

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Богаевского Ильи Александровича
«Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации»,
представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация И.А. Богаевского посвящена классификации особенностей фронтов стратифицированных лежандровых подмногообразий.

Лежандровы и лагранжевы подмногообразия встречаются в разных областях математики. В частности, они используются при построении квазиклассических асимптотик решений уравнений в частных производных, описывающих волновые процессы различной физической природы, а также в задачах выпуклого анализа и оптимизации. Описание структуры и свойств решений таких задач сильно упрощается, если оказывается возможным привести соответствующее лежандрово (лагранжево) подмногообразие (рассматриваемое вместе с отображением проектирования на конфигурационное пространство) к простейшему виду – «нормальной форме». Неудивительно, что проблемой классификации особенностей фронтов лежандровых и лагранжевых подмногообразий занимались многие математики (здесь можно назвать, например, В.И. Арнольда, А.Б. Гивенталя, В.М. Закалюкина, О.П. Щербака и многих других), и во многих случаях (например, для гладких лежандровых подмногообразий, а также для некоторых стратифицированных лежандровых подмногообразий, задаваемых алгебраическими уравнениями) эта проблема достаточно хорошо исследована.

Вместе с тем возникающие в ряде важных приложений (например, при исследовании волновых фронтов в анизотропных средах или в некоторых задачах теории оптимального управления) лежандровы подмногообразия не покрываются указанными выше случаями, и особенности их фронтов не удается исследовать существующими методами. Поэтому актуальной является разработка новых методов, позволяющих исследовать классификацию особенностей фронтов для более широкого класса стратифицированных лежандровых подмногообразий. Именно этой задаче и посвящена рассматриваемая диссертация.

Главным результатом работы, с нашей точки зрения, является разработанный в главе 1 новый метод приведения фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия к нормальной форме. В этом методе лежандрово расслоение задается с помощью семейства производящих функций, причем на пространстве производящих функций естественным образом действует группа сохраняющих рассматриваемое лежандрово подмногообразие контактных диффеоморфизмов. Отличие этого метода от стандартного состоит в том, что в стандартном методе семейство производящих функций используется для опи-

сания стратифицированного лежандрова подмногообразия (что ограничивает применимость метода теми случаями, когда такое семейство можно выбрать гладким), а в методе автора оно используется для описания самого лежандрова расслоения. В главах 2–4 разработанный в первой главе метод применяется к более конкретным частным задачам. Таким образом, диссертация, состоящая из тесно связанных четырех глав, обладает внутренним единством и представляет собой цельное и законченное исследование.

Более подробно, в главе 2 вычислена классификация типичных особенностей фронтов для специального двумерного стратифицированного лежандрова подмногообразия и для его произведения на вещественную прямую. Эта классификация применена для исследования типичных перестроек мгновенных фронтов и особенностей каустик.

В главе 3 вычислена классификация типичных особенностей выпуклой оболочки гладкой замкнутой трехмерной гиперповерхности. Показано, что их нормальные формы не содержат функциональных модулей и что такие особенности могут быть четырех типов (два из которых – т.н. простейшие и угловые особенности – ранее были исследованы В.М. Закалюкиным и В.Д. Седых).

Наконец, четвертая глава посвящена неявным обыкновенным дифференциальным уравнениям и семействам таких уравнений, зависящим от параметра. Для уравнений, квадратичных по производной, показано, что ростки (семейств) таких уравнений, лежащие в компоненте линейной связности какого-либо класса контактной эквивалентности, орбитально эквивалентны. Результат этот использован для того, чтобы из формальной контактной классификации типичных конических точек неявных дифференциальных уравнений (принадлежащей В.И. Арнольду) получить их классификацию относительно формальной орбитальной эквивалентности.

Текст диссертации завершается заключением, кратко резюмирующим ее результаты, а также списком литературы, состоящим из 92 ссылок.

По диссертации можно высказать следующие замечания.

1. Во введении на с. 9 сказано, что целью работы является «...разработка универсального метода приведения фронтов стратифицированных лежандровых подмногообразий к локальным нормальным формам...». Эту формулировку можно, в частности, понять и так, что речь идет о новом методе построения канонических представителей – «нормальных форм» – в определяемых традиционным образом классах эквивалентности. Лишь на с. 34 автор явно указывает, что это не так, и что, по существу, речь идет не только о методе, но и о самом *определении* эквивалентности лежандровых подмногообразий – новое понятие эквивалентности оказывается эквивалентно традиционному (лежандрова эквивалентность лежандровых отображений) лишь при выполнении дополнительных условий регулярности. С моей точки зрения это следовало бы подчеркнуть с самого начала.
2. Хотя понятия лагранжевых и лежандровых подмногообразий тесно связаны, лагранжевы многообразия, как правило, более полезны в за-

дачах о квазиклассических асимптотиках решений линейных уравнений в частных производных. Автор формулирует все результаты для лежандровых подмногообразий, замечания же, касающиеся связи с лагранжевыми подмногообразиями, весьма немногочисленны. Это может затруднить применение результатов к квазиклассическим задачам.

3. В целом диссертация написана весьма аккуратно, но некоторые небрежности все же встречаются. Приведу лишь два примера. На с. 21 читаем: «Мы рассматриваем пары (Λ, L) , состоящие из стратифицированного лежандрова подмногообразия Λ и гладкого лежандрова подмногообразия L ». Тем не менее, на с. 25 написано: «Пусть (Λ, L) – пара стратифицированных лежандровых подмногообразий...», что может привести читателя в недоумение. Более досадная неточность имеется в утверждении 3.5 на с. 34. Там сказано: «Регулярные лежандровы отображения инвариантно стратифицированных лежандровых подмногообразий эквивалентны, если их фронты диффеоморфны». Вероятно, имелось в виду «лежандрово эквивалентны», и это уточнение важно, поскольку именно лежандрова эквивалентность (а не индуцированная эквивалентность семейств, которая в основном и изучается в работе) полезна в приложениях к квазиклассическим асимптотикам.

Высказанные замечания нимало не умаляют достоинств диссертации и не влияют на ее общую положительную оценку.

Оценивая диссертацию в целом, необходимо отметить следующее.

Рассматриваемые в диссертации вопросы, как показано выше, весьма *актуальны*. Тема диссертации полностью соответствует научной специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Цели диссертации – разработка универсального метода приведения фронтов стратифицированных лежандровых подмногообразий к локальным нормальным формам и его применение к указанным в главах 2–4 конкретным задачам – полностью достигнуты.

Все имеющиеся в диссертации научные результаты получены диссертантом самостоятельно и обладают научной новизной. Диссертация соответствует требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 г. (пункт 9 Положения), предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а именно является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как новое большое научное достижение в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.

Все научные положения диссертации строго доказаны, что подтверждает их *обоснованность и достоверность*.

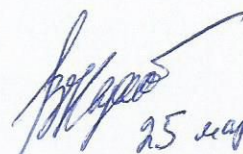
Результаты диссертации *опубликованы* Ильей Александровичем Богаевским в 11 статьях в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях, рекомендованных ВАК и индексируемых базами Scopus и WoS. Выносимые на защиту научные положения полностью отражены в этих публикациях. Они *апробированы* автором в выступлениях на 6 семинарах и 10 научных всероссийских и международных конференциях.

Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

Научные выводы и результаты могут быть использованы в Институте проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, Московском физико-техническом институте (национальном исследовательском университете), а также в других университетах и научных центрах, где ведутся исследования по коротковолновым и квазиклассическим асимптотикам решений дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений, а также по задачам оптимального управления.

Считаю, что диссертационная работа И.А.Богаевского «Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации», представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, удовлетворяет всем квалификационным требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а ее автор – Богаевский Илья Александрович – заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по этой специальности.

Член-корреспондент Российской академии наук,
ведущий научный сотрудник Института проблем
механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, доктор
физико-математических наук по специальности
01.01.03 – математическая физика


25 марта 2019 г.

Назайкинский Владимир Евгеньевич

119526, Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1,
тел.: 8-495-434-36-95, e-mail: nazay@ipmnet.ru

Подпись Назайкинского В.Е. заверяю:

Ученый секретарь ИПМех РАН, к.ф.-м.н.



Котов Михаил Алтаевич