

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО СОВЕТА Д 212.025.08  
НА БАЗЕ**

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования

«Владимирский государственный университет имени Александра  
Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Министерство образования и науки Российской Федерации

**ПО ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ  
УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК**

аттестационное дело № \_\_\_\_\_

решение диссертационного совета от 8 декабря 2017 года № 18

**О присуждении Сурначёву Михаилу Дмитриевичу, гражданство  
российское, учёной степени доктора физико-математических наук.**

Диссертация «Эллиптические и параболические уравнения типа р-лапласиана» по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, принята к защите 6 сентября 2017 года, протокол № 12, диссертационным советом Д 212.025.08 на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» Министерства образования и науки Российской Федерации (адрес: 600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87, диссертационный совет создан 02.11.2012, приказ 714/нк).

**Соискатель** Сурначёв Михаил Дмитриевич, 1982 года рождения.

В 2005 году соискатель окончил Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова по специальности «математика» с квалификацией «математик». Диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук «Асимптотическое поведение

решений уравнений типа Эмдена-Фаулера» защитил в 2009 году в диссертационном совете, созданном на базе Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. (Полное официальное название на момент защиты (02.10.2009): федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова.)

Работает старшим научным сотрудником в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук», ФАНО России.

Диссертация выполнена в отделе № 16 Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук», ФАНО России.

**Научный консультант** – Алхутов Юрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математическое образование и информационные технологии» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

**Официальные оппоненты:**

1. Мукминов Фарит Хамзаевич, гражданство российское, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, отдел теории функций и функционального анализа, ведущий научный сотрудник;
2. Панов Евгений Юрьевич, гражданство российское, доктор физико-математических наук, профессор, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, НИЦ, главный научный сотрудник;
3. Тедеев Анатолий Фёдорович, гражданство российское, доктор физико-математических наук, Южный математический институт – филиал

Федерального государственного бюджетного учреждения науки  
Федерального научного центра «Владикавказский научный центр Российской  
академии наук», врио директора;

дали положительные отзывы о диссертации.

**Ведущая организация** Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования «Московский  
государственный университет имени М.В. Ломоносова», город Москва, в  
своём положительном отзыве, подписанном Шапошниковой Татьяной  
Ардалионовной, д.ф.-м.н., профессором, кафедра дифференциальных  
уравнений механико-математического факультета, Шамаевым Алексеем  
Станиславовичем, д.ф.-м.н., профессором, заместителем заведующего  
кафедрой дифференциальных уравнений механико-математического  
факультета, Шафаревичем Андреем Игоревичем, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н.,  
профессором, заместителем декана механико-математического факультета по  
научной работе, и утверждённом д.ф.-м.н., профессором Федяниным  
Андреем Анатольевичем, проректором МГУ им. М.В. Ломоносова –  
начальником управления научной политики и организации научных  
исследований, указала, что в диссертации М.Д. Сурначёва исследованы  
трудные вопросы регулярности и асимптотических свойств решений  
нелинейных параболических уравнений типа  $p$ -лапласиана), а также вопросы  
решений эллиптических уравнений с нестандартными условиями  
коэрцитивности и роста) возникающие во многих прикладных задачах.  
Результаты диссертации являются серьёзным вкладом в теорию нелинейных  
дифференциальных уравнений с частными производными. Диссертация М.Д.  
Сурначёва полностью соответствует специальности 01.01.02 —  
дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное  
управление. В диссертации М.Д. Сурначёва разработаны новые методы  
анализа регулярности решений нелинейных параболических уравнений с  
весом, исследовано асимптотическое поведение решений нелинейных

параболических уравнений типа р-лапласиана в неограниченных областях, получены новые условия единственности решений, для эллиптических уравнений с нестандартными условиями коэрцитивности и роста. Выбор задач, изученных в работе и хороший математический язык, говорят о высокой математической культуре автора и владении им широким спектром современных методов теории уравнений с частными производными. Диссертация является существенным продвижением в разработке методом изучения новых нелинейных задач, данная работа отвечает на многие «классические» вопросы для новых, «неклассических» уравнений с частными производными, появляющихся в современных прикладных задачах. Выступления на указанных семинарах и многочисленных конференциях и собственно представленная диссертация свидетельствуют о том, что научная квалификация М.Д. Сурначёва соответствует ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление. Диссертационная работа М.Д. Сурначёва представляет собой завершённое, технически сложное исследование, содержащее решение трудных теоретических задач качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Предлагается присудить Сурначёву Михаилу Дмитриевичу ученую степень доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Соискатель имеет 23 опубликованных работы, в том числе по теме диссертации 15 работ, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, общим объёмом 14 условных печатных листа. Недостоверные сведения об опубликованных соискателем учёной степени работах в диссертации, отсутствуют. Четыре из этих работ совместные с В.В. Жиковым (В.В. Жикову принадлежат формулировки в модельных случаях, соискателю

принадлежит доказательство результата в случае общего оператора), одна совместная с Ю.А. Алхутовым (соискателю принадлежит доказательство отсутствия классического неравенства Харнака и точности полученного неравенства Харнака в специальной форме), одна совместная с U. Gianazza и V. Vespri (соискателю принадлежит доказательство основного результата). Из совместных работ в диссертации используются только результаты, полученные лично соискателем.

Наиболее значимые научные работы по теме диссертации:

1. М.Д. Сурначёв, *О стабилизации решений задачи Коши-Дирихле в цилиндрической области для параболического  $p$ -Лапласиана*, Проблемы Математического Анализа, 2016, Выпуск 86, стр. 95–117. English translation: M.D. Surnachev, *Stabilization of Solutions to the Dirichlet Problem in a Cylindrical Domain for the Parabolic  $p$ -Laplacian*, J. Math. Sci., 2016, Volume 219, Issue 2, pp 275–299.
2. М.Д. Сурначёв, *Гёльдеровская непрерывность решений нелинейных параболических уравнений, вырождающихся на части области*. Проблемы Математического Анализа, 2015, Выпуск 83, стр. 135-155. English translation: M.D. Surnachev, *Holder continuity of solutions to nonlinear parabolic equations degenerated on a part of the domain*. J. Math. Sci., 2016, Vol. 213, No. 4, pp. 135-155.
3. В.В. Жиков, М.Д. Сурначёв, *О плотности гладких функций в весовых Соболевских пространствах с переменным показателем*. Алгебра и Анализ, 2015, том 27, номер 3. стр. 95-124. English translation: M.D. Surnachev and V.V. Zhikov, *On density of smooth functions in weighted Sobolev spaces with variable exponents*. St. Petersburg Math. J., 2016, Vol. 27, pp. 415-436. (В.В. Жикову принадлежит доказательство результата о плотности гладких функций в весовом соболевском пространстве с показателем суммируемости  $p=2$ , соискателю принадлежит перенесение на случай переменного показателя  $p(x)$ .)

4. М.Д. Сурначёв, *О регулярности решений параболических уравнений с двойной нелинейностью и весом*. Труды Московского математического общества, 2014, том 75, выпуск 2, стр. 309-334. English translation: M.D. Surnachev, *Regularity of solutions of parabolic equations with a double regularity and a weight*. Trans. Moscow. Math. Soc., 2014, pp. 259-280.
5. М.Д. Сурначёв, *О единственности решений задачи о стационарной диффузии в несжимаемом турбулентном потоке*. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. №96. 32с. (полная версия работы выйдет на английском языке в журнале Complex Variables and Elliptic Equations, сейчас статья доступна online: M. D. Surnachev, *On the uniqueness of solutions to stationary convection–diffusion equations with generalized divergence-free drift*. Complex Variables and Elliptic Equations. 2017. DOI: 10.1080/17476933.2017.1385071)
6. М.Д. Сурначёв, *Об улучшенных оценках для параболических уравнений типа  $p$ -Лапласа*. Проблемы Математического Анализа, 2015, Выпуск 81, стр. 81-106. English translation: M.D. Surnachev, *Improved Estimates for Parabolic  $p$ -Laplace Type Equations*. J. Math. Sci., 2015, Vol. 210, No. 4, pp. 429-457.
7. M.D. Surnachev and V.V. Zhikov, *Stabilization of solutions to nonlinear parabolic equations of the  $p$ -Laplace type*. Russ. J. Math. Phys., 2013, Vol. 20, No. 4, pp. 523-541. (В.В. Жикову принадлежит формулировка и доказательство результата для модельного  $p$ -лапласиана, соискателю принадлежит перенесение на широкий класс уравнений типа параболического  $p$ -лапласиана.)

На диссертацию и автореферат поступили **отзывы**:

1. Отзыв официально оппонента Мукминова Ф.Х. Отзыв положительный, содержит следующие замечания:

Фамилия автора ДиДжорджи на страницах 38 и 73 написана с ошибкой.

Имеются ошибки в окончаниях слов, например ...третьей главе... на стр. 24 вместо ... третьей главы..., дифференцируемую на стр. 145 и т.д.

Имеются пропуски слов в формулировках утверждений. Например, в теореме 1 на странице 165 ...f имеет (нулевое) равномерное среднее... пропущено слово (нулевое). На стр. 292 вверху ...равенство (нулю) на границе... пропущено слово (нулю). На той же странице ...задач сходных задач... лишнее слово.

Имеются описки в формулах. Например, на стр. 45 в доказательстве следствия 13 в одном из неравенств вместо  $t < \theta_*$  должно быть  $t < t_1 + \theta_*$ , теорема Морри о вложении в  $C^\alpha$  на стр. 236 приведена с неверным  $\alpha = (p-n)/n$ ; на стр. 224 есть странная формула  $2n/(n+2) \leq p < 2n/(n+2)$ ; на стр. 266 два обозначения  $\varphi_\varepsilon$  и  $\rho_\varepsilon$  для одной функции.

На стр. 267 присутствует необоснованное равенство

$$\|u - \sum v_j\|_{W(\Omega)} \leq \sum \|u_j - \sum v_j\|_{W(D_j)} \leq \varepsilon.$$

Дело в том, что ряд  $\sum u_j$ , возникающий из разбиения единицы, сходится поточечно, но, как правило, расходится по норме. Также обстоит дело с рядом  $\sum v_j$ . Поэтому манипуляции с нормами не обоснованы.

2. Отзыв официального оппонента Панова Е.Ю. Отзыв положительный, содержит следующие замечания:

Во второй главе в формулировке теоремы 1 в неравенствах (9)-(11) несколько раз встречается ошибочный член  $|a|^{a-2}$  вместо  $|a|^{p-2}$ . В тексте диссертации содержится много и других опечаток.

Доказательства элементарных лемм 2,3 (стр. 128-130) усложнены. Например, утверждение леммы 2 непосредственно следует из равенства

$$|a + t(b - a)|^2 = (1 - t)^2 |a|^2 + t^2 |b|^2 + 2t(1 - t)(a, b).$$

Утверждение леммы 3 вытекает из более общего свойства квадратичных функционалов вида  $Q(y) = (p, y)(q, y)$ :

$$\max_{|y|=1} Q(y) = \frac{1}{2}((p, q) + |p| \cdot |q|), \quad \min_{|y|=1} Q(y) = \frac{1}{2}((p, q) - |p| \cdot |q|).$$

В третьей главе в доказательстве теоремы 1 на стр. 300 не ясно утверждение об эквивалентности единственности решений задач (1.1) с матрицами  $A$  и  $\lambda A$ , где  $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$ . Это очевидно лишь при  $\lambda > 0$ , чего, впрочем, и достаточно для доказательства.

Утверждение о том, что  $Mf \in BMO$  для функций  $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ , приведённое на стр. 302, неверно. На самом деле, результат Койфмана и Рохберга гласит, что  $\ln Mf \in BMO$  для неотрицательных функций  $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ . В действительности, автор использует именно это свойство.

3. Отзыв официально оппонента Тедеева А.Ф. Отзыв положительный, содержит следующее замечание:

Не совсем верно утверждение о том, что неравенства (11) в автореферате и соответствующее утверждение в тексте диссертации нет даже в частном случае. В работах В.М. Миклюкова: Miklyukov V.M. Capacity and a generalized maximum principle for quasilinear equations of elliptic type // Dokl. AN SSSR. – 1980. – 250. – P. 1318–1320 был введен класс альфа-монотонных операторов и неравенство (11) было установлено для оператора типа минимальных поверхностей.

4. Отзыв ведущей организации МГУ им. М.В. Ломоносова. Отзыв положительный, замечаний не содержит.

5. Отзыв на автореферат, подписанный доктором физико-математических наук Галаховым Е.И., заместителем директора Математического института им. С.М. Никольского Российского Университета Дружбы Народов. Отзыв положительный, замечаний не содержит.

6. Отзыв на автореферат, подписанный кандидатом физико-математических наук Салиевой О.А., доцентом МГТУ «Станкин». Отзыв положительный, замечаний не содержит.



7. Отзыв на автореферат, подписанный доктором технических наук, профессором РАН Закировым Э.С., главным научным сотрудником Института проблем нефти и газа Российской академии наук. Отзыв положительный, содержит следующее замечание: «На странице 12, строка 13 присутствует непонятное обозначение  $\Omega_T$ , которое ранее не введено. На той же странице, для области используется ещё одно обозначение,  $G$ , что может запутывать читателя. ».

8. Отзыв на автореферат, подписанный доктором физико-математических наук Пятницким А.Л., старшим научным сотрудником Института проблем передачи информации Российской Академии наук. Отзыв положительный, содержит следующее замечание: «В теореме 15 в формульной строчке после слов «для которого выполнены следующие оценки:» присутствует некоторая избыточность. Автор берёт супремум по  $R > \rho$  от интеграла по полосе  $\Pi$  от  $(\rho - 1)$ -й степени градиента решения, умноженного на отрицательную степень  $R$ . Очевидно, что этот супремум достигается при  $R = \rho$ . Более того, это подразумевает, что указанный интеграл сходится, что для решений без условия убывания на бесконечности совсем не очевидно. В выложенном на сайт совета тексте диссертации (стр. 214, формулировка Теоремы 9) в этом месте присутствует совсем другая область интегрирования  $V_{R \times (0, T(u_0))}$ . ».

Отзывы содержат подробную информацию об актуальности настоящего исследования, новизне полученных результатов, и значимости их для науки и практики. Отмечено, что диссертационная работа выполнена в полном объеме на высоком научном уровне, выводы диссертации достоверны и полностью соответствуют поставленным целям.

Выбор официальных оппонентов и ведущей организации обосновывается их известностью своими достижениями в данной отрасли науки, наличием публикаций в соответствующей сфере исследования и способностью определить научную и практическую ценность диссертации.

**Диссертационный совет отмечает, что на основании выполненных соискателем исследований:**

**разработаны** теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение;

**предложен** оригинальный метод получения результатов о единственности решений стационарных задач с нестандартными условиями коэрцитивности и роста, а также новый способ доказательства результатов о стабилизации решений нелинейных параболических уравнений при неограниченном возрастании времени в классе ограниченных решений;

**доказан** ряд новых результатов о регулярности решений нелинейных параболических уравнений с весами (неравенство Харнака, непрерывность);

**введены** характеристики неограниченных областей, определяющие наличие или отсутствие стабилизации в них решений задачи Дирихле для нелинейных параболических уравнений типа  $p$ -лапласиана.

**Теоретическая значимость исследования обоснована тем, что: доказаны:**

неравенство Харнака для неотрицательных решений нелинейных параболических уравнений типа  $p$ -лапласиана с весом из класса Макенхаупта  $A_{1+p/n}$  под знаком дивергенции, неравенство Харнака и локальная гёльдеровская непрерывность решений для параболических уравнений с двойной нелинейностью (для которых поток содержит как степень самой функции, так и  $(p-1)$ -ю «степень» градиента) и  $p$ -допустимым весом, неравенство Харнака в специальной форме и локальная гёльдеровская непрерывность решений в окрестности интерфейса для нелинейных параболических уравнений типа  $p$ -лапласиана с равномерным вырождением на части области, критерий равномерной стабилизации ограниченных решений задачи Коши для уравнений типа параболического  $p$ -лапласиан, критерий стабилизации решений задачи Дирихле с однородным краевым условием для уравнений типа параболического  $p$ -лапласиана в

цилиндрической области с неограниченным основанием, теорема существования знакопеременных решений задачи Коши для уравнений типа параболического  $p$ -лапласиана в классе начальных данных «оптимального роста», новое эффективное условие плотности гладких функций в весовом пространстве Соболева-Орлича с переменным показателем суммируемости, новое условие единственности решений стационарной задачи конвекции-диффузии в обобщенном несжимаемом потоке, обобщающее хорошо известное условие принадлежности коэффициентом кососимметрической матрицы «потока» пространству  $ВМО$ ;

**применительно к проблематике диссертации результативно (эффективно, то есть с получением обладающих новизной результатов) использованы:**

методы теории нелинейных параболических уравнений второго порядка, методы теории пространств Макенхаупта, Харди и  $ВМО$ , методы теории весовых соболевских пространств, методы теории пространство Соболева-Орлича и Лебега-Орлича с переменным показателем суммируемости;

**изложены** новые положения, вносящие вклад в актуальное научное направление – качественную теорию дифференциальных уравнений с частными производными;

**раскрыты** новые проблемы в теории регулярности и асимптотического поведения решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений типа  $p$ -лапласиана;

**изучены** качественные свойства и асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений типа  $p$ -лапласиана;

**проведена модернизация** существовавших ранее математических методов анализа регулярности и асимптотических свойств решений нелинейных уравнений диффузионного типа.

**Значение полученных соискателем результатов исследования для практики подтверждается тем, что:**

**разработаны и внедрены** эффективные методы анализа качественных свойств решений нелинейных уравнений второго порядка диффузионного типа;

**определены** типы пространственных неоднородностей (весов), которые гарантируют сохранение основных свойств непрерывности решений нелинейных параболических уравнений типа  $p$ -лапласиана, а также типы областей, гарантирующие сохранение свойства стабилизации решений первой начально-краевой задачи;

**создана** методика исследования уравнений с нестандартными условиями коэрцитивности и роста;

**представлены** подходы, которые могут быть использованы для исследовании уравнений более сложной структуры.

**Оценка достоверности результатов исследования выявила:**

**теория** построена с использованием аппарата теории уравнений с частными производными и методов функционального анализа;

**идея** доказательства критерия стабилизации решений задачи Коши **базируется** на хорошо известном приёме масштабирования;

**идея** доказательства критерия стабилизации решений задачи Дирихле в цилиндрической области с неограниченным основанием **базируется** на варианте леммы о возрастании Е.М. Ландиса, приспособленном к нелинейным уравнениям;

**использованы** обобщения итерационных методов E. DeGiorgi, J. Moser, О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральной, E. DiBenedetto – для доказательства результатов о регулярности и асимптотическом поведении решений уравнений типа параболического  $p$ -лапласиана, и липшицевы приближения решения (липшицева срезка) – для получения теорем единственности решений задач с нестандартными условиями коэрцитивности и роста:

**установлены** аналогия теоремы стабилизации решений первой начально-краевой задачи для  $p$ -лапласиана в неограниченных областях с линейным

случаем и отличие гарантирующих стабилизацию характеристик областей для разных значений показателя  $p$ .

**Личный вклад соискателя состоит в:**

разработке новых методов исследования рассматриваемых в диссертации задач, доказательстве приведенных в диссертации теорем и лемм, апробации результатов исследования в форме докладов на российских и международных конференциях и семинарах, подготовке основных публикаций по выполненной работе.

На заседании 08.12.2017 года диссертационный совет принял решение присудить Сурначёву Михаилу Дмитриевичу ученую степень доктора физико-математических наук.

При проведении тайного голосования диссертационный совет в количестве 17 человек, из них 16 докторов наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, участвовавших в заседании, из 20 человек, входящих в состав совета, проголосовали: за присуждение учёной степени – 17, против присуждения учёной степени – 0, недействительных бюллетеней – 0.

Председатель

диссертационного совета



  
Данченко Владимир Ильич

Ученый секретарь

диссертационного совета

  
Наумова Светлана Борисовна