Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу
Закоры Дмитрия Александровича
«Спектральный анализ и асимптотика решений задач механики вязкоупругих сред», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности
01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

В диссертационной работе Д.А.Закоры изучаются линейные интегро-дифференциальные уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве и их приложения к некоторым задачам механики вязкоупругих сред. Системы, подобные исследуемым в работе, возникают, например, в проблеме усреднения: проблема «двойной пористости», проблема колебания суспензии из двух жидкостей, проблема колебания комбинированной среды (закон Био). Другим важным примером может служить уравнение Гуртина-Пипкина, возникающее в термодинамике и, описывающее процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью. Различным вопросам, связанным с исследованием подобных систем, в зарубежной и отечественной литературе в последние годы посвящено значительное число работ, поэтому тематика исследования, безусловно актуальна и представляет значительный научный интерес.

Во введении и обзоре литературы обоснована актуальность темы диссертации, приведен обзор результатов по исследуемой и близкой тематике. Так наиболее близкими к тематике диссертации и используемым методам исследования являются работы Н.Д.Копачевского, Т.Я.Азизова, А.И.Милославского. Очень близким по тематике являются результаты, опубликованные в цикле работ В.В.Власова и Н.А.Раутиан и подытоженные в их совместной монографии "Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений" М: МАКС-Пресс, 2016, 488 с. Следует отметить однако методы исследования, используемые В.В.Власовым и Н.А.Раутиан существенно отличаются от подхода Д.А.Закоры. Так В.В.Власов и Н.А.Раутиан устанавливают существование и единственность сильных и обобщенных решений, в то время как Д.А.Закора изучает классические решения. Существенно различается и используемая техника.
Так при доказательстве разрешимости В.В.Власов и Н.А.Раутиан используют оценки оператор-функции, являющейся символом исследуемого интегро-дифференциального уравнения в пространствах Харди в правой полуплоскости и теорему Пэли-Винера. В то время как Д.А.Закора

использует полугрупповой подход и сведение интегро-дифференциального уравнения к системе дифференциальных уравнений в копии пространств.

Уместно отметить, что операторные модели и соответствующие интегро-дифференциальные уравнения, изучаемые Д.А.Закорой, являются существенно более сложными чем уравнения, рассматриваемые в многочисленных публикациях G.Amendola, M.Fabrizio, J.M.Golden, подытоженных в их совместной монографии [112]. В работах указанных авторов рассматриваются в основном уравнения, содержащие только один неограниченный самосопряженный оператор. С операторной точки зрения это существенно более простая ситуация.

Кратко остановимся на описании содержания диссертации по главам.

В первой главе основным объектом исследования является операторная матрица, связанная с изучаемыми интегро-дифференциальными уравнениями и системами таких уравнений. Отметим, что существуют различные подходы к исследованию интегро-дифференциальных уравнений. Особенностью исследуемых в работе систем является то, что ядра интегральных возмущений в операторно-дифференциальных уравнениях представляют собой суммы конечного числа произведений экспоненциальных функций и неограниченных операторов. Это обстоятельство позволяет сводить изучаемые интегро-дифференциальные уравнения к операторно-дифференциальным уравнениям первого порядка в расширенных гильбертовых пространствах. Таким образом, автор связывает изучаемые уравнения с соответствующими операторными матрицами. Этот метод применялся ранее в работах Н.Д.Копачевского и Т.Я.Азизова при исследовании аналогичных уравнений. В первой главе исследуется равномерная экспоненциальная устойчивость полугрупп (точнее, групп) (теоремы 1.1, 1.2), порождаемых изучаемыми операторными матрицами, исследуются спектральные свойства этих матриц (теоремы 1.5, 1.6.) и, в частности, свойства систем корневых элементов (теоремы 1.9, 1.10). С использованием теорем об устойчивости соответствующих групп решается вопрос о вынужденных колебаниях в задаче Коши для неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка и в задаче Коши для одной системы интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. Метод, которым доказываются теоремы об асимптотиках решений, применяется к задачам из второй, третьей и четвертой глав. Общие свойства спектра исследуемых матриц ожидаемы, однако тонкая структура всегда существенно зависит от конкретной задачи. Отметим один интересный факт. Автором доказано, что при некоторых условиях на нижнюю грань спектра основного оператора, участвующего в исследуемой матрице, точки существенного спектра не могут быть предельными для последовательностей собственных значений, не лежащих на действительной оси. В случае ядер более общего вида этот вопрос открыт. Наконец, в заключительной части первой главы, исследован частный случай генератора. В частности, доказано, что система его корневых элементов образует базис Рисса, а при некоторых предположениях и р-базис (теоремы 1.9, 1.10). Этот случай интересен тем, что, как правило, для базисности Рисса систем корневых элементов несамосопряженных операторов нужен достаточно «разреженный» спектр, что в многомерных задачах, как правило, не наблюдается.

Во второй главе изучается задача о малых движениях т.н. релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающуюся область. Математически такая жидкость моделируется интегро-дифференциальной системой, связывающей между собой давление и плотность.

В первой части главы изучается случай вязкой жидкости, во второй – идеальной. В случае вязкой жидкости показано, что основной матричный оператор определяется системой, эллиптической по Дуглису-Ниренбергу. Доказано, что существенный спектр матричного оператора представляет собой объединение конечного числа отрезков на действительной оси. Остальной спектр состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и локализован в окрестности действительной оси (теорема 2.4). В случае если система не вращается, весь спектр лежит на действительной оси, за исключением конечного числа комплексно сопряженных собственных значений. Тонкая структура существенного спектра зависит от физических параметров системы. Например, если система не вращается и не находится в гравитационном поле, существенный спектр превращается в конечное число точек. В этом случае, при некоторых дополнительных условиях, система корневых элементов матричного оператора образует р-базис (теорема 2.9). На этом пути обосновано разложение решения динамической задачи по специальной системе элементов. В случае идеальной жидкости доказано, что существенный спектр, кроме нескольких отрезков на действительной оси, содержит некоторый отрезок мнимой оси. Хорошо известно, что этот отрезок спектра возникает при изучении идеальной вращающейся жидкости и связан с т.н. внутренними инерционными волнами. Остальной спектр дискретен и локализован в окрестности мнимой оси. Для первой модели и второй модели в случае отсутствия вращения решены задачи о вынужденных колебаниях.

В третьей главе изучаются модели вязкоупругих тел Ильюшина. В § 3.2 приводятся уравнения, описывающие малые движения начально-изотропного вязкоупругого тела, которое считается закрепленным на границе занимаемой области, вводятся ограничения на физические константы, определяются модели параболического и гиперболического типа.

В § 3.3 изучается модель параболического типа, доказана теорема 3.1 об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи, о представлении и асимптотике решения этой задачи. В п. 3.3.2 исследуется спектр главного оператора. В теоремах 3.2, 3.3 доказаны утверждения о существенном спектре главного оператора, а также о локализации и асимптотического дискретного спектра. В теоремах 3.5, 3.6 установлены некоторые свойства системы корневых элементов главного оператора. В конце § 3.3 рассмотрена задача о малых движениях синхронно-изотропной среды параболического типа — специальный частный случай изучаемой задачи.

В § 3.4 изучается модель гиперболического типа, доказана теорема 3.11 об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи, с использованием теоремы 1.3 доказано утверждение об асимптотике решения этой задачи. В п. 3.4.2 исследуется спектр главного оператора, приведена теорема 3.12 о структуре существенного спектра изучаемого оператора, о локализации и асимптотике дискретного спектра.

В четвертой главе исследованы задачи о малых движениях вязкоупругих жидкостей Олдройта и Максвелла. По спектральным характеристикам модель Ильюшина вязкоупругого тела с трением Кельвина-Фойгта и модель вязкоупругой жидкости Олдройта близки к модели вязкой релаксирующей жидкости. Модель Ильюшина без трения Кельвина-Фойгта и модель вязкоупругой жидкости Максвелла близки к модели идеальной релаксирующей жидкости. Все утверждения, полученные в третьей и четвертой главах, с идейной точки зрения близки к соответствующим утверждениям из второй главы.

Пятая глава посвящена исследованию разрешимости задач Коши для эволюционных интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Доказана теорема о разрешимости для эволюционного интегро-дифференциального уравнения первого порядка. Далее, с использованием этой теоремы, исследованы вопросы разрешимости для интегро-дифференциальных уравнений второго порядка в случаях, когда оператор при производной либо оператор при функции являются доминирующими в некотором смысле (теоремы 5.5-5.8).

Характеризуя работу в целом отмечу, что результаты, приеденные в диссертации, являются новыми и представляют несомненный научный интерес. При получении результатов и написании диссертации автор проделал очень большую работу, как технического, так и идейного характера.

Несомненным достоинством диссертации Д.А.Закоры является то, что она тесно связана с приложениями. Более того, во второй, третьей и четвертой главах изложение начинается с описания механических моделей различных жидкостей. Далее автор переходит к аккуратной математической постановке задач и изучению соответствующих операторно-дифференциальных уравнений.

Основные результаты диссертации снабжены строгими доказательствами и получены автором самостоятельно.

При получении результатов, включенных в диссертацию, автор продемонстрировал уверенное владение методами теории дифференциальных уравнений в частных производных, методами спектральной теории, методами теории полугрупп операторов.

По диссертации имеются следующие замечания.

1. Следовало бы провести более подробное доказательство пункта 4 теоремы 1.6. Дело в том, что в цитированной статье [1] В.А.Авакяна изучалась считающая функция распределения собственных значений пучка операторов. При этом асимптотика собственных значений в указанной статье не изучалась. Здесь уместно указать статью Г.В.Радзиевского “Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле”, Математический сборник, 1980, т.112 (154), № 3 (7) с.396 – 420, содержащую заведомо более общие и сильные результаты, чем в статье В.А.Авакяна [1].

2. Несмотря на то, что полной, устоявшейся терминологии для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений в настоящее время нет, вместо словосочетания сильное решение, лучше употреблять классическое решение. В теории дифференциальных уравнений в частных производных под сильным решением понимается решение, принадлежащее пространству Соболева и удовлетворяющее уравнению почти всюду.

3. Формулы для асимптотик собственных значений операторов (теорема 1.6, теорема 2.4, теорема 2.15, теорема 3.3) выглядят весьма громоздко. Диссертация значительно выиграла бы, если бы автор снабдил соответствующие формулировки иллюстрациями картин спектров.

4. В формуле (2.52) на стр. 113 имеется неточность.

Отмечу, однако, что все перечисленные недостатки не снижают ценности полученных результатов и не меняют общую положительную оценку диссертации.

О диссертационной работе Д.А.Закоры можно сделать следующие выводы.

1. Тема диссертации актуальна и соответствует научной специальности 01.01.02. – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

2. Результаты диссертации имеют теоретический характер, они могут быть использованы в МГУ имени М.В.Ломоносова, Математическом институте имени В.А.Стеклова, С-Петербурском и Воронежском государственном университете и ряде других научных учреждений.

3. Структура и содержание работы соответствует поставленным целям и задачам исследования. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного можно заключить, что диссертация Закоры Д.А. «Спектральный анализ и асимптотика решений задач механики вязкоупругих сред», представленная на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям по указанной специальности, а ее автор Закора Дмитрий Александрович заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук.

Профессор кафедры математического анализа
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор

Влас

В.В. Власов

28.04.2021

Подпись В.В. Власова заверяю
декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова,
чл.-корр. РАН, профессор

А.И. Шафаревич