ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Богаевского Ильи Александровича *"Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации"*, представленной на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Задача исследования фронтов лежандровых подмногообразий контакного многообразия является классической. Фронтами являются интегральные кривые неявных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на прямой, эквидистанты гладких коориентированных гиперповерхностей в евклидовом пространстве, гиперповерхности уровня решений уравнения Гамильтона-Якоби, описывающего распространение возмущения, и другие объекты.

Рассмотрим, например, C^∞-гладкую гиперповерхность M в вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$. Множество гиперплоскостей, касающихся M, является гиперповерхностью в двойственном пространстве $\mathbb{R}P^{n*}$. Эта гиперповерхность является фронтом лежандрова многообразия L контактных элементов (π, x) гиперплоскостей $\pi \in \mathbb{R}P^{n*}$ в точках касания x с гиперповерхностью M относительно естественной лежандровой проекции $\rho : (\pi, x) \mapsto \pi$ контактного многообразия $PT^*\mathbb{R}P^n$ всех контактных элементов в пространство гиперплоскостей $\mathbb{R}P^{n*}$.

Здесь лежандрово многообразие L гладкое и, поэтому, простейшие особенности двойственной гиперповерхности описываются теоремой В.И.Арнольда о простых устойчивых особенностях лежандровых отображений. Однако, если гиперповерхность M имеет класс гладкости C^1, то L является многообразием класса C^0. Исходная гиперповерхность является фронтом этого многообразия относительно другой лежандровой проекции $\theta : PT^*\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n, \theta : (\pi, x) \mapsto x$. В частности, таким фронтом является граница выпуклой оболочки C^∞-гладкой гиперповерхности общего положения в $\mathbb{R}^n$, которая, как хорошо известно, непрерывно дифференцируема и состоит из кусков огибающих семейств опорных гиперплоскостей исходной гиперповерхности.

И.А.Богаевский поставил целью своей докторской диссертации разработку методов исследования особенностей фронтов негладких лежандровых многообразий и применение этих методов к решению ряда сложных прикладных задач. Одной из них является задача классификации особенностей выпуклых оболочек гладких многообразий, поставленная В.И.Арнольдом еще в 70-х годах прошлого столетия (проблема 1972-12 в книге "Задачи Арнольда", М:ФАЗИС, 2000). Эта задача долго оставалась в центре моего внимания и я должен рассказать о некоторых полученных тогда результатах более подробно.

Особенности выпуклой оболочки гладкой поверхности общего положения в трехмерном пространстве были расклассифицированы В.М.Закалюкиным. Он выяснил, в частности, что лишь одна особенность в этой размерности имеет модуль (непрерывный инвариант), причем ровно один (это – двойное отношение). Мне удалось доказать, что начиная с 5-мерного пространства некоторые особенности выпуклых оболочек гладких многообразий (ненулевой размерности) имеют функциональные модули, неустранимые малым шевелением исходного многообразия. Особенности выпуклых оболочек кривых в 4-мерном пространстве также имеют функциональные модули. А вот в случае двумерных и трехмерных многообразий в $\mathbb{R}^4$ удалось получить лишь нетривиальную оценку на число обычных модулей. В начале 1981 года я сформулировал гипотезу об отсутствии неустранимых функциональных модулей в этих размерностях (в статье, которая вышла двумя годами позже в "Сибирском математическом журнале"). В.И.Арнольд заинтересовался этой гипотезой, но, видимо, не очень мне поверил и сформулировал в начале нового учебного года эту проблему так: "Исследовать особенности выпуклых оболочек M^3 в $\mathbb{R}^4$ (главным образом их модули)". Эта задача имеет теперь номер 1981-28 в указанном выше сборнике "Задачи Арнольда".

В последующие годы я, конечно, пытался доказать свою гипотезу, но к успеху это не привело, поскольку пользовался стандартными методами теории особенностей. Мне удалось получить нормальные формы многих особенностей выпуклой оболочки гладкой гиперповерхности в $\mathbb{R}^4$, но основная проблемная точка, в которой отсутствие функциональных модулей было неочевидным, осталась неразобранной. Речь идет об особенности выпуклой оболочки в точке касания опорной гиперплоскости, касающейся гиперповерхности в четырех точках. Серьезные технические трудности не позволили получить аналог леммы Закалюкина о четырех поверхностях, которую он использовал при классификации особенностей выпуклой оболочки поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Такое положение дел сохранялось до конца 90-х годов, когда за задачу взялся И.А.Богаевский. К этому времени он уже придумал метод исследования фронтов стратифицированных лежандровых многообразий и успешно применил его к исследованию особенностей распространения коротких волн на плоскости, результаты которого изложены во 2-й главе диссертации. Используя этот же метод, И.А.Богаевский доказал мою гипотезу и частично решил задачу В.И.Арнольда 1981-28. Частично, поскольку точное количество обычных модулей у указанной выше особенности определить не удалось из-за сложности вычислений. Тем не менее, классификация особенностей выпуклых оболочек гладких гиперповерхностей в $\mathbb{R}^4$ была завершена, и в этом – смысл главной теоремы 2.7 главы 3.

В дальнейшем И.А.Богаевский использовал свой метод при изучении неявных дифференциальных уравнений и решении ряда других задач, где появляются негладкие лежандровы многообразия. Этому посвящена глава 4 диссертации. Сам же метод Богаевского изложен со всеми подробностями в основной части диссертации – в ее первой главе.

И.А.Богаевский предложил рассматривать фронт стратифицированного лежандрова подмногообразия в пространстве лежандрова расслоения как бифуркационную диаграмму семейства пар лежандровых многообразий, одно из которых – исходное, а второе – слой лежандрова расслоения. По определению, точка базы расслоения принадлежит бифуркационной диаграмме, если многообразия из соответствующей пары пересекаются.

Два семейства пар с одинаковой базой параметров эквивалентны, если одно семейство получается из другого гладким семейством контактоморфизмов контактного пространства, индуцирующим диффеоморфизм пространства параметров. Основная идея И.А.Богаевского заключается в том, чтобы привести к нормальной форме сначала росток стратифицированного лежандрова подмногообразия контактоморфизмами объемлющего контактного пространства, а затем уже действовать на семейство гладких лежандровых подмногообразий семействами контактоморфизмов, сохраняющими только росток стратифицированного лежандрова многообразия. При этом семейства контактоморфизмов не обязаны сохранять структуру лежандрова расслоения, т.е. образуют более широкую группу эквивалентностей.

Естественно для использования такого подхода требуется доказывать стандартные в теории особенностей утверждения типа теоремы о конечной определенности или теоремы о версальности инфинитезимально версального семейства. И.А.Богаевский все это сделал, причем весьма аккуратно, в 4-м разделе первой главы своей диссертации.

Сказанное выше показывает важность и актуальность рассматриваемых в диссертации задач, значимость полученных автором результатов. Все они опубликованы в открытой печати в российских и иностранных математических изданиях, неоднакратно докладывались на различных международных конференциях. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Как и в любом большом тексте, в диссертации И.А.Богаевского имеются некоторые опечатки и недостатки изложения. Однако, все это никоим образом не сказываются на общей оценке работы.

По моему мнению диссертационная работа И.А.Богаевского "Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико–математических наук (согласно положению о порядке присуждения ученых степеней, утвержденному постановлением Правительства РФ №842 от 24.09.2013), а ее автор Богаевский Илья Александрович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

21 марта 2019 г.

Официальный оппонент В. Д. Седых

доктор физико–математических наук
профессор кафедры высшей математики
ФГАОУ ВО "Российский государственный университет нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина"
119991, г.Москва, Ленинский пр-т 65
моб.тел.: 909-150-54-08
e-mail: vdsedykh@gmail.com

Подпись В. Д. Седых заверяю
Начальник отдела кадров О.Е. Ширяев