varepsilon(x) - a^0\nabla u(x) = [a(y)(I + \nabla_y N(y)) - a^0]\nabla u(x) + \varepsilon a(y)\nabla^2 u(x) N(y) =$$

$$= \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} g^j(y) + \varepsilon a(y) N_j(y) \nabla \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) \equiv r_\varepsilon, \ y = \frac{x}{\varepsilon}, \tag{0.15}$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до d, если не оговорено противное). Здесь

$$g^j(y) = a(y)(e^j + \nabla_y N_j(y)) - a^0 e^j \tag{0.16}$$

в силу (0.4), (0.5) являются соленоидальными периодическими векторами из $L^2_{per}(Y)^d$ с нулевыми средними, то есть

$$\mathrm{div}_y g^j(y) = 0, \ \langle g^j \rangle_Y = 0. \tag{0.17}$$

Напомним, что некоторый вектор $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)^d$ называется соленоидальным, если выполнено тождество

$$\int\limits_Y g \cdot \nabla \varphi dy = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Для периодического вектора $g \in L^2_{per}(Y)^d$ справедливо аналогичное соотношение на периодических пробных функциях:

$$\int\limits_Y g \cdot \nabla \varphi dy = 0 \quad \forall \varphi \in C_{per}^\infty(Y).$$

Воспользуемся известным результатом о представлении соленоидального вектора с нулевым средним в виде дивергенции от кососимметрической матрицы (доказательство см. гл. 2, §4, п. 2).

Лемма 0.1. *Пусть $g_j(y)$ вектор из (0.16). Тогда найдется такая кососимметрическая матрица $G^j \in H^1_{per}(Y)^{d\times d}$, что справедливо представление*

$$g^j(y) = \mathrm{div}_y G^j(y), \quad G^j_{ik} = -G^j_{ki}. \tag{0.18}$$

При этом выполняется оценка

$$\|G^j\|_{H^1_{per}(Y)^{d\times d}} \le c \|g^j\|_{L^2_{per}(Y)^d}, \ c = const(d). \tag{0.19}$$

В результате применения этой леммы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} g^j = \varepsilon \mathrm{div} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} G^j \right) - \varepsilon G^j \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right). \tag{0.20}$$

Первое слагаемое в (0.20) есть соленоидальный вектор, что следует из кососимметричности матрицы G^j. Действительно, (без суммирования по j)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div} \left(G^j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \cdot \nabla \varphi dx = - \int\limits_{\mathbb{R}^d} G^j \cdot \nabla^2 \varphi \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = 0,$$

так как $G^j \cdot \nabla^2 \varphi = 0$ ввиду симметричности матрицы $\nabla^2 \varphi$ и кососимметричности $G^j(y)$.

Используя соленоидальность первого слагаемого из (0.20), для невязки r_ε (см. (0.15)) получим равенство

$$\operatorname{div} r_\varepsilon = -\varepsilon \operatorname{div}\left(G^j \nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \varepsilon \operatorname{div}\left(a(y) N_j \nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \equiv -\varepsilon \operatorname{div} F,$$

содержащее общий множитель ε.

ii) Для разности $v^\varepsilon - u^\varepsilon$ имеем уравнение

$$A_\varepsilon (v^\varepsilon - u^\varepsilon) + (v^\varepsilon - u^\varepsilon) = A_\varepsilon v^\varepsilon + v^\varepsilon - A_0 u - u =$$

$$= -\operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a^0 \nabla u) + \varepsilon N \cdot \nabla u =$$

$$= \varepsilon N \cdot \nabla u + \varepsilon \operatorname{div} F$$

или, обозначив $v^\varepsilon - u^\varepsilon = z^\varepsilon$,

$$A_\varepsilon z_\varepsilon + z_\varepsilon = \varepsilon F_0 + \varepsilon \operatorname{div} F, \quad F_0 = N \cdot \nabla u.$$

Воспользовавшись стандартной энергетической оценкой

$$\|z_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0 \varepsilon^2 (\|F_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|F\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)^d}),$$

получим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (|u^\varepsilon(x) - v^\varepsilon(x)|^2 + |\nabla u^\varepsilon(x) - \nabla v^\varepsilon(x)|^2) dx \le$$

$$\le c_0 \varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|^2 (|\nabla u(x)|^2 + |\nabla^2 u(x)|^2) dx, \tag{0.21}$$

в котором $b(y)$ – функции вида $N_j(y)$, $G^j(y)$. Функции $b(y)$ в общем случае не принадлежат $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, и их нельзя исключить из оценки (0.21). В этом состоит основное препятствие, которое нужно преодолеть.

iii) Наряду с задачей (0.1) рассмотрим аналогичную задачу со смещенной матрицей $a(y+\omega)$ и той же самой правой частью

$$-\operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon} + \omega\right) \nabla u^\varepsilon_\omega(x)\right) + u^\varepsilon_\omega(x) = f(x). \tag{0.22}$$

Исходное уравнение (0.1) получается из (0.22), при $\omega = 0$. Для задачи (0.22) первое приближение имеет "сдвинутый" вид

$$v^\varepsilon_\omega(x) = u(x) + \varepsilon N(y+\omega) \cdot \nabla u(x), \ y = \frac{x}{\varepsilon}, \tag{0.23}$$

то есть получается из приближения $v^\varepsilon(x)$ смещением по быстрой переменной y. Усредненная матрица для уравнения (0.22) не зависит от ω и совпадает с a^0, а значит усредненное уравнение для задачи (0.22) одно и то же для всех ω. Это следует из того, что решение соответствующих задач на ячейке имеет вид $N_j(y,\omega) = N_j(y+\omega)$, то есть получаются сдвигом из решения задачи (0.4). Отметим, что и введенные выше матрицы G^j (см. (0.18))также будут зависеть от параметра ω через сдвиг $G^j(y,\omega) = G^j(y+\omega)$.

Теперь для уравнения (0.22) запишем оценку, аналогичную (0.21), и проинтегрируем ее по параметру $\omega \in Y$:

$$\int\limits_Y \int\limits_{\mathbb{R}^d} (|u^\varepsilon_\omega(x) - v^\varepsilon_\omega(x)|^2 + |\nabla u^\varepsilon_\omega(x) - \nabla v^\varepsilon_\omega(x)|^2)dxd\omega \le$$

$$\le c_0\varepsilon^2 \int\limits_Y \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon} + \omega\right)\right|^2 (|\nabla u(x)|^2 + |\nabla^2 u(x)|^2)dxd\omega \le$$

$$\le c_0\varepsilon^2 \int\limits_Y |b(\omega)|^2 d\omega \int\limits_{\mathbb{R}^d} (|\nabla^2 u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx =$$

$$= c_0\varepsilon^2 \langle |b|^2\rangle \int\limits_{\mathbb{R}^d} (|\nabla^2 u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx \le$$

$$\le c\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} (|\nabla^2 u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx \le C\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} f^2 dx. \tag{0.24}$$

Здесь воспользовались оценкой

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \le c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{0.25}$$

которая следует из того, что усредненный оператор A_0 – это эллиптический оператор с постоянными коэффициентами.

iv) Сравним решение $u^\varepsilon_\omega(x)$ задачи (0.22) с функцией $u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)$, где $u^\varepsilon(x)$ – решение задачи (0.1). Заметим, что функция $u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)$ есть решение задачи (0.22) с правой частью $f(x+\varepsilon\omega)$. Достаточно сравнить правые части $f(x)$ и $f(x+\varepsilon\omega)$, воспользовавшись следующей леммой.

Лемма 0.2. *Если $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, то*

$$\|f(\cdot + \varepsilon\omega) - f(\cdot)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon|\omega|\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Доказательство этого факта приведено в [15, Лемма 2]. Отсюда и из оценки (0.25) получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|u^\varepsilon_\omega(x)-u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)|^2+|\nabla u^\varepsilon_\omega(x)-\nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)|^2)dx\le\\ \le C\varepsilon^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}f^2dx\quad\forall\omega\in Y.\end{gathered}\tag{0.26}$$

Неравенство (0.26) позволяет в (0.24) заменить функцию $u^\varepsilon_\omega(x)$ на функцию $u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)$. В результате приходим к "проинтегрированной" оценке

$$\begin{gathered}\int\limits_Y\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)-v^\varepsilon_\omega(x)|^2+|\nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)-\nabla v^\varepsilon_\omega(x)|^2)dxd\omega\le\\ \le C\varepsilon^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}f^2dx,\end{gathered}\tag{0.27}$$

где постоянная C зависит только от размерности пространства d и постоянной эллиптичности λ.

Из проинтегрированной оценки (0.27) можно вывести оценку (0.13). Действительно, загрубив соотношение (0.27), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_Y|u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)-v^\varepsilon_\omega(x)|^2d\omega dx\le C\varepsilon^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}f^2dx$$

и оценим снизу внутренний интеграл по неравенству Коши – Буняковского

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\int\limits_Y u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)d\omega-u(x)\right|^2dx\le C\varepsilon^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}f^2dx.$$

Функция $\int\limits_Y u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)d\omega$ – сглаживание по Стеклову исходного решения $u^\varepsilon(x)$. Приведем некоторые свойства сглаживания.

Лемма 0.3. *Для сглаживания $(\varphi)_\varepsilon(x)=\int\limits_Y\varphi(x+\varepsilon\omega)d\omega$ справедливы оценки:*

$$\|(\varphi)_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\le\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\tag{0.28}$$

$$\|(\varphi)_\varepsilon-\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\le\frac{\varepsilon\sqrt{d}}{2}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\tag{0.29}$$

Из леммы 0.3. имеем

$$\|\int\limits_Y u^\varepsilon(\cdot+\varepsilon\omega)d\omega-u^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\le\frac{c_0\varepsilon\sqrt{d}}{2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

где также воспользовались энергетической оценкой

$$\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le c_0\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\ c_0 = const(\lambda).$$

Отсюда, по неравенству треугольника

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \|u^\varepsilon - \int\limits_Y u^\varepsilon(\cdot + \varepsilon\omega)d\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\int\limits_Y u^\varepsilon(\cdot + \varepsilon\omega)d\omega - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

получаем оценку (0.13).

Важную роль в изложенном методе играет идея интегрирования по дополнительному параметру. Другое ключевое место – это применение теоремы о представлении соленоидального вектора, позволяющее хорошо преобразовать невязку.

Описанный метод адаптируется для многомасштабного и локально-периодического усреднения эллиптических и параболических уравнений, скалярных и векторных.

4. Перейдем к изложению основных результатов диссертации по главам. Описанный выше *метод сдвига* получения операторный оценок усреднения адаптируется здесь для многомасштабного и локально-периодического усреднения эллиптических скалярных уравнений.

Основной случай многомасштабного усреднения изучен в Главе 2. Рассматривается уравнение (0.1), в котором матрица (для определённости) имеет двухмасштабную структуру вида (0.8). Уточним и дополним ограничения на функцию $a(y,z)$ из (0.8):

$$\lambda\xi^2 \le a(y,z)\xi\cdot\xi \le \lambda^{-1}\xi^2 \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^d,\ \lambda>0, \tag{0.30}$$

$$|a(y,z) - a(y',z)| \le c_L|y-y'|, \tag{0.31}$$

для любых $y, y' \in \mathbb{R}^d$ и почти всех $z \in \mathbb{R}^d$.

При таких условиях на матрицу $a(y,z)$ для решений периодических задач (0.10), (0.11) справедлив ряд свойств, которые обеспечивают возможность применения *метода сдвига.*

Лемма 0.4. *Пусть M_j, N_j – решения задач (0.10) и (0.11), $\hat{a}(y)$ – "промежуточная" усредненная матрица, определенная в (0.9). Тогда:*

i) $\|M_j(y,\cdot)\|_{H^1_{per}(Z)} \le c$, где константа c зависит лишь от постоянных λ;

ii) $M_j(y,z)$ – липшицева по $y \in Y$ функция со значениями в $H^1_{per}(Z)$, причем константа Липшица зависит лишь от λ и c_L;

iii) $\hat{a}(y)$ – липшицева матрица с константой Липшица, зависящей лишь от постоянных λ и c_L;

iv) $N_j,\ \nabla_y N_j \in L^\infty_{per}(Y)$;

v) $\nabla_y^2 N_j \in L^p_{per}(Y)$ *для всех* $p \geq 1$*;*

vi) $\|M_j(y,\cdot)\|_{L^\infty_{per}(Z)} \leq c$ *для всех* y*.*

Доказательство дано в гл. 2, §4.

Наша цель – получить оценку разности решений исходного и усредненного уравнений.

Теорема 0.1. *Для разности решений задач (0.1) и (0.6) верна оценка*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{0.32}$$

где константа C *зависит лишь от размерности пространства* d *и постоянных* λ*,* c_L *из условий (0.30), (0.31).*

Из (0.32) следует операторная оценка типа (0.14) с мажорантой порядка $\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}$.

В случае двухмасштабной матрицы $a^\varepsilon(x)$ первое приближение берётся в виде

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon u_1(x,y) + \delta u_2(x,y,z), \ y = \frac{x}{\varepsilon}, \ z = \frac{x}{\delta},$$

с двумя корректорами, для которых устанавливаются равенства

$$u_1(x,y) = N(y)\cdot\nabla u(x), \tag{0.33}$$

$$u_2(x,y,z) = M(y,z)\cdot(I + \nabla_y N(y))\,\nabla u(x). \tag{0.34}$$

"Смещенным" первым приближением, в виду специфики скалярной задачи, будет

$$v^\varepsilon_\sigma(x) = u(x) + \varepsilon u_1(x,y) + \delta u_2(x,y,z+\sigma), \quad \sigma \in Z, \ y = \frac{x}{\varepsilon}, \ z = \frac{x}{\delta}. \tag{0.35}$$

Здесь участвует один параметр сдвига, как и в классическом случае. Сдвиг применяется только по самой "быстрой"переменной. В общем случае, охватывающем, в частности, векторные и нелинейные эллиптические уравнения, а также параболические уравнения, (см. [29]-[35]) используется более сложный сдвиг с двумя параметрами. Однако, более простое смещенное приближение (0.35) требует более сложного обоснования. Концепция упрощенного сдвига высказана впервые в [36].

Центральным результатом является

Теорема 0.2. *Пусть* $u^\varepsilon(x)$ *– решение задачи (0.1) и приближение* $v^\varepsilon_\sigma(x)$ *определено равенствами (0.33)–(0.35). Тогда справедлива "проинтегрированная" по ячейке* Z *оценка*

$$\int\limits_Z \int\limits_{\mathbb{R}^d} |u^\varepsilon(x+\delta\sigma) - v^\varepsilon_\sigma(x)|^2 dx d\sigma + \int\limits_Z \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla u^\varepsilon(x+\delta\sigma) - \nabla v^\varepsilon_\sigma(x)|^2 dx d\sigma \leq$$

$$\leq C \max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{0.36}$$

где константа C *того же типа, что и в (0.32).*

Видим, что функция $v^\varepsilon_\sigma(x)$, полученная согласно (0.35) добавлением к L^2-приближению $u(x)$ двух корректоров $\varepsilon u_1(x,y)$ и $\delta u_2(x,y,z+\sigma)$, становится H^1-приближением к решению u^ε в неком усреднённом по $\sigma\in Z$ смысле. Из "проинтегрированной" оценки (0.36) уже не сложно вывести интересующую нас оценку (0.32), подобно тому, как это делалось в случае классического усреднения.

Резольвенту $(A_\varepsilon+I)^{-1}$ можно рассматривать как оператор из $L^2(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда ее аппроксимация задается суммой $(A_0+I)^{-1}+\mathcal{K}_\varepsilon$ с корректирующим оператором $\mathcal{K}_\varepsilon$, так что имеет место оценка

$$\|(A_\varepsilon+I)^{-1}-(A_0+I)^{-1}-\mathcal{K}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\le C\max\{\varepsilon,\frac{\delta}{\varepsilon}\}. \tag{0.37}$$

Чтобы записать в явном виде корректирующий оператор $\mathcal{K}_\varepsilon$, сделаем в (0.36) замену переменных x на $x+\delta\sigma$ и изменим порядок интегрирования. Тогда из (0.36) вытекает оценка

$$\|u^\varepsilon-\hat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\le C\max\{\varepsilon,\frac{\delta}{\varepsilon}\}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{0.38}$$

где

$$\hat{v}^\varepsilon(x)=u(x)+\varepsilon K_{\varepsilon,1}(x)+\delta K_{\varepsilon,2}(x), \tag{0.39}$$

$$\begin{gathered}K_{\varepsilon,1}(x)=\int\limits_Z N\left(\frac{x}{\varepsilon}-\frac{\delta}{\varepsilon}\sigma\right)\cdot\nabla u(x-\delta\sigma)d\sigma,\\ K_{\varepsilon,2}(x)=\int\limits_Z M\left(\frac{x}{\varepsilon}-\frac{\delta}{\varepsilon}\sigma,\frac{x}{\delta}\right)\cdot\left(I+\nabla_y N\left(\frac{x}{\varepsilon}-\frac{\delta}{\varepsilon}\sigma\right)\right)\nabla u(x-\delta\sigma)d\sigma.\end{gathered} \tag{0.40}$$

Теорема 0.3. *Пусть $u^\varepsilon(x)$ – решение задачи (0.1), а приближение $\hat{v}^\varepsilon(x)$ определено через решения задач (0.6), (0.10) и (0.11) по формулам (0.39), (0.40). Тогда выполнена оценка (0.38) с константой C того же типа, что в теореме 0.1.*

В главе 1 для случая локально-периодического усреднения методом сдвига доказаны оценки погрешности усреднения в операторных нормах. Эти результаты аналогичны тем, что изложены в теоремах 0.1.–0.3. Для их получения используется смещенное первое приближение с одним корректором, как в классическом усреднении (см. (0.23)), с той лишь разницей, что осциллирующий множитель $N=N(x,\frac{x}{\varepsilon})$ будет локально-периодическим, подобно коэффициентам основного уравнения.

5. В работе рассмотрены не только эллиптические задачи во всем пространстве $\mathbb{R}^d$, но и задачи в ограниченной области Ω с краевыми условиями Дирихле и Неймана на границе (см. гл. 3). Основным результатом для задачи Дирихле и Неймана является оценка

$$\|u^\varepsilon-\hat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}\le C\max\{\sqrt{\varepsilon},\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{0.41}$$

где константа зависит от c_L, λ размерности d и области Ω. Для задачи Дирихле и Неймана получены также оценки вида

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{0.42}$$

с константой того же типа, что и в (0.41). Соотношения (0.41) и (0.42) разного порядка малости, так как в H^1-оценке сказывается влияние границы.

Вывод H^1-оценки (0.41) технически близок к выводу соответствующей оценки в случае всего пространства $\mathbb{R}^d$, а L^2-оценки требует дополнительных рассмотрений. Несколько различные методы в получении L^2-оценки на основе H^1-оценки предложены Т.А. Суслиной [37]-[38] и С.Е. Пастуховой [34], [35].

6. В диссертации имеется также Приложение А. Оно посвящено классическому усреднению эллиптических уравнений второго порядка с неограниченными младшими членами:

$$\begin{gathered} u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_\varepsilon u^\varepsilon + \mu u^\varepsilon = f, \\ A_\varepsilon u^\varepsilon = -\mathrm{div}[a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \alpha^\varepsilon u^\varepsilon] + \beta^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \gamma^\varepsilon u^\varepsilon. \end{gathered} \tag{0.43}$$

Векторы $\alpha(y)$, $\beta(y)$ и функция $\gamma(y)$ периодические, причем

$$\begin{gathered} \alpha,\ \beta \in L^{2p}_{per}(Y)^d, \quad \gamma \in L^p_{per}(Y), \\ p = \tfrac{d}{2},\ \text{если } d > 2,\ p > 1,\ \text{если } d = 2. \end{gathered} \tag{0.44}$$

Усредненным для (0.43) будет уравнение

$$\begin{gathered} u \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_0 u + \mu u = f, \\ A_0 = -\mathrm{div}[a^0 \nabla u + \alpha^0 u] + \beta^0 \cdot \nabla u + \gamma^0 u. \end{gathered} \tag{0.45}$$

Формулы для отыскания его коэффициентов даны в тексте (см. Приложение А).

Теорема 0.4. *Для разности решений задач (0.43) и (0.45) верна оценка*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{0.46}$$

если $\mu \geq \mu_0$ и $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Константа C зависит лишь от размерности d, постоянной эллиптичности λ, параметра μ и норм $\|\alpha\|_{L^{2p}(Y)^d}$, $\|\beta\|_{L^{2p}(Y)^d}$, $\|\gamma\|_{L^p(Y)}$.

Доказана также H^1-оценка порядка ε для разности u^ε и первого приближения со сглаженным корректором. Структура этого корректора отражает наличие младших членов в уравнении.

Благодарности. Автор испытывает глубокую благодарность своему Учителю доктору физико-математических наук, профессору Жикову Василию Васильевичу, недавно ушедшему из жизни. Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Пастуховой Светлане Евгеньевне за постановку задачи, руководство и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Операторные оценки локально-периодического усреднения

§1. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ скалярное эллиптическое уравнение с малым параметром ε:

$$\begin{gathered} u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_\varepsilon u^\varepsilon + u^\varepsilon = f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ A_\varepsilon = -\mathrm{div} a^\varepsilon(x)\nabla, \end{gathered} \tag{1.1}$$

в котором положительно определенная симметрическая матрица $a^\varepsilon(x)$ имеет локально-периодическую структуру

$$a^\varepsilon(x) = a(x, \frac{x}{\varepsilon}), \tag{1.2}$$

то есть периодичность матрицы $a(x, y)$ предполагается только по второй переменной y. Ячейка периодичности — куб $Y = [-1/2, 1/2)^d$. Матрица $a(x, y)$ каратеодориева с непрерывностью по переменной x, что обеспечивает измеримость матрицы $a^\varepsilon(x)$.

Уточним и усилим требования на функцию $a(x, y)$:

$$|a(x, y) - a(x', y)| \le c_L |x' - x| \tag{1.3}$$

для всех $x', x \in \mathbb{R}^d$ и п.в. $y \in Y$,

$$\lambda \xi^2 \le a(x, y)\xi \cdot \xi \le \lambda^{-1}\xi^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \lambda > 0. \tag{1.4}$$

Задача (1.1) имеет единственное решение, при этом выполнена энергетическая оценка

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \ c = const(\lambda). \tag{1.5}$$

Усредненным будет уравнение того же типа, что исходное,

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d), \ A_0 u + u = -\mathrm{div} a^0(x)\nabla u + u = f, \tag{1.6}$$

где матрица $a^0(x)$ зависит лишь от "медленной" переменной x.

Наша цель – получить сходимость по операторной норме резольвенты исходного оператора A_ε к резольвенте усредненного оператора A_0 с оценкой вида

$$\|(A_\varepsilon+1)^{-1}-(A_0+1)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon, \tag{1.7}$$

допуская минимальные ограничения на коэффициенты исходного оператора A_ε.

Видим, что согласно (1.7), резольвента $(A_0+1)^{-1}$ есть аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon+1)^{-1}$ в операторной норме в $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Резольвенту $(A_\varepsilon+1)^{-1}$ можно рассматривать как оператор из $L^2(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда ее аппроксимация в операторной норме задается суммой $(A_0+1)^{-1}+\mathcal{K}_\varepsilon$, где $\mathcal{K}_\varepsilon$ – корректирующий оператор, построение которого будет дано ниже в §5. При этом справедлива оценка

$$\|(A_\varepsilon+1)^{-1}-(A_0+1)^{-1}-\mathcal{K}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon, \tag{1.8}$$

где константа C того же типа, что и в (1.7).

Операторную оценку (1.7) обеспечивает следующая

Теорема 1.1. *Для разности решений задач (1.1) и (1.6) верна оценка*

$$\|u^\varepsilon-u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.9}$$

где константа C зависит от размерности d и постоянных из условий (1.3), (1.4).

Неравенство (1.9) будет получено как следствие из так называемой проинтегрированной H^1-оценки (3.3).

§2. О вспомогательных задачах на ячейке

Рассмотрим общую формулировку периодической задачи

$$\begin{gathered} w\in H^1_{per}(Y), \quad \operatorname{div}_y a(y)\nabla w=-f_0+\operatorname{div}_y f, \\ f_0\in L^2(Y),\ f\in L^2(Y)^d, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $a(y)$ – периодическая положительно определенная матрица.

По определению $w\in H^1_{per}(Y)$ является решением задачи (2.1), если выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_Y a(y)\nabla w\cdot\nabla\varphi dy=\int\limits_Y f_0\varphi dy+\int\limits_Y f\cdot\nabla\varphi dy \quad \forall\varphi\in H^1_{per}(Y).$$

Эта задача имеет решение тогда и только тогда, когда $\langle f_0 \rangle_Y = 0$, причем решение выделяется единственным образом, если выполнено условие нормировки $\langle w \rangle_Y = 0$. Последнее будем предполагать выполненным.

Рассмотрим частный случай задачи (2.1) вида

$$w \in H^1_{per}(Y),\ \operatorname{div}_y a(y)(\xi + \nabla_y w) = 0,\ \langle w \rangle_Y = 0, \tag{2.2}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^d$ – векторный параметр. Поскольку в (2.2) $f_0 = 0$, то решение существует и, в силу линейности уравнения, его можно представить в виде

$$w(y) = N_j(y)\xi_j, \tag{2.3}$$

где $N_j(y)$ – решение периодических задач вида (2.2) для $\xi = e^j$. Напомним, что $e^1, \ldots, e^d$ – канонический базис в $\mathbb{R}^d$.

Периодической матрице $a(y)$ ставится в соответствие так называемая усредненная матрица, определяемая равенством

$$a^0\xi = \langle a(\cdot)(\xi + \nabla_y w)\rangle_Y \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{2.4}$$

Известно, что эта постоянная матрица симметрична и удовлетворяет условию типа (1.4). Так обстоит дело в случае уравнения с чисто периодическими коэффициентами.

В случае локально-периодического усреднения используется задача на ячейке, которая несколько более общего вида, чем (2.2), а именно,

$$\begin{gathered} N_j(x,\cdot) \in H^1_{per}(Y),\ \operatorname{div}_y[a(x,y)(e^j + \nabla_y N_j(x,y))] = 0,\ \langle N_j(x,\cdot)\rangle_Y = 0, \\ j = 1, \ldots, d, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где переменная x играет роль параметра. При этом усредненная матрица, определяемая соотношениями

$$a^0(x)e^j = \langle a(x,\cdot)(e^j + \nabla_y N_j(x,\cdot))\rangle_Y,\ j = 1, \ldots, d, \tag{2.6}$$

зависит от "медленной" переменной x.

В наших предположениях матрица $a^0(x)$ оказывается липшицевой, что вытекает из свойств липшицевости по переменной x функций $N_j(x,y)$.

Благодаря эллиптичности матрицы $a^0(x)$, задача (1.6) однозначно разрешима. При этом, в силу липшицевости коэффициентов уравнения, по эллиптической теории её решение u будет из $H^2(\mathbb{R}^d)$ с оценкой нормы

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \le c\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad c = const(\lambda, d). \tag{2.7}$$

Точные формулировки свойств решений $N_j(x,y)$ периодических задач (2.5) даны ниже.

Лемма 2.1. *Пусть $N_j(x,y)$ – решения периодической задачи (2.5), $a^0(x)$ – усредненная матрица, определенная равенством (2.6). Тогда*
i) $N_j(x,y)$ – липшицева по x функция со значениями в $H^1_{per}(Y)$, причем константа Липшица зависит от c_L и λ из (1.3), (1.4);
ii) $a^0(x)$ – липшицева матрица с константой Липшица, зависящей от постоянных из условий (1.3) и (1.4);
iii) $\|N_j(x,\cdot)\|_{L^\infty_{per}(Y)} \le c$ для всех x, $c = const(d,\lambda)$;
iv) $\|\nabla_x N_j(x,\cdot)\|_{H^1_{per}(Y)^d} \le c$, $c = const(d,\lambda,c_L)$.

Доказательство. Вывод утверждений $i)-ii)$ повторяет доказательство утверждений $i)-ii)$, а $iii)$ утверждений $vi)$ леммы 0.4 для случая двухмасштабного усреднения, который является основным в данной работе (см. доказательство леммы 0.4 в гл. 2, §4).

Свойство $iv)$ следует из $i)$ по теореме Радемахера о принадлежности $W^{1,\infty}$-пространству липшицевой функции.

§3. Смещенное первое приближение

Первое приближение для исходного уравнения определим по аналогии с (0.7) равенством

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}.$$

В соответствии с методом сдвига нам потребуется первое приближение для уравнения

$$-\mathrm{div}\left(a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}+\omega\right)\nabla u^\varepsilon_\omega(x)\right) + u^\varepsilon_\omega(x) = f(x) \qquad (3.1)$$

со смещенной матрицей

$$a\left(x, \frac{x}{\varepsilon}+\omega\right), \ \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Ясно, что уравнение с получается из (3.1), если положить $\omega = 0$.

Очевидно, что решение периодической задачи вида (2.5) со смещенной матрицей $a(x,y+\omega)$ получается сдвигом на ω в аргументе из решения задачи (2.5), т.е. это будет $N_j(x,y+\omega)$. Тогда первое приближение для решения задачи (3.1) надо брать в виде

$$v^\varepsilon_\omega(x) = u(x) + \varepsilon u_1(x,y+\omega) = u(x) + \varepsilon N_j(x,y+\omega)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}, \ y = \frac{x}{\varepsilon}. \qquad (3.2)$$

Покажем, что $v^\varepsilon_\omega(x)$, $\nabla v^\varepsilon_\omega(x)$ как функции переменных ω и x принадлежат $L^2(Y \times \mathbb{R}^d)$. Действительно, имеем

$$\nabla v^\varepsilon_\omega(x) = \nabla_x u(x) + \nabla_y N_j(x,y+\omega)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon\nabla_x N_j(x,y+\omega)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} +$$
$$\varepsilon N_j(x,y+\omega)\nabla\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}, \ y = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Применив утверждения леммы 2.1. относительно

$$N_j(x,y),\ \nabla_x N_j(x,y),\ \nabla_y N_j(x,y),$$

видим что

$$\int\limits_{Y\times\mathbb{R}^d}\left|\nabla_y N_j(x,y+\omega)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\varepsilon\nabla_x N_j(x,y+\omega)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\varepsilon N_j(x,y+\omega)\nabla\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|^2 dxd\omega\le$$

$$\sum_j\int\limits_{Y\times\mathbb{R}^d}|b_j(x,\frac{x}{\varepsilon}+\omega)|^2|\Phi(x)|^2dxd\omega=\sum_j\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_Y|b_j(x,\frac{x}{\varepsilon}+\omega)|^2d\omega\right)|\Phi(x)|^2dx\le$$

$$C\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\Phi(x)|^2dx<\infty,$$

где $\Phi(x)=|\nabla u(x)|+|\nabla^2u(x)|$, члены $b_j(x,y)$ сформированы из перечисленных выше периодических по y функций, для которых

$$\sum_j\int\limits_Y|b_j(x,\frac{x}{\varepsilon}+\omega)|^2d\omega\le C,$$

в силу леммы 2.1., и на последнем шаге учтена оценка (2.7). Отсюда следует, что $\nabla v^\varepsilon_\omega\in L^2(Y\times\mathbb{R}^d)$. Свойство $v^\varepsilon_\omega(x)\in L^2(Y\times\mathbb{R}^d)$ легко получить, если просто учесть пункт $iii)$ леммы 2.1.

Теперь сформулируем основной результат, из которого выводится оценка (1.9).

Теорема 3.1. *Пусть $u^\varepsilon(x)$ – решение задачи (1.1) и $v^\varepsilon(x,\omega)$ определено равенством (3.2). Тогда справедлива следующая проинтегрированная (по $\omega\in Y$) оценка*

$$\int\limits_Y\|u^\varepsilon(\cdot+\varepsilon\omega)-v^\varepsilon_\omega(\cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}d\omega\le C\varepsilon^2\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)},\tag{3.3}$$

где константа C зависит лишь от размерности пространства d и постоянных c_L и λ из условий (1.3), (1.4).

Следующий параграф будет посвящен выводу соотношения (3.3).

§4. Доказательство проинтегрированной оценки

1° Сначала изучим обычное первое приближение

$$v^\varepsilon(x)=u(x)+\varepsilon N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j},\ y=\frac{x}{\varepsilon},$$

и его невязку в уравнении. Запишем градиент

$$\nabla v^\varepsilon(x) = \nabla u(x) + \nabla_y N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon \nabla_x N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon N_j(x,y)\nabla \frac{\partial u(x)}{\partial x_j},\ y = \frac{x}{\varepsilon},$$

и рассмотрим разность потоков

$$a(x, \frac{x}{\varepsilon})\nabla v^\varepsilon(x) - a^0(x)\nabla u(x)$$

исходного и усредненного уравнений.

В силу определения усредненной матрицы (2.6), имеем представление

$$a(x,y)\nabla v^\varepsilon(x) - a^0(x)\nabla u(x) = a(x,y)(e^j + \nabla_y N_j(x,y))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} -$$

$$-\langle a(x,\cdot)(e^j + \nabla_y N_j(x,\cdot))\rangle_Y \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + r_{1,\varepsilon},\ y = \frac{x}{\varepsilon}, \tag{4.1}$$

где

$$r_{1,\varepsilon} = \varepsilon \nabla_x N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon N_j(x,y)\nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right),\ y = \frac{x}{\varepsilon}. \tag{4.2}$$

Отсюда

$$a(x,y)\nabla v^\varepsilon(x) - a^0(x)\nabla u(x) = p^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + r_{1,\varepsilon},\ y = \frac{x}{\varepsilon}, \tag{4.3}$$

где

$$p^j(x,y) = a(x,y)(e^j + \nabla_y N_j(x,y)) - \langle a(x,\cdot)(e^j + \nabla_y N_j(x,\cdot))\rangle_Y.$$

В силу (2.5), $p^j(x,y)$ – периодический по y вектор, удовлетворяющий соотношениям: $\mathrm{div}_y p^j(x,y) = 0$ и $\langle p^j(x,\cdot)\rangle_Y = 0$. Кроме того, из определения вектора в силу леммы 2.1. следует, что $p^j(x,y)$ — липшицева по x функция со значениями в $L^2_{per}(Y)$. Справедлив аналог леммы 0.1 для локально-периодических соленоидальных векторов.

Лемма 4.1. *Справедливо представление*

$$p^j(x,y) = \mathrm{div}_y P^j(x,y),$$

где $P^j(x,y)$ – кососимметрическая матрица ($P^j_{ik} = -P^j_{ki}$), такая что

$$\|P^j(x,\cdot)\|_{H^1_{per}(Y)^{d\times d}} \le c\|p^j(x,\cdot)\|_{L^2_{per}(Y)^d}, \quad c = c(\lambda, c_L).$$

Кроме того, $P^j(x,y)$ – липшицева по x функция со значениями в $H^1_{per}(Y)^{d\times d}$ и как следствие обладает градиентом по x для почти всех $x \in \mathbb{R}^d$, причем верна оценка

$$\|\nabla_x P^j_{ik}(x,\cdot)\|_{H^1_{per}(Y)^d} \le c, \quad c = c(\lambda, c_L).$$

Доказательство. Вывод всех утверждений этой леммы фактически приведен в §4 гл. 2 (см. там лемму 4.1 и её доказательство) в связи с узучением аналогичной матрицы P^j для случая повторного усреднения.

На основании перечисленных свойств матрицы $P^j(x,y)$ запишем равенство

$$p^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \varepsilon \mathrm{div}\left(P^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) -$$

$$-\varepsilon\left(\mathrm{div}_x P^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + P^j(x,y)\nabla\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right),\ y=\frac{x}{\varepsilon}, \tag{4.4}$$

где первое слагаемое – соленоидальный вектор, что следует из кососимметричности матрицы $P^j(x,y)$. Действительно, интегрируя по частям, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}\left(P^j(x,\frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^d} P^j(x,\frac{x}{\varepsilon})\cdot\nabla^2\varphi(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}dx = 0 \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

так как $\nabla^2\varphi$ – симметрическая матрица.

Таким образом, из (4.1)–(4.2) получаем

$$\mathrm{div}[a(x,y)\nabla v^\varepsilon(x) - a^0(x)\nabla u(x)] =$$

$$= \mathrm{div}\Bigg(\varepsilon\nabla_x N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon N_j(x,y)\nabla\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} -$$

$$-\varepsilon\left(\mathrm{div}_x P^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + P^j(x,y)\nabla\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)\Bigg),\ y=\frac{x}{\varepsilon}. \tag{4.5}$$

По построению

$$A_\varepsilon(v^\varepsilon - u^\varepsilon) + (v^\varepsilon - u^\varepsilon) = A_\varepsilon v^\varepsilon + v^\varepsilon - A_0 u - u =$$

$$= -\mathrm{div}[a(x,\frac{x}{\varepsilon})\nabla v^\varepsilon(x) - a^0(x)\nabla u(x)] + v^\varepsilon - u$$

и для

$$w^\varepsilon = v^\varepsilon - u^\varepsilon$$

получено уравнение вида

$$A_\varepsilon w^\varepsilon + w^\varepsilon = f_\varepsilon + \mathrm{div} F_\varepsilon, \tag{4.6}$$

где

$$f_\varepsilon = \varepsilon N_j(x,\frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial u(x)}{\partial x_j},$$

$$F_\varepsilon = -\varepsilon\Bigg(\nabla_x N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + N_j(x,y)\nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) -$$

$$-\mathrm{div}_x P^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} - P^j(x,y)\nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)\Bigg),\ y=\frac{x}{\varepsilon}. \tag{4.7}$$

Для задачи (4.6) справедливо энергетическое неравенство

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0(\|f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}),\ c_0 = const(\lambda),$$

из которого с учетом (4.7) получаем

$$\|v^\varepsilon - u^\varepsilon\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(x,y)|^2 |\Phi(x)|^2 dx, \quad y=\frac{x}{\varepsilon}. \tag{4.8}$$

Здесь $\Phi(x) = |\nabla u(x)| + |\nabla^2 u(x)|$, а член $b(x,y)$ сформирован из функций вида

$$P^j(x,y),\ \nabla_x P^j(x,y),\ N_j(x,y),\ \nabla_x N_j(x,y). \tag{4.9}$$

2° Теперь нашей целью будет – исключить квадрат функции $b(x,y)$ из оценки (4.8), заменив его на среднее значение. Для этого, как и в случае классического усреднения, воспользуемся задачами вида (3.1) с последующим интегрированием по параметру сдвига.

Запишем оценку, аналогичную (4.8), для $w^\varepsilon_\omega(x) = v^\varepsilon_\omega(x) - u^\varepsilon_\omega(x)$, а именно,

$$\|u^\varepsilon_\omega - v^\varepsilon_\omega\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}+\omega\right)\right|^2 |\Phi(x)|^2 dx. \tag{4.10}$$

После интегрирования по ω имеем

$$\int\limits_Y \|u^\varepsilon_\omega - v^\varepsilon_\omega\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} d\omega =$$

$$= \int\limits_Y \int\limits_{\mathbb{R}^d} (|u^\varepsilon_\omega(x) - v^\varepsilon_\omega(x)|^2 + |\nabla u^\varepsilon_\omega(x) - \nabla v^\varepsilon_\omega(x)|^2) dx d\omega \le$$

$$\le c_0\varepsilon^2 \int\limits_Y \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(x,\frac{x}{\varepsilon}+\omega)|^2 |\Phi(x)|^2 dx d\omega = c_0\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\Phi(x)|^2 (\int\limits_Y |b(x,\frac{x}{\varepsilon}+\omega)|^2 d\omega) dx \le$$

$$\le c_0\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\Phi(x)|^2 \left(\int\limits_Y |b(x,\omega)|^2 d\omega\right) dx \le C\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} f^2(x) dx,\ C = const(d,\lambda,c_L). \tag{4.11}$$

Мы воспользовались эллиптической оценкой (2.7) и тем, что

$$\int\limits_Y |b(x,\omega)|^2 d\omega \le c,\ c = const(d,\lambda,c_L),$$

в силу установленных свойств функций вида (4.9) (см. леммы 2.1. и 4.1.).

3° Необходимо сравнить решение $u^\varepsilon_\omega(x)$ задачи (3.1) с функцией $u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)$ – решением уравнения

$$-\mathrm{div}\left(a(x+\varepsilon\omega,\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)\right)+u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)=f(x+\varepsilon\omega). \tag{4.12}$$

Для разности $w^\varepsilon_\omega(x)=u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)-u^\varepsilon_\omega(x)$ справедливо уравнение

$$-\mathrm{div}\left(a(x+\varepsilon\omega,\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\nabla w^\varepsilon_\omega(x)\right)+w^\varepsilon_\omega(x)=F_{0,\omega}(x)+\mathrm{div}F_\omega(x), \tag{4.13}$$

в котором

$$F_{0,\omega}(x)=f(x+\varepsilon\omega)-f(x),$$
$$F_\omega(x)=\left[a\left(x+\varepsilon\omega,\frac{x}{\varepsilon}+\omega\right)-a\left(x,\frac{x}{\varepsilon}+\omega\right)\right]\nabla u^\varepsilon_\omega(x).$$

Для задачи (4.13) справедлива оценка

$$\|w^\varepsilon_\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\le C_0(\|F_{0,\omega}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}+\|F_\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}).$$

Отсюда, учитывая оценку из леммы 0.2, свойство липшицевости матрицы $a(x,y)$ и энергетическую оценку типа (1.5) для решения задачи (3.1), нетрудно получить

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)-u^\varepsilon_\omega(x)|^2+|\nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)-\nabla u^\varepsilon_\omega(x)|^2)dx\le$$

$$\le C\varepsilon^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}f^2(x)dx\ \forall\omega\in\mathbb{R}^d. \tag{4.14}$$

По неравенству треугольника из (4.14) и (4.11) выводим

$$\int\limits_Y\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)-v^\varepsilon_\omega(x)|^2+|\nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)-\nabla v^\varepsilon_\omega(x)|)dxd\omega\le$$

$$\le C\varepsilon^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}f^2(x)dx. \tag{4.15}$$

Теорема 3.1. доказана.

§5. Построение корректора и H^1-оценки

Помимо L^2-оценки (1.9) представляет интерес H^1-оценка, в которой участвует более сложное, чем просто u, приближение, включающее подходящий "корректор". Эта H^1-оценка обеспечивает операторную оценку (1.8) с "корректирующим" оператором $\mathcal{K}_\varepsilon$. Выводим H^1-оценку из (3.3).

В неравенстве (3.3) сделаем замену переменных $x' = x + \varepsilon\omega$ и поменяем порядок интегрирования, то есть

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{Y} \left(|u^\varepsilon(x) - v_\omega^\varepsilon(x-\varepsilon\omega)|^2 + |\nabla u^\varepsilon(x) - \nabla v_\omega^\varepsilon(x-\varepsilon\omega)|^2\right) d\omega dx \le C\varepsilon^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Используя неравенство Коши – Буняковского для оценки снизу внутреннего интеграла, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(|u^\varepsilon(x) - \int\limits_{Y} v_\omega^\varepsilon(x-\varepsilon\omega)d\omega|^2 + |\nabla u^\varepsilon(x) - \nabla \int\limits_{Y} v_\omega^\varepsilon(x-\varepsilon\omega)d\omega|^2 \right) dx \le C\varepsilon^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Из определения функции v_ω^ε (см. (3.2)) будем иметь

$$\int\limits_{Y} v_\omega^\varepsilon(x) = (u)_\varepsilon(x) + \varepsilon K_\varepsilon(x), \tag{5.1}$$

где $(u)_\varepsilon$ – сглаживание по Стеклову функции u,

$$K_\varepsilon(x) = \int\limits_{Y} N\left(x-\varepsilon\omega, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla u(x-\varepsilon\omega) d\omega. \tag{5.2}$$

Заметим, что первое слагаемое в (5.1) можно заменить на u с допустимой погрешностью. Действительно, по свойству сглаживания (см. лемма 0.3)

$$\|u - (u)_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_1\varepsilon \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \le c\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

в силу эллиптической оценки (0.25). Таким образом, будем использовать приближение

$$\hat{v}^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon K_\varepsilon(x). \tag{5.3}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Для разности u^ε – решения задачи (1.1) и приближения $\hat{v}^\varepsilon$, определенного в (5.3) и (5.2), имеет место оценка*

$$\|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{5.4}$$

где константа C того же типа, что и в (1.9).

Отметим, что оценка (1.8) есть операторная форма неравенства (5.4).

Выведем еще одно следствие из "проинтегрированной" оценки (3.3). Воспользуемся только переменой порядка интегрирования и оценкой снизу внутреннего интеграла по ячейке по неравенству Коши – Буняковского, что даёт

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(|\int\limits_Y [u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) - v^\varepsilon_\omega(x)]d\omega|^2 + |\int\limits_Y [\nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) - \nabla v^\varepsilon_\omega(x)]d\omega|^2 \right) dx \le C\varepsilon^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Заметим, что

$$\int\limits_Y v^\varepsilon(x) d\omega = u(x), \quad \int\limits_Y \nabla v^\varepsilon_\omega(x) = \nabla u(x).$$

Тогда последнее неравенство перепишем в виде

$$\|(u^\varepsilon)_\varepsilon - u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{5.5}$$

где константа C того же типа, что и в (1.9). Особо отметим, что H^1-оценка (5.5) не содержит корректора.

§6. Уравнение с младшими членами

Не представляет труда обобщить полученные результаты на уравнения с младшими членами. Остановимся здесь только на случае, когда коэффициенты при младших членах ограничены. Случай неограниченных коэффициентов рассмотрен подробно в приложении А в ситуации классического усреднения и может быть перенесён на локально-периодическое усреднение.

1. Рассмотрим во всем пространстве $\mathbb{R}^d$ скалярное эллиптическое уравнение с младшими членами

$$\begin{gathered} u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_\varepsilon u^\varepsilon + \mu u^\varepsilon = f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \mu > 0 \\ A_\varepsilon u^\varepsilon = -\mathrm{div}(a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \alpha^\varepsilon u^\varepsilon) + \beta^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \gamma^\varepsilon u^\varepsilon, \end{gathered} \tag{6.1}$$

с малым параметром ε. Здесь матрица $a^\varepsilon(x)$ удовлетворяет требованиям сформулированным в §1. Векторы α^ε, β^ε, функция γ^ε, как и матрица a^ε (см. (1.2)), имеют локально-периодическую структуру:

$$\alpha^\varepsilon(x) = \alpha\left(z, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \beta^\varepsilon(x) = \beta\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \gamma^\varepsilon(x) = \gamma\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Коэффициенты $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ и $\gamma(x,y)$ каратеодориевы, то есть непрерывны по x для почти всех y и измеримы по y для всех x. Уточним и дополним требования на $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ и $\gamma(x,y)$:

$$\begin{gathered} |\alpha(x,y) - \alpha(x',y)| \le c_L|x-x'|, \ |\beta(x,y) - \beta(x',y)| \le c_L|x-x'|, \\ |\gamma(x,y) - \gamma(x',y)| \le c_L|x-x'| \end{gathered}$$

для всех $x, x' \in \mathbb{R}^d$ и почти всех $y \in Y$. Также считаем, что коэффициенты α, β и γ ограничены, то есть

$$|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq c_0.$$

Отметим, что существование и единственность решения задачи (6.1) при достаточно больших μ выводится из леммы Лакса – Мильграма.

С исходной задачей (6.1) связана усредненная

$$\begin{gathered} u \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_0 u + \mu u = f, \quad \mu > 0 \\ A_0 u = -\mathrm{div}(a^0(x)\nabla u + \alpha^0(x) u) + \beta^0(x) \cdot \nabla u + \gamma^0(x) u, \end{gathered} \tag{6.2}$$

где $\alpha^0(x)$, $\beta^0(x)$ и $\gamma^0(x)$ зависят от медленной переменной x.

Коэффициенты уравнения (6.2) определяются как

$$\alpha^0(x) = \langle a(x,\cdot)\nabla_y N_0(x,\cdot) + \alpha(x,\cdot)\rangle_Y, \quad \beta^0(x) = \langle (I + \nabla_y N(x,\cdot))\beta(x,\cdot\rangle_Y),$$

$$\gamma^0(x) = \langle \beta(x,\cdot) \cdot \nabla_y N_0(x,\cdot) + \gamma(x,\cdot)\rangle_Y.$$

Здесь $N(x,y)$ – вектор из решений задачи (2.5), $N_0(x,y)$ – решение дополнительной периодической задачи

$$N_0(x,\cdot) \in H^1_{per}(Y), \quad \mathrm{div}_y[a(x,y)\nabla_y N_0(x,y) + \alpha(x,y)] = 0, \quad \langle N_0\rangle_Y = 0. \tag{6.3}$$

2. Выясним, в какой степени близки решения задач (6.1) и (6.2). Попробуем применить для этого изложенный ранее подход. Из-за присутствия в уравнении младших членов первое приближение берем в виде

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon N_0(x,y) u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \tag{6.4}$$

Поскольку записанное первое приближение отличается от классического, рассмотренного детально в приложении A (см. (A.18)), наличием лишь дополнительной переменной x у функций N_j и N_0, то некоторые подробности будем опускать.

Для первого приближения (6.4) выпишем градиент и поток:

$$\nabla v^\varepsilon(x) = (e^j + \nabla_y N_j(x,y))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \nabla_y N_0(x,y) u(x) + \varepsilon \nabla^2 u(x) N_j(x,y) +$$

$$+\varepsilon N_0(x,y)\nabla u(x) + \varepsilon \nabla_x N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon \nabla_x N_0(x,y) u(x),$$

$$a(x,y)\nabla v^\varepsilon(x) + \alpha(x,y) v^\varepsilon(x) =$$

$$= a(x,y)(e^j + \nabla_y N_j(x,y))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + [a(x,y)\nabla_y N_0(x,y) + \alpha(x,y)]u(x) + \varepsilon a(x,y)\nabla^2 u(x) N_j(x,y) +$$

$$+\varepsilon a(x,y)N_0(x,y)\nabla u(x)+\varepsilon a(x,y)\nabla_x N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\varepsilon a(x,y)\nabla_x N_0(x,y)u(x)+$$

$$+\varepsilon\alpha(x,y)N_0(x,y)u(x)+\varepsilon\alpha(x,y)\left(N(x,y)\cdot\nabla u(x)\right),\quad y=\frac{x}{\varepsilon}.$$

Сравним полученный поток с потоком $a^0(x)\nabla u+\alpha^0(x)u$ усредненного уравнения. Для их разности имеем

$$R_\varepsilon=p^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+p^0(x,y)u(x)+r_{1,\varepsilon},$$

где

$$\begin{aligned} p^j(x,y)&=a(x,y)(e^j+\nabla_y N_j(x,y))-a^0(x)e^j,\\ p^0(x,y)&=a(x,y)\nabla_y N_0(x,y)+\alpha(x,y)-\alpha^0(x), \end{aligned}\tag{6.5}$$

$$r_{1,\varepsilon}=\varepsilon a(x,y)\nabla^2u(x)N_j(x,y)+\varepsilon a(x,y)N_0(x,y)\nabla u(x)+\varepsilon a(x,y)\nabla_x N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+$$

$$+\varepsilon a(x,y)\nabla_x N_0(x,y)u(x)+\varepsilon\alpha(x,y)N_0(x,y)u(x)+\varepsilon\alpha(x,y)\left(N(x,y)\cdot\nabla u(x)\right),\quad y=\frac{x}{\varepsilon}.\tag{6.6}$$

В силу (2.5) и (6.3) векторы из (6.5) периодические и соленоидальные с нулевым средним. Оба вектора обладают свойствами, перечисленными в лемме 4.1. Отсюда

$$\begin{aligned} \mathrm{div}R_\varepsilon=\mathrm{div}(r_{1,\varepsilon}-\varepsilon\mathrm{div}_x P^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}-\varepsilon P^j(x,y)\nabla\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}-\\ \varepsilon\mathrm{div}_x P^0(x,y)u(x)-\varepsilon P^0(x,y)\nabla u(x)),\quad y=\frac{x}{\varepsilon}, \end{aligned}\tag{6.7}$$

то есть исчезли слагаемые, не содержащие множитель ε.

Для разности так называемых скалярных потоков справедливо представление

$$r_\varepsilon\equiv\beta(x,y)\cdot\nabla v^\varepsilon(x)+\gamma(x,y)v^\varepsilon(x)-\beta^0(x)\cdot\nabla u(x)-\gamma^0(x)u(x)=$$

$$=s_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+s_0(x,y)u(x)+r_{2,\varepsilon},\quad y=\frac{x}{\varepsilon},$$

где

$$s_j(x,y)=\beta(x,y)\cdot(e^j+\nabla_y N_j(x,y))-\beta^0(x),$$

$$s_0(x,y)=\beta(x,y)\cdot\nabla_y N_0(x,y)+\gamma(x,y)-\gamma^0(x),$$

$$r_{2,\varepsilon}=\varepsilon\beta(x,y)\cdot\left(\nabla^2u(x)N(x,y)\right)+\varepsilon\beta(x,y)\cdot\nabla u(x)N_0(x,y)+$$

$$+\varepsilon\beta(x,y)\cdot\nabla_x N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\varepsilon\beta(x,y)\cdot\nabla_x N_0(x,y)u(x)+$$

$$+\varepsilon\gamma(x,y)N_0(x,y)u(x)+\varepsilon\gamma(x,y)\left(N(x,y)\cdot\nabla u(x)\right),\quad y=\frac{x}{\varepsilon}.$$

Отметим, что функции $s_j(x,y)$, $j=0,1,\dots,d$, имеют нулевое среднее, липшицевы по первой переменной, а также обладают следующими свойствами.

Лемма 6.1. *Найдутся такие векторы $S^j(x,\cdot) \in H^1_{per}(Y)^d$, $j = 0,1,\dots,d$, что справедливы представления*

$$s_j(x,y) = \mathrm{div}_y S^j(x,y),$$

при этом

$$\|S^j(x,\cdot)\|_{H^1_{per}(Y^d)} \le c_1 \|s_j(x,\cdot)\|_{H^1_{per}(Y)}, \quad c_1 = const(d,c).$$

Кроме того, $S^j(x,y)$ липшицев по x со значениями в $L^2_{per}(Y)^d$ и как следствие справедлива оценка

$$\|\mathrm{div}_x S^j(x,\cdot)\|_{H^1_{per}(Y)} \le c_2, \quad c_2 = (c, c_L).$$

Таким образом, разность r_ε можно записать в виде

$$r_\varepsilon = \varepsilon \mathrm{div}\left(S^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + S^0(x,y)u(x)\right) + r_{2,\varepsilon} -$$

$$-\varepsilon \mathrm{div}_x S^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} - \varepsilon \mathrm{div}_x S^0(x,y)u(x) - \varepsilon S^j(x,y)\cdot\nabla\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} - \tag{6.8}$$

$$-\varepsilon S^0(x,y)\cdot\nabla u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}.$$

В итоге из приведенных выражений имеем уравнение

$$A_\varepsilon w^\varepsilon + \mu w^\varepsilon = f_\varepsilon + \mathrm{div} F_\varepsilon, \tag{6.9}$$

где $w^\varepsilon = v^\varepsilon - u^\varepsilon$.

Функции f_ε и F_ε выписываются согласно (6.7) и (6.8) как

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon[\beta(x,y)\cdot\left(\nabla^2 u(x) N(x,y)\right) + \beta(x,y)\cdot\nabla u(x) N_0(x,y) +$$

$$+\beta(x,y)\cdot\nabla_x N_j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \beta(x,y)\cdot\nabla_x N_0(x,y)u(x) + \gamma(x,y)N_0(x,y)u(x) +$$

$$+\gamma(x,y)\left(N(x,y)\cdot\nabla u(x)\right) - \mathrm{div}_x S^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} - \mathrm{div}_x S^0(x,y)u(x) - \tag{6.10}$$

$$-S^j(x,y)\cdot\nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) - S^0(x,y)\cdot\nabla u(x) + \mu N(x,y)\cdot\nabla u(x) + \mu N_0(x,y)u(x)],$$

$$F_\varepsilon(x) = R_\varepsilon(x) + \varepsilon S^j(x,y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon S^0(x,y)u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon},$$

где R_ε определено согласно (6.7) и (6.6). Для уравнения (6.9) справедлива энергетическая оценка

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0(\|f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}).$$

Отсюда, учитывая структуру функций f_ε и F_ε, выводим

$$\|v^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0\varepsilon^2 \sum_i \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|b_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 |\Phi_i(x)|^2 dx, \tag{6.11}$$

где под Φ_i подразумевается $u(x)$, $\nabla u(x)$ или $\nabla^2 u(x)$. Множитель $b_i(x,y)$ сформирован из функций

$$P^j(x,y), \quad S^j(x,y), \quad \mathrm{div}_x P^j(x,y), \quad \mathrm{div}_x S^j(x,y), \quad N_j(x,y), \tag{6.12}$$

$$\begin{gathered} N_j(x,y)\alpha(x,y), \quad N_j(x,y)\beta(x,y), \quad N_j(x,y)\gamma(x,y), \\ \beta(x,y)\cdot\nabla_x N_j(x,y), \quad j = 0,1,\ldots,d. \end{gathered} \tag{6.13}$$

Множитель $b_i(x,y)$ в общем случае не принадлежит $L^\infty(Y)$, а поэтому не представляется возможным исключить его из правой части (6.11).

3. Чтобы обойти отмеченное выше препятствие, рассмотрим "смещенное" первое приближение

$$v^\varepsilon_\omega(x) = u(x) + \varepsilon N_j(x, y+\omega)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon N_0(x, y+\omega)u(x), \quad \omega \in Y, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \tag{6.14}$$

Оно отвечает задаче со сдвигом в коэффициентах по быстрой переменной:

$$\begin{gathered} -\mathrm{div}\left[a(x,y+\omega)\nabla u^\varepsilon_\omega(x) + \alpha(x,y+\omega)u^\varepsilon_\omega(x)\right] + \\ +\beta(x,y+\omega)\cdot\nabla u^\varepsilon_\omega(x) + \gamma(x,y+\omega)u^\varepsilon_\omega(x) + \mu u^\varepsilon_\omega(x) = f(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \omega \in Y. \end{gathered} \tag{6.15}$$

Тогда для разности $w^\varepsilon_\omega(x) = v^\varepsilon_\omega(x) - u^\varepsilon_\omega(x)$ справедлива оценка вида (6.11)

$$\|w^\varepsilon_\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0\varepsilon^2 \sum_i \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|b_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}+\omega\right)\right|^2 |\Phi_i(x)|^2 dx.$$

Отсюда, интегрируя по параметру сдвига $\omega \in Y$ и используя свойства функций (6.12), (6.13), выводим "проинтегрированную" оценку.

Теорема 6.1. *Пусть $u^\varepsilon(x)$ – решение задачи (6.1), а $v^\varepsilon_\omega(x)$ определено равенством (6.14). Тогда верна оценка*

$$\int\limits_Y \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(|u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) - v^\varepsilon_\omega(x)|^2 + |\nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) - \nabla v^\varepsilon_\omega(x)|^2\right) d\omega dx \le C\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx, \tag{6.16}$$

где константа C зависит от размерности d, параметра μ и постоянных λ, c_L и c_0.

Следствием "проинтегрированного" неравенства (6.16) является

Теорема 6.2. *Для разности решений задач (6.1) и (6.2) выполнена оценка*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{6.17}$$

где константа того же типа, что и в (6.16).

Из (6.17) следует оценка в операторной ($L^2 \to L^2$)-норме для разности резольвент исходного и усредненного оператора

$$\|(A_\varepsilon + \mu)^{-1} - (A_0 + \mu)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon.$$

Другим следствием "проинтегрированной" оценки (6.16) будет неравенство

$$\|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{6.18}$$

где

$$\begin{gathered}\hat{v}^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon \int\limits_Y N_j(x - \varepsilon\omega, y) \frac{\partial u(x - \varepsilon\omega)}{\partial x_j} d\omega + \varepsilon \int\limits_Y N_0(x - \varepsilon\omega, y) u(x - \varepsilon\omega) d\omega = \\ = u(x) + \varepsilon K_\varepsilon(x).\end{gathered} \tag{6.19}$$

Справедлива следующая

Теорема 6.3. *Пусть $u(x)$ – решение задачи (6.1), а $\hat{v}^\varepsilon(x)$ – первое приближение со сглаженным корректором (6.19). Тогда верна оценка (6.18) с константой того же типа, что и в (6.16).*

Из (6.18) следует оценка в операторной ($L^2 \to H^1$)-норме для разности между резольвентой исходного оператора $(A_\varepsilon + \mu)^{-1}$ и ее аппроксимацией в виде суммы $(A_0 + \mu)^{-1}$ с корректирующим оператором, то есть

$$\|(A_\varepsilon + \mu)^{-1} - (A_0 + \mu)^{-1} - \mathcal{K}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon.$$

Структура оператора $\mathcal{K}_\varepsilon$ легко восстанавливается из формулы (6.19).

Ещё одним следствием "проинтегрированной" оценки является так называемая H^1-оценка без корректора, в которой участвует сглаживание по Стеклову, а именно,

$$\|(u^\varepsilon)_\varepsilon - u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.20}$$

Глава 2

Операторные оценки повторного усреднения

§1. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ скалярное эллиптическое уравнение:

$$\begin{gathered} u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_\varepsilon u^\varepsilon + u^\varepsilon = f, \ f \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ A_\varepsilon = -\mathrm{div} a^\varepsilon(x)\nabla. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь положительно определенная симметрическая матрица $a^\varepsilon(x)$ имеет "двухмасштабную структуру"

$$a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}\right), \tag{1.2}$$

где матрица $a(y,z)$ 1-периодична по переменным z и y, ячейка периодичности — единичный куб $Z = Y = [-1/2, 1/2)^d$. Предполагается также, что матрица $a(y,z)$ каратеодориева (непрерывна по y для почти всех z и измерима по z при любом y), так что формула (1.2) даёт измеримую функцию.

Видим, что условия на матрицу $a(y,z)$ несимметричны относительно переменных y и z. При $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$ в задаче (1.1) имеем быстро осциллирующие коэффициенты, ε- и δ-периодические по первой и второй группе переменных соответственно. Пусть порядки бесконечно малых ε и δ разведены, при этом

$$\delta = \delta(\varepsilon), \ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0. \tag{1.3}$$

Уточним и дополним высказанные выше условия на функцию $a(z,y)$:

$$\lambda \xi^2 \le a(y,z)\xi \cdot \xi \le \lambda^{-1}\xi^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda > 0, \tag{1.4}$$

$$|a(y,z) - a(y',z)| \leq c_L |y - y'| \tag{1.5}$$

для почти всех $z \in \mathbb{R}^d$ и всех $y,\ y' \in \mathbb{R}^d$.

Условие (1.4) обеспечивает однозначную разрешимость уравнения (1.1), при этом выполнена энергетическая оценка

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad c = const(\lambda). \tag{1.6}$$

Усредненным будет уравнение

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d),\ A_0 u + u = f,\ A_0 = -\mathrm{div} a^0 \nabla, \tag{1.7}$$

с постоянной положительно определенной матрицей a^0. Точное определение её дано ниже в (1.11)–(1.14).

Наша цель – получить сходимость по операторной норме резольвенты исходного к резольвенте усредненного оператора с оценкой вида

$$\|(A_\varepsilon + 1)^{-1} - (A_0 + 1)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}. \tag{1.8}$$

Резольвенту $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ можно рассматривать как оператор из $L^2(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$. В этом случае ее аппроксимация в операторной норме задается суммой $(A_0 + 1)^{-1} + \mathcal{K}_\varepsilon$, где $\mathcal{K}_\varepsilon$ – корректирующий оператор, построение которого дано в §5 (см. (5.3) и (5.2)). Тогда справедлива оценка

$$\|(A_\varepsilon + 1)^{-1} - (A_0 + 1)^{-1} - \mathcal{K}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}, \tag{1.9}$$

где константа C того же типа, что и в (1.8).

Для вывода оценок (1.8) и (1.9) используем метод сдвига. Этот подход мы уже применили для локально-периодического усреднения, а теперь адаптируем его и для многомасштабных структур. Только в целях простоты и наглядности здесь рассмотрен случай двух масштабов в коэффициентах уравнения (см. (1.2), (1.3)).

Операторную оценку (1.8) обеспечивает следующая

Теорема 1.1. *Для разности решений задач (1.1) и (1.7) верна оценка*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.10}$$

Константа C зависит от размерности d и постоянных из условий (1.4), (1.5).

Неравенство (1.10) будет получено как следствие из так называемой проинтегрированной H^1-оценки (2.8).

Теперь скажем о построении предельного оператора A_0. В случае двухмасштабного усреднения используются две задачи на ячейке периодичности. Первая из них того же типа, что задача (2.5) (см. гл. 1, §2), а именно,

$$M_j(y,\cdot) \in H^1_{per}(Z),\ \mathrm{div}_z[a(y,z)(e^j + \nabla_z M_j(y,z))] = 0,\ \langle M_j(y,\cdot)\rangle_Z = 0, \\ j = 1,\dots,d, \tag{1.11}$$

где переменная y играет роль параметра. Вторая задача имеет вид

$$N_j \in H^1_{per}(Y),\ \mathrm{div}_y[\hat{a}(y)(e^j + \nabla_y N_j(y))] = 0,\ \langle N_j\rangle_Y = 0, \\ j = 1,\dots,d, \tag{1.12}$$

где матрица $\hat{a}(y)$ определяется равенством

$$\hat{a}(y) = \langle a(y,\cdot)(I + \nabla_z M(y,\cdot))\rangle_Z. \tag{1.13}$$

Здесь I – единичная $d\times d$-матрица, M – вектор с координатами M_j. Матрицу $\hat{a}(y)$ назовем "промежуточной" усредненной матрицей. Эта матрица симметрична и удовлетворяет условию типа (1.4), следовательно, задача (1.12) хорошо поставлена также, как задача (1.11).

После повторного усреднения получим усредненную матрицу

$$a^0 = \langle \hat{a}(\cdot)(I + \nabla_y N(\cdot))\rangle_Y. \tag{1.14}$$

Эта постоянная матрица будет симметричной и положительно определенной. Тогда и задача (1.7) однозначно разрешима, её решение u принадлежит не только $H^1(\mathbb{R}^d)$, но и $H^2(\mathbb{R}^d)$.

§2. Смещенное первое приближение

Начнем этот параграф с пояснения, почему в наших предположениях в двухмасштабной задаче необходимо отказаться от классического первого приближения, построенного по формулам (0.35)-(0.34), а именно,

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N(y)\cdot\nabla u(x) + \delta M(y,z)\cdot(I + \nabla_y N(y))\nabla u(x),\ y = \frac{x}{\varepsilon},\ y = \frac{x}{\delta}. \tag{2.1}$$

Обсудим некоторые свойства этого приближения.

Заметим, что первое приближение $v^\varepsilon(x)$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}^d)$, благодаря свойствам функций N_j, M_j (см. лемму 0.4). Действительно, второе и третье слагаемые из суммы (2.1) допускают оценку:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla u(x)\right|^2 dx \le c \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2\, dx,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| M\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}\right) \left(I + \nabla_y N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \nabla u(x) \right|^2 dx \le c \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

так как $N_j \in L^\infty(Y)$, $\nabla_y N_j \in L^\infty(Y)^d$, а $M_j(y,\cdot) \in L^\infty(Z)$ для всех y.

Однако, градиент ∇v^ε не обязательно принадлежит $L^2(\mathbb{R}^d)^d$ из-за вхождения в его структуру, вообще говоря, неограниченных функций $\nabla_y M(y,z)$, $\nabla_z M(y,z)$ и $\nabla_y^2 N$. Эти трудности преодолеваются введением параметра смещения, если адаптировать метод сдвига, применявшийся В.В. Жиковым в задаче классического усреднения, к нашему случаю.

Рассмотрим так называемую смещенную матрицу

$$a_\sigma(y,z) = a(y, z+\sigma),\ y = \frac{x}{\varepsilon},\ z = \frac{x}{\delta}. \tag{2.2}$$

В случае классического усреднения смещенная матрица – это $a\left(\frac{x}{\varepsilon} + \omega\right) = a(y+\omega)\,(\omega \in Y)$, и, если $u^\varepsilon(x)$ – решение исходного уравнения, то $u^\varepsilon(x + \varepsilon\omega)$ будет решением уравнения со смещенными матрицей и правой частью. Попробуем поступить аналогично в задаче с многими масштабами.

Если взять $u^\varepsilon(x + \delta\sigma)\,(\sigma \in Z)$, это будет решение задачи (1.1) с матрицей

$$a\left(y + \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, z + \sigma\right).$$

Благодаря липшицевости по первому аргументу (см. (1.5)) и условию (1.3), эта матрица близка к матрице (2.2) и при замене её на матрицу (2.2) решение смещенного уравнения мало изменяется. Этим мотивирован выбор смещенной матрицы вида (2.2).

Введем связанную со смещенной матрицей (2.2) задачу

$$-\mathrm{div}\,(a_\sigma^\varepsilon(x) \nabla u_\sigma^\varepsilon(x)) + u_\sigma^\varepsilon(x) = f(x) \tag{2.3}$$

с той же правой частью, что и в (1.1).

Уравнение (1.1) получается из (2.3) при $\sigma = 0$. Что касается решений $M_j(y,z,\sigma)$, отвечающих смещенной матрице, они получаются сдвигом из решений $M_j(y,z)$ задачи (1.11), а именно, $M_j(y,z,\sigma) = M_j(y, z+\sigma)$. Отсюда промежуточная усредненная матрица $\hat{a}(y)$ и вслед за тем решения второй вспомогательной задачи, то есть $N_j(y)$, уже не зависят от сдвига, а потому усредненная матрица и усредненное уравнение тоже не зависят от параметра σ.

Проведённый выше анализ показывает, что обычное первое приближение для решения задачи (2.3) имеет вид

$$v_\sigma^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon u_1(x,y) + \delta u_2(x,y,z+\sigma),\ y = \frac{x}{\varepsilon},\ z = \frac{x}{\delta}, \tag{2.4}$$

или в более подробной записи (см. (0.33), (0.34))

$$v^\varepsilon_\sigma(x) = u(x) + \varepsilon N(y)\cdot\nabla u(x) + \delta M\,(y, z+\sigma)\cdot(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x),\ y=\frac{x}{\varepsilon},\ z=\frac{x}{\delta}. \tag{2.5}$$

Также, как раньше в отношении $v^\varepsilon(x)$, исследуем свойства интегрируемости приближения $v^\varepsilon_\sigma(x)$ и его градиента по x. Теперь это функции удвоенного числа переменных, которые рассматриваются на произведении $Z\times\mathbb{R}^d$. Очевидно, что $v^\varepsilon_\sigma\in L^2(Z\times\mathbb{R}^d)$. Покажем, что и градиент $\nabla v^\varepsilon_\sigma$ как функция переменных σ и x принадлежит $L^2(Z\times\mathbb{R}^d)^d$. Запишем градиент как сумму

$$\nabla v^\varepsilon_\sigma(x) = \nabla u(x) + \nabla_y N(y)\nabla u(x) + \nabla_z M(y,z+\sigma)(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x)+$$
$$+\frac{\delta}{\varepsilon}\nabla_y\left[M(y,z+\sigma)\cdot(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x)\right] + \varepsilon\nabla^2 u(x)N(y)+$$
$$+\delta(I+\nabla_y N(y))\nabla^2 u(x)M(y,z+\sigma),\qquad y=\frac{x}{\varepsilon},\ z=\frac{x}{\delta},$$

и изучим L^2-интегрируемость каждого слагаемого. Видно, что для второго, пятого и шестого слагаемых, достаточно воспользоваться свойствами $iv)$, $vi)$ леммы 0.4. Отдельного рассмотрения требуют третье и четвертое слагаемые.

Для третьего слагаемого имеем оценку

$$\begin{gathered}\int\limits_{Z\times\mathbb{R}^d}\left|\nabla_z M(\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\delta}+\sigma)(I+\nabla_y N(\frac{x}{\varepsilon}))\nabla u(x)\right|^2 d\sigma dx \le \\ \int\limits_{\mathbb{R}^d}|(I+\nabla_y N(\frac{x}{\varepsilon}))\nabla u(x)|^2\left(\int\limits_Z\left|\nabla_z M(\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\delta}+\sigma)\right|^2 d\sigma\right)dx\le \\ \sup_y\|\nabla_z M(y,\cdot)\|^2_{L^2(Z)}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|(I+\nabla_y N(\frac{x}{\varepsilon}))u(x)|^2dx \le c\int\limits_{\mathbb{R}^d}|u(x)|^2dx,\end{gathered} \tag{2.6}$$

где мы воспользовались утверждениями $i)$ и $iv)$ леммы 0.4.

Четвертое слагаемое требует более детального анализа, основанного на представлении

$$\begin{gathered}\nabla_y\left[M(y,z+\sigma)\cdot(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x)\right]= \\ =\nabla_y M(y,z+\sigma)(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x) + \nabla^2_y(N(y)\cdot\nabla u(x))M(y,z+\sigma)d\sigma = T_1+T_2.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Нетрудно показать, что $T_1\in L^2(Z\times\mathbb{R}^d)$. Действительно,

$$\int\limits_{Z\times\mathbb{R}^d}|T_1|^2dx = \int\limits_{Z\times\mathbb{R}^d}\left|\nabla_y M(\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\delta}+\sigma)(I+\nabla_y N(\frac{x}{\varepsilon}))\nabla u(x)\right|^2 d\sigma dx =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_Z\left|\nabla_y M(\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\delta}+\sigma)(I+\nabla_y N(\frac{x}{\varepsilon}))\nabla u(x)\right|^2 d\sigma dx\le$$

$$\sup_y \|\nabla_y M(y,\cdot)\|^2_{L^2(Z)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big|(I+\nabla_y N(\frac{x}{\varepsilon}))\nabla u(x)\Big|^2 dx$$

и осталось только воспользоваться L^∞-ограниченностью $\nabla_y N$, а также вытекающим из утверждением ii) леммы 0.4 свойством

$$\sup_y \|\nabla_y M(y,\cdot)\|^2_{L^2(Z)} \le c.$$

Принадлежность пространству $L^2(Z\times\mathbb{R}^d)$ слагаемого T_2 доказывается несколько иначе. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_Z |T_2|^2 d\sigma dx \le c\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla^2_y N(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u(x)|^2 dx,$$

где учли ограниченность функции M. Теперь вспомним свойства

$$\nabla u \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad \nabla^2_y N \in L^p_{per}(Y)\,(\forall p>1)$$

(последнее см. в пункте v) леммы 0.4). Тогда по лемме 4.2, приведенной ниже в этом разделе, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_Z |T_2|^2 dx \le c\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla^2_y N(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u(x)|^2 dx \le C\int\limits_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u|^2 + |\nabla^2 u|^2) dx < \infty.$$

В итоге заключаем, что $\nabla v^\varepsilon \in L^2(Z\times\mathbb{R}^d)$.

Дальнейшей нашей целью будет "проинтегрированная оценка". Сформулируем этот ключевой для нас результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть $u^\varepsilon(x)$ – решение исходной задачи (1.1) и $v^\varepsilon_\sigma(x)$ – первое приближение, определенное равенством (2.4). Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_Z\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(|u^\varepsilon(x+\delta\sigma) - v^\varepsilon_\sigma(x)|^2 + |\nabla u^\varepsilon(x+\delta\sigma) - \nabla v^\varepsilon_\sigma(x)|^2\right) dx d\sigma \le$$

$$\le C\max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx, \tag{2.8}$$

где константа C зависит только от размерности d и постоянных из условий (1.4), (1.5).

Заметим, что в силу установленных выше свойств функции $v^\varepsilon_\sigma(x)$ интеграл в левой части оценки (2.8) имеет смысл.

Прежде, чем доказывать "проинтегрированную оценку", покажем как из неё выводится интересующая нас оценка (1.10).

Прежде всего, в силу (2.8), имеем

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_Z |u^\varepsilon(x+\delta\sigma)-v^\varepsilon_\sigma(x)|^2 d\sigma dx \le C\max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2dx$$

(отбросили слагаемое, содержащее градиент, и поменяли порядок интегрирования). Далее внутренний интеграл оценим снизу по неравенству Коши – Буняковского:

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\int_Z [u^\varepsilon(x+\delta\sigma)-v^\varepsilon_\sigma(x)]\,d\sigma|^2 dx \le C\max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2dx.$$

Учитывая структуру функции $v^\varepsilon_\sigma(x)$ (см. (2.4), (2.5)), делаем упрощение:

$$\int_Z v^\varepsilon_\sigma(x)d\sigma = u(x)+\varepsilon u_1(x,\frac{x}{\varepsilon}),$$

так как

$$\int_Z u_2(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\delta}+\sigma)d\sigma = 0$$

за счет условия нормировки $\langle M(y,\cdot)\rangle = 0$. Поэтому последнее неравенство приводится к виду

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\int_Z u^\varepsilon(x+\delta\sigma)d\sigma - u(x)-\varepsilon u_1(x,\frac{x}{\varepsilon})|^2dx \le C\max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2dx. \tag{2.9}$$

Запишем

$$\int_Z u^\varepsilon(x+\delta\sigma)d\sigma - u(x) = \left(\int_Z u^\varepsilon(x+\delta\sigma)d\sigma - u(x)-\varepsilon u_1(x,\frac{x}{\varepsilon})\right)+\varepsilon u_1(x,\frac{x}{\varepsilon}). \tag{2.10}$$

Здесь $u_1(x,y) = N(y)\cdot\nabla u(x)$, множитель $N(y)$ ограничен (см. iv) леммы 0.4), а $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ в силу энергетической оценки для усреднённой задачи. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^d}|u_1(x,\frac{x}{\varepsilon})|^2dx \le C\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2dx. \tag{2.11}$$

Из (2.9)–(2.11) выводим

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\int_Z u^\varepsilon(x+\delta\sigma)d\sigma - u(x)|^2dx \le C\max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2dx.$$

Остаётся заменить здесь сглаживание по Стеклову $\int_Z u^\varepsilon(x+\delta\sigma)d\sigma$ на саму функцию $u^\varepsilon(x)$, что не меняет характер оценки, в силу свойства сглаживания (см. (0.29)) и энергетической оценки (1.6). В итоге выводим (1.10). Вместе с тем доказана теорема 2.1.

§3. Доказательство проинтегрированной оценки

Докажем теорему 2.1. Доказательство разбивается на несколько этапов.

1° Согласно (0.33) и (0.34) запишем первое приближение

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N(y)\cdot\nabla u(x) + \delta M(y,z)\cdot(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x),\ y=\frac{x}{\varepsilon},\ z=\frac{x}{\delta}.$$

Отсюда

$$\nabla v^\varepsilon(x) = (I+\nabla_y N(y))\nabla u(x) + \nabla_z M(y,z)(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x) +$$
$$+\varepsilon N(y)\nabla^2 u(x) + \frac{\delta}{\varepsilon}\nabla_y[M(y,z)\cdot(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x)] + \delta M(y,z)(I+\nabla_y N(y))\nabla^2 u(x),$$
$$y=\frac{x}{\varepsilon},\ z=\frac{x}{\delta}.$$

Введем обозначение для разности потоков

$$R_\varepsilon \equiv a^\varepsilon\nabla v^\varepsilon - a^0\nabla u. \tag{3.1}$$

Используя определение усредненной матрицы a^0 (см. (1.14)) и матрицы $\hat a$ (см. (1.13)), запишем

$$R_\varepsilon = a^\varepsilon\nabla v^\varepsilon - a^0\nabla u = a(y,z)(I+\nabla_z M(y,z))(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x) -$$
$$-\hat a(y)(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x) + \hat a(y)(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x) - a^0\nabla u(x) + r^1_\varepsilon, \tag{3.2}$$

где остаточный член r^1_ε содержит члены с малыми множителями, то есть

$$r^1_\varepsilon(x) = a(z,y)[\varepsilon N(y)\nabla^2 u(x) + \frac{\delta}{\varepsilon}\nabla_y[M(y,z)(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x)] +$$
$$+\delta M(y,z)(I+\nabla_y N(y))\nabla^2 u(x)],\ y=\frac{x}{\varepsilon},\ z=\frac{x}{\delta}. \tag{3.3}$$

Преобразуем первую и вторую разность из правой части (3.2) следующим образом:

$$a(y,z)(I+\nabla_z M(y,z))(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x) -$$
$$-\hat a(y)(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x) + \hat a(y)(I+\nabla_y N(y))\nabla u(x) - a^0\nabla u(x) =$$
$$= [a(y,z)(I+\nabla_z M(y,z)) - \hat a(y)][\nabla u(x) + \nabla_y N(y)\nabla u(x)] + [\hat a(y)(I+\nabla_y N(y)) - a^0]\nabla u(x) =$$
$$= [a(y,z)(e^j + \nabla_z M_j(y,z)) - \hat a(y)e^j]\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j}N(y)\cdot\nabla u(x)\right) +$$
$$+[\hat a(y)(e^j + \nabla_y N_j(y)) - a^0 e^j]\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} =$$
$$= [a(y,z)(e^j + \nabla_z M_j(y,z)) - \hat a(y)e^j]\zeta_j(x,y) + [\hat a(y)(e^j+\nabla_y N_j(y)) - a^0 e^j]\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}.$$

В итоге равенство (3.2) представится в виде суммы

$$R_\varepsilon(x) = \zeta_j(x,y)p^j(y,z) + g^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + r^1_\varepsilon(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon},\ z = \frac{x}{\delta}, \tag{3.4}$$

где имеем скалярные функции

$$\zeta_j(x,y) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j}N(y)\cdot\nabla u(x)$$

и векторы

$$p^j(y,z) = a(y,z)(e^j + \nabla_z M^j(y,z)) - \hat{a}(y)e^j, \tag{3.5}$$

$$g^j(y) = \hat{a}(y)(e^j + \nabla_y N^j(y)) - a^0 e^j. \tag{3.6}$$

Отметим, что векторы $p^j(y,z)$ и $g^j(y)$ удовлетворяют соотношениям:

$a)$ $\mathrm{div}_z p^j(y,z) = 0,\ \langle p^j(y,\cdot)\rangle_Z = 0$ в силу (1.11) и (1.13);

$b)$ $\mathrm{div}_y g^j(y) = 0,\ \langle g^j\rangle_Y = 0$ в силу (1.12) и (1.14).

Используя представления (i), (ii) леммы 4.1 (сформулированной и доказанной в следующем параграфе), первые слагаемые в (3.4) запишем как

$$\begin{gathered} r^2_\varepsilon \equiv p^j(y,z)\zeta_j(x,y) = \delta\mathrm{div}(P^j(y,z)\zeta_j(x,y)) - \frac{\delta}{\varepsilon}\mathrm{div}_y\left(P^j(y,z)\zeta_j(x,y)\right) - \\ -\delta P^j(y,z)\nabla_x\zeta_j(x,y), \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$r^3_\varepsilon \equiv g^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \varepsilon\mathrm{div}\left(G^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) - \varepsilon G^j(y)\nabla_x\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right), \tag{3.8}$$

$$y = \frac{x}{\varepsilon},\ z = \frac{x}{\delta}.$$

Таким образом, из (3.2)-(3.8) получаем равенство

$$R_\varepsilon = r^1_\varepsilon + r^2_\varepsilon + r^3_\varepsilon. \tag{3.9}$$

Заметим, что вектор $\mathrm{div}\left(G^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)$ в (3.8) обладают свойством соленоидальности:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathrm{div}\left(G^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}G^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla^2\varphi(x)dx = 0 \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

где равенство нулю имеет место за счет того, что $\nabla^2\varphi$ – симметрическая матрица, а G^j – кососимметрическая. Соленоидальность вектора $\mathrm{div}\left(P^j(y,z)\zeta_j(x,y)\right)$ доказывается аналогично. В итоге из (3.9) получаем для невязки $\mathrm{div}R_\varepsilon$ выражение

$$\mathrm{div}R_\varepsilon = \mathrm{div}(r^1_\varepsilon + r^2_\varepsilon + r^3_\varepsilon). \tag{3.10}$$

Отметим, что в (3.10) под знаком дивергенции стоят слагаемые, содержащие малые множители (см. (3.3), (3.7), (3.8)).

2° Используя приведенное построение, имеем

$$A_\varepsilon(v^\varepsilon - u^\varepsilon) + (v^\varepsilon - u^\varepsilon) = -\mathrm{div}(a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon) + \mathrm{div}(a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) + v^\varepsilon - u^\varepsilon = -\mathrm{div}(a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon) + v^\varepsilon - f =$$

$$= -\mathrm{div}(a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon) + v^\varepsilon + \mathrm{div}(a^0 \nabla u) - u = -\mathrm{div}(a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a^0 \nabla u) + v^\varepsilon - u.$$

Из (3.10) получим

$$A_\varepsilon(v^\varepsilon - u^\varepsilon) + (v^\varepsilon - u^\varepsilon) = -\mathrm{div} R_\varepsilon + r_\varepsilon^4, \qquad (3.11)$$

где слагаемое r_ε^4 определено равенством

$$r_\varepsilon^4 = \varepsilon N(y) \cdot \nabla u(x) + \delta M(y,z) \cdot (I + \nabla_y N(y)) \nabla u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon},\ z = \frac{x}{\delta}. \qquad (3.12)$$

Для разности $v^\varepsilon - u^\varepsilon$ имеем уравнение вида

$$A_\varepsilon w^\varepsilon + w^\varepsilon = f_\varepsilon + \mathrm{div} F_\varepsilon, \qquad (3.13)$$

где

$$f_\varepsilon = r_\varepsilon^4, \quad F_\varepsilon = R_\varepsilon = -(r_\varepsilon^1 + r_\varepsilon^2 + r_\varepsilon^3), \qquad (3.14)$$

а выражения r_ε^1, r_ε^2, r_ε^3 и r_ε^4 определены в (3.3), (3.7), (3.8) и (3.12). Для уравнения (3.13) справедлива энергетическая оценка

$$\|w^\varepsilon\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0(\|f_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|F_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}),$$

из которой с учетом (3.14) получаем

$$\|w^\varepsilon\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0 \sum_{i=1}^4 \|r_\varepsilon^j\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \qquad (3.15)$$

где r_ε^i, $i = 1, \dots 4$, определены в (3.3), (3.7), (3.8), (3.12). Структура функций r_ε^i такова, такова, что из (3.15) не следует интересующая нас оценка (2.8)

3° Обратимся к смещенной задаче (2.3). Первым приближением к u_σ^ε является v_σ^ε – смещенное первое приближение, определенное в (2.4). Применим к разности $w_\sigma^\varepsilon(x) = v_\sigma^\varepsilon(x) - u_\sigma^\varepsilon(x)$ выведенную выше оценку (3.15). Тогда после интегрирования по $\sigma \in Z$ получаем

$$\int_Z \|w_\sigma^\varepsilon\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} d\sigma \le c_0 \sum_j \int_Z \int_{\mathbb{R}^d} \left| b_j\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta} + \sigma\right)\right|^2 dx d\sigma. \qquad (3.16)$$

Здесь функции $b_j(x,y,z)$ сформированы из выражений $r^i_\varepsilon(x) = r^i(x,y,z)$, $i = 1,\ldots 4$, при этом каждая из $b_j(x,y,z)$ содержит множитель типа ε, $\frac{\delta}{\varepsilon}$ или δ. Например, в правую часть (3.16) через слагаемое r^2_ε входит интеграл:

$$\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 \int\limits_Z \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|\mathrm{div}_y(P^j(y,z+\sigma)\zeta_j(x,y))\right|^2 dxd\sigma =$$

$$\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_Z \left|\mathrm{div}_y P^j(y,z+\sigma)\zeta_j(x,y) + P^j(y,z+\sigma)\nabla_y\zeta_j(x,y)\right|^2 d\sigma dx \le$$

$$c\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 \left[\int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_Z |\mathrm{div}_y P^j(y,z+\sigma)|^2 |\nabla u(x)|^2 d\sigma dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_Z |P^j(y,z+\sigma)|^2 |\nabla^2 N(y)\nabla u(x)|^2 d\sigma dx\right] \le$$

$$c_1\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 c\sup_y \|\nabla_y P^j(y,\cdot)\|^2_{L^2_{per}(Z)} \|\nabla u(x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$c_1\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 \sup_y \|P^j(y,\cdot)\|^2_{L^2_{per}(Z)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla^2 N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\nabla u(x)\right|^2 \le dx \le \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 C\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

В проведенной оценке использованы свойства функций N_j, P^j, ζ_j и u (см. лемму 0.4, лемму 4.1 из следующего параграфа и энергетическую оценку (0.25)). Таким образом, оценили один интеграл из правой части (3.16). Для оценки остальных интегралов нужно использовать схожие соображения. В итоге получим

$$\int\limits_Z \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(|u^\varepsilon_\sigma(x) - v^\varepsilon_\sigma(x)|^2 + |\nabla u^\varepsilon_\sigma(x) - \nabla v^\varepsilon_\sigma(x)|^2\right) dxd\sigma \le$$

$$\le C\max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f^2(x)dx. \tag{3.17}$$

4° Следующий этап в доказательстве проинтегрированной оценки – показать возможность замены в (3.17) функции $u^\varepsilon_\sigma(x)$ на $u^\varepsilon(x+\delta\sigma)$, где $u^\varepsilon(x)$ – решение исходного уравнения (1.1).

Очевидно, что $u^\varepsilon(x+\delta\sigma)$ будет решением уравнения

$$-\mathrm{div}\left(\left(\frac{x}{\varepsilon} + \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \frac{x}{\delta} + \sigma\right)\nabla u^\varepsilon(x+\delta\sigma)\right) + u^\varepsilon(x+\delta\sigma) = f(x+\delta\sigma). \tag{3.18}$$

В то же время $u^\varepsilon_\sigma(x)$ есть решение уравнения

$$-\mathrm{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta} + \sigma\right)\nabla u^\varepsilon_\sigma(x)\right) + u^\varepsilon_\sigma(x) = f(x).$$

Эти два уравнения отличаются малым сдвигом в коэффициентах и в правой части. Естественно ожидать, что и решения мало отличаются друг от друга. Проведём соответствующую оценку.

Для разности $z_\sigma^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x+\delta\sigma) - u_\sigma^\varepsilon(x)$ имеет место уравнение

$$-\mathrm{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}+\frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \frac{x}{\delta}+\sigma\right)\nabla z_\sigma^\varepsilon(x)\right) + z_\sigma^\varepsilon(x) = F_{0,\sigma}(x) + \mathrm{div}F_\sigma(x), \tag{3.19}$$

где

$$\begin{gathered} F_{0,\sigma}(x) = f(x+\delta\sigma) - f(x), \\ F_\sigma(x) = \left[a\left(\frac{x}{\varepsilon}+\frac{\delta\sigma}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}+\sigma\right) - a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}+\sigma\right)\right]\nabla u_\sigma^\varepsilon(x). \end{gathered} \tag{3.20}$$

Справедливо энергетическое неравенство

$$\|z_\sigma^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0(\|F_{0,\sigma}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} + \|F_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}). \tag{3.21}$$

Для функций из (3.20) стоящие здесь в правой части нормы имеют нужный порядок малости. Для оценки первого слагаемого в (3.21) используем лемму 0.2, а для оценки второго – условие Липшица (1.5). Поэтому

$$\|F_{0,\sigma}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \le c\delta\sigma\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|F_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma c_L\|\nabla u_\sigma^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \frac{\delta}{\varepsilon}c_0 c_L\sigma\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

где на последнем этапе учли энергетическое неравенство для решения u_σ^ε смещенной задачи. В результате получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|u^\varepsilon(x+\delta\sigma) - u_\sigma^\varepsilon(x)|^2 + |\nabla u^\varepsilon(x+\delta\sigma) - \nabla u_\sigma^\varepsilon(x)|^2)dx \le C\max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.22}$$

Из (3.22) видно, что в неравенстве (3.17) функцию $u_\sigma^\varepsilon(x)$ можно заменить на $u^\varepsilon(x+\delta\sigma)$. Таким образом, мы получили проинтегрированную оценку (2.8).

§4. О решениях вспомогательных задач

1. Начнем с доказательства леммы 0.4.

Проверим утверждения этой леммы, касающиеся функций $M_j(y,z)$. В силу интегрального тождества для задачи на ячейке (1.11)

$$\int\limits_Z a(y,z)(e^j + \nabla_z M_j(y,z))\cdot\nabla_z\varphi(z)dz = 0, \quad \varphi \in H^1_{per}(Z),$$

получаем равенство форм

$$\int\limits_Z a(y,z)(e^j+\nabla_z M_j(y,z))\cdot(e^j+\nabla_z M_j(y,z))dz = \int\limits_Z a(y,z)(e^j+\nabla_z M_j(y,z))\cdot e^j dz.$$

Оценивая левую форму снизу, а правую – сверху. По условию (1.4) на матрицу $a(y,z)$ имеем

$$\lambda\int\limits_Z |e^j+\nabla_z M_j(y,z)|^2dz \le \lambda^{-1}\int\limits_Z |e^j+\nabla_z M_j(y,z)|dz \le \lambda^{-1}\left(\int\limits_Z |e^j+\nabla_z M_j(y,z)|^2dz\right)^{\frac{1}{2}},$$

что дает

$$\left(\int\limits_Z |e^j+\nabla_z M_j(y,\cdot)|^2dz\right)^{\frac{1}{2}} \le \lambda^{-2},$$

Отсюда следует, что

$$\|M_j(y,\cdot)\|_{H^1_{per}(Z)} \le c,\ c = const(\lambda),$$

и свойство $i)$ доказано.

Следующее утверждение $ii)$ леммы 0.4 касается липшицевости функции $M_j(y,z)$ по переменной y. Положим

$$M_j^h(y,z) = M_j(y+h,z),\ a^h(y,z) = a(y+h,z).$$

Для решений уравнений

$$\mathrm{div}_z[a^h(y,z)(e^j+\nabla_z M_j^h(y,z))] = 0, \quad \mathrm{div}_z[a(y,z)(e^j+\nabla_z M_j(y,z))] = 0$$

запишем интегральные тождества на пробной функции $\varphi(z) = M_j^h(\cdot,z) - M_j(\cdot,z)$. Вычитанием получаем

$$\int\limits_Z (a^h(y,z)(e^j+\nabla_z M_j^h(y,z)) - a(y,z)(e^j+\nabla_z M_j(y,z)))\cdot\nabla\varphi(z)dz = 0,$$

$$\int\limits_Z a^h\nabla_z(M_j^h - M_j)\cdot\nabla_z(M_j^h-M_j)dz = -\int\limits_Z (a^h-a)(e^j+\nabla_z M_j)\cdot\nabla_z(M_j^h-M_j)dz.$$

Используя условие (1.5) и доказанное свойство ограниченности $M(y,z)$, выводим

$$\lambda\int\limits_Z |\nabla_z(M_j^h-M_j)|^2dz \le c_L|h|(\int\limits_Z |e^j+\nabla_z M_j|^2dz)^{\frac{1}{2}}(\int\limits_Z |\nabla_z(M_j^h-M_j)|^2dz)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \lambda^{-2}|h|c_L(\int\limits_Z |\nabla_z(M_j^h-M_j)|^2dz)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$\left(\int\limits_Z |\nabla_z(M_j^h - M_j)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda^{-3} c_L |h|$$

и липшицевость $M_j(\cdot, z)$ как функции со значениями в $H^1_{per}(Z)$ доказана.

Докажем липшицевость матрицы $\hat{a}(y)$. Поскольку

$$\hat{a}(y) = \langle a(y,\cdot)(I + \nabla_z M(y,\cdot))\rangle_Z,$$

$$\hat{a}^h(y) = \hat{a}(y+h) = \langle a(y+h,\cdot)(I + \nabla_z M(y+h,\cdot))\rangle_Z,$$

для разности $\hat{a}^h(y) - \hat{a}(y)$ имеем

$$(\hat{a}^h(y) - \hat{a}(y)) = \int\limits_Z (a^h(y,z)(I + \nabla_z M^h) - a(y,z)(I + \nabla_z M))dz =$$

$$= \int\limits_Z [a^h(I + \nabla_z M^h) - a(I + \nabla_z M^h) + a(I + \nabla_z M^h) - a(I + \nabla_z M)]dz =$$

$$= \int\limits_Z [(a^h - a)(I + \nabla_z M^h) - a\nabla_z(M - M^h)]dz.$$

Откуда, в силу доказанных уже свойств $i)$ и $ii)$, следует

$$|\hat{a}^h(y) - \hat{a}(y)| \leq c_L|h| \int\limits_Z |I + \nabla_z M^h| dz + \lambda^{-1} \int\limits_Z |\nabla_z(M^h - M)| dz \leq c|h|,$$

что и требуется.

Уравнение (1.12) можно записать как

$$\mathrm{div}_y(\hat{a}(y)\nabla N_j(y)) = -\mathrm{div}_y(\hat{a}(y)e^j).$$

Поскольку $\hat{a}(y)$ липшицева и, значит, $\mathrm{div}_y(\hat{a}(y)e^j) \in L^p_{per}(Y)$, к нему применима эллиптическая теория [39, гл. III, §15], что обеспечивает свойство $v)$.

Перейдем к утверждениям $iv)$ и $vi)$ леммы 0.4. Ограниченность решений задач на ячейке следует из обобщенного принципа максимума [40, гл. II, Приложение B].

Покажем, наконец, что ограничен градиент $\nabla_y N_j(y)$ для любого j. Продифференцировав уравнение (1.12) для фиксированного j (что возможно, благодаря липшицевости матрицы $\hat{a}(y)$), получаем систему уравнений

$$\mathrm{div}_y \left[\hat{a}(y)\nabla_y\left(\frac{\partial N_j(y)}{\partial y_k}\right) + \frac{\partial \hat{a}(y)}{\partial y_k}(e^j + \nabla_y N_j(y))\right] = 0, \quad k = 1, \ldots d.$$

Введем обозначение $v_k = \frac{\partial N_j}{\partial y_k}$ и перепишем систему относительно вектора $v = \{v_k\}$,

$$\mathrm{div}_y[\hat{a}(y)\nabla v_k + \frac{\partial \hat{a}(y)}{\partial y_k}(e^j + v)] = 0, \quad k = 1, \ldots d.$$

Известно [39, гл. VII, §2], что решение v такой диагональной системы принадлежит $L^\infty_{per}(Y)$. Отсюда выводится, что $\nabla_y N_j \in L^\infty_{per}(Y)$.
Лемма 0.1 полностью доказана.

2. Приведем доказательство леммы 0.1, не пользуясь гармоническим анализом, как это делается в [3, гл. 1, §1]. Будем ссылаться только на разрешимость периодической задачи для оператора Лапласа.

Рассмотрим периодическую задачу

$$\varphi_j \in H^1_{per}(Y), \quad \Delta\varphi_j = g_j, \ \langle\varphi_j\rangle_Y = 0, \ j = 1, \ldots, d. \tag{4.1}$$

Она имеет единственное решение $\varphi_j \in H^2_{per}(Y)$ с оценкой

$$\|\varphi_j\|_{H^2_{per}(Y)} \leq c\|g_j\|_{L^2_{per}(Y)}. \tag{4.2}$$

Решение уравнения (4.1) для фиксированного j удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\langle\nabla\varphi_j \cdot \nabla\eta\rangle = \langle g_j \eta\rangle \quad \forall \eta \in C^\infty_{per}(Y).$$

Полагая $\eta = \frac{\partial\psi}{\partial y_j}$, после суммирования по j получаем

$$-\langle\nabla\varphi_j \cdot \nabla\frac{\partial\psi}{\partial y_j}\rangle = \langle g_j \frac{\partial\psi}{\partial y_j}\rangle \quad \forall \psi \in C^\infty_{per}(Y),$$

или ввиду соленоидальности вектора g после интегрирования по частям в левой части

$$\langle\nabla(\mathrm{div}\,\varphi)\cdot\nabla\psi\rangle = 0 \quad \forall \psi \in C^\infty_{per}(Y).$$

Отсюда, поскольку $\langle\mathrm{div}\varphi\rangle_Y = 0$, выводим $\mathrm{div}\varphi = 0$.

Рассмотрим кососимметрическую матрицу

$$G_{ij} = \frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j} \tag{4.3}$$

и проверим, что $\mathrm{div} G = g$. Имеем

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial y_i} = \Delta\varphi_j - \frac{\partial}{\partial y_j}\mathrm{div}\varphi = \Delta\varphi_j = g_j,$$

то есть

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial y_i} = g_j.$$

Соотношение (0.19) следует из оценки (4.2) периодической задачи на ячейке. Лемма доказана.

3. Основные свойства векторов (3.5) и (3.6) сформулированы в следующей лемме.

Лемма 4.1. *Справедливы представления:*
(i) $g^j(y) = \mathrm{div}_y G^j(y)$,
где $G^j(y)$ *– кососимметрическая матрица (т.е.* $G^j_{ik} = -G^j_{ki}$*) из* $H^1_{per}(Y)^{d\times d}$*;*
(ii) $p^j(y,z) = \mathrm{div}_z P^j(y,z)$,
где $P^j(y,z)$ *– кососимметрическая матрица (т.е.* $P^j_{ik} = -P^j_{ki}$*), липшицева по* y *со значениями в* $H^1_{per}(Z)^{d\times d}$.
При этом

$$\begin{aligned} \|G^j\|_{H^1_{per}(Y)^{d\times d}} \le c\|g^j\|_{L^2_{per}(Y)^d}, \\ \|P^j(y,\cdot)\|_{H^1_{per}(Z)^{d\times d}} \le c\|p^j(y,\cdot)\|_{L^2_{per}(Z)^d} \end{aligned} \tag{4.4}$$

с константой $c = const(d,\lambda)$.

Кроме того,

$$g^j \in L^\infty_{per}(Y)^d, \quad G^j \in L^\infty_{per}(Y)^{d\times d}, \tag{4.5}$$

а матрица $P^j(y,z)$ *как липшицева по* y *функция со значениями в* $H^1_{per}(Z)^{d\times d}$ *обладает градиентом по* y *для почти всех* y*, причем*

$$\|\nabla_y P^j_{ik}(y,\cdot)\|_{H^1_{per}(Z)^d} \le c, \quad c = c(d,\lambda,c_L). \tag{4.6}$$

Доказательство. Представления i) и ii) вместе с необходимыми оценками следуют из леммы 0.1.

Докажем свойства из (4.5). Первое следует из определения g^j и ограниченности ∇N_j (см. лемму 0.4, iv)). Тогда второе свойство из (4.5) обеспечено эллиптической теорией и теоремами вложения: как решение уравнения (4.1) функция φ^k_j принадлежит пространству $W^{2,p}_{per}(Y)$ для всех $p \ge 1$, а это влечет ограниченность ее производных, а также G^j_{ik} в силу определения (4.3).

Матрица $P^j = \{P^j_{ik}\}$ определяется своими элементами

$$P^j_{ik} = \frac{\partial \psi^j_k}{\partial z_i} - \frac{\partial \psi^j_i}{\partial z_k},$$

где $\psi^j_k(y,\cdot) \in H^2_{per}(Z)$ есть решение уравнения

$$\Delta_z \psi^j_k(y,z) = p^j_k(y,z), \ \langle \psi^j_k(y,\cdot)\rangle_Z = 0, \ j = 1,\dots,d. \tag{4.7}$$

Правая часть $p_k^j(y,z)$ липшицева по y со значениями в $L^2_{per}(Z)$, согласно определению (3.5) и свойствам липшицевости участвующих в нем функций $a(y,z)$, $M(y,z)$ и $\hat{a}(y)$. Из (4.7) вытекает уравнение

$$\Delta_z[\psi_k^j(y+h,z)-\psi_k^j(y,z)]=p_k^j(y+h,z)-p_k^j(y,z),$$

из которого получаем оценки

$$\|\psi_k^j(y+h,\cdot)-\psi_k^j(y,\cdot)\|_{H^2_{per}(Z)}\le c\|p^j(y+h,\cdot)-p^j(y,\cdot)\|_{L^2_{per}(Z)^d}\le C|h|,$$

$$\|P^j(y+h,\cdot)-P^j(y,\cdot)\|_{H^1_{per}(Z)^{d\times d}}\le c\|p^j(y+h,\cdot)-p^j(y,\cdot)\|_{L^2_{per}(Z)^d}\le C|h|,$$

что доказывает липшицевость $P^j(y,\cdot)$ со значениями в $H^1_{per}(Z)^{d\times d}$. Отсюда следует, что градиент $\nabla_y P^j(y,\cdot)$ существует для почти всех y как ограниченная функция со значениями в $H^1_{per}(Z)^{d\times d}$ и справедливо соотношение (4.6). Лемма доказана.

4. Приведем доказательство леммы 0.3.

Исходя из очевидного неравенства

$$|(\varphi)_\varepsilon(x)|^2\le\int\limits_Y|\varphi(x+\varepsilon\omega)|^2d\omega$$

после интегрирования по всему пространству $\mathbb{R}^d$, перемены порядка интегрирования и замены переменной имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}|(\varphi)_\varepsilon(x)|^2dx\le\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_Y|\varphi(x+\varepsilon\omega)|^2dxd\omega=\int\limits_Y d\omega\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|^2dx=\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|^2dx,$$

то есть

$$\|(\varphi)_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\le\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

и неравенство (0.28) получено.

Проверим неравенство (0.29), а именно,

$$\|(\varphi)_\varepsilon-\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\le\frac{\varepsilon\sqrt{d}}{2}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Действительно, применяя те же приёмы, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}[(\varphi)_\varepsilon(x)-\varphi(x)]^2dx=\int\limits_{\mathbb{R}^d}[\int\limits_Y\varphi(x+\varepsilon\omega)d\omega-\varphi(x)]^2dx\le$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_Y|\varphi(x+\varepsilon\omega)d\omega-\varphi(x)|^2d\omega dx=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_Y|\int\limits_0^1\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x+t\varepsilon\omega)dt|^2d\omega dx\le$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{Y}\left(\int\limits_0^1|\nabla\varphi(x+t\varepsilon\omega)|^2dt\int\limits_0^1\varepsilon^2|\omega|^2dt\right)d\omega dx=\varepsilon^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{Y}|\omega|^2\int\limits_0^1|\nabla\varphi(x+t\varepsilon\omega)|^2dtd\omega\,dx\leq$$

$$\leq\varepsilon^2\frac{d}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\nabla\varphi|^2dx,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

5. Нам понадобится также следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Если* $b\in L^p_{per}(Y)\ \forall\ p\geq 1$, *и* $U\in H^1(\mathbb{R}^d)$, *то* $b(\frac{x}{\varepsilon})U(x)\in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Запишем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}|b(y)U(x)|^2dx=\langle b^2\rangle_Y\int\limits_{\mathbb{R}^d}|U(x)|^2dx+\int\limits_{\mathbb{R}^d}(b^2(y)-\langle b^2\rangle_Y)|U(x)|^2dx,\quad y=\frac{x}{\varepsilon}. \tag{4.8}$$

Введем периодическую задачу

$$-\mathrm{div}_y[\nabla_y\Phi(y)]=b^2(y)-\langle b^2(\cdot)\rangle_Y. \tag{4.9}$$

Так как b^2 суммируема с любой степенью p, то по эллиптической теории [39, гл. III, §15] $\nabla_y\Phi\in L^\infty_{per}(Y)$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(b^2(\frac{x}{\varepsilon})-\langle b^2\rangle)|U(x)|^2dx=-\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathrm{div}[(\nabla_y\Phi)(\frac{x}{\varepsilon})]|U(x)|^2dx=$$

$$=2\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^d}[(\nabla_y\Phi)(\frac{x}{\varepsilon})\cdot\nabla U(x)]U(x)dx\leq c\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|\nabla U(x)|^2+|U(x)|^2)dx,$$

откуда следует $b(\frac{x}{\varepsilon})U(x)\in L^2(\mathbb{R}^d)$.

§5. Построение корректора и H^1-оценка

В этом параграфе выведем H^1-оценку с корректором и построим в явном виде "корректирующий" оператор $\mathcal{K}_\varepsilon$ из оценки (1.9). Для этого в неравенстве (2.8) сделаем замену переменной $x'=x+\delta\sigma$ и затем поменяем порядок интегрирования, что даёт

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{Z}\left(|u^\varepsilon(x)-v^\varepsilon_\sigma(x-\delta\sigma)|^2+|\nabla u^\varepsilon(x)-\nabla v^\varepsilon_\sigma(x-\delta\sigma)|^2\right)d\sigma dx\leq$$

$$\leq C\max\{\varepsilon^2,\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского для внутренних интегралов:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big(|u^\varepsilon(x) - \int\limits_Z v^\varepsilon_\sigma(x-\delta\sigma)d\sigma|^2 +$$

$$+|\nabla u^\varepsilon(x) - \nabla \int\limits_Z v^\varepsilon_\sigma(x-\delta\sigma)d\sigma|^2 \Big) dx \le C \max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Из структуры функции v^ε_σ (см. (2.4)) следует

$$\int\limits_Z v^\varepsilon_\sigma(x-\delta\sigma)d\sigma = (u)_\delta + \varepsilon K_{\varepsilon,1}(x) + \delta K_{\varepsilon,2}(x), \tag{5.1}$$

где $(u)_\delta$ – сглаживание по Стеклову функции u и по определению

$$\begin{gathered} K_{\varepsilon,1}(x) = \int\limits_Z N\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma\right) \cdot \nabla u(x-\delta\sigma)d\sigma, \\ K_{\varepsilon,2}(x) = \int\limits_Z M\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \frac{x}{\delta}\right) \cdot \left(I + \nabla_y N\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma\right)\right) \nabla u(x-\delta\sigma)d\sigma. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Нетрудно заметить, что первое слагаемое в (5.1) можно заменить на u без ущерба для оценки. Это обеспечивается свойством сглаживания (см. лемма 0.3) и оценками для u.

В результате сглаженное приближение (5.1) принимает вид

$$\hat{v}^\varepsilon(x) = u(x) + K_\varepsilon(x), \quad K_\varepsilon(x) = \varepsilon K_{\varepsilon,1}(x) + \delta K_{\varepsilon,2}(x). \tag{5.3}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Для разности u^ε – решения задачи (1.1) и функции $\hat{v}^\varepsilon$, определенной в (5.3) и (5.2), имеет место оценка*

$$\|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{5.4}$$

с константой того же типа, что и в теореме 1.1.

Полученную оценку (5.4) можно представить в операторной форме (1.9).

Верен аналогичный оценке (5.4) результат, не связанный с каким-либо уравнением.

Теорема 5.2. *Если $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ и $\hat{v}^\varepsilon$ определено по функции u равенствами (5.3) и (5.2), то*

$$\|\mathrm{div}(a^\varepsilon \nabla \hat{v}^\varepsilon - a^0 \nabla u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \tag{5.5}$$

где константа C зависит от размерности d и постоянных λ, c_L.

§6. Уравнение с младшими членами

Полученный нами результат переносится на уравнения с младшими членами. Так же, как для локально-периодического усреднения, остановимся только на случае, когда коэффициенты при младших членах ограничены.

Рассмотрим скалярное эллиптическое уравнение второго порядка с младшими членами

$$\begin{gathered} u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d), \\ -\operatorname{div}[a^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon(x) + \alpha^\varepsilon(x)u^\varepsilon(x)] + \beta^\varepsilon(x)\cdot\nabla u^\varepsilon(x) + \gamma^\varepsilon(x)u^\varepsilon + \mu u^\varepsilon(x) = f(x),\ \mu > 0. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Векторы α^ε, β^ε, функция γ^ε, как и матрица a^ε (см. (1.2)), имеют "двухмасштабную" структуру:

$$\alpha^\varepsilon(x) = \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}\right),\ \beta^\varepsilon(x) = \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}\right),\ \gamma^\varepsilon(x) = \gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}\right), \tag{6.2}$$

Вектор-функции α, β и функция γ измеримы и периодичны по y и z, а также удовлетворяют условию Липшица по первому аргументу, то есть

$$\begin{gathered} |\alpha(y,z) - \alpha(y',z)| \le c_L|y-y'|,\ |\beta(y,z) - \beta(y',z)| \le c_L|y-y'|, \\ |\gamma(y,z) - \gamma(y',z)| \le c_L|y-y'| \end{gathered} \tag{6.3}$$

для почти всех $z \in \mathbb{R}^d$ и всех y, $y' \in \mathbb{R}^d$, и ограничены

$$|\alpha|,\ |\beta|,\ |\gamma| \le c_0. \tag{6.4}$$

Существование и единственность решения задачи (6.1) при достаточно больших μ выводится из леммы Лакса – Мильграма.

Соответствующее (6.1) усредненное уравнение имеет вид

$$\begin{gathered} u \in H^1(\mathbb{R}^d), \\ -\operatorname{div}[a^0\nabla u(x) + \alpha^0 u(x)] + \beta^0\cdot\nabla u(x) + \gamma^0 u(x) + \mu u(x) = f(x), \end{gathered} \tag{6.5}$$

где a^0 – постоянная положительно определенная матрица, а α^0, β^0 – постоянные векторы и γ^0 – постоянный коэффициент.

Коэффициенты уравнения (6.5) определяются в процессе повторного усреднения.

Помимо привычных задач на ячейке периодичности (см. (1.11), (1.12)) введём еще две:

$$M_0(y,\cdot) \in H^1_{per}(Z),\ \operatorname{div}_z[a(y,z)\nabla_z M_0(y,z) + \alpha(y,z)] = 0, \quad \langle M_0(y,\cdot)\rangle_Z = 0,$$

$$N_0(y) \in H^1_{per}(Y),\ \operatorname{div}_y[\hat a(y)\nabla_y N_0(y) + \hat\alpha(y)] = 0, \quad \langle N_0\rangle_Y = 0.$$

Тогда справедливы формулы повторного усреднения

$$\alpha^0 = \langle \hat a\nabla_y N_0 + \hat\alpha\rangle_Y,\ \beta^0 = \langle (I + \nabla_y N)\hat\beta\rangle_Y,$$

$$\gamma^0 = \langle \hat{\beta} \cdot \nabla_y N_0 + \hat{\gamma} \rangle_Y,$$

где в свою очередь

$$\hat{\alpha}(y) = \langle a(y,\cdot)\nabla_z M_0(y,\cdot) + \alpha(y,\cdot)\rangle_Z, \ \hat{\beta}(y) = \langle (I + \nabla_z M(y,\cdot))\beta(y,\cdot)\rangle_Z,$$

$$\hat{\gamma}(y) = \langle \beta(y,\cdot) \cdot \nabla_z M_0(y,\cdot) + \gamma(y,\cdot)\rangle_Z.$$

Асимптотический анализ показывает, что первым приближением к решению задачи (6.5) будет

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N(y) \cdot \nabla u(x) + \varepsilon N_0(y) u(x) + \delta M(y,z) \cdot (I + \nabla_y N(y))\nabla u(x) +$$
$$+ \delta M(y,z) \cdot \nabla_y N_0(y) u(x) + \delta M_0(y,z) u(x), \ y = \frac{x}{\varepsilon}, \ z = \frac{x}{\delta},$$

где все участвующие функции определены выше.

Смещенное первое приближение $v^\varepsilon_\sigma(x)$ получается из $v^\varepsilon(x)$ сдвигом на $\sigma \in Z$ по быстрой переменной z (аналогично, как в (2.4)).

Ключевым результатом является "проинтегрированная" по параметру сдвига $\sigma \in Z$ оценка

$$\begin{gathered}\int_Z \int_{\mathbb{R}^d} \left(|u^\varepsilon(x+\delta\sigma) - v^\varepsilon_\sigma(x)|^2 + |\nabla u^\varepsilon(x+\delta\sigma) - \nabla v^\varepsilon_\sigma(x)|^2 \right) d\sigma dx \leq \\ \leq C \max\{\varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)\} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx, \quad C = const(d, \lambda, \mu, c_L, c_0).\end{gathered} \tag{6.6}$$

Из (6.6) выводятся, как следствие, L^2- и H^1-оценки, имеющие операторный смысл. Точные формулировки опускаем.

§7. О матрице повторного усреднения

Рассмотрим исходное эллиптическое уравнение (1.1). Напомним, что матрица в этом уравнении имеет вид $a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta})$, где $a(y,z)$ – периодическая по y и z. Тогда усредненная матрица определяется в результате так называемого повторного усреднения: фиксируем первый аргумент и проводим усреднение по второй переменной, к полученной периодической матрице уже одного аргумента снова применяем процедуру усреднения. В итоге имеем постоянную усредненную матрицу. Если аргументы поменять местами, то в результате повторного усреднения получим, вообще говоря, другую усредненную матрицу. Ниже покажем, что матрицы, построенные этими способами, различны.

1. Сначала приведем примеры, когда усредненная матрица не зависит от порядка повторного усреднения.

Пример 1. В размерности $d = 1$ усредненная матрица a^0 не зависит от порядка повторного усреднения и вычисляется явно по формуле

$$(a^0)^{-1} = \int\limits_Y \int\limits_Z \frac{1}{a(y,z)} dydz.$$

В самом деле, по известному правилу классического усреднения в размерности $d = 1$ (см., например, [3, гл. I,§1]) имеем

$$\hat{a}(y) = \langle a(y,\cdot)^{-1} \rangle_Z^{-1}, \quad a^0 = \langle \hat{a}(\cdot)^{-1} \rangle_Y^{-1},$$

то есть

$$(a^0)^{-1} = \int\limits_Y \left(\int\limits_Z \frac{1}{a(y,z)} dz \right) dy = \int\limits_Y \int\limits_Z \frac{1}{a(y,z)} dydz,$$

так как повторный интеграл равен двойному. Повторное усреднение с другим порядком приводит к тому же результату.

Пример 2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ так называемую слоистую среду с простейшей двухмасштабной структурой. Ей соответствует матрица

$$a(y,z) = \begin{pmatrix} a_1(y_1) & 0 \\ 0 & a_2(z_1) \end{pmatrix}.$$

Фактически по формулам одномерного усреднения находим

$$\hat{a}(y) = \begin{pmatrix} a_1(y_1) & 0 \\ 0 & \langle a_2^{-1} \rangle^{-1} \end{pmatrix}, a^0 = \begin{pmatrix} \langle a_1^{-1} \rangle^{-1} & 0 \\ 0 & \langle a_2^{-1} \rangle^{-1} \end{pmatrix},$$

и независимость эффективной матрицы от порядка повторного усреднения получена.

Пример 3. Более сложная двухмасштабная среда на плоскости описывается матрицей

$$a(y,z) = \begin{pmatrix} \tilde{a}(y_2, z_1) & 0 \\ 0 & \tilde{a}(y_1, z_2) \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

где $a(t,s) = \alpha(t)\beta(s)$, а α и β – положительные 1-периодические функции на прямой. В этом случае эффективная матрица

$$a^0 = \langle \alpha \rangle \langle \beta^{-1} \rangle^{-1} I$$

и не зависит от порядка повторного усреднения. Это будет показано в п. **3.**

2. Обратимся к уравнению (0.1). Тогда усредненная матрица определяется как

$$a^0 \xi = \langle a(\cdot)(\xi + \nabla_y N(\cdot)) \rangle$$

см. (0.4) и (0.5). Укажем два специальных случая, когда для отыскания матрицы a^0 можно выписать явные формулы:

$$a^0 = \langle a \rangle \quad \text{если} \quad \mathrm{div} a(y) = 0, \tag{7.2}$$

$$a^0 = \langle a^{-1} \rangle^{-1} \quad \text{если} \quad \mathrm{rot} a^{-1} = 0. \tag{7.3}$$

Дадим пояснения относительно использованных выше операций div и rot. Для вектора $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\mathrm{div} v = 0, \quad \text{если} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} v \cdot \nabla\varphi dy = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

$$\mathrm{rot} v = 0, \quad \text{если} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(v_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} - v_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) dy = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad i, j \in \{1, \ldots, d\}.$$

Так определяются соленоидальные и безвихревые векторные поля. Для периодических векторов $v \in L^2_{per}(Y)^d$ в этих тождествах в качестве пробных можно брать не финитные функции, а $\varphi \in C^\infty_{per}(Y)$. Тогда, например, тождество в (0.4) означает, что решение задачи на ячейке дает соленоидальный вектор $a(y)(\xi + \nabla N(y))$, то есть $\mathrm{div}[a(y)(\xi + \nabla N(y))] = 0$.

Для матрицы $b = \{b_{ij}\}$ соотношение $\mathrm{div} b = 0$ означает, что каждый столбец матрицы есть соленоидальный вектор, то есть $\frac{\partial}{\partial y_i} b_{ij} = 0$ в смысле данного выше определения. Аналогичный смысл имеет соотношение $\mathrm{rot} b = 0$.

Докажем формулы (7.2) и (7.3). В первом случае задача на ячейке имеет тривиальное решение $N = 0$, поскольку по условию $\mathrm{div} a = 0$, то есть столбцы матрицы соленоидальны, значит, вектор $a(y)\xi$ тоже соленоидален. Во втором случае возьмем

$$v(y) = a^{-1}(y) \langle a^{-1} \rangle^{-1} \xi. \tag{7.4}$$

Тогда вектор $v(y)$ является безвихревым, то есть $\mathrm{rot} v(y) = 0$, и $\langle v \rangle = \xi$. Известно, что безвихревой вектор $v \in L^2_{per}(Y)^d$ потенциален, что означает представление

$$v(y) = \langle v \rangle + \nabla_y N(y), \quad N \in H^1_{per}(Y),$$

при этом скалярную функцию N называют потенциалом векторного поля v. Таким образом, представление через потенциал для вектора из (7.4) примет вид

$$v(y) = \xi + \nabla_y N(y), \quad N \text{ – решение задачи на ячейке.} \tag{7.5}$$

Тогда формула для усредненной матрицы (2.4) дает равенство

$$a^0 \xi = \langle a(\xi + \nabla N) \rangle = \langle a(y) v(y) \rangle = \langle a a^{-1} \langle a^{-1} \rangle^{-1} \xi \rangle = \langle a^{-1} \rangle^{-1} \xi,$$

где воспользовались (7.5) и (7.4). Откуда уже следует искомая формула $a^0 = \langle a^{-1} \rangle^{-1}$.

3. Приступим к построению матрицы $a(y,z)$, для которой усредненная матрица a^0 зависит от порядка повторного усреднения.

1°. Возьмем матрицу

$$a(y,z) = \begin{pmatrix} \tilde{a}(y_2, z_1) & 0 \\ 0 & \tilde{a}(y_1, z_2) \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

где $\tilde{a}$ – скалярная функция. Проверим, что для (7.6) выполняются свойства

$$\mathrm{rot}_z a^{-1}(y,z) = 0, \quad \mathrm{div}_y a(y,z) = 0. \tag{7.7}$$

Вычислим, например, $\mathrm{rot}_z a^{-1}(y,z)$. Поскольку

$$a^{-1}(y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{a}(y_2,z_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{a}(y_1,z_2)} \end{pmatrix}.$$

ротор от первого столбца этой матрицы есть кососимметрическая 2×2-матрица с недиагональным элементом $\frac{\partial \tilde{a}^{-1}(y_2,z_1)}{\partial z_2}$, который очевидно равен нулю. Аналогично проверяем, что ротор от второго столбца обратной матрицы тоже равен нулю

2°. Используя структурные свойства матрицы $a(y,z)$, найдем усредненную матрицу a^0 при различном порядке повторного усреднения.

Пусть в (7.6) сначала фиксирована переменная y. Тогда "промежуточной" усредненной матрицей будет

$$\begin{pmatrix} \langle \tilde{a}^{-1}(y_2, \cdot) \rangle_Z^{-1} & 0 \\ 0 & \langle \tilde{a}^{-1}(y_1, \cdot) \rangle_Z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь с учетом свойства $(7.7)_1$ применили формулу (7.3). Получена соленоидальная матрица, и после повторного усреднения по формуле (7.2) находим

$$a_1^0 = \begin{pmatrix} \langle \langle \tilde{a}^{-1} \rangle_Z^{-1} \rangle_Y & 0 \\ 0 & \langle \langle \tilde{a}^{-1} \rangle_Z^{-1} \rangle_Y \end{pmatrix} = \langle \langle \tilde{a}^{-1} \rangle_Z^{-1} \rangle_Y I. \tag{7.8}$$

Наоборот, если в (7.6) сначала фиксирована переменная z, то "промежуточной" усредненной матрицей будет

$$\begin{pmatrix} \langle \tilde{a}(\cdot, z_1) \rangle_Y & 0 \\ 0 & \langle \tilde{a}(\cdot, z_2) \rangle_Y \end{pmatrix}.$$

После повторного усреднения получим

$$a_2^0 = \begin{pmatrix} \langle \langle \tilde{a} \rangle_Y^{-1} \rangle_Z^{-1} & 0 \\ 0 & \langle \langle \tilde{a} \rangle_Y^{-1} \rangle_Z^{-1} \end{pmatrix} = \langle \langle \tilde{a} \rangle_Y^{-1} \rangle_Z^{-1} I. \tag{7.9}$$

3°. Покажем, что матрицы (7.8) и (7.9) различны при подходящем выборе $\tilde{a}(t, s)$. Положим

$$\tilde{a}(y_2, z_1) = \alpha(y_2) + \beta(z_1), \tag{7.10}$$

где $\alpha(t) = \frac{\gamma(t)}{n}$ – нечетная функция и $n \to \infty$, а $\beta(s) > 0$. Тогда матрица (7.9) не будет зависеть от α, так как

$$a_2^0 = \langle \langle \tilde{a} \rangle_Y^{-1} \rangle_Z^{-1} I = \langle \langle \beta \rangle_Y^{-1} \rangle_Z^{-1} I = \langle \beta^{-1} \rangle_Z^{-1} I. \tag{7.11}$$

Теперь изучим матрицу (7.8). Исходим из того, что

$$a_1^0 = \langle \langle \tilde{a}^{-1} \rangle_Z^{-1} \rangle_Y I = \left\langle \left\langle \frac{1}{\alpha + \beta} \right\rangle_Z^{-1} \right\rangle_Y I \tag{7.12}$$

и далее стремимся сравнить правые части из (7.11) и (7.12). Запишем выражение $\frac{1}{\alpha+\beta}$ в виде

$$\frac{1}{\alpha + \beta} = \frac{1}{\beta(1 + \frac{\alpha}{\beta})} = \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\alpha^3}{\beta^3} + \ldots \right) = \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} + O\left(\frac{1}{n^3} \right) \right)$$

при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\left\langle \frac{1}{\alpha + \beta} \right\rangle_Z = \left\langle \beta^{-1} \right\rangle_Z - \alpha \left\langle \beta^{-2} \right\rangle_Z + \alpha^2 \left\langle \beta^{-3} \right\rangle_Z + O\left(\frac{1}{n^3} \right).$$

Отсюда

$$\left\langle \frac{1}{\alpha + \beta} \right\rangle_Z^{-1} = \langle \beta^{-1} \rangle_Z^{-1} + \alpha \frac{\langle \beta^{-2} \rangle_Z}{\langle \beta^{-1} \rangle_Z^2} - \alpha^2 \frac{\langle \beta^{-3} \rangle_Z}{\langle \beta^{-1} \rangle_Z^2} + \alpha^2 \frac{\langle \beta^{-2} \rangle_Z^2}{\langle \beta^{-1} \rangle_Z^3} + O\left(\frac{1}{n^3} \right),$$

$$\left\langle \left\langle \frac{1}{\alpha + \beta} \right\rangle_Z^{-1} \right\rangle_Y = \langle \beta^{-1} \rangle_Z^{-1} + \langle \alpha^2 \rangle_Y \left(\frac{\langle \beta^{-2} \rangle_Z^2}{\langle \beta^{-1} \rangle_Z^3} - \frac{\langle \beta^{-3} \rangle_Z}{\langle \beta^{-1} \rangle_Z^2} \right) + O\left(\frac{1}{n^3} \right) = \tag{7.13}$$

$$= \langle \beta^{-1} \rangle_Z^{-1} + C \langle \alpha^2 \rangle_Y + O\left(\frac{1}{n^3} \right).$$

при $n \to \infty$. Покажем, что

$$C = \frac{\langle \beta^{-2} \rangle_Z^2}{\langle \beta^{-1} \rangle_Z^3} - \frac{\langle \beta^{-3} \rangle_Z}{\langle \beta^{-1} \rangle_Z^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta(z) = const.$$

Действительно, если $\beta(z) = const$, то легко получаем, что $C = 0$. Напротив, пусть $\beta(z) \neq const$. По неравенству Коши – Буняковского

$$\langle \beta^{-2} \rangle_Z^2 = \langle \beta^{-\frac{1}{2}} \beta^{-\frac{3}{2}} \rangle_Z^2 \leq \langle \beta^{-1} \rangle_Z \langle \beta^{-3} \rangle_Z.$$

при чем равенство реализуется только в случае, когда функции $\beta^{-\frac{1}{2}}$ и $\beta^{-\frac{3}{2}}$ пропорциональны. Последнее означает, что $\beta(z)$ есть константа. Иначе говоря,

$$\frac{\langle\beta^{-2}\rangle_Z^2}{\langle\beta^{-1}\rangle_Z^3} < \frac{\langle\beta^{-3}\rangle_Z}{\langle\beta^{-1}\rangle_Z^2} \quad \Rightarrow \quad C < 0.$$

Таким образом показано, что при $\beta(z) \neq const$ величина C в (7.13) отрицательна. Если к тому же и параметр n достаточно велик, то в силу (7.11)-(7.13) матрица (7.9) не равна матрице (7.8). Цель достигнута.

4. Обратимся снова к примеру 3. Пусть также выполнены условия (7.2)-(7.3) и справедливы формулы повторного усреднения (7.8) и (7.9). Тогда матрицы (7.8) и (7.9) совпадут, так как

$$a_1^0 = \langle\langle\tilde{a}^{-1}\rangle_Z^{-1}\rangle_Y I = \left\langle\left\langle\frac{1}{\alpha\beta}\right\rangle_Z^{-1}\right\rangle_Y I = \frac{\langle\alpha\rangle_Y}{\langle\beta^{-1}\rangle_Z} I = \langle\alpha\rangle_Y\langle\beta^{-1}\rangle_Z^{-1} I,$$

$$a_2^0 = \langle\langle\tilde{a}\rangle_Y^{-1}\rangle_Z^{-1} I = \langle\langle\alpha\beta\rangle_Y^{-1}\rangle_Z^{-1} I = \langle\alpha\rangle_Y\langle\beta^{-1}\rangle_Z^{-1} I.$$

Выше мы брали $\tilde{a}$ в виде суммы (см. (7.10)), а если взять $\tilde{a}$ в виде произведения $\tilde{a}(y_2, z_1) = \alpha(y_2)\beta(z_1)$, то усредненные матрицы (7.8), (7.9) совпадут.

§8. Примеры и замечания

1° Рассмотрим одномерное эллиптическое уравнение вида (0.1)

$$-\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du^\varepsilon}{dx}\right) + u^\varepsilon = f(x), \quad f(x) \in L^2(\mathbb{R}). \tag{8.1}$$

Здесь $a(y)$ – измеримая периодическая функция с периодом $T > 0$,

$$\lambda \leq a(y) \leq \lambda^{-1},\ \lambda > 0.$$

С уравнением (8.1) связано усредненное уравнение

$$-\frac{d}{dx}\left(a^0\frac{du}{dx}\right) + u = f(x). \tag{8.2}$$

Усредненный коэффициент и решение задачи на ячейке периодичности вычисляются в явном виде:

$$a^0 = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{a(y)}dy\right)^{-1},$$

$$N(y) = \int_0^y \left(\frac{a^0}{a(t)} - 1\right)dt. \tag{8.3}$$

Заметим, что в (8.3) подынтегральное выражение имеет нулевое среднее, поэтому неопределенный интеграл периодичен и является ограниченной функцией. Кроме того, $N(y)$ обладает свойством "постоянства потока"

$$a(y)\left(1+\frac{dN(y)}{dy}\right)=const=a^0. \tag{8.4}$$

Покажем, как выводится основная оценка (0.13) в одномерном случае.

Возьмем первое приближение

$$v^\varepsilon(x)=u(x)+\varepsilon N(y)\frac{du(x)}{dx},\ y=\frac{x}{\varepsilon}.$$

Тогда

$$\frac{dv^\varepsilon(x)}{dx}=\left(1+\frac{dN(y)}{dy}\right)\frac{du(x)}{dx}+\varepsilon N(y)\frac{d^2u(x)}{dx^2},$$

$$a(y)\frac{dv^\varepsilon(x)}{dx}-a^0\frac{du(x)}{dx}=\left[a(y)\left(1+\frac{dN(y)}{dy}\right)-a^0\right]\frac{du(x)}{dx}+\varepsilon a(y)N(y)\frac{d^2u(x)}{dx^2}=$$

$$=\varepsilon a(y)N(y)\frac{d^2u(x)}{dx^2}.$$

Таким образом,

$$a(y)\frac{dv^\varepsilon(x)}{dx}-a^0\frac{du(x)}{dx}=\varepsilon a(y)N(y)\frac{d^2u(x)}{dx^2}.$$

Отсюда по построению

$$-\frac{d}{dx}\left(a(y)\left[\frac{dv^\varepsilon(x)}{dx}-\frac{du^\varepsilon(x)}{dx}\right]\right)+(v^\varepsilon(x)-u^\varepsilon(x))=$$

$$=\varepsilon N(y)\frac{du(x)}{dx}-\varepsilon\frac{d}{dx}\left(a(y)N(y)\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)$$

и по энергетической оценке выводим

$$\|v^\varepsilon-u^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R})}\le c\varepsilon^2\int\limits_{\mathbb{R}}|N(y)|^2\left(\left|\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right|^2+\left|\frac{du(x)}{dx}\right|^2\right)dx. \tag{8.5}$$

Как мы видели, константа в (0.13) определяется величинами $\|N_j\|_{L^2_{per}(Y)}$ и $\|G^j\|_{L^2_{per}(Y)^{d\times d}}$. В одномерном случае G=0 ввиду (8.4), потому остается зависимость только от $\|N\|_{L^2_{per}(0,T)}$.

2° Далее рассмотрим примеры, показывающие зависимость постоянной C в основной оценке (0.13) от величины периода T. Ранее мы всегда предпологали, что ячейкой периодичности является единичный куб (т.е. $T=1$).

Возьмем уравнение (8.1) с коэффициентом

$$a(y)=\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi y}{T}+1}.$$

Очевидно,

$$a^0 = 1,$$
$$N(y) = \frac{T}{4\pi} \sin \frac{2\pi y}{T}.$$

Видим, что величины $\sup |N(y)|$ и

$$\int_0^T |N(y)|^2 dy = \frac{T^3}{32\pi^2}$$

неограниченно растут при $T \to \infty$.

Можно было бы взять $a(t)$, такой что $\frac{1}{a(t)} = g(t) + 1$, где $g(t) = g_0(\frac{t}{T})$, $g_0(t)$ – любая 1-периодическая функция с нулевым средним и удовлетворяющая условию $|g_0(y)| \leq \frac{1}{2}$. Тогда $a(t)$ будет T-периодична, $a^0 = 1$ и функция

$$N(y) = \int_0^y g(t)dt = T \int_0^{y/T} g_0(t)dt$$

принимает значения порядка T.

Рассмотрим эллиптическое уравнение (8.1) с функцией

$$a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\omega_1 \varepsilon}, \frac{x}{\omega_2 \varepsilon}\right).$$

Здесь постоянные ω_1 и ω_2 рационально зависимы, то есть найдутся такие $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, что $k_1\omega_1 = k_2\omega_2$. Тогда периодическая функция $a\left(\frac{y}{\omega_1}, \frac{y}{\omega_2}\right)$ имеет период $T = |k_1\omega_1|$. Поэтому все рассмотренные выше рассуждения остаются в силе. Константа C в основной оценке будет зависеть от выбора ω_1 и ω_2.

3° **Пример (квазипериодический коэффициент).**
Рассмотрим уравнение (8.1) с квазипериодической функцией $a(y)$, $a(y) = b(\lambda_1 y, \lambda_2 y)$. Здесь $b(z_1, z_2)$ – непрерывная 1-периодическая по каждому аргументу положительная функция, заданная на плоскости, ячейка периодичности – единичный квадрат $Z = [-1/2, 1/2)^2$. Считаем λ_1 и λ_2 рационально независимыми, то есть $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ иррационально. Известно, что в этом случае усредненная матрица определяется с помощью среднего почти периодической функции

$$a^0 = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \frac{1}{a(y)} dy\right)^{-1}$$

и в силу условия рациональной независимости это среднее совпадает со средним соответствующей периодической функции, то есть

$$a^0 = \left(\int\limits_Z \frac{1}{b(z_1, z_2)} dz \right)^{-1}.$$

Покажем, что если выполнено так называемое "частотное условие" на λ_1 и λ_2:

$$\exists\, c_1, \beta > 0: \quad |m\lambda_1 + n\lambda_2| \geq \frac{c_1}{(m^2+n^2)^\beta},\ \beta > 0, \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0\},$$

то решение $N(y)$ задачи на ячейке является квазипериодической функцией, в частности, непрерывной и ограниченной на всей числовой оси. Как следствие, оценка (0.13) сохраняется (вывод её тот же, что в пункте 1°).

В самом деле, запишем подынтегральную функцию из (8.3) как

$$g(t) = F(\lambda_1 t, \lambda_2 t), \quad F(z_1, z_2) = \frac{a^0}{b(z_1, z_2)} - 1. \tag{8.6}$$

Будем предполагать, что функция $b(z_1, z_2)$, а значит, $F(z_1, z_2)$ бесконечно дифференцируемы на ячейке периодичности. Разложим $F(z_1, z_2)$ в ряд Фурье на $[-1/2, 1/2]^2$:

$$F(z_1, z_2) = \sum_{(m,n)\neq 0} c_{m,n} e^{i2\pi(mz_1 + nz_2)}, \quad i = \sqrt{-1},$$

откуда

$$g(t) = F(\lambda_1 t, \lambda_2 t) = \sum c_{m,n} e^{i2\pi(m\lambda_1 + n\lambda_2)t}.$$

В этом случае (см. (8.3))

$$N(y) = \frac{1}{i2\pi} \sum_{(m,n)\neq 0} \frac{c_{m,n}}{m\lambda_1 + n\lambda_2} e^{i2\pi(m\lambda_1 + n\lambda_2)y}. \tag{8.7}$$

Справедлива оценка

$$\sum |c_{m,n}|^2 (m^2+n^2)^k \leq c(k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

получаемая из равенства Парсеваля:

$$(2\pi)^{2k} \sum |c_{m,n}|^2 (m^2+n^2)^k = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} |\nabla^k F|^2 dz_1 dz_2.$$

Отсюда

$$|c_{m,n}| (m^2+n^2)^k \leq c(k)$$

и в силу "частотного условия"

$$\left|\frac{c_{m,n}}{m\lambda_1+n\lambda_2}e^{i2\pi(m\lambda_1+n\lambda_2)y}\right| \le \left|\frac{c(k)c_1^{-1}}{(n^2+m^2)^{k-\beta}}\right|.$$

Если $k-\beta > 1$, то ряд (8.7) мажорируется абсолютно сходящимся рядом. Поэтому функция $N(y)$ непрерывна и ограничена на всей оси. В этом случае оценка (0.13) сохраняется, но константа в ней зависит от показателя β в "частотном условии".

Операторные оценки усреднения для уравнений с квазипериодическими коэффициентами в многомерном случае доказаны в [25].

Глава 3

Операторные оценки повторного усреднения в ограниченной области

Основные результаты этой главы – в теоремах 1.1, 2.1 и 6.1.

§1. Постановка задачи Неймана и основной результат

Введем пространства функций с условием ортогональности:

$$\tilde{L}^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \int\limits_\Omega u\,dx = 0\}, \quad \tilde{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \int\limits_\Omega u\,dx = 0\}.$$

Рассмотрим краевую задачу Неймана в ограниченной липшицевой области $\Omega \in \mathbb{R}^d$ для скалярного эллиптического уравнения второго порядка

$$u^\varepsilon \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad \int\limits_\Omega a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi\,dx = \int\limits_\Omega f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad f \in \tilde{L}^2(\Omega). \tag{1.1}$$

Симметрическая матрица $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta})$ того же типа, что и в §1 главы 2.

С задачей (1.1) связана усредненная задача

$$u \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad \int\limits_\Omega a^0 \nabla u \nabla \varphi\,dx = \int\limits_\Omega f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad f \in \tilde{L}^2(\Omega). \tag{1.2}$$

где a^0 – постоянная симметрическая матрица, которая находится в процессе повторного усреднения (см. гл. 2, §1).

Будем предполагать, что область Ω достаточно гладкая, например класса $C^{1,1}$, так что по эллиптической теории решение задачи (1.2) принадлежит пространству $H^2(\Omega)$ с оценкой

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \; c_0 = const(d, \lambda, \Omega). \tag{1.3}$$

Кроме того, существует линейный ограниченный оператор продолжения

$$\mathcal{P}: \ H^2(\Omega) \to H^2(\mathbb{R}^d). \tag{1.4}$$

Всегда считаем, что решение задачи (1.2) при необходимости продолжено с помощью оператора $\mathcal{P}$ и это продолжение также обозначаем через u.

Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Для разности решений (1.1) и (1.2) имеет место оценка*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.5}$$

где константа C зависит лишь от размерности d, постоянных λ, c_L и области Ω.

§2. Первое приближение

Будем брать вместо обычного первого приближения (см. гл. 2, (2.1)), первое приближение со сглаженным корректором (см. гл. 2, (5.2)). Напомним его

$$\hat{v}^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon \int\limits_Z N(y') \cdot \nabla u(x') d\sigma + \delta \int\limits_Z M(y', z) \cdot (I + \nabla_y N(y')) \nabla u(x') d\sigma, \tag{2.1}$$

$$x' = x - \delta\sigma, \ y' = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \ z = \frac{x}{\delta}.$$

Будем также использовать более компактное представление в виде суммы нулевого приближения $u(x)$ и корректора $K_\varepsilon(x)$ (см. гл. 2, (5.3)):

$$\hat{v}^\varepsilon(x) = u(x) + K_\varepsilon(x), \ K_\varepsilon(x) = \varepsilon K_{\varepsilon,1}(x) + \delta(\varepsilon) K_{\varepsilon,2}(x). \tag{2.2}$$

Нам понадобится техническое утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $b = b(y, z)$ и $b \in L^\infty(Y, L^2_{per}(Z))$. Тогда функция*

$$w(x) = \int\limits_Z b(y', z) u(x') d\sigma, \quad y' = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \ z = \frac{x}{\varepsilon}, \ x' = x - \delta\sigma,$$

принадлежит $L^2(Q)$ с оценкой

$$\|w\|_{L^2(Q)} \le \sup_y \|b(y, \cdot)\|_{L^2_{per}(Z)} \|u\|_{L^2(Q_\varepsilon)}. \tag{2.3}$$

где Q – произвольная область в $\mathbb{R}^d$, а Q_ε – ε-окрестность Q.

Доказательство. Используя неравенство Коши – Буняковского и замену переменных $x \to x' = x - \delta\sigma$, получим цепочку соотношений

$$\int\limits_Q |w(x)|^2 dx \le \int\limits_Q \int\limits_Z \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \frac{x}{\delta} \right) \right|^2 |u(x - \delta\sigma)|^2 dx d\sigma \le$$

$$\le \int\limits_{Q_\varepsilon} \int\limits_Z \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta} + \sigma \right) \right|^2 |u(x)|^2 dx d\sigma = \int\limits_{Q_\varepsilon} |u(x)|^2 \left(\int\limits_Z \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta} + \sigma \right) \right|^2 d\sigma \right) dx. \tag{2.4}$$

Внутренний интеграл оценивается величиной $\sup\limits_y \|b(y, \cdot)\|^2_{L^2_{per}(Z)}$, которая выносится за пределы внешнего интеграла, и в результате приходим к неравенству (2.3). Лемма доказана.

Теперь покажем, что

$$\hat{v}^\varepsilon, \ \nabla \hat{v}^\varepsilon \in L^2(\Omega). \tag{2.5}$$

Принадлежность $\hat{v}^\varepsilon$ пространству $L^2(\Omega)$ доказывается так: в силу свойства ограниченности функций N, $\nabla_y N$, M (см. лемму 0.4.) имеем

$$|\hat{v}^\varepsilon(x)| \le |u(x)| + c \left| \int\limits_Z \nabla u(x') d\sigma \right|, \quad x' = x - \delta\sigma. \tag{2.6}$$

Напомним, что

$$\int\limits_Z \nabla u(x - \delta\sigma) d\sigma = (\nabla u)_\delta(x)$$

есть сглаживание по Стеклову функции $\nabla u(x)$, для которого справедлива оценка (0.28). Тогда с учетом свойств оператора продолжения во внешность области Ω получаем оценку

$$\|\hat{v}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{L^2(\Omega)} + c\|(\nabla u)_\delta\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{L^2(\Omega)} + c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\delta)} \le C\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

так что $\hat{v}^\varepsilon \in L^2(\Omega)$.

Чтобы изучить градиент $\nabla \hat{v}^\varepsilon(x)$, запишем его подробно как сумму

$$\nabla v^\varepsilon(x) = \nabla u(x) + \int\limits_Z \nabla_y N(y') \nabla u(x') d\sigma + \int\limits_Z \nabla_z M(y', z)(I + \nabla_y N(y')) \nabla u(x') d\sigma +$$

$$+ \frac{\delta}{\varepsilon} \int\limits_Z \nabla_y \left[M(y', z) \cdot (I + \nabla_y N(y')) \nabla u(x') \right] d\sigma + \varepsilon \int\limits_Z \nabla^2 u(x') N(y') d\sigma +$$

$$+ \delta \int\limits_Z (I + \nabla_y N(y')) \nabla^2 u(x') M(y', z) d\sigma, \ y' = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \ x' = x - \delta\sigma, \ z = \frac{x}{\delta}, \tag{2.7}$$

и оценим каждое слагаемое. Для второго, пятого и шестого слагаемых достаточно воспользоваться свойствами iv), vi) из леммы 0.4. и оценкой (0.25), а для третьего – применить лемму 2.1. Четвертое слагаемое требует более детального анализа. Оно разбивается в сумму:

$$\begin{gathered}\int\limits_Z \nabla_y \left[M(y',z)\cdot(I+\nabla_y N(y'))\nabla u(x')\right] d\sigma = \\ = \int\limits_Z \nabla_y M(y',z)(I+\nabla_y N(y'))\nabla u(x')d\sigma + \int\limits_Z \nabla_y^2(N(y')\cdot\nabla u(x'))M(y',z)d\sigma = T_1+T_2.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Используя неравенство Коши – Буняковского и ограниченность ∇N, имеем оценку

$$|T_1|^2 \le c\int\limits_Z |\nabla_y M(y',z)\nabla u(x')|^2 d\sigma,$$

к мажоранте которой применимо неравенство (2.4). Слагаемое T_2 оценивается несколько иначе. Прежде всего запишем неравенства

$$\int\limits_\Omega |T_2|^2 dx = \int\limits_\Omega \left|\int\limits_Z \nabla_y^2(N(y')\cdot\nabla u(x'))M(y',z)d\sigma\right|^2 dx \le c\int\limits_\Omega\int\limits_Z |\nabla_y^2 N(y')|^2|\nabla u(x')|^2 d\sigma dx \le$$

$$\le c\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla_y^2 N(y)|^2\,|\nabla u(x)|^2\,dx \le c\int\limits_{\Omega_1} |\nabla_y^2 N(y)|^2\,|\nabla u(x)|^2\,dx,$$

где использовали неравенство Коши – Буняковского и замену переменных, а также учли ограниченность функции M и перешли к области интегрирования $\Omega_1 \supset \Omega_\varepsilon$. Проверим, что последний интеграл ограничен. Перепишем его в виде

$$\int\limits_{\Omega_1} \beta(\frac{x}{\varepsilon})\Phi(x)dx.$$

Здесь $\Phi \in L^p(\Omega_1)$, $p>1$, по теореме вложения, так как $\nabla u \in H^1(\Omega_1)$, а $\beta \in L^q_{per}(Y)$ при любом сколько угодно большом q (см. лемма0.4. v)). Тогда по неравенству Гельдера

$$\int\limits_{\Omega_1} \beta(\frac{x}{\varepsilon})\Phi(x)dx \le \left(\int\limits_{\Omega_1} |\beta(\frac{x}{\varepsilon})|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\Omega_1} |\Phi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = C_\Phi \left(\int\limits_{\Omega_1} |\beta(\frac{x}{\varepsilon})|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.9}$$

где $q = \frac{p}{p-1}$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_1} \left|\beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^q dx = |\Omega_1|\int\limits_Y |\beta(y)|^q\,dy$$

по свойству среднего значения периодической функции. Величина $C_\Phi = \|\Phi\|_{L^p(\Omega_1)}$ контролируется нормой $\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega_1)}$, где u – продолженное на $\mathbb{R}^d$ с помощью оператора $\mathcal{P}$ (см. (1.4)) решение усредненной задачи. В итоге заключаем, что $\nabla\hat{v}^\varepsilon(x) \in L^2(\Omega)$.

Таким образом, свойство (2.5) проверено.

Дальнейшей целью будет следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Для разности u^ε – решения задачи (1.1) и функции $\hat{v}^\varepsilon$, определенной в (2.1), имеет место оценка*

$$\|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.10}$$

где константа C того же типа, что и в (1.5).

Параграфы §3,4 посвящены доказательству теоремы 2.1.

§3. Оценка невязки

Справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega (a^\varepsilon \nabla \hat{v}^\varepsilon - a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon) \cdot \nabla \varphi dx = \int\limits_\Omega (a^\varepsilon \nabla \hat{v}^\varepsilon - a^0 \nabla u) \cdot \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega), \tag{3.1}$$

поскольку

$$\int\limits_\Omega a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = \int\limits_\Omega f \varphi dx = \int\limits_\Omega a^0 \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega),$$

в силу уравнений (1.1) и (1.2). Введем обозначение для разности потоков

$$\hat{R}_\varepsilon \equiv a^\varepsilon \nabla \hat{v}^\varepsilon - a^0 \nabla u. \tag{3.2}$$

Тогда в силу (3.1)

$$\int\limits_\Omega \hat{R}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = \int\limits_\Omega a^\varepsilon \nabla (\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon) \cdot \nabla \varphi dx, \ \varphi \in H^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Предположим, что доказана оценка

$$\int\limits_\Omega \hat{R}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx \le C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\}\|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Тогда, полагая в ней $\varphi = \hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon$, в силу равенства (3.3) и эллиптичности матрицы a^ε, выводим

$$\|\nabla (v^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \le C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.5}$$

что является частью оценки (2.10).

Прежде чем доказывать (3.4), попробуем доказать аналогичное неравенство, в котором участвует вместо $\hat{R}_\varepsilon$ разность

$$R_\varepsilon = a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a^0 \nabla u,$$

с обычным первым приближением v^ε, определенным в (2.1) главы 2. Так как величина R_ε аналогична той, что изучалась в §3, гл. 2, то дальнейшие манипуляции с ней опустим, а приведем только нужный результат

$$\int\limits_\Omega R_\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_\Omega r_\varepsilon^i \cdot \nabla \varphi dx. \tag{3.6}$$

Здесь напомним вид выражений r_ε^i, $i = 1, 2, 3$:

$$r_\varepsilon^1 \equiv a(y,z)\big(\varepsilon \nabla^2 u(x) N(y) + \frac{\delta}{\varepsilon}\nabla_y[M(y,z)(I + \nabla_y N(y))\nabla u(x)] +$$

$$+\delta(I + \nabla_y N(y))\nabla^2 u(x) M(y,z)\big), \ y = \frac{x}{\varepsilon}, \ z = \frac{x}{\delta}, \tag{3.7}$$

$$r_\varepsilon^2 \equiv g^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \varepsilon \mathrm{div}\left(G^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) - \varepsilon G^j(y) \nabla \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right), \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} r_\varepsilon^3 \equiv p^j(y,z)\zeta_j(x,y) = \delta \mathrm{div}(P^j(y,z)\zeta_j(x,y)) - \frac{\delta}{\varepsilon}\mathrm{div}_y(P^j(y,z)\zeta_j) - \delta P^j(y,z)\nabla_x \zeta_j, \\ \zeta_j(x,y) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j}(N(y)\cdot \nabla u(x)). \end{gathered} \tag{3.9}$$

Введем гладкую функцию $\theta^\varepsilon(x)$, сосредоточенную в ε-окрестности Γ_ε границы $\Gamma = \partial\Omega$ такую, что

$$\mathrm{supp}\ \theta^\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon(x)|_{\Gamma_{\varepsilon/2}} = 1, \quad 0 \le \theta^\varepsilon(x) \le 1, \quad |\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon(x)| \le c$$

Используя $\theta^\varepsilon(x)$, в (3.6) можно заменить слагаемые r_ε^2 и r_ε^3 из (3.8) и (3.9) на их аналоги со срезающей функцией

$$\begin{gathered} \tilde{r}_\varepsilon^2 = \varepsilon \mathrm{div}\left(\theta^\varepsilon(x) G^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) - \varepsilon G^j(y)\nabla_x\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right), \\ \tilde{r}_\varepsilon^3 = \delta \mathrm{div}(\theta^\varepsilon(x) P^j(y,z)\zeta_j(x,y)) - \frac{\delta}{\varepsilon}\mathrm{div}_y(P^j(y,z)\zeta_j(x,y)) - \delta P^j(y,z)\nabla_x \zeta_j(x,y). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Действительно, вектор

$$\mathrm{div}\left((1-\theta^\varepsilon(x))G^j(\frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)$$

обладает свойством соленоидальности:

$$\int\limits_\Omega \mathrm{div}\left[(1-\theta^\varepsilon(x))G^j(\frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right] \cdot \nabla \varphi(x) dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \left[(1-\theta^{\varepsilon}(x))G^j(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla^2\varphi(x)\right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx = 0, \quad \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d), \tag{3.11}$$

(без суммирования по j). Интегрирование по частям здесь возможно, так как функция $(1-\theta^{\varepsilon}(x))$ обращается в нуль в окрестности границы $\partial\Omega$. Равенство нулю в (3.11) имеет место, поскольку $G^j(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla^2\varphi(x) = 0$ поточечно в силу кососимметричности матрицы G^j. Аналогичным свойством соленоидальности обладает и вектор $\operatorname{div}\left[((1-\theta^{\varepsilon}(x)))P^j(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta})\zeta_j(x,y)\right]$:

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\left[((1-\theta^{\varepsilon}(x)))P^j(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta})\zeta_j(x,y)\right] \cdot \nabla\varphi dx = 0, \quad \varphi \in C^{\infty}(\Omega), \tag{3.12}$$

где проявляется кососимметричность матрицы $P^j(y,z)$.

Таким образом, учитывая (3.12) и (3.11), из (3.6) получаем

$$\int\limits_{\Omega} R_{\varepsilon} \cdot \nabla\varphi dx = \int\limits_{\Omega} (r_{\varepsilon}^1 + \tilde{r}_{\varepsilon}^2 + \tilde{r}_{\varepsilon}^3) \cdot \nabla\varphi dx \leq \tag{3.13}$$

$$\leq (\|r_{\varepsilon}^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{r}_{\varepsilon}^2\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{r}_{\varepsilon}^3\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

для $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$. Структура функций r_{ε}^1, $\tilde{r}_{\varepsilon}^2$ и $\tilde{r}_{\varepsilon}^3$ такова, что из (3.13) непосредственно не следует интересующая нас оценка (3.4). Далее покажем, как обойти это препятствие.

§4. Доказательство H^1-оценки

1° Рассмотрим наряду с обычным первым приближением $v^{\varepsilon}(x)$ смещенное первое приближение:

$$v_{\sigma}^{\varepsilon}(x) = u(x') + \varepsilon N(y') \cdot \nabla u(x') + \delta M(y', z) \cdot (I + \nabla_y N(y'))\nabla u(x'),$$
$$x' = x - \delta\sigma,\ y' = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma,\ z = \frac{x}{\delta}.$$

Ему будет соответствовать выражение

$$R_{\varepsilon,\sigma}(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \frac{x}{\delta}\right)\nabla v_{\sigma}^{\varepsilon}(x) - a^0\nabla u(x - \delta\sigma) \tag{4.1}$$

и аналогичное (3.13) равенство

$$\int\limits_{\Omega} R_{\varepsilon,\sigma} \cdot \nabla\varphi dx = \int\limits_{\Omega} (r_{\varepsilon,\sigma}^1 + \tilde{r}_{\varepsilon,\sigma}^2 + \tilde{r}_{\varepsilon,\sigma}^3) \cdot \nabla\varphi dx, \quad \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d), \tag{4.2}$$

где $r_{\varepsilon,\sigma}^1$, $\tilde{r}_{\varepsilon,\sigma}^2$, $\tilde{r}_{\varepsilon,\sigma}^3$ – аналоги определенных ранее членов (см. (3.7), (3.10)), содержащих сдвиг в аргументах, иначе говоря, вместо x, y пишем $x' = x - \delta\sigma$, $y' = \frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma$.

После интегрирования равенства (4.2) по $\sigma \in Z$, используя неравенства вида

$$\int\limits_{Z\times\Omega} r^1_{\varepsilon,\sigma} \cdot \nabla\varphi d\sigma dx \le \left(\int\limits_{Z\times\Omega} |r^1_{\varepsilon,\sigma}|^2 d\sigma dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{Z\times\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\sigma dx \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int\limits_{Z\times\Omega} |r^1_{\varepsilon,\sigma}|^2 d\sigma dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx \right)$$

и учитывая структуру остаточных членов, получим

$$\int\limits_Z \int\limits_\Omega R_{\varepsilon,\sigma} \cdot \nabla\varphi dx d\sigma \le$$

$$\le \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \sum_j \gamma_j(\varepsilon) \left(\int\limits_{Z\times\Omega} \left| b_j\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \frac{x}{\delta}\right) U_j(x-\delta\sigma)\right|^2 d\sigma dx \right)^{\frac{1}{2}} + \tag{4.3}$$

$$+\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \sum_j \left(\int\limits_{Z\times\Gamma_\varepsilon} \left| \tilde{b}_j\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \frac{x}{\delta}\right) U_j(x-\delta\sigma)\right|^2 d\sigma dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

для $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Здесь коэффициент γ_j равен ε или $\frac{\delta}{\varepsilon}$; элементы $b_j(y,z)$ и $\tilde{b}_j(y,z)$ сформированы из $N_j(y)$, $M_j(y,z)$, $P^j(y,z)$, $G^j(y)$ и их производных, а элементы $U_j(x)$ – из градиентов ∇u, $\nabla^2 u$.

Оценим сверху слагаемые из правой части (4.3). Например, выражение $\tilde{r}^3_{\varepsilon,\sigma}$ (см. (3.10)) дает вклад в правую часть (4.3) в виде интегралов

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \int\limits_Z \left| p^j(y',z)\theta^\varepsilon(x')\zeta_j(x',y')\right|^2 d\sigma dx, \quad \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \int\limits_Z \left| P^j(y',z)(\delta\nabla\theta^\varepsilon(x'))\zeta_j(x',y')\right|^2 d\sigma dx, \tag{4.4}$$

$$\int\limits_{\Omega} \int\limits_Z \left| \mathrm{div}_y(P^j(y',z)\zeta_j(x',y'))\right|^2 d\sigma dx, \quad \int\limits_{\Omega} \int\limits_Z \left| P^j(y',z)\nabla_x\zeta_j(x',y')\right|^2 d\sigma dx. \tag{4.5}$$

Интегралы типа (4.4) входят в сумму (4.3) без малого множителя ε или $\frac{\delta}{\varepsilon}$, но они сами малы по неравенству для следа

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \le c\varepsilon\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad c = const(d,\Omega). \tag{4.6}$$

Например, для одного из этих интегралов имеем

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \int\limits_Z \left| P^j(y',z)\zeta_j(x',y')\right|^2 d\sigma dx \le$$

$$\leq \int\limits_{\Gamma_{2\varepsilon}} \int\limits_{Z} \left| P^j(y, z+\sigma)\zeta_j(x,y) \right|^2 d\sigma dx \leq c \int\limits_{\Gamma_{2\varepsilon}} \int\limits_{Z} \left| P^j(y, z+\sigma)\zeta_j(x,y) \right|^2 d\sigma dx \leq$$

$$\leq c \int\limits_{\Gamma_{2\varepsilon}} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \leq c_2 \varepsilon (\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u\|^2_{H^2(\Omega)}) \leq C\varepsilon \|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Здесь на первом и втором шаге использованы те же соображения, что и при выводе леммы 2.1 – замена переменной и интегрирование по дополнительному параметру σ. На последних шагах используем неравенство для следа и эллиптическую оценку для решения усредненной задачи.

Покажем, как оцениваются интегралы типа (4.5), например, первый из них:

$$\int\limits_{\Omega} \int\limits_{Z} \left| \mathrm{div}_y (P^j(y', z)\zeta_j(x', y')) \right|^2 d\sigma dx$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \int\limits_{Z} \left| (\mathrm{div}_y P^j(y, z+\sigma))\zeta_j(x,y) + P^j(y, z+\sigma)\nabla_y \zeta_j(x,y) \right|^2 d\sigma dx \leq$$

$$\leq c \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \int\limits_{Z} \left| \mathrm{div}_y P^j(y, z+\sigma)|^2 |\nabla u(x) \right|^2 d\sigma dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \int\limits_{Z} (|P^j(y, z+\sigma)||\nabla_y^2 N(y)||\nabla u(x)|)^2 d\sigma dx \leq$$

$$\leq c_1 \sup_y \|\nabla_y P^j(y, \cdot)\|^2_{L^2_{per}(Z)} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sup_y \|\nabla_y P^j(y, \cdot)\|^2_{L^2_{per}(Z)} \int\limits_{\Omega_1} \left| \nabla^2 N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u(x) \right|^2 dx \leq$$

$$\leq C\|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

где использованы свойства функций N_j, P^j и u (см. лемму 0.4. и оценку (0.25)), оценки типа (2.4) и (2.9), а также свойства оператора продолжения (1.4).

Применяя аналогичные соображения, оцениваем и все другие интегралы из правой части (4.3). В итоге выводим оценку

$$\left| \int\limits_{Z} \int\limits_{\Omega} R_{\varepsilon,\sigma} \cdot \nabla \varphi dx d\sigma \right| \leq C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.7}$$

в которой по замыканию можно брать любую пробную функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$.

2° Теперь попробуем заменить в (4.7) $R_{\varepsilon,\sigma}$ на выражение $\hat{R}_\varepsilon$, определенное в (3.2). Справедливо следующее неравенство

$$\| \int\limits_{Z} R_{\varepsilon,\sigma} d\sigma - \hat{R}_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} \leq C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Действительно, запишем $\int\limits_Z R_{\varepsilon,\sigma} d\sigma$ подробно

$$\int\limits_Z R_{\varepsilon,\sigma} d\sigma = \int\limits_Z a\left(y - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, z\right)\left(\nabla u(x-\delta\sigma) + \varepsilon\nabla\left[N(y-\frac{\delta}{\varepsilon}\sigma)\cdot\nabla u\,(x-\delta\sigma)\right] + \right.$$

$$\left. +\delta\nabla\left[M\left(y-\frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, z\right)\cdot\left(I+\nabla N\left(y-\frac{\delta}{\varepsilon}\sigma\right)\right)\nabla u(x-\delta\sigma)\right]\right)d\sigma - a^0\int\limits_Z \nabla u(x-\delta\sigma)d\sigma,$$

для $y = \frac{x}{\varepsilon},\ z = \frac{x}{\delta}$. Заменим матрицу $a\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon}\sigma, \frac{\delta}{\varepsilon}\right)$ на $a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\delta}\right)$ с погрешностью $O\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)$ в силу свойства липшицевости, в результате чего, используя обозначение для корректора из (2.2), имеем

$$\int\limits_Z R_{\varepsilon,\sigma}(x)d\sigma =$$

$$= a^\varepsilon(x)\left[\int\limits_Z \nabla u(x-\delta\sigma)d\sigma + \nabla K_\varepsilon(x)\right] - a^0\int\limits_Z \nabla u(x-\delta\sigma)d\sigma + O\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right). \qquad (4.9)$$

Заметим, что $\int\limits_Z \varphi(x-\delta\sigma)d\sigma = (\varphi)_\delta(x)$ есть сглаживание по Стеклову функции $\varphi(x)$. Поэтому в (4.9) с учетом оценки (0.25) опускаем сглаживание по Стеклову для ∇u, после чего приходим к соотношению

$$\int\limits_Z R_{\varepsilon,\sigma}(x)d\sigma =$$

$$= a^\varepsilon(x)(\nabla u(x) + \nabla K_\varepsilon(x)) - a^0\nabla u(x) + O\left(\max\left\{\delta, \frac{\delta}{\varepsilon}\right\}\right) \leq$$

$$\leq a^\varepsilon(x)\nabla\hat{v}^\varepsilon(x) - a^0\nabla u(x) + O\left(\max\left\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\right\}\right) = \hat{R}_\varepsilon(x) + O\left(\max\left\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\right\}\right).$$

Оценка (4.8) получена.

В итоге из (4.7), (4.8) имеем

$$\int\limits_\Omega \hat{R}_\varepsilon\cdot\nabla\varphi dx \leq C\max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \varphi\in H^1(\Omega). \qquad (4.10)$$

Таким образом, установлены соотношение (3.4) и, как следствие, оценка (3.5).

Но на самом деле, доказана более точная, чем (4.10), оценка

$$\left|\int\limits_\Omega \hat{R}_\varepsilon\cdot\nabla\varphi dx\right| \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\left(\sqrt{\varepsilon}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} + \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}\right), \quad \varphi\in H^1(\Omega), \quad (4.11)$$

если переход от (4.3) к (4.7) не огрублять так, как раньше, в множителе $\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)}$.

3° Теперь по неравенству Пуанкаре в области Ω записываем оценку

$$\|\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_P \left(\|\nabla(\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega)} + \left| \int\limits_\Omega (\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon) dx \right|^2 \right). \tag{4.12}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_\Omega u^\varepsilon dx = \int\limits_\Omega u dx = 0,$$

имеем

$$\int\limits_\Omega (\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon) dx = \int\limits_\Omega K_\varepsilon dx.$$

В §2 фактически было доказано свойство

$$\|K_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.13}$$

Таким образом, из (4.12) и (3.5) вытекает оценка

$$\|\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \le C \max\left\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\right\} \|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

и в итоге получаем H^1-оценку (2.10). Теорема 2.1 доказана.

4° При выводе (4.10) важную роль играли следующие свойства решения u усредненной задачи:

i) $u \in H^2(\Omega)$ с оценкой $\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}$;

ii) неравенство для градиента ∇u в окрестности границы $\partial\Omega$:

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx \le c\varepsilon \|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.14}$$

Второе свойство есть следствие первого. Отметим, что свойство типа (4.14) справедливо и для градиента ∇u^ε, хотя u^ε, вообще говоря, не принадлежит $H^2(\Omega)$.

Лемма 4.1. *Пусть u^ε – решение задачи (1.1). Тогда выполнена оценка*

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

где C того же типа, что и в (1.5).

Доказательство. Запишем равенство

$$u^\varepsilon = (u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon) + \hat{v}^\varepsilon = (u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon) + u + K_\varepsilon,$$

где $\hat{v}^\varepsilon$ есть H^1-приближение к решению u^ε (см. (2.2)). Отсюда

$$\nabla u^\varepsilon = \nabla(u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon) + \nabla u^\varepsilon + \nabla K_\varepsilon,$$

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \le \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla(u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon)|^2 dx + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla K_\varepsilon|^2 dx = I_1 + I_2 + I_3,$$

где ∇K_ε равен сумме интегральных членов из (2.7). Оценим каждый из интегралов I_1, I_2 и I_3:

$$I_1 \le \|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

в силу (2.10);

$$I_2 \le c\varepsilon \|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

благодаря (4.14);

$$I_3 \le \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left(|\nabla u|^2 + \max\left\{ \varepsilon^2, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 \right\} |\nabla^2 u|^2 \right) dx \le$$

$$\le c \left(\varepsilon \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \max\left\{ \varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon} \right\} \|f\|^2_{L^2(\Omega)} \right),$$

что справедливо в силу (2.7) и устанавливается с помощью рассуждений §2 и неравенств (4.14) и (1.3). В итоге получаем искомую оценку.

§5. Вывод L^2-оценки

Для произвольной функции $\Phi \in \tilde{L}^2(\Omega)$ рассмотрим краевую задачу Неймана

$$\varphi^\varepsilon \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad -\mathrm{div}[a^\varepsilon(x) \nabla \varphi^\varepsilon(x)] = \Phi. \tag{5.1}$$

Для решения φ^ε выполнены энергетическая оценка

$$\|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le c_0 \|\Phi\|_{L^2(\Omega)}, \tag{5.2}$$

и оценка для градиента вблизи границы (см. лемму 4.1)

$$\|\nabla \varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \le C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\} \|\Phi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.3}$$

Исходя из интегрального тождества для задачи (5.1) с пробной функцией

$$w^\varepsilon = \hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon,$$

имеем

$$\int\limits_\Omega \Phi w^\varepsilon dx = \int\limits_\Omega a^\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon dx = \int\limits_\Omega \nabla \varphi^\varepsilon \cdot a^\varepsilon \nabla w^\varepsilon dx = \int\limits_\Omega \hat{R}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi^\varepsilon dx,$$

где в силу (4.11), (5.2), (5.3)

$$\int\limits_{\Omega} \hat{R}_\varepsilon \cdot \nabla\varphi^\varepsilon dx \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}(\sqrt{\varepsilon}\|\nabla\varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_{2\varepsilon})} + \max\left\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\right\}\|\nabla\varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}) \leq$$

$$\leq C\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Отсюда, взяв

$$\Phi = w^\varepsilon - \int\limits_{\Omega} w^\varepsilon dx,$$

получаем

$$\|\Phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\max\left\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\right\}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

В итоге, поскольку

$$\int\limits_{\Omega} w^\varepsilon dx = \int\limits_{\Omega} K_\varepsilon dx = O(\varepsilon),$$

что уже показано раньше, выводим

$$\|\hat{v}^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Отсюда уже получается L^2-оценка (1.5), так как

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} = \|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon + K_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + O(\varepsilon).$$

Теорема 1.1 доказана.

§6. Оценки усреднения для задачи Дирихле

Рассмотрим задачу Дирихле в ограниченной области Ω

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad A_\varepsilon u^\varepsilon = f, \quad f \in L^2(\Omega) \\ A_\varepsilon = -\mathrm{div} a^\varepsilon(x)\nabla, \end{cases} \tag{6.1}$$

в которой матрица a^ε того же типа, что и в §1. Усредненной будет задача

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad A_0 u = -\mathrm{div} a^0\nabla u = f, \quad f \in L^2(\Omega). \tag{6.2}$$

Здесь матрица a^0 постоянна и находится в процессе повторного усреднения. Пусть область Ω достаточна регулярна, так что $u \in H^2(\Omega)$ и верна эллиптическая оценка

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c_0\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.3}$$

Наша цель – получить равномерную сходимость резольвент $A_\varepsilon^{-1} \to A_0^{-1}$, где A_ε и A_0 рассматриваются как операторы, действующие в $L^2(\Omega)$, с оценкой вида

$$\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)} \le C\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}. \tag{6.4}$$

Используя оператор $\mathcal{P}$, введенный в (1.4), продолжим решение u в $\mathbb{R}^d$ и продолжение обозначим по прежнему u. Снова обратимся к сглаженному первому приближению (см. (2.1), (2.2))

$$\hat{v}^\varepsilon(x) = u(x) + K_\varepsilon(x).$$

Для такого приближения имеет место результат, не связанный с каким-либо уравнением (см. (5.5) в гл. 2). Приведем его здесь

$$\|\mathrm{div}(a^\varepsilon\nabla\hat{v}^\varepsilon - a^0\nabla u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \le C\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{6.5}$$

где константа C зависит от размерности d и постоянных c_L, λ. Используя оператор продолжения $\mathcal{P}$, перенесем результат (6.5) на область Ω:

$$\|\mathrm{div}(A_\varepsilon\hat{v}^\varepsilon - A_0 u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \le C\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}\|u\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall u\in H^2(\Omega). \tag{6.6}$$

Операторную оценку (6.4) обеспечивает следующая

Теорема 6.1. *Справедливы неравенства*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \le C\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.7}$$

$$\|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C\max\{\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.8}$$

где константа C зависит от размерности d и постоянных λ и c_L.

Доказательство. Рассмотрим более точное первое приближение $\hat{v}^\varepsilon - w^\varepsilon$, где w^ε – решение соответствующей задачи Дирихле

$$\begin{cases} \mathrm{div} a^\varepsilon\nabla w^\varepsilon = 0 \ \text{ в } \Omega, \\ w^\varepsilon|_\Gamma = K_\varepsilon, \end{cases} \tag{6.9}$$

которое устраняет невязку в краевом условии на границе $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω.

Так как $u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon + w^\varepsilon$ будет решением задачи Дирихле, то из (6.6)

$$\begin{cases} A_\varepsilon(u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon + w^\varepsilon) = A_0 u - A_\varepsilon\hat{v}^\varepsilon, \\ (u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon + w^\varepsilon)|_\Gamma = 0, \end{cases}$$

получим оценку

$$\|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon + w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le c_0 \|\mathrm{div}(A_0 u - A_\varepsilon \hat{v}^\varepsilon)\|_{H^{-1}(\Omega)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|u\|_{H^2(\Omega)}. \tag{6.10}$$

Откуда в силу (6.3) имеем

$$\|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon + w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.11}$$

Из (6.11) видно, что теперь необходимо оценить поправочное слагаемое $w^\varepsilon(x)$.

Лемма 6.1. *Если w^ε – решение задачи (6.9), то*

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.12}$$

где константа C того же типа, что и в (6.7).

Доказательство. Введем срезающую гладкую функцию $\theta^\varepsilon(x)$, сосредоточенную в ε - окрестности границы $\Gamma = \partial\Omega$ такую, что

$$\mathrm{supp}\, \theta^\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon(x)|_{\Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}} = 1, \quad 0 \le \theta^\varepsilon(x) \le 1, \quad |\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon(x)| \le c.$$

Положим

$$\Phi^\varepsilon(x) = \theta^\varepsilon(x) K_\varepsilon(x).$$

Тогда достаточно оценить $\|\Phi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$, а затем воспользоваться энергетической оценкой

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le c_0 \|\Phi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

Имеем

$$\nabla \Phi^\varepsilon = \nabla \theta^\varepsilon K_\varepsilon + \theta^\varepsilon \nabla K_\varepsilon.$$

Из оценки (4.13) и свойств функции $\theta^\varepsilon(x)$ выводим

$$\|\Phi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.13}$$

из которой следует (6.12). Лемма и вместе с ней оценка (6.8) доказаны.

Перейдем к доказательству L^2-оценки. Прежде всего из (6.11) следует неравенство

$$\|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon + w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.14}$$

Отсюда, учитывая структуру $\hat{v}^\varepsilon$ (см. (2.1)) и ограниченность N, M, $\nabla_y N$, выводим

$$\|u^\varepsilon - u + w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Оценку (6.7) обеспечивает следующая

Лемма 6.2. *Для решения задачи (6.9) имеет место неравенство*

$$\|w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.15}$$

где константа C зависит от d, λ, c_L и области Ω.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$z^\varepsilon = w^\varepsilon - \Phi^\varepsilon, \quad \Phi^\varepsilon = \theta^\varepsilon K_\varepsilon. \tag{6.16}$$

Заметим, что

$$z^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad A_\varepsilon = \mathrm{div}(a^\varepsilon \nabla \Phi^\varepsilon) \equiv F^\varepsilon,$$

причем, как было уже установлено (см. (6.13)),

$$\|\nabla \Phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C \max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6.17}$$

а из определения функции Φ^ε следует, что

$$\|\Phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6.18}$$

Для произвольной функции $\Phi \in L^2(\Omega)$ рассмотрим задачу Дирихле

$$\varphi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad -\mathrm{div}(a^\varepsilon(x)\nabla\varphi^\varepsilon(x)) = \Phi(x).$$

Тогда, в силу интегральных тождеств для введенных краевых задач, имеем

$$\int\limits_\Omega \Phi z^\varepsilon dx = \int\limits_\Omega a^\varepsilon \nabla\varphi^\varepsilon \cdot z^\varepsilon dx = \int\limits_\Omega \nabla\varphi^\varepsilon \cdot a^\varepsilon \nabla z^\varepsilon dx =$$

$$= -\int\limits_\Omega \varphi^\varepsilon F^\varepsilon dx = \int\limits_\Omega a^\varepsilon \nabla\Phi^\varepsilon \cdot \nabla\varphi^\varepsilon dx = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} a^\varepsilon \nabla\Phi^\varepsilon \cdot \nabla\varphi^\varepsilon dx,$$

где на последнем шаге учли, что в выражение Φ^ε (см. (6.16)) входит срезающая функция θ^ε. Отсюда

$$\int\limits_\Omega \Phi z^\varepsilon dx = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} a^\varepsilon \nabla\Phi^\varepsilon \cdot \nabla\varphi^\varepsilon dx \le c \left(\int\limits_\Omega |\nabla\Phi^\varepsilon|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla\varphi^\varepsilon|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\Phi\|_{L^2(\Omega)},$$

где воспользовались (6.17) и оценкой для градиента вблизи границы

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla \varphi^\varepsilon|^2 dx \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

вывод которой аналогичен случаю задачи Неймана (см. лемма 4.1). Так как Φ – произвольный элемент из $L^2(\Omega)$, то, полагая $\Phi = z^\varepsilon$, получаем

$$\|z^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C \max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

что вместе с (6.18) дает (6.15). Лемма, а вместе с ней оценка (6.7) установлены.

Приложение А

Об операторных оценках усреднения для эллиптических операторов с младшими членами

§1. Постановка задачи и основной результат

1. Рассмотрим во всем пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, дивергентное эллиптическое уравнение второго порядка общего вида

$$\begin{gathered} u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_\varepsilon u^\varepsilon + \mu u^\varepsilon = f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ A_\varepsilon u^\varepsilon = -\operatorname{div}(a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \alpha^\varepsilon u^\varepsilon) + \beta^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \gamma^\varepsilon u^\varepsilon, \end{gathered} \tag{A.1}$$

с малым параметром $\varepsilon \in (0,1)$. Коэффициенты уравнения ε-периодические и, значит, быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$. Напомним, что матрица старших коэффициентов получается как $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$, где $a(y)$ – измеримая 1-периодическая матрица с вещественными элементами (необязательно симметричная), $Y = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ – ячейка периодичности. Аналогично с помощью 1-периодических функций $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\gamma(y)$ получаются коэффициенты в младших членах уравнения (A.1).

Предполагаем, что матрица $a(y)$ подчинена условиям эллиптичности и ограниченности

$$\lambda|\xi|^2 \leq a(y)\xi \cdot \xi, \quad a(y)\xi \cdot \eta \leq \lambda^{-1}|\xi||\eta| \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda > 0, \tag{A.2}$$

а 1-периодические векторы $\alpha(y)$, $\beta(y)$ и функция $\gamma(y)$ могут быть неограниченными, при этом выполнено условие интегрируемости:

$$\text{конечны нормы} \quad \|\alpha\|_{L^{2p}(Y)^d}, \quad \|\beta\|_{L^{2p}(Y)^d}, \quad \|\gamma\|_{L^p(Y)}, \tag{A.3}$$

где

$$p = \frac{d}{2} \text{ при } d > 2, \quad p > 1 \text{ при } d = 2. \tag{A.4}$$

Решение уравнения (A.1) понимается в смысле интегрального тождества

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbb{R}^d} (a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \alpha^\varepsilon u^\varepsilon) \cdot \nabla\varphi dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \beta^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon \varphi dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \gamma^\varepsilon u^\varepsilon \varphi dx + \mu \int\limits_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon \varphi dx = \\ \int\limits_{\mathbb{R}^d} f\varphi dx \quad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d).\end{gathered} \tag{A.5}$$

Чтобы обосновать корректность постановки задачи, изучим стоящую в левой части тождества (A.5) билинейную форму

$$B_\varepsilon(u,v) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (a^\varepsilon \nabla u + \alpha^\varepsilon u) \cdot \nabla v dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \beta^\varepsilon \cdot \nabla u\, v dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \gamma^\varepsilon uv dx + \mu \int\limits_{\mathbb{R}^d} uv dx, \quad u,v \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{A.6}$$

Покажем, что все участвующие в (A.6) интегралы конечны. Для этого полезно следующее утверждение из [21, Лемма 5.1].

Лемма A.1 *Пусть* $\rho_\varepsilon(x) = \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\rho \geq 0$, $\rho \in L^p_{per}(Y)$ *и показатель* p *такой же, как в (A.4). Тогда*

$$(\rho_\varepsilon u, u) \leq c_1(\|u\|^2 + \varepsilon^2 \|\nabla u\|^2), \quad c_1 = const(d, \|\rho\|_{L^p(Y)}). \tag{A.7}$$

Здесь и всюду далее используем упрощенное обозначение для скалярного произведения и нормы в $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Часто не различаем в обозначениях пространства скалярных и векторных функций.

Для полноты изложения в конце Приложения A приводится доказательство леммы A.1. Сейчас же укажем

Следствие из леммы A.1 *Для составляющих формы (A.6) верны оценки:*

i) $(\gamma_\varepsilon u, v) \leq c_2(\|u\| + \varepsilon\|\nabla u\|)(\|v\| + \varepsilon\|\nabla v\|), \quad c_2 = const(d, \|\gamma\|_{L^p(Y)});$

ii) $(\alpha_\varepsilon u, \nabla v) \leq c_3(\|u\| + \varepsilon\|\nabla u\|)\|\nabla v\|, \quad c_3 = const(d, \|\alpha\|_{L^{2p}(Y)^d});$

iii) $(\beta_\varepsilon \cdot \nabla u, v) \leq c_4(\|v\| + \varepsilon\|\nabla v\|)\|\nabla u\|, \quad c_4 = const(d, \|\beta\|_{L^{2p}(Y)^d}).$

Действительно, поскольку $(\gamma_\varepsilon u, v) \leq (\rho_\varepsilon u, u)^{\frac{1}{2}} (\rho_\varepsilon v, v)^{\frac{1}{2}}$, $\rho_\varepsilon = |\gamma_\varepsilon|$, то утверждение $i)$ непосредственно следует из (A.7) и числового неравенства $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \leq a+b$ для любых $a,b \geq 0$.

Утверждения ii) и iii) доказываются однотипно. Например, в случае ii) запишем неравенство

$$(\alpha_\varepsilon u, \nabla v) \le \|\alpha_\varepsilon u\|\,\|\nabla v\| = (|\alpha_\varepsilon|^2 u, u)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|$$

и к форме $(|\alpha_\varepsilon|^2 u, u)$ применим оценку (A.7), полагая $\rho_\varepsilon = |\alpha_\varepsilon|^2$.

Утверждения i)-iii) вместе с условием (A.2) обеспечивают свойство ограниченности формы (A.6) при всех ε и μ, а свойство коэрцитивности – для подходящих ε и μ. Докажем только менее очевидное свойство коэрцитивности. Оно заключается в том, что

$$\exists \lambda_0 > 0 : \quad B_\varepsilon(u, u) \ge \lambda_0 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^d) \tag{A.8}$$

при достаточно больших $\mu \ge \mu_0 > 0$ и достаточно малых $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Значения μ_0, ε_0 и λ_0 зависят от размерности d, константы эллиптичности λ и норм из (A.3), что видно из дальнейшего.

В самом деле, исходим из неравенства

$$B_\varepsilon(u, u) \ge \lambda \|\nabla u\|^2 + \mu \|u\|^2 - |(\gamma_\varepsilon u, u)| - |(\alpha_\varepsilon u, \nabla u)| - |(\beta_\varepsilon \cdot \nabla u, v)|,$$

где учли уже свойство эллиптичности (A.2), и далее применяем к трем формам из правой части оценки i)-iii). Отсюда, используя также числовое неравенство $ab \le \frac{\delta}{2} a^2 + \frac{1}{2\delta} b^2$ $(\forall \delta > 0)$ последовательно выводим:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(u, u) \ge& \lambda \|\nabla u\|^2 + \mu \|u\|^2 - \\ & c_1(\|u\|^2 + \varepsilon^2 \|\nabla u\|^2) - c_3(\|u\| + \varepsilon \|\nabla u\|)\|\nabla u\| - c_4(\|u\| + \varepsilon \|\nabla u\|)\|\nabla u\| = \\ & (\lambda - c_1\varepsilon^2 - c_3\varepsilon - c_3\varepsilon)\|\nabla u\|^2 + (\mu - c_1)\|u\|^2 - (c_3 + c_4)\|u\|\|\nabla u\| \ge \\ & (\lambda - c_1\varepsilon^2 - c_3\varepsilon - c_4\varepsilon - \frac{\delta}{2})\|\nabla u\|^2 + (\mu - c_1 - \frac{1}{2\delta}(c_3 + c_4)^2)\|u\|^2 \ge \\ & \frac{1}{4}\lambda \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2, \end{aligned}$$

если $\delta = \lambda$, при этом ε столь мало, что $c_1\varepsilon^2 + (c_3 + c_4)\varepsilon < \frac{\lambda}{4}$, и μ столь велико, что $\mu - c_1 - \frac{1}{2\lambda}(c_3 + c_4)^2 > 1$. Осталось положить $\lambda_0 = \min\{\frac{1}{4}\lambda, 1\}$.

Располагая свойствами ограниченности и коэрцитивности для формы (A.6), по лемме Лакса – Мильграма выводим существование и единственность решения задачи (A.1). Записав тождество (A.5) при $\varphi = u^\varepsilon$, получим энергетическое равенство

$$B_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = (f, u^\varepsilon),$$

из которого в силу (A.8) следует энергетическая оценка

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{\lambda_0} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{A.9}$$

2. С исходной задачей (A.1) связана усредненная задача

$$\begin{gathered} u \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_0 u + \mu u = f, \\ A_0 u = -\operatorname{div}(a^0 \nabla u + \alpha^0 u) + \beta^0 \cdot \nabla u + \gamma^0 u, \end{gathered} \tag{A.10}$$

где a^0 – постоянная положительно определенная матрица и коэффициенты в младших членах также постоянны. Точные формулы для a^0, α^0, β^0, γ^0 даны ниже (см. (A.16) и (A.17)).

Решение задачи (A.10) понимается в смысле интегрального тождества

$$B_0(u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d),$$

где имеем аналогичную (A.6) билинейную форму, но с постоянными коэффициентами, а именно,

$$B_0(u, v) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (a^0 \nabla u + \alpha^0 u) \cdot \nabla v dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \beta^0 \cdot \nabla u \, v dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} \gamma^0 u v dx + \mu \int\limits_{\mathbb{R}^d} u v dx.$$

Решение задачи (A.10) существует и единственно при достаточно больших μ, благодаря лемме Лакса – Мильграма. Ввиду постоянства коэффициентов в усредненном уравнении, помимо энергетической оценки типа (A.9) для решения u выполнена эллиптическая оценка

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \le c_0 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{A.11}$$

Далее задачи (A.1) и (A.10) рассматриваются при подходящих μ и ε, $\mu \ge \mu_0$ и $\varepsilon \le \varepsilon_0$, где выбор μ_0 и ε_0 обеспечивает коэрцитивность операторов A_ε, A и, как следствие, обе задачи поставлены корректно. Это уточнение часто будем опускать.

Нашей целью будет следующая

Теорема A.1. *Для разности решений задач (A.1) и (A.10) верна оценка*

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{A.12}$$

если $\mu \ge \mu_0$ и $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Константа C зависит от размерности d, постоянной эллиптичности λ, параметра μ и норм $\|\alpha\|_{L^{2p}(Y)^d}$, $\|\beta\|_{L^{2p}(Y)^d}$, $\|\gamma\|_{L^p(Y)}$.

Из (A.12) следует оценка в операторной ($L^2 \to L^2$)-норме для разности резольвент исходного и усредненного операторов

$$\|(A_\varepsilon + \mu)^{-1} - (A_0 + \mu)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon. \tag{A.13}$$

Резольвенту $(A_\varepsilon + \mu)^{-1}$ можно рассматривать как оператор, действующий из $L^2(\mathbb{R}^d)$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, и в операторной ($L^2 \to H^1$)-норме её аппроксимацией будет сумма $(A_0 + \mu)^{-1} +$

$\varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon$ резольвенты усредненного оператора и корректирующего оператора $\varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon$, структура которого указана в (A.58). Точное утверждение об аппроксимации решения задачи (A.1) в H^1-норме дано в теореме A.3.

3. Введем периодические задачи

$$
\begin{gathered}
N_j \in H^1_{per}(Y), \quad \mathrm{div}_y[a(y)(e^j + \nabla_y N_j(y))] = 0, \\
\langle N_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, d,
\end{gathered}
\tag{A.14}
$$

где $e^1,\ e^2, \dots\ e^d$ – канонический базис в $\mathbb{R}^d$;

$$
N_0 \in H^1_{per}(Y), \quad \mathrm{div}_y[(a(y)\nabla N_0(y) + \alpha(y))] = 0, \quad \langle N_0 \rangle = 0. \tag{A.15}
$$

Здесь использовано среднее по ячейке

$$
\langle \cdot \rangle = \int\limits_Y \cdot \, dy.
$$

Решения задач на ячейке понимаются в смысле выполнения интегрального тождества на гладких периодических функциях. Например, для задачи (A.14) должно выполняться тождество

$$
\int\limits_Y [a(y)(e^j + \nabla_y N_j(y))] \cdot \nabla\varphi(y)\, dy = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_{per}(Y),
$$

которое означает, что $a(y)(e^j + \nabla_y N_j(y))$ есть соленоидальный вектор из $L^2_{per}(Y)^d$. Далее этим фактом воспользуемся.

Задачи (A.14) и (A.15) имеют единственное решение, что легко доказывается по лемме Лакса – Мильграма. В этой связи для уравнения (A.15) стоит отметить, что $\alpha \in L^2_{per}(Y)^d$, в силу условий (A.3) и (A.4), и уравнение записывается в виде $\mathrm{div}_y[(a(y)\nabla N_0(y)] = -\mathrm{div}_y\, \alpha(y)$ с правой частью, принадлежащей сопряженному пространству $(H^1_{per}(Y))^*$.

С периодическими задачами (A.14) и (A.15) связано определение коэффициентов усредненного уравнения (A.10). Усредненная матрица a^0 определяется соотношениями

$$
a^0 e^j = \langle a(e^j + \nabla_y N_j \rangle, \quad j = 1, \dots, d. \tag{A.16}
$$

Остальные коэффициенты определяются равенствами:

$$
\alpha^0 = \langle a\nabla_y N_0 + \alpha \rangle, \quad \beta^0 = \langle (\mathbf{1} + \nabla_y N)\beta \rangle, \quad \gamma^0 = \langle \beta \cdot \nabla_y N_0 + \gamma \rangle, \tag{A.17}
$$

где $N = \{N_1, N_2, \dots, N_d\}$ – вектор из решений задачи (A.14), $\mathbf{1}$ – единичная матрица.

4. Некоторые замечания.

Замечание 1. Операторные оценки усреднения для дивергентных несамосопряженных эллиптических уравнений любого четного порядка с младшими членами, но с ограниченными коэффициентами доказаны в [33] (см. также [26]).

Замечание 2. В работах [43], [44] изучались операторные оценки усреднения для самосопряженных уравнений с неограниченными коэффициентами, при этом предполагались несколько более сильные, чем в (A.3), (A.4), условия интегрируемости на коэффициенты в младших членах как нулевого, так и первого порядков.

Величина показателей интегрируемости в (A.3), (A.4) диктуется теоремами вложения. Эти показатели в нашем случае в точности совпадают с теми, что возникают в классической теории эллиптических уравнений с неограниченными коэффициентами (см. [39, гл. III]).

Замечание 3. Что касается эллиптических уравнений второго порядка с неограниченными коэффициентами в старшей части, то операторные оценки усреднения доказаны в случае разложения матрицы старших коэффициентов $a(y) = a^s(y) + b(y)$ на симметрическую и кососимметрическую части, так что симметрическая матрица $a^s(y)$ удовлетворяет условию типа (A.2), а кососимметрическая матрица $b(y)$ имеет элементы из пространства BMO (пространства функций с ограниченным средним колебанием), см. [26] .

§2. Первое приближение и его невязка в уравнении

Попробуем построить приближение к решению задачи (A.1) в H^1-норме, или коротко первое приближение. Следуя классической теории усреднения (см. [1], [3], [4]), возьмём первое приближение в виде

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N_j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon N_0(y)u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \tag{A.18}$$

где N_j $(j = 0, 1, \ldots, d)$ – решения задач на ячейке, u – решение усредненной задачи.

Для первого приближения v^ε вычислим градиент и поток:

$$\begin{gathered}\nabla v^\varepsilon(x) = \nabla u(x) + \nabla_y N_j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \nabla_y N_0(y)u(x) + \varepsilon N_j(y)\nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + \varepsilon N_0(y)\nabla u(x) = \\ (e^j + \nabla_y N_j(y))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \nabla_y N_0(y)u(x) + \varepsilon\nabla^2 u(x)N(y) + \varepsilon N_0(y)\nabla u(x), \\ a(y)\nabla v^\varepsilon(x) + \alpha(y)v^\varepsilon(x) = a(y)(e^j + \nabla_y N_j(y))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + [a(y)\nabla N_0(y) + \alpha(y)]u(x) + \\ +\varepsilon a(y)\nabla^2 u(x)N(y) + \varepsilon a(y)N_0(y)\nabla u(x) + \varepsilon\alpha(y)(N(y)\cdot\nabla u(x)) + \varepsilon\alpha(y)N_0(y)u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}.\end{gathered} \tag{A.19}$$

Сравним вычисленный поток с потоком $a^0\nabla u+\alpha^0 u$ усредненного уравнения. Для разности этих потоков имеем представление

$$R_\varepsilon \equiv a(y)\nabla v^\varepsilon(x)+\alpha(y)v^\varepsilon(x)-a^0\nabla u(x)-\alpha^0 u(x)=$$

$$=[a(y)(e^j+\nabla_y N_j(y))-a^0e^j]\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+[a(y)\nabla N_0(y)+\alpha(y)-\alpha^0]u(x)+$$

$$\varepsilon a(y)\nabla^2 u(x)N(y)+\varepsilon a(y)N_0(y)\nabla u(x)+\varepsilon\alpha(y)(N(y)\cdot\nabla u(x))+\varepsilon\alpha(y)N_0(y)u(x)=$$

$$\begin{gathered}=g^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+g^0(y)u(x)+\\ +\varepsilon a(y)\nabla^2 u(x)N(y)+\varepsilon a(y)N_0(y)\nabla u(x)+\varepsilon\alpha(y)(N(y)\cdot\nabla u(x))+\\ +\varepsilon\alpha(y)N_0(y)u(x),\quad y=\frac{x}{\varepsilon},\end{gathered}\tag{A.20}$$

где возникли векторы

$$g^j(y)=a(y)(e^j+\nabla_y N_j(y))-a^0e^j,\quad g^0(y)=a(y)\nabla N_0(y)+\alpha(y)-\alpha^0.\tag{A.21}$$

Это – соленоидальные периодические векторы из $L^2_{per}(Y)^d$ в силу уравнений (A.14) и (A.15), притом с нулевым средним (см. определение a^0 и α^0 в (A.16), (A.17)). Известно представление подобных векторов через матричный потенциал (см. лемму 0.1). Записывая вектора (A.21) через такой матричный потенциал, имеем

$$g^j(y)=\mathrm{div}_y G^j(y),\quad G^j\in H^1_{per}(Y)^{d\times d},\quad j=0,1,\dots,d,\tag{A.22}$$

и, как следствие, (без суммирования по повторяющимся индексам j)

$$\begin{gathered}g^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}=\varepsilon\mathrm{div}\left(G^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)-\varepsilon G^j(y)\nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right),\quad j=1,\dots,d,\\ g^0(y)u(x)=\varepsilon\mathrm{div}(G^0(y)u(x))-\varepsilon G^0(y)\nabla u(x),\quad y=\frac{x}{\varepsilon}.\end{gathered}\tag{A.23}$$

Заметим, что первое слагаемое в этих представлениях есть соленоидальный вектор. Действительно, для $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathrm{div}\left(G^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx=-\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}G^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla^2\varphi(x)dx=0,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathrm{div}\left(G^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u(x)\right)\cdot\nabla\varphi(x)dx=-\int\limits_{\mathbb{R}^d}u(x)G^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla^2\varphi(x)dx=0,$$

так как матрицы G^j и G^0 кососимметрические, а матрица $\nabla^2\varphi$ – симметрическая.

Представления (A.23) позволяют для $\mathrm{div} R_\varepsilon$ получить содержащие множитель ε выражение

$$\begin{gathered}\mathrm{div} R_\varepsilon \overset{(A.20)}{=} \\ = \varepsilon \mathrm{div}[a(y)\nabla^2 u(x)N(y) + a(y)N_0(y)\nabla u(x) + \alpha(y)(N(y)\cdot\nabla u(x)) + \alpha(y)N_0(y)u(x) - \\ -G^0(y)\nabla u(x) - G^j(y)\nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)], \quad y = \frac{x}{\varepsilon}.\end{gathered} \tag{A.24}$$

Теперь выпишем для первого приближения v^ε так называемый скалярный поток

$$\begin{gathered}\beta(y)\cdot\nabla v^\varepsilon(x) + \gamma(y)v^\varepsilon(x) = \\ = \beta(y)\cdot(e^j + \nabla_y N_j(y))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + [\beta(y)\cdot\nabla N_0(y) + \gamma(y)]u(x) + \varepsilon\beta(y)\cdot(\nabla^2 u(x)N(y)) + \\ + \varepsilon\beta(y)\cdot\nabla u(x)N_0(y) + \varepsilon\gamma(y)N(y)\cdot\nabla u(x) + \varepsilon\gamma(y)N_0(y)u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon},\end{gathered}$$

и сравним его со скалярным потоком $\beta^0\cdot\nabla u(x) + \gamma^0 u(x)$ усредненного уравнения. Для разности этих потоков имеем представление

$$\begin{gathered}r_\varepsilon \equiv \beta(y)\cdot\nabla v^\varepsilon(x) + \gamma(y)v^\varepsilon(x) - \beta^0\cdot\nabla u(x) - \gamma^0 u(x) = \\ = [\beta(y)\cdot(e^j + \nabla_y N_j(y)) - \beta_j^0]\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + [\beta(y)\cdot\nabla N_0(y) + \gamma(y) - \gamma^0]u(x) + \\ + \varepsilon\beta(y)\cdot(\nabla^2 u(x)N(y)) + \varepsilon\beta(y)\cdot\nabla u(x)N_0(y) + \varepsilon\gamma(y)N(y)\nabla u(x) + \varepsilon\gamma(y)N_0(y)u(x), \\ y = \frac{x}{\varepsilon}.\end{gathered}$$

Стоящие здесь в квадратных скобках функции

$$\begin{gathered}s_j(y) = \beta(y)\cdot(e^j + \nabla_y N_j(y)) - \beta_j^0, \quad j = 1, \dots, d, \\ s_0(y) = \beta(y)\cdot\nabla N_0(y) + \gamma(y) - \gamma^0\end{gathered} \tag{A.25}$$

имеют нулевое среднее, в силу определения констант β_j^0 и γ^0 (см. (A.17)). Кроме того, для всех j

$$s_j \in L_{per}^{\frac{2p}{p+1}}(Y). \tag{A.26}$$

Действительно, поскольку $\beta \in L_{per}^{2p}(Y)^d$ и $\nabla_y N_j \in L_{per}^2(Y)^d$, то

$$\int\limits_Y |\nabla_y N_j(y)\cdot\beta(y)|^{\frac{2p}{p+1}}dy \le \left(\int\limits_Y |\nabla_y N_j(y)|^2 dy\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int\limits_Y |\beta(y)|^{2p}dy\right)^{\frac{1}{p+1}} < \infty$$

по неравенству Гельдера и, значит, $\nabla_y N_j\cdot\beta \in L_{per}^{\frac{2p}{p+1}}(Y)$. Кроме того, очевидно, $\beta \in L_{per}^{\frac{2p}{p+1}}(Y)^d$. Поэтому, согласно определению $(A.25)_1$, соотношение (A.26) проверено для s_j, $j \ge 1$. В случае s_0 проходит то же рассуждение, надо лишь дополнительно заметить, что $\gamma \in L^p_{per}(Y)$ и $L^p_{per}(Y) \subset L^{\frac{2p}{p+1}}_{per}(Y)$. Последнее вложение есть следствие того, что $p > \frac{2p}{p+1}$, поскольку $p > 1$ по условию (A.4).

Справедливо следующее утверждение, доказательство которого приведено в §5.

Лемма A.2 *Найдутся такие векторы $S^j \in L^2_{per}(Y)^d$, $j = 0, 1, \ldots, d$, что справедливы представления $s_j(y) = \mathrm{div} S^j(y)$, при этом*

$$\|S^j\|_{L^2_{per}(Y)^d} \leq c\|s_j\|_{L^{\frac{2p}{p+1}}_{per}(Y)}, \quad c = const(d). \tag{A.27}$$

Используя представления из леммы A.2, запишем

$$s_j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \varepsilon \mathrm{div}\left(S^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) - \varepsilon S^j(y) \cdot \nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right),$$

$$s_0(y)u(x) = \varepsilon \mathrm{div}\left(S^0(y)u(x)\right) - \varepsilon S^0(y) \cdot \nabla u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Тогда разность r_ε (см. (A.28)) можно представить в виде

$$\begin{gathered} r_\varepsilon = \varepsilon \mathrm{div}\left(S^j(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + S^0(y)u(x)\right) + \\ \varepsilon\beta(y) \cdot (\nabla^2 u(x) N(y)) + \varepsilon\beta(y) \cdot \nabla u(x) N_0(y) + \varepsilon\gamma(y) N(y) \cdot \nabla u(x) + \\ +\varepsilon\gamma(y) N_0(y) u(x) - \varepsilon S^j(y) \cdot \nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) - \varepsilon S^0(y) \cdot \nabla u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \end{gathered} \tag{A.28}$$

Из приведенных выше выкладок следует, что

$$\begin{gathered} A_\varepsilon(v^\varepsilon - u^\varepsilon) + \mu(v^\varepsilon - u^\varepsilon) = A_\varepsilon v^\varepsilon - A_\varepsilon u^\varepsilon + \mu v^\varepsilon - \mu u^\varepsilon = A_\varepsilon v^\varepsilon + \mu v^\varepsilon - f = \\ = A_\varepsilon v^\varepsilon + \mu v^\varepsilon - A_0 u - \mu u = -\mathrm{div} R_\varepsilon + r_\varepsilon + \mu(v^\varepsilon - u) = \\ = -\mathrm{div} R_\varepsilon + r_\varepsilon + \varepsilon\mu N(y) \cdot \nabla u(x) + \varepsilon\mu N_0(y) u(x), \end{gathered} \tag{A.29}$$

где $\mathrm{div} R_\varepsilon$ и r_ε указаны в (A.24) и (A.28). Иными словами, функция $w^\varepsilon = v^\varepsilon - u^\varepsilon$ является решением уравнения

$$A_\varepsilon w^\varepsilon + \mu w^\varepsilon = f_\varepsilon + \mathrm{div} F_\varepsilon, \tag{A.30}$$

где функции f_ε, F_ε точно выписываются через решения вспомогательных задач на ячейке и решение усредненной задачи, согласно (A.24) и (A.28). А именно,

$$F_\varepsilon(x) = R_\varepsilon(x) + \varepsilon S^j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \varepsilon S^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u(x), \tag{A.31}$$

где

$$R_\varepsilon(x) \overset{(A.24)}{=} \varepsilon[a(y)\nabla^2 u(x)N(y) + a(y)N_0(y)\nabla u(x) + \alpha(y)(N(y)\cdot\nabla u(x)) + \alpha(y)N_0(y)u(x) -$$

$$G^0(y)\nabla u(x) - G^j(y)\nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)], \quad y = \frac{x}{\varepsilon},$$

и

$$\begin{gathered} f_\varepsilon(x) \overset{(A.28),(A.29)}{=} \\ = \varepsilon[\beta(y)\cdot(\nabla^2 u(x)N(y)) + \beta(y)\cdot\nabla u(x)N_0(y) + \gamma(y)N(y)\cdot\nabla u(x) + \\ +\gamma(y)N_0(y)u(x) - S^j(y)\cdot\nabla\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) - S^0(y)\cdot\nabla u(x) + \\ +\mu N(y)\cdot\nabla u(x) + \mu N_0(y)u(x)]|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}. \end{gathered} \tag{A.32}$$

Уравнение (A.30) несколько более общего вида, чем исходное уравнение (A.1). Тем не менее, для уравнения (A.30) справедлив аналог энергетической оценки (A.9), а именно,

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0(\|f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|F_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}). \tag{A.33}$$

Отсюда, учитывая структуру функций f_ε и F_ε, выводим оценку

$$\|v^\varepsilon - u^\varepsilon\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_0\varepsilon^2 \sum_i \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|b_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|^2 |\Phi_i(x)|^2 dx. \tag{A.34}$$

Здесь в качестве $\Phi_i(x)$ стоит либо сама функция $u(x)$, либо её первый и второй градиенты $\nabla u(x)$, $\nabla^2 u(x)$, и, значит,

$$\|\Phi_i\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le c_0\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{A.35}$$

в силу эллиптической оценки (A.11); а множители $b_i(y)$ формируются из

$$G^j(y),\ S^j(y),\ N_j(y), \tag{A.36}$$

$$N_j(y)\alpha(y),\ N_j(y)\beta(y),\ \gamma(y)N_j(y). \tag{A.37}$$

В общем случае множители $b_i(y)$ не принадлежат $L^\infty(Y)$, поэтому не представляется возможным исключить их из правой части (A.34), чтобы далее с учетом (A.35) прийти к оценке

$$\|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{A.38}$$

где константа того же типа, что в (A.12). Далее мы показываем, как обойти это препятствие, несколько изменив первое приближение.

§3. Проинтегрированная по параметру сдвига оценка

1. Рассмотрим семейство задач со сдвигом в коэффициентах

$$-\mathrm{div}\,[a(y+\omega)\nabla u^\varepsilon_\omega(x)+\alpha(y+\omega)u^\varepsilon_\omega(x)]+ \\ \beta(y+\omega)\cdot\nabla u^\varepsilon_\omega(x)+\gamma(y+\omega)u^\varepsilon_\omega(x)+\mu u^\varepsilon_\omega(x)=f(x),\quad y=\frac{x}{\varepsilon},\quad \omega\in Y, \tag{A.39}$$

но с той же правой частью $f(x)$, что и в (A.1). Очевидно, что само уравнение (A.1) присутствует в этом семействе при $\omega=0$. Решения вспомогательных задач $N_j(y+\omega)$ и $N_0(y+\omega)$, отвечающих смещенным коэффициентам, получаются соответствующим сдвигом из решений задач (A.14), (A.15). Как следствие, усредненная матрица и усредненная задача не будут зависеть от параметра ω, а соответствующее первое приближение к решению задачи (A.39), выписанное по принципу (A.18), будет вида

$$v^\varepsilon_\omega(x)=u(x)+\varepsilon N_j(y+\omega)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+\varepsilon N_0(y+\omega)u(x),\quad y=\frac{x}{\varepsilon}. \tag{A.40}$$

Как показано выше, для разности $w^\varepsilon_\omega(x)=v^\varepsilon_\omega(x)-u^\varepsilon_\omega(x)$ справедлива оценка типа (A.34), которая в данной ситуации (за счет сдвига в аргументе вспомогательных функций) принимает форму

$$\|w^\varepsilon_\omega\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}\le c_0\varepsilon^2\sum_i\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|b_i\left(\frac{x}{\varepsilon}+\omega\right)\right|^2|\Phi_i(x)|^2dx.$$

Интегрируя это неравенство по параметру сдвига $\omega\in Y$, исключаем из интегралов функции $|b_i(y+\omega)|^2$, заменяя их на средние значения по ячейке Y:

$$\int\limits_Y\|w^\varepsilon_\omega\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}d\omega\le c_0\varepsilon^2\sum_i\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\Phi_i(x)|^2\int\limits_Y\left|b_i\left(\frac{x}{\varepsilon}+\omega\right)\right|^2d\omega dx= \\ =c_0\varepsilon^2\sum_i\langle|b_i|^2\rangle\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\Phi_i(x)|^2dx\le c_0\varepsilon^2\|u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}\sum_i\langle|b_i|^2\rangle\overset{(A.11)}{\le}c\varepsilon^2\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\sum_i\langle|b_i|^2\rangle, \tag{A.41}$$

что возможно, если для всех i

$$b_i\in L^2_{per}(Y).$$

Выясним, обладают ли этим свойством интегрируемости перечисленные в (A.36), (A.37) функции. Сомнения могут вызвать только компоненты списка (A.37), имеющие вид произведения функции $N_j\in H^1_{per}(Y)$ с неограниченным множителем типа $\alpha(y)$, $\beta(y)$ и $\gamma(y)$. Функции списка (A.36) принадлежат $L^2_{per}(Y)$ уже по своему выбору (см. (A.14), (A.15), (A.22) и лемму A.2).

Проверим, что $N_j\alpha, N_j\beta\in L^2_{per}(Y)^d$. Действительно, по неравенству Гёльдера

$$\int\limits_Y|N_j(y)\alpha(y)|^2\,dy\le\left(\int\limits_Y|\alpha^2(y)|^pdy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_Y|N_j(y)|^{\frac{2p}{p-1}}dy\right)^{\frac{p-1}{p}}\le$$

$$\le c\left(\int\limits_Y |N_j(y)|^{\frac{2p}{p-1}}dy\right)^{\frac{p-1}{p}} \le C\int\limits_Y |\nabla N_j(y)|^2 dy < \infty, \tag{A.42}$$

где использовано также условие (A.3) для α и неравенство Соболева (см. [39, гл. II, §2]) для N_j. Цепочка неравенств (A.42) справедлива в любой размерности $d \ge 2$. В случае $d > 2$ имеем $p = \frac{d}{2}$ (см. (A.4)), и значение $\frac{2p}{p-1} = \frac{2d}{d-2}$ совпадает с показателем Соболева. При $d = 2$ имеем показатель $p > 1$, а по теореме вложения Соболева $\|N_j\|_{L^q(Y)} \le c\|\nabla N_j\|_{L^2(Y)} \quad \forall q > 1$, в частности можно взять $q = \frac{2p}{p-1}$.

Вторая функция из списка (A.37) также принадлежат $L^2_{per}(Y)$, что обеспечено условием $\beta \in L^{2p}_{per}(Y)^d$. Что касается последней функции из (A.37), для неё приведённые выше рассуждения не проходят. Дело в том, что периодический множитель γ, согласно (A.3), обладает более слабым свойством интегрируемости, чем α и β. В общем случае в силу теоремы вложения имеем $N_j\gamma \in L^{\frac{2d}{d+2}}_{per}(Y)$, если $d > 2$ (поскольку $N_j \in L^{\frac{2d}{d-2}}_{per}(Y)$, $\gamma \in L^{\frac{d}{2}}_{per}(Y)$ и $\frac{d-2}{2d} + \frac{2}{d} = \frac{d+2}{2d}$), и показатель $\frac{2d}{d+2}$ не дотягивает до двух.

Проблема недостаточной степени интегрируемости функций $\sigma(y) = N_j(y)\gamma(y)$ по ячейке периодичности Y решается следующим образом. Эти периодические функции стоят в (A.32) в произведении с $z(x)$, где в качестве $z(x)$ имеем $u(x)$ либо $\nabla u(x)$, так что $z \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Можно преобразовать произведение, используя возможность дополнительного дифференцирования $z(x)$. Возникающие в процессе преобразования новые периодические множители уже будут обладать достаточной степенью интегрируемости. Это преобразование описано в следующей лемме, доказательство которой дадим позже.

Лемма A.3 *Пусть $z \in H^1(\mathbb{R}^d)$ и $\sigma \in L^q_{per}(Y)$, $q = \frac{2d}{d+2}$. Тогда справедливы представления*

$$\begin{gathered}\sigma(y) = \langle\sigma\rangle + \mathrm{div}\rho(y), \quad \rho \in L^2_{per}(Y)^d,\\ \sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)z(x) = \langle\sigma\rangle z(x) + \varepsilon[\mathrm{div}(\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)z(x)) - \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla z(x)].\end{gathered} \tag{A.43}$$

При этом имеет место оценка

$$\|\rho\|_{L^2_{per}(Y)^d} \le c\|\sigma\|_{L^q_{per}(Y)}, \quad c = const(d). \tag{A.44}$$

В соответствии с (A.43), запишем входящие в (A.32) слагаемые, содержащие множители $N_j(y)\gamma(y)$, в следующей форме

$$\varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)z(x) = \varepsilon\langle N_j\gamma\rangle z(x) - \varepsilon^2\rho_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla z(x) + \varepsilon^2\mathrm{div}(\rho_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)z(x)), \quad \rho_j \in L^2_{per}(Y)^d. \tag{A.45}$$

Возникшие при этом члены с оператором div перейдут из компоненты f_ε во вторую компоненту $\mathrm{div}F_\varepsilon$ правой части (A.30).

Таким образом, получаем уравнение (A.30) с преобразованной правой частью $f_\varepsilon + \mathrm{div} F_\varepsilon$, структура которой диктует конкретный вид оценки (A.33) в форме (A.34) с новым набором функций $b_i(y)$. В списке (A.37) теперь не будет γN_j, зато в списке (A.36) добавятся $\langle N_j \gamma\rangle$ и ρ_j (см. (A.45)). В итоге получается оценка вида (A.41), в которой $b_i \in L^2_{per}(Y)$ для всех i. Оценку (A.41) можно коротко записать как

$$\int\limits_Y \|v^\varepsilon_\omega - u^\varepsilon_\omega\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} d\omega \le C\varepsilon^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{A.46}$$

где константа C того же типа, что в (A.12).

2. Теперь исследуем возможность замены в (A.46) функции $u^\varepsilon_\omega(x)$ на $u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)$. Заметим, что $u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)$ есть решение уравнения

$$\begin{gathered} -\mathrm{div}\,[a(y+\omega)\nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) + \alpha(y+\omega)u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)] + \beta(y+\omega)\cdot\nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) + \\ +\gamma(y+\omega)u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) + \mu u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) = f(x+\varepsilon\omega), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \end{gathered} \tag{A.47}$$

Из (A.47) и (A.39) видно, что функции $u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)$ и $u^\varepsilon(x,\omega)$ являются решениями одного и того же уравнения, но с разными правыми частями, $f(x+\varepsilon\omega)$ и $f(x)$ соответственно. Для сравнения правых частей используем известное неравенство (см. лемма 0.2): если $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, то

$$\|f(\cdot+\varepsilon\omega) - f(\cdot)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon|\omega|c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \omega \in Y, \quad c = const(d).$$

Разность $z^\varepsilon_\omega(x) = u^\varepsilon)\omega(x) - u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$z^\varepsilon_\omega \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_\varepsilon z^\varepsilon_\omega + \mu z^\varepsilon_\omega = F^\varepsilon_\omega \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)$$

с правой частью $F^\varepsilon_\omega(x) = f(x+\varepsilon\omega) - f(x)$, и для уравнения справедлива энергетическая оценка

$$\|z^\varepsilon_\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le C\|F^\varepsilon_\omega\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Из приведенных выше рассуждений вытекает неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(|u^\varepsilon_\omega(x) - u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)|^2 + |\nabla u^\varepsilon_\omega(x) - \nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)|^2\right) dx \le C\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \quad \forall\ \omega \in Y.$$

позволяющее в (A.41) заменить функцию $u^\varepsilon_\omega(x)$ на $u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega)$. В итоге доказана теорема о "проинтегрированной по параметру сдвига" оценке.

Теорема A.2. *Пусть $u^\varepsilon(x)$ – решение задачи (A.1), а $v^\varepsilon_\omega(x)$ определено равенством (A.40). Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_Y \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(|u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) - v^\varepsilon_\omega(x)|^2 + |\nabla u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) - \nabla v^\varepsilon_\omega(x)|^2\right) d\omega dx \leq \\ \leq C\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx, \tag{A.48}$$

где константа C зависит от размерности d, постоянной эллиптичности λ, параметра μ и норм $\|\alpha\|_{L^{2p}_{per}(Y)^d}$, $\|\beta\|_{L^{2p}_{per}(Y)^d}$, $\|\gamma\|_{L^p_{per}(Y)}$.

§4. Следствия из "проинтегрированной" оценки

Приведём следствия из теоремы A.2..

1. Из "проинтегрированной" оценки (A.48) прежде всего следует оценка (A.12). Действительно, отбросим в (A.48) слагаемое с градиентом и в оставшемся интеграле поменяем порядок интегрирования, что даёт

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_Y |u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) - v^\varepsilon_\omega(x)|^2 d\omega dx \leq C\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx.$$

В левой части оценим снизу внутренний интеграл по неравенству Коши – Буняковского. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \int\limits_Y u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) d\omega - u(x) \right|^2 dx \leq C\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx, \tag{A.49}$$

где учли, что

$$\int\limits_Y v^\varepsilon_\omega(x) d\omega = u(x) + \varepsilon \left(\int\limits_Y N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}+\omega\right) d\omega \right) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \\ +\varepsilon \left(\int\limits_Y N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}+\omega\right) d\omega \right) u(x) = u(x) \tag{A.50}$$

ввиду того, что $\langle N_j \rangle = 0$ для всех $j = 0, 1, \ldots, d$.

Функция $\int\limits_Y u^\varepsilon(x+\varepsilon\omega) d\omega$ есть сглаживание по Стеклову исходного решения $u^\varepsilon(x)$. Известно свойство сглаживания

$$(\varphi)_\varepsilon(x) = \int\limits_Y \varphi(x+\varepsilon\omega) d\omega$$

функции $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ (см. (0.29)):

$$\|(\varphi)_\varepsilon - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c\varepsilon \|\nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad c = const(d). \tag{A.51}$$

Используя (A.51), запишем оценку

$$\| \int\limits_Y u^\varepsilon(\cdot + \varepsilon\omega) d\omega - u^\varepsilon(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{A.52}$$

где на последнем этапе учли также энергетическое неравенство (A.9).

Из (A.49) и (A.52) по неравенству треугольника

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u^\varepsilon(\cdot) - \int\limits_Y u^\varepsilon(\cdot + \varepsilon\omega) d\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \| \int\limits_Y u^\varepsilon(\cdot + \varepsilon\omega) d\omega - u(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

получаем оценку (A.12).

2. Оценку (A.48) можно преобразовать несколько иначе с тем, чтобы перенести сглаживание с $u^\varepsilon(x)$ на смещенное первое приближение $v^\varepsilon(x,\omega) \equiv v^\varepsilon_\omega(x)$. После замены переменной $x \to x{+}\varepsilon\omega$ получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_Y |u^\varepsilon(x) - v^\varepsilon_\omega(x - \varepsilon\omega)|^2 d\omega + \int\limits_Y |\nabla u^\varepsilon(x) - \nabla v^\varepsilon_\omega(x - \varepsilon\omega)|^2 d\omega \right) dx \leq c\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} f^2(x)\, dx,$$

и по неравенству Коши – Буняковского

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} [u^\varepsilon(x) - \int\limits_Y v^\varepsilon_\omega(x - \varepsilon\omega)\, d\omega]^2\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} [\nabla u^\varepsilon(x) - \int\limits_Y \nabla v^\varepsilon_\omega(x - \varepsilon\omega)\, d\omega]^2\, dx \leq c\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} f^2(x)\, dx. \tag{A.53}$$

Заметим, что

$$v^\varepsilon_\omega(x - \varepsilon\omega) = u(x - \varepsilon\omega) + \varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x - \varepsilon\omega) + \varepsilon N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u(x - \varepsilon\omega) =$$

$$\int\limits_Y v^\varepsilon_\omega(x - \varepsilon\omega)\, d\omega = \int\limits_Y u(x - \varepsilon\omega)\, d\omega + \varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \int\limits_Y \frac{\partial u}{\partial x_j}(x - \varepsilon\omega)\, d\omega + \varepsilon N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \int\limits_Y u(x - \varepsilon\omega)\, d\omega =$$

$$= (u)_\varepsilon + \varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}(u)_\varepsilon + \varepsilon N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(u)_\varepsilon,$$

где естественно возникло $(u)_\varepsilon$ – сглаживание по Стеклову функции u. Таким образом, из оценки (A.53) получаем

$$\|u^\varepsilon(x) - (u)_\varepsilon(x) - \varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}(u)_\varepsilon(x) - \varepsilon N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(u)_\varepsilon(x)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq c\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{A.54}$$

Выражение
$$\tilde{v}^\varepsilon(x) = (u)_\varepsilon(x) + \varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(u)_\varepsilon(x) + \varepsilon N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(u)_\varepsilon(x) \tag{A.55}$$
назовём сглаженным первым приближением, и коротко оценка (A.54) записывается как
$$\|u^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Оценку (A.54) можно несколько упростить. Действительно,
$$\|(u)_\varepsilon - u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c_1\varepsilon(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}) \le c\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$
по свойствам сглаживания и в силу эллиптической оценки для u. Иначе говоря, функцию
$$\hat{v}^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(u)_\varepsilon(x) + \varepsilon N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(u)_\varepsilon(x), \tag{A.56}$$
также можно взять в качестве H^1-приближения. Это будет первое приближение со сглаженным корректором. При этом справедлива оценка
$$\|u^\varepsilon(x) - u(x) - \varepsilon N_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}(u)_\varepsilon(x) - \varepsilon N_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(u)_\varepsilon(x)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$
или коротко
$$\|u^\varepsilon - \hat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le c\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{A.57}$$

Итак, доказана следующая теорема о приближениях в H^1-норме.

Теорема A.3. *Пусть $u^\varepsilon(x)$ – решение задачи (A.1), а $\hat{v}^\varepsilon(x)$ — первое приближение со сглаженным корректором (см. (A.56). Тогда справедлива оценка (A.57) с константой того же типа, что в (A.12).*

Согласно (A.57), доказана оценка в операторной $(L^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d))$-норме для резольвенты $(A_\varepsilon + \mu)^{-1}$ исходного оператора и её аппроксимации, которая выписывается по виду приближения $\hat{v}^\varepsilon$. А именно,
$$\begin{gathered}\|(A_\varepsilon + \mu)^{-1} - (A_0 + \mu)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon,\\ \mathcal{K}_\varepsilon f = N(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla\left((A_0 + \mu)^{-1} f\right)_\varepsilon + N_0(\frac{x}{\varepsilon})\left((A_0 + \mu)^{-1} f\right)_\varepsilon.\end{gathered} \tag{A.58}$$

§5. Доказательство вспомогательных утверждений

1. Приведем доказательства лемм A.2 и A.3. Воспользуемся следующим фактом: если $s_j \in L^q_{per}(Y)$, $q > 1$, и $\langle s_j\rangle = 0$, то найдется такой вектор $S^j \in W^{1,q}_{per}(Y)^d$, что справедливо представление
$$\mathrm{div} S^j(y) = s_j(y).$$

Для доказательства достаточно рассмотреть решение периодической задачи

$$\Delta U^j = s_j, \quad U^j \in W^{2,q}_{per}(Y),$$

(которое существует по эллиптической теории) и положить $S^j = \nabla U^j$.

Таким образом, из того, что $s_j \in L^{\frac{2p}{p+1}}_{per}(Y)$, следует $S^j \in W^{1,\frac{2p}{p+1}}_{per}(Y)^d$. Откуда по теореме вложения $S^j \in L^2_{per}(Y)^d$, что и требуется. Лемма A.2 доказана.

Приведенные выше рассуждения доказывают также первое представление в (A.43) и сопровождающую его оценку (A.44). Второе представление в (A.43) есть очевидное следствие первого. Лемма A.3 также доказана.

2. Приведём доказательство леммы A.1, одной из ключевых в наших рассмотрениях. Для определенности пусть $d > 2$. Из соображений гомотетии достаточно рассмотреть случай $\varepsilon = 1$, когда вес $\rho(x)$ 1-периодичен.

Разобьём $\mathbb{R}^d$ на единичные кубы. На каждом таком кубе Y имеется оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_Y u^2\rho\, dx \le \int\limits_Y (u - \langle u\rangle)^2 \rho\, dx + \int\limits_Y \langle u\rangle^2 \rho\, dx, \qquad \text{где } \langle u\rangle = \int\limits_Y u dx, \quad \langle u\rangle^2 \le \langle u^2\rangle.$$

Применяя неравенства Гёльдера и Соболева, выводим

$$\int\limits_Y (u - \langle u\rangle)^2 \rho\, dx \le \left(\int\limits_Y \rho^{\frac{d}{2}}\, dx\right)^{\frac{2}{d}} \left(\int\limits_Y (u - \langle u\rangle)^{\frac{2d}{d-2}}\, dx\right)^{\frac{d-2}{d}} \le c_s \|\rho\|_{L^{\frac{d}{2}}(Y)} \int\limits_Y |\nabla u|^2\, dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_Y u^2 \rho\, dx \le 2\langle \rho\rangle \int\limits_Y u^2\, dx + 2c_s \|\rho\|_{L^{\frac{d}{2}}(Y)} \int\limits_Y |\nabla u|^2\, dx = c_0 \|u\|^2_{H^1(Y)}, \quad c_0 = const(d, \rho).$$

Суммируя эту оценку по всем кубам разбиения, получаем неравенство (A.7) при $\varepsilon = 1$. Лемма A.1 доказана.

Заключение

В данной диссертационной работе были получены следующие основные результаты:

1) Для эллиптического уравнения во всём пространстве с двухмасштабной матрицей доказана L^2-оценка порядка $\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}$ для разности точного решения и его нулевого приближения – решения усредненной задачи. Указанную оценку можно трактовать как оценку в операторной $(L^2 \to L^2)$-норме для разности резольвент исходного и усредненного операторов. Аналогичные оценки порядка ε получены в локально-периодическом случае.

2) Для эллиптического уравнения во всём пространстве с двухмасштабной матрицей доказана H^1-оценка порядка $\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}$ для разности точного решения и его аппроксимации в виде суммы нулевого приближения и сглаженного корректора. Такую оценку можно трактовать как оценку в операторной $(L^2 \to H^1)$-норме с корректирующим оператором. Аналогичные оценки порядка ε получены в локально-периодическом случае.

3) В локально-периодическом случае для эллиптических уравнений во всём пространстве доказана H^1-оценка порядка ε для разности сглаженного по Стеклову точного решения и его нулевого приближения. Эта оценка не содержит корректора.

4) Изучено усреднение соответствующих краевых задач Дирихле и Неймана в ограниченной области. В двухмасштабном случае доказаны L^2-оценка погрешности усреднения порядка $\max\{\varepsilon, \frac{\delta}{\varepsilon}\}$ и аналогичная H^1-оценка с корректором, имеющая порядок $\max\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\}$.

5) В Приложении к основной части диссертации методом сдвига изучена задача классического усреднения с неограниченными младшими членами. Установлены L^2-оценка порядка ε для разности точного решения и его нулевого приближения, а также H^1-оценка порядка ε для разности решения и его первого приближения со сглаженным корректором.

Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы при изучении математических моделей физических процессов в микронеоднородных средах со многими масштабами.

Литература

[1] Bensoussan, A. Asymptotic Analysis for Periodic Structures /A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou. – Amsterdam: North Holland, 1978 – 699 p.

[2] Санчес-Паленсия, Э. Неоднородные среды и теория колебаний / Э. Санчес-Паленсия. – М.: Мир, 1984 – 472 с.

[3] Жиков, В.В. Усреднение дифференциальных операторов / В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник. – М.: Физматлит, 1993 – 464 с.

[4] Бахвалов, Н.С. Осреднение процессов в периодических средах / Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко. – М.: Наука, 1984 – 352 с.

[5] Пятницкий, А.Л. Усреднение. Методы и приложения / А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2007 – 264 с.

[6] Allaire, G. Multiscale convergence and reiterated homogenization / G. Allaire, M. Briane // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1996. – 126A. – P. 297-342.

[7] Lions, J.-L. Reiterated homogenization of nonlinear monotone operators / J.-L. Lions, D. Lukkassen, L.-E. Persson, P. Wall // Chin. Ann. Math. Ser. B. – 2001. – V. 22, № 1. – P. 1-14.

[8] Braides, A. Homogenization of almost periodic monotone operators / A. Braides, V. Chiado Piat and A. Defranceschi // Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lineairé. – 1992. – V. 9, № 4. – P. 399-432.

[9] Мейрманов, А.М. Приложение метода повторного усреднения дифференциальных уравнений в теории фильтрации сжимаемых вязких жидкостей в сжимаемых трещиновато-пористых средах. Часть I: Микроскопическое описание / А.М. Мейрманов // Матем. моделирование. – 2011. – Т. 23, № 1. – С. 100–114.

[10] Мейрманов, А.М. Приложение метода повторного усреднения дифференциальных уравнений в теории фильтрации сжимаемых вязких жидкостей в сжимаемых трещиновато-пористых средах. Часть II: Микроскопическое описание / А.М. Мейрманов // Матем. моделирование. – 2011. – Т. 23, № 4. – С. 3–22.

[11] Мейрманов, А.М. Уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах как повторное усреднение уравнений Стокса / А.М. Мейрманов // Тр. МИАН. – 2012. – Т. 278. – С. 161–169.

[12] Борисов, Д.И. Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами / Д.И. Борисов // Алгебра и анализ. – 2008. – Т. 20, вып. 2. – С. 19–42.

[13] Борисов, Д.И. О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением / Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин // Изв. РАН. Сер. матем. – 2008. – Т. 72, вып. 4. – С. 37–66.

[14] Бирман, М.Ш. Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства усреднения / М.Ш. Бирман, Т.А. Суслина // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, вып. 5. – С. 1-108.

[15] Жиков, В.В. Об операторных оценках в теории усреднения / В.В. Жиков // Доклады Академии Наук. – 2005. – Т.403, № 3. – С. 305-308.

[16] Жиков, В.В. О некоторых оценках из теории усреднения / В.В. Жиков // Доклады Академии Наук. – 2006. – Т.406, № 5. – С. 597-601.

[17] Пастухова, С.Е. О некоторых оценках из усреднения задач теории упругости / С.Е. Пастухова // Доклады Академии Наук. – 2006. – Т. 406, № 5. – С. 604-608.

[18] Zhikov, V.V. On operator estimates for some problems in homogenization theory / V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova // Russian Journal Math. Phys. – 2005. – V. 12, № 4. – P. 515-524.

[19] Zhikov, V.V. Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients / V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova // Russian Journal Math. Phys. – 2006. – V. 13, № 2. – P. 224-237.

[20] Жиков, В.В. Об усреднении вырождающихся эллиптических уравнений / В.В. Жиков, С.Е. Пастухова, С.В. Тихомирова // Доклады Академии Наук. – 2006. – Т. 410, № 5. – С. 587-591.

[21] Жиков, В.В. Усреднение вырождающихся эллиптических уравнений / В.В. Жиков, С.Е. Пастухова // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 101-124.

[22] Жиков, В.В. Об операторных оценках в несимметричных задачах усреднения / В.В. Жиков, С.В. Тихомирова // Современная математика и ее приложения. – 2005. – Т. 33. – С. 124-128.

[23] Cardone, G. Some estimates for non-linear homogenization / G. Cardone, S.E. Pastukhova, V.V. Zhikov // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5). – 2006. – V. 29. № 1. – P. 101-110.

[24] Пастухова, С.Е. Эллиптические уравнения с несимметрической матрицей. Усреднение "вариационных решений"/ С.Е. Пастухова, С.В. Тихомирова // Мат. заметки. – 2007. – Т. 81, № 4. – С. 631-635.

[25] Zhikov, V.V. Homogenization estimates of operator type for an elliptic equation with quasiperiodic coefficients / V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova // Russian Journal Math. Phys. – 2015. – V. 22, № 2. – P. 264-278.

[26] Жиков, В.В. Об операторных оценках в теории усреднения / В.В. Жиков, С.Е. Пастухова // УМН. – 2016. – Т. 71, вып. 3(429). – С. 27–122.

[27] Pastukhova, Svetlana E. Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators / Svetlana E. Pastukhova // Applicable Analysis. – 2016. – V. 95, issue 7. – P. 1449-1466.

[28] Пастухова, С.Е. Операторные оценки усреднения для эллиптических уравнений четвертого порядка / С.Е. Пастухова // Алгебра и анализ. – 2016. – Т. 28, вып. 2. – С. 204–226.

[29] Пастухова, С. Е. Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения / С. Е. Пастухова, Р. Н. Тихомиров // Доклады РАН. – 2007. – Т. 415, № 3. – С. 304-309.

[30] Пастухова, С. Е. Оценки локально-периодического и повторного усреднения: параболические уравнения / С.Е. Пастухова, Р.Н. Тихомиров. // Доклады РАН. – 2009. – Т. 428, № 2. – С. 166-170.

[31] Пастухова, С.Е. Операторные оценки в нелинейных задачах повторного усреднения / С.Е. Пастухова // Тр. МИАН. – 2008. – Т. 261. – С. 220–233.

[32] Pastukhova, Svetlana. Estimates in homogeniation of parabolic equations with locally periodic coefficients / Svetlana Pastukhova // Asymptotic Analysis. – 2010. – V. 66, №. 3-4. – P. 207-228.

[33] Пастухова, С.Е. Аппроксимация экспоненты оператора диффузии с многомасштабными коэффициентами / С.Е. Пастухова // Функц. анализ и его прил. – 2014. – Т. 48, вып. 3. – С. 34–51

[34] Pastukhova, S.E. The Dirichlet Problem for Elliptic Equations with Multiscale Coefficients. Operator Estimates for Homogenization / S.E. Pastukhova // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – V. 193, issue 2. – P. 283-300.

[35] Пастухова, С.Е. Задача Неймана для эллиптических уравнений с многомасштабными коэффициентами: операторные оценки усреднения / С.Е. Пастухова // Мат. сборник. – 2016. – Т. 207, № 3. – С. 418–443.

[36] Pastukhova, S.E. Error Estimates of Homogenization in the Neumann Boundary Problem for an Elliptic Equation with Multiscale Coefficients / S.E. Pastukhova, R.N. Tikhomirov // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – V. 216, Issue 2. – P. 325–344.

[37] Suslina, T.A. Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates / T.A. Suslina // Mathematika. – 2013. – V. 59, № 2. – P. 463-476.

[38] Suslina, Tatiana. Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients / Tatiana Suslina // SIAM J. Math. Anal. – 2013. – V. 45, № 6. – P. 3453–3493.

[39] Ладыженская, О.А. Линейные и кавазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева – М.: Наука, 1964. – 540 с.

[40] Киндерлерер, Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья – М.: Мир, 1983. – 256 с.

[41] Ладыженская, О.А. Линейные и кавазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева – М.: Наука, 1967. – 736 с.

[42] Бирман, М.Ш. Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора / М.Ш. Бирман, Т.А. Суслина // Алгебра и анализ. – 2005. – Т. 17, вып. 6. – С. 1-104.

[43] Суслина, Т.А. Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка / Т.А. Суслина // Алгебра и анализ. – 2010. – Т. 22, № 1. – С. 108-222.

[44] Meshkova, Yu. M. Two-parametric error estimates in homogenization of second-order elliptic systems in $\mathbb{R}^d$ / Yu. M. Meshkova, T. A. Suslina // Applicable Analysis. – 2016. – V. 95, issue 7. – P. 1413-1448.

[45] Pastukhova, S.E. On Reiterated Homogenization Identities / S.E. Pastukhova, R.N. Tikhomirov // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V. 205, Issue 2. – P. 297–303.