На правах рукописи

Пятницкий Андрей Львович

Усреднение и асимптотические свойства сингулярно возмущенных дифференциальных операторов

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в Институте проблем передачи информации Российской академии наук и Физическом институте Российской Академии наук

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор В. В. Жиков, заведующий кафедрой математического анализа Владимирского государственного университета

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А. С. Братусь, заведующий кафедрой "Прикладная математика" МИИТ

доктор физико-математических наук, профессор Е. В. Радкевич, профессор кафедры дифференциальных уравнений мех.-мат. факультета МГУ

доктор физико-математических наук, профессор А. А. Ковалевский, ведущий научный сотрудник Уральского федерального университета

Ведущая организация: Институт проблем механики Российской Академии наук. г. Москва

Защита состоится 28 октября 2016 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском Государственном Университете по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 133.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского Государственного Университета

Автореферат разослан "   " 2016 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета Д 212.025.08

кандидат физико-математических наук С.Б. Наумова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Различные классы эллиптических и параболических дифференциальных уравнений, сингулярно зависящих от малого параметра, представляют существенный интерес для математического исследования и имеют многочисленные приложения. Упомянем здесь задачи исследования различных процессов в пористых средах, изучение свойств композиционных материалов, описание эффективных свойств решетчатых и каркасных конструкций, антенн, армированных материалов. Отметим, что численное моделирование сред с микроструктурой является весьма трудоемким и затратным, в связи с чем эффективное описание таких сред становится важной в приложениях задачей.

Один тип сингулярной зависимости от малого параметра – это быстрая осцилляция коэффициентов дифференциального оператора. Вопросы исследования дифференциальных операторов с быстро меняющимися коэффициентами долгое время были предметом изучения физиков и механиков и исследовались на физическом уровне строгости. Интерес математиков к этим задачам возник в 70-е годы 20-го века, начиная с работ В.Марченко и Е.Я.Хруслова [1], Е.Де Джорджи, С.Спаньоло [2], где исследовались эллиптические и параболические уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами. Прогресс, достигнутый в этих работах, положил начало новому разделу теории дифференциальных уравнений – математической теории усреднения и теории G-сходимости. Существенный вклад в эту теорию внесла Российская математическая школа. В частности, в работах Н.С.Бахвалова [3], В.В.Жикова, С.М.Козлова, О.А.Олейник [4] был исследован широкий круг задач усреднения. В этой новой области математики были разработаны эффективные методы исследования. Наиболее значимые из них – это метод асимптотических разложений, предложенный Н.С.Бахваловым [5] и Ж.-Л. Лионсом [6], методы компенсированной компактности Ф.Мюра и Л.Тартара [7, 8], техника p-связности В.В.Жикова [9].

С конца 80-х годов активно используется концепция двухмасштабной сходимости, введенная Г.Нгуетсенгом [10] и Г.Аллером [11]. В.В.Жиков расширил эту концепцию, введя понятие двухмасштабной сходимости для произвольной периодической меры, и объединив тем самым технику двухмасштабной сходимости с техникой p-связности.

Весьма эффективным оказался также вариационный метод Гамма-сходимости, введенный Е. Де Джорджи и получивший дальнейшее развитие в работах Г. Дал Мазо, У.Моско, А.Брайдеса, В.В.Жикова и других математиков [12], [13].

Первые результаты об усреднении операторов со случайными ститистически однородными коэффициентами были получены в работах С.М.Козлова [16], В.В.Жикова, Г.Папаниколау и С.Варадана [17] в конце 70-х годов прошлого века.

Другой тип сингулярного возмущения – это наличие малого параметра при старших производных дифференциального уравнения. Активное исследование эллиптических операторов с малым параметром при старших производных началось с середины 20-ого века. Важную роль здесь сыграли работы М.И.Вишика и Л.А.Люстерника [14], где для широкого класса операторов была найдена асимптотика решений соответствующих краевых задач. Уравнения конвекции-диффузии с малым коэффициентом при вторых производных изучались А.Д.Вентцелем и М.И.Фрейдлиным [15] с помощью техники больших уклонений для диффузионных процессов.

Большой интерес представляет исследование дифференциальных операторов, содержащих как быстро осциллирующие коэффициенты, так и малый параметр при старших производных. Они важны как с математической точки зрения, так и во многих прикладных задачах, где используются дифференциальные уравнения. Одно из важных приложений - это изучение различных эволюционных процессов при больших временах в средах с периодической, случайной статистически однородной или иной структурой, обладающей некоторой инвариантностью относительно пространственного сдвига. В этом случае естественным шагом является введение нового временного и пространственного масштабов, что приводит к быстрой осцилляции коэффициентов и одновременно появлению малого параметра при старших производных в соответствующих дифференциальных операторах. Другим естественным примером служит описание конвективных и транспортных процессов в присутствии малого шума.

Асимптотическое поведение при больших временах решений параболических уравнений изучались многими авторами. В работах В.В.Жикова [18], [19] была установлена связь стабилизации с усреднением, для периодических операторов с младшими членами были введены движущиеся координаты, с помощью которых дано асимптотическое представление решений задачи Коши. Другое изложение, а также доказательство сходимости в операторных нормах имеется в недавней работе В.В.Жикова и С.Е.Пастуховой [20].

В диссертации изложены разработанные автором методы исследования предельного поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, у которых оба типа сингулярности присутствуют одновременно, т.е. увеличение частоты осцилляции коэффициентов сопровождается вырождением коэффициентов при старших производных, что делает невозможным применение уже известных подходов.

Цель работы. В работе рассмотрены следующие связанные между собой темы:

1. Усреднение задачи Коши в $\mathbb{R}^n$ для сингулярно возмущенных линейных параболических уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами.

2. Исследование системы дифференциальных уравнений, состоящей из уравнения конвекции-диффузии с большой конвекцией в периодически перфорированной области и обыкновенного дифференциального уравнения на поверхности включений.

3. Эффективное поведение решений краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений конвекции-диффузии с периодическими коэффициентами в ограниченных областях.

4. Асимптотическое поведение решений нелинейных параболических уравнений с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами и большими младшими членами.

5. Усреднение сингулярно возмущенных параболических операторов с коэффициентами периодическими по пространственным переменным и случайными стационарными по времени. Изучены как линейные, так и нелинейные операторы.

Основной целью работы является изучение предельного поведения решений и собственных функций в перечисленных сингулярно возмущенных задачах. Для исследования сингулярно возмущенных операторов с периодическими коэффициентами был разработан метод двухмасштабной сходимости и асимптотических разложений в движущихся координатах. Для уравнений со случайными по времени стационарными быстро осциллирующими коэффициентами была создана техника усреднения семейства мер, порожденных решениями этих уравнений, и построения усредненного стохастического уравнения в частных производных.

Методы исследования. В диссертации используются техники получения равномерных по параметру априорных оценок для решений краевых задач и для семейств мер, порожденных этими решениями, при изучении операторов со случайными коэффициентами.

Применяется также метод факторизации решений. Для факторизации выбирается специальное решение или собственная функция некоторой вспомогательной задачи на периоде.

Для описания предельного поведения решений задач, включающих операторы с большой конвекцией, вводится двухмасштабная сходимость в движущихся координатах. В движущихся координатах удается получить результаты о компактности, построить эффективную задачу и доказать сходимость решений.

Исследование предельного поведения решений уравнений со случайными коэффициентами опирается в частности на технику перехода к пределу в бесконечномерных мартингальных проблемах.

При усреднения нелинейных уравнений с осциллирующими коэффициентами используется также метод осциллирующих тестовых функций.

Наиболее существенные научные результаты и их новизна. Сначала изучается задача Коши для линейных параболических уравнения второго порядка с быстроосциллирующими периодическими коэффициентами и с малым параметром при старших производных, причем коэффициенты оператора зависят как от пространственных переменных, так и от времени. Показано, что такая задача допускает усреднение в следующем смысле: решения исходной задачи после факторизации на подходящую экспоненциальную функцию времени и периодическую функцию пространственных переменных в правильно выбранных движущихся координатах сходятся по норме к решению усредненной задачи с постоянными коэффициентами.

Для системы, состоящей из уравнения конвекции диффузии в среде с периодически расположенными включениями и обыкновенного дифференциального уравнения на поверхности включений, получен результат об усреднении в движущихся координатах.

При периодическом усреднении сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии в ограниченной области с однородным краевым условием Дирихле граница области существенно влияет на асимптотическое поведение решений. В случае, когда эффективная конвекция обращается в ноль, справедлив обычный в теории усреднения результат: решение исходной начально-краевой задачи сходится к решению аналогичной задачи для усредненного параболического оператора с постоянными коэффициентами. Если же эффективная конвекция нетривиальна, то решение экспоненциально быстро убывает на любом временном интервале. Для таких решений найдена скорость экспоненциального убывания и построен асимптотический профиль нормализованного решения. Для изучения предельного поведения решения используются экспоненциальные преобразования исходного оператора и факторизация.

Получены также результаты о периодическом усреднении для сингулярно возмущенных параболических нелинейных операторов. Мы рассматриваем уравнения с большим нелинейным потенциалом и уравнения конвекции-диффузии с большой нелинейной конвекцией. В обоих случаях при некоторых условиях на структуру нелинейности будут построены эффективные уравнения и доказана сходимость. Во втором случае сходимость справедлива в движущихся координатах. Отметим, что в обоих случаях возникает так называемый дисперсный эффект: предельное уравнение содержит нелинейные члены более высокого порядка, чем исходное уравнение.

Дано описание предельного поведения решений параболических уравнений с большими младшими членами и быстроосциллирующими коэффициентами, периодическими по пространственным переменным и случайными стационарными по времени. Отметим интересную особенность этих задач. Усредненное уравнение как правило является стохастическим уравнением с частными производными. Мы рассматриваем как начально-краевые задачи для упомянутых уравнений в ограниченных областях, так и задачу Коши во всем пространстве, и докажем что в подходящих функциональных пространствах решения этих задач сходятся по распределению к решению предельной начально-краевой задачи для усредненного стохастическим уравнением с частными производными.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. В ней разработаны методы, позволяющие исследовать асимптотическое поведение решений для широкого класса эллиптических и параболических уравнений, имеющих как быстроосциллирующие коэффициенты, так и малый параметр при старших производных.

Апробация результатов и публикации. Результаты работы неоднократно докладывались в иечение последних 15 лет на механико-математическом факультете МГУ на научных семинарах под руководством М.И. Вишика и под руководством В.В.Жикова, Е.В.Радкевича, С.А.Шамаева, Т.Д.Шапошниковой, в ИППИ РАН на научном семинаре под руководством Р.А. Минлоса, в Российском Университете Дружбы Народов на научном семинаре под руководством А.Л.Скубачевского, в ЛОМИ на семинаре под руководством О.А.Ладыженской и Н.Н.Уральцевой, во Владимирском университете на семинаре по руководством В.В.Жикова и многих других российских и зарубежных семинарах, в том числе на семинаре в Коллеж де Франс под руководством П.Л.Лионса в Париже, на лабораторном семинаре лаборатории Ж.-Л. Лионса в университете Париж 6, на семинарах в университетах Парижа (Франция), Марселя (Франция), Сент-Этьена (Франция), Тулона (Франция), По (Франция), Тулузы (Франция), Руана (Франция), Ле Мана (Франция), Бреста (Франция), Клермон-Феррана (Франция), Лиона (Франция), Мюнхена (Германия), Белефельда (Германия), Гейдельберга (Германия), Рима (Италия), Неаполя (Италия), Турина (Италия), Лиссабона (Португалия), Кавильи (Португалия), Цюриха (Швейцария), Стокгольма (Швеция), Уппсалы (Швеция), Гетеборга (Швеция), Люлео (Швеция), Оулу (Финдяндия), Трумсо (Норвегия), Нарвика (Норвегия), Лондона (Великобритания), Кембриджа (Великобритания), Оксфорда (Великобритания), Воррика (Великобритания), Эдинбурга (Великобритания), Данди (Великобритания), База (Великобритания), Ирвайна (США), Солт-Лейк-Сити (США), Миннеаполиса (США), Нью-Йорка (США).

В период с 2000 по 2015 год результаты, изложенные в работе, были представлены на многочисленных международных конференциях, среди которых отметим международные конференции в Москве, Суздале, Обервольфахе, Оксфорде, Эдинбурге, Марселе, Лиссабоне, Тренто, Риме, л'Акила, Гетеборге, Гейдельберге, Дубровнике, Сиднее, Ницце, Тимишуаре.

Основные материалы диссертации изложены в 22 работах, из них 16 представляют собой статьи в ведущих Российских и международных журналах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и пяти глав. Текст работы изложен на 192 страницах. Список литературы содержит 93 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

В первой главе на множестве $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ изучается предельное поведение решений задачи Коши для параболического уравнения вида

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}u^\varepsilon=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\big(\frac{t}{\varepsilon^2},\frac{x}{\varepsilon}\big)\frac{\partial}{\partial x_j}u^\varepsilon\Big)+\frac{1}{\varepsilon}b_i\big(\frac{t}{\varepsilon^2},\frac{x}{\varepsilon}\big)\frac{\partial}{\partial x_i}u^\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon^2}c\big(\frac{t}{\varepsilon^2},\frac{x}{\varepsilon}\big)u^\varepsilon\\ u^\varepsilon(x,0)=u_0(x)\end{gathered}\tag{1}$$

с малым положительным параметром ε. Мы предполагаем, что все коэффициенты периодичны как по пространственным переменным так и по времени.
Также предполагается, что все коэффициенты измеримы и ограничены, и что матрица $\{a_{ij}(\cdot)\}$ удовлетворяет условию равномерной эллиптичности.

Заметим, что большой параметр при младших членах возникает естественным образом при изучении поведения различных процессов на больших временах. Рассмотрим к примеру линеаризованное уравнение конвекции-реакции-диффузии в периодической среде. Оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial s}u=\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(a_{ij}(s,z)\frac{\partial}{\partial z_j}u\Big)+b_i(s,z)\frac{\partial}{\partial z_i}u+c(s,z)u\tag{2}$$

Для изучения решения при больших s естественно сделать замену переменных $x=\varepsilon z$, $t=\varepsilon^2 s$, где ε – малый параметр. После умножения полученного уравнения на ε^{-2} оно принимает вид (1).

Для того, чтобы сформулировать основные результаты об асимптотическом поведении u^ε, рассмотрим вспомогательную спектральную задачу

$$\frac{\partial}{\partial s}p-\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(a_{ij}(s,z)\frac{\partial}{\partial z_j}p\Big)-b_i(s,z)\frac{\partial}{\partial z_i}p-c(s,z)p=\Lambda_0 p\tag{3}$$

и сопряженную спектральную задачу

$$-\frac{\partial}{\partial s}p^*-\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(a_{ij}(s,z)\frac{\partial}{\partial z_j}p^*\Big)+\frac{\partial}{\partial z_i}(b_i(s,z)p^*)-c(s,z)p^*=\Lambda_0 p^*.\tag{4}$$

Предложение 1 *Существует $\Lambda_0\in R$ такое, что уравнение (3) имеет положительное периодическое по s и z решение $p(s,z)$. Такое Λ_0 единственно, и соотвествующее ему решение уравнения (3) также единственно с точностью до мультипликативной константы. При том же Λ_0 уравнение* (4) *имеет единственное с точностью до мультипликативеной константы периодическое по s и z решение. Это решение положительно.*

Будем предполагать, что

$$\int_{\mathbb{T}^{n+1}} p(s,z)\,dsdz = 1, \qquad \int_{\mathbb{T}^{n+1}} p^*(s,z)\,dsdz = 1,$$

и определим вектор

$$\bar{b} = \int\limits_{\mathbb{T}^{n+1}} (\mathrm{div}\, a(s,z) + b(s,z))p_0^*(s,z)\,dz\,ds. \tag{5}$$

Введем также константы

$$\bar{p} = \int\limits_{\mathbb{T}^n} p^{-1}(0,z)p^*(0,z)dz$$

и

$$\bar{\sigma} = \int\limits_{\mathbb{T}^{n+1}} p_0(s,y)p_0^*(s,y)\,dsdy.$$

Теорема 1 *Существует положительно определенная постоянная матрица $\bar{a}_{ij}$ такое, что для любой $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ справедливо соотношение*

$$u^\varepsilon(t,x) = e^{-\Lambda_0 t/\varepsilon^2} p\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{x}{\varepsilon}\Big) v^\varepsilon(t,x),$$

причем функция v^ε удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Big(v^\varepsilon(t,x) - v^0\big(t, x - \frac{\bar{b}}{\varepsilon}t\big)\Big)^2 \,dxdt \,=\, 0. \tag{6}$$

где v^0 – это решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}\frac{\partial}{\partial t} v^0(t,x) &= \bar{a}^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v^0(t,x) \qquad &\text{в } (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ v^0(0,x) &= \bar{p} u_0(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что равенство (6) может быть переписано в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Big(v^\varepsilon\big(t, x + \frac{\bar{b}}{\varepsilon}t\big) - v^0(t,x)\Big)^2 \,dxdt \,=\, 0.$$

Таким образом в движущихся координатах $(t,x) \mapsto (t, x - \frac{\bar{b}}{\varepsilon}t)$ функция v^ε близка в норме L^2 к решению задачи (7).

Вторая глава посвящена исследованию сингулярно возмущенные уравнения конвекции-диффузии с периодическими коэффициентами в ограниченных областях.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с липшицевой границей $\partial\Omega$, и пусть A^ε – оператор конвекции-диффузии вида

$$A^\varepsilon u^\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\Big) + \frac{1}{\varepsilon}\, b_j\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}$$

с малым положительным параметром ε. Соответствующая начально-краевая задача имеет вид

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(t,x) + A^\varepsilon\, u^\varepsilon(t,x) = 0, & \text{в } (0,T)\times\Omega, \\ u^\varepsilon(t,x) = 0, & \text{на } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Мы будем изучать предельное поведение u^ε при $\varepsilon \to 0$.

Оператор A^ε удовлетворяет следующим условиям.

(H1) Коэффициенты $a_{ij}(y), b_j(y)$ периодические, измеримые ограниченные функции в $\mathbb{R}^d$ с периодом $Y = (0,1]^d$.

(H2) $d \times d$ матрица $a(y)$ равномерно эллиптична, т.е. существует $\Lambda > 0$ такое, что

$$a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \Lambda|\xi|^2$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}^d$ и при почти всех $y \in \Omega$.

Если условия **(H1)** и **(H2)** выполнены, то при каждом $\varepsilon > 0$ задача (8) имеет единственное решение $u^\varepsilon \in L^\infty[0,T;L^2(\Omega)] \cap L^2[0,T;H^1(\Omega)]$. Наша цель – описать предельное поведение решения $u^\varepsilon(t,x)$ задачи (8) при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим символами A и A^* дифференциальные операторы

$$Au = -\mathrm{div}(a\nabla u) + b\cdot\nabla u, \quad A^*v = -\mathrm{div}(a^T\nabla v) - \mathrm{div}(b\, v),$$

где $a = a(y)$ – это матрица коэффициентов в задаче (8), и a^T – транспонированная матрица.

Рассмотрим два семейства спектральных эллиптических задач (прямых и сопряженных) на ячейке периодичности $Y = [0,1)^d$ с векторным параметром $\theta \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} e^{-\theta\cdot y}\, A\, e^{\theta\cdot y}\, p_\theta(y) = \lambda(\theta)\, p_\theta(y), & y \in Y, \\ y \to p_\theta(y) \quad Y\text{-периодична}. \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} e^{\theta\cdot y}\, A^*\, e^{-\theta\cdot y}\, p^*_\theta(y) = \lambda(\theta)\, p^*_\theta(y), \quad Y, \\ y \to p^*_\theta(y) \quad \text{Y-периодична.} \end{cases} \tag{10}$$

По теореме Крейна-Рутмана первое собственной значение $\lambda_1(\theta)$ в этих двух задачах действительное и простое, а соответствующие собственные функции p_θ и p^*_θ положительны при подходящей нормировке. Поведение $\lambda_1(\theta)$ как функции θ изучалось в в работах И.Капдебоска 1998 и 2002 годов. В этих работах был показано, что *функция* $\lambda_1(\theta)$ *дважды непрерывно дифференцируема, строго вогнута и достигает максимума в единственной точке в* $\mathbb{R}^d$. Эту точку обозначим через Θ.
Для функций p_θ и p^*_θ выберем условия нормировки

$$\int\limits_Y |p_\theta(y)|^2 dy = 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_Y p_\theta(y)\, p^*_\theta(y)\, dy = 1.$$

Как и в первой главе определим вектор эффективной конвекции по формуле

$$\bar b_i = \int\limits_Y \big(b_i(y)\, p^*_0(y) + a_{ij}(y)\, \partial_{y_j} p^*_0(y)\big)\, dy. \tag{11}$$

В случае, когда $\bar b = 0$, задача (8) может быть исследована классическими методами теории усреднения, см. например книгу В.В.Жикова, С.М.Козлова и О.А.Олейник (1993). Мы здесь предполагаем, что $\bar b \neq 0$, что эквивалентно условию $\Theta \neq 0$, а также условию $\lambda_1(\Theta) > 0$.

Относительно начального условия в задаче (8) предполагаем, что

(H3) Начальная функция $u_0(x)$ непрерывна в Ω, имеет компактный носитель $\omega \Subset \Omega$, и принадлежит $C^2(\omega)$. Более того, ω имеет границу класса C^2.

(H4) Точка $\bar x \in \partial\omega$, в которой достигается минимум $\min_{x\in\omega} \Theta \cdot x$, единственна. Другими словами

$$\Theta \cdot (x - \bar x) > 0, \quad x \in \omega \setminus \{\bar x\}. \tag{12}$$

(H5) Точка $\bar x$ является эллиптической, и граница $\partial\omega$ локально выпукла в $\bar x$, то есть главные кривизны $\partial\omega$ в точке $\bar x$ имеют один и тот же знак. Отсюда следует, что в локальных координатах в некоторой окрестности $U_\delta(\bar x)$ точки $\bar x$ граница $\partial\omega$ задается уравнением

$$z_d = (Sz', z') + o(|z'|^2)$$

с некоторой положительно определенной $(d-1)\times(d-1)$ матрицей S. Здесь $z' = (z_1, \cdots z_{d-1})$ – координаты в касательной гиперплоскости к $\partial\omega$ в точке $\bar{x}$, и z_d координата вдоль внутренней нормали к $\partial\omega$ в этой точке.

(H6) $\nabla u_0(\bar{x}) \cdot \Theta \neq 0$.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия* (**H1**) – (**H6**), *и пусть* $\Theta \neq 0$. *Тогда при каждом* $t_0 > 0$ *и при всех* $t \geq t_0$ *для решения* u^ε *задачи* (8) *справедливо асимптотическое соотношение*

$$u^\varepsilon(t,x) = \varepsilon^{\frac{d+3}{2}}\, e^{-\frac{\lambda_1(\Theta)t}{\varepsilon^2}}\, e^{\frac{\Theta\cdot(x-\bar{x})}{\varepsilon}}\, M_\varepsilon\, p_\Theta\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\, u(t,x)(1+o(1)), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $(\lambda_1(\Theta), p_\Theta)$ *это первая собственная пара вспомогательной периодической задачи, а* $u(t,x)$ *– решение усредненной задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div}(a^{\mathrm{eff}}\,\nabla u), & (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \\ u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = \big(\nabla u_0(\bar{x}), \dfrac{\Theta}{|\Theta|}\big)\, \nabla u_0(\bar{x}) \cdot \dfrac{\Theta}{|\Theta|}\, \delta(x-\bar{x}), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{13}$$

Матрица a^{eff} *положительно определена,* M_ε *это зависящая от* ε *константа, удовлетворяющая оценке* $0 < M^- \leq M_\varepsilon \leq M^+$, $\delta(x-\bar{x})$ *это* δ*-функция в точке* $\bar{x}$*; наконец,* $o(1)$ *обозначает функцию, которая стремится к нулю при* $\varepsilon \to 0$ *равномерно по* x *и* $t \geq t_0$.

В случае, когда компоненты вектора Θ *рационально независимы, т.е. для любых целых* $k_1, \ldots, k_d$ *величина* $k_1\Theta_1 + \ldots + k_d\Theta_d$ *не обращается в ноль, константа* M_ε *не зависит от* ε *и определяется по формуле*

$$M_\varepsilon = \frac{(d-1)}{|\Theta|^2}\Big(\frac{\pi}{|\Theta|}\Big)^{\frac{d-1}{2}} (\det S)^{1/2} \int\limits_Y p_\Theta^{-1}(y)\, dy.$$

В случае, когда ω имеет плоский участок границы, мы заменим условия **(H4), (H5), (H6)** на следующие условия.

(H4') Множество точек $\bar{x} \in \partial\omega$, где достигается минимум $\min_{x\in\omega} \Theta \cdot x$ образует подмножество Σ, которое лежит на некоторой гиперплоскости в $\mathbb{R}^d$, причем Σ обладает положительной $(d-1)$-мерной мерой.

(H5') Найдется точка $\bar{x} \in \Sigma$ такая, что $\dfrac{\partial u_0}{\partial\Theta}(\bar{x}) \neq 0$. Отметим, что из условия **H3** следует, что $u_0 = 0$ на Σ.

Замечание 1 *Условие* **(H4')** *в частности означает, что*

$$\Theta \cdot (x - \bar{x}) > 0 \text{ для всех } x \in \omega \setminus \Sigma, \ \bar{x} \in \Sigma,$$

и что Θ *ортогонален* Σ *и направлен внутрь* ω. *Более того, величина* $\bar{x}_\Theta = \bar{x} \cdot \frac{\Theta}{|\Theta|}$ *одна и та же для всех* $\bar{x} \in \Sigma$.

Теорема 3 *Предположим, что выполнены условия* **(H1)-(H3)** *и* **(H4')-(H5')**, *и пусть* $\Theta \neq 0$. *Тогда при* $t \geq t_0 > 0$ *для решения* u^ε *задачи* (8) *справедливо соотношение*

$$u^\varepsilon(t,x) = \varepsilon^2 \, e^{-\frac{\lambda_1(\Theta)t}{\varepsilon^2}} \, e^{\frac{\Theta\cdot(x-\bar{x})}{\varepsilon}} \, (1 + r_\varepsilon(t,x)) \, M_\varepsilon \, p_\Theta\big(\frac{x}{\varepsilon}\big) \, u(t,x),$$

где $r_\varepsilon(t,x) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *равномерно по* $(t,x) \in [t_0, T] \times \overline{\Omega}$, *а* $(\lambda_1(\Theta), p_\Theta)$ *первая собственная пара вспомогательной задачи,* $\bar{x}$ *–произвольная точка* Σ, *и* $u(t,x)$ *решение усредненной задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div}(a^{\text{eff}} \, \nabla u), & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = \dfrac{\partial u_0}{\partial \Theta}(x) \, \delta_\Sigma, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь a^{eff} *положительно определенная матрица ,* δ_Σ *–* δ*-функция на поверхности* Σ, *и константа* M_ε *задана формулой*

$$M_\varepsilon = \int\limits_0^{+\infty} \zeta_d \, e^{-|\Theta|\,\zeta_d} \, \mathcal{M}\{P_\Theta^{-1}\big(\cdot, \zeta_d + \frac{\bar{x}_\Theta}{\varepsilon}\big)\} d\zeta_d,$$

в которой $\mathcal{M}\{P_\Theta^{-1}(\cdot, \tau_d)\}$ *определено как среднее почти периодической функции* $P_\Theta^{-1}(\cdot, \tau_d)$, *и* $P_\Theta(z)$ *– это функция* p_Θ *заданная в локальных координатах в окрестности* $\Sigma : P_\Theta(\zeta) = p_\Theta(\mathcal{R}^{-1}\zeta)$, *где* $\mathcal{R}$ *- это соответствующая матрица поворота.*

В третьей главе диссертации изучаются задачи усреднения уравнений конвекции-диффузии в периодической пористой среде в присутствии химической реакции на поверхности пор. При математическом описании такой модели мы приходим к системе уравнений, состоящей из нестационарного уравнения конвекции-диффузии в периодической перфорированной среде и обыкновенного дифференциального уравнения на поверхности перфорации.

Для описания периодической пористой среды обозначим через Σ^0 гладкое односвязное замкнутое подмножество куба $(0,1)^n$, и пусть $Y^0 = [0,1)^n \setminus \Sigma^0$. Для произвольных $j \in \mathbb{Z}^n$ и $\varepsilon > 0$ обозначим $Y^j_\varepsilon = \varepsilon(Y^0 + j)$, $\Sigma^j_\varepsilon = \varepsilon(\Sigma^0 + j)$ и $S^j_\varepsilon = \varepsilon(\partial\Sigma^0 + j)$. Определим теперь

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}^n} Y^j_\varepsilon, \qquad S_\varepsilon \equiv \partial\Omega_\varepsilon = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}^n} S^j_\varepsilon.$$

Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ Ω_ε – это ε-периодическое по каждому координатному направлению, связное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей.
На множестве $\Omega_\varepsilon \times [0,T]$ рассматриваем следующую задачу

$$\partial_t u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{b}\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\cdot\nabla u_\varepsilon - D\Delta u_\varepsilon = 0 \qquad \text{в } \Omega_\varepsilon \times (0,T), \tag{15}$$

$$-\frac{D}{\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\mathbf{n}} = \partial_t v_\varepsilon = \frac{k}{\varepsilon^2}\Big(u_\varepsilon - \frac{v_\varepsilon}{K}\Big) \qquad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon \times (0,T), \tag{16}$$

$$u_\varepsilon(x,0) = u^0(x), \qquad v_\varepsilon(x,0) = v^0(x), \tag{17}$$

здесь K и k некоторые положительные константы, которые не зависят от ε.
Относительно векторного поля $b(y)$ мы делаем такие предположения.

(H1) Векторное поле $b(y)$ периодическое.

(H2) $|\ \mathbf{b}(y)\ | \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\ \mathrm{div}_y\mathbf{b}(y) = 0$ в Y^0, $\quad \mathbf{b}(y)\cdot\mathbf{n}(y) = 0$ на $\partial\Sigma^0$.

Мы также предполагаем, что

(H3) $u^0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $v^0(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Интегральное тождество в задаче (15)-(16) имеет вид: ищем функции $u_\varepsilon(t,x) \in L^2((0,T);H^1(\Omega_\varepsilon)) \cap C^0([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))$ и $v_\varepsilon(t,x) \in C^0([0,T];L^2(\partial\Omega_\varepsilon))$ такие, что для любых $\phi(x) \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ и $\psi(x) \in L^2(\partial\Omega_\varepsilon)$ при почти всех значениях $t \in [0,T]$ выполнены равенства

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon\phi + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_\varepsilon}\mathbf{b}\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\cdot\nabla u_\varepsilon\phi + \int_{\Omega_\varepsilon} D\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\phi + \frac{k}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\Big(u_\varepsilon - \frac{v_\varepsilon}{K}\Big)\phi = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon\psi - \frac{k}{\varepsilon^2}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\Big(u_\varepsilon - \frac{v_\varepsilon}{K}\Big)\psi = 0,$$

и начальные условия (17).

Замечание 2 *Если векторное поле* $\mathbf{b}(y)$ *не соленоидально и/или оно не удовлетворяет условию* $\mathbf{b}(y)\cdot\mathbf{n}(y) = 0$ *на* $\partial\Sigma^0$, *задача (15)-(17) все равно допускает усреднение. В этом случае необходимо сначала факторизовать решение, используя собственную функцию задачи на ячейке.*

Через $|Y^0|$ обозначим меру множества Y^0, и через $|\partial\Sigma^0|_{n-1}$ – $(n-1)$-мерную меру множества $\partial\Sigma^0$. Символом $\mathbf{n}(y)$ обозначаем единичную внешнюю нормаль на $\partial\Sigma^0$. Введем эффективное векторное поле

$$\bar{\mathbf{b}} = (|Y^0| + |\partial\Sigma^0|_{n-1}K)^{-1}\int_{Y^0}\mathbf{b}(y)dy,$$

и матрицу эффективной диффузии

$$A^* = \frac{K^2}{k}|\partial\Sigma^0|_{n-1}\bar{\mathbf{b}}\otimes\bar{\mathbf{b}} + D\int_{Y^0}(\mathbf{I}+\nabla_y\chi(y))(\mathbf{I}+\nabla_y\chi(y))^{\mathfrak{T}}dy, \tag{18}$$

где компоненты вектор-функции χ являются периодическими решениями следующей задачи

$$\begin{gathered}\mathbf{b}(y)\cdot\nabla\chi_i(y) - D\mathrm{div}(\nabla(\chi_i(y)+y_i)) = \bar{b}_i - b_i(y) \quad \text{в } Y^0,\\ D\nabla(\chi_i(y)+y_i)\cdot\mathbf{n} = K\bar{b}_i \quad \text{на } \partial\Sigma^0.\end{gathered} \tag{19}$$

Отметим, что вектор $\bar{b}$ выбран таким образом, чтобы эта задача была разрешима в пространстве периодических функций, и что этим условием вектор $\bar{b}$ определен однозначно. Основным результатом главы является

Теорема 4 *Семейство решений* $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}$ *задачи (15)-(17) допускает асимптотическое представление*

$$u_\varepsilon(t,x) = u\left(t, x-\frac{\bar{\mathbf{b}}}{\varepsilon}t\right) + r_\varepsilon^u(t,x), \qquad v_\varepsilon(t,x) = Ku\left(t, x-\frac{\bar{\mathbf{b}}}{\varepsilon}t\right) + r_\varepsilon^v(t,x) \tag{20}$$

где

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|r_\varepsilon^u(t,x)|^2\,dt\,dx = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\int_0^T\int_{\partial\Omega_\varepsilon}|r_\varepsilon^v(t,x)|^2\,dt\,dx = 0,$$

и функция $u(x,t)$ *– это решение усредненной задачи*

$$\begin{cases}(|Y^0| + K|\partial\Sigma^0|_{n-1})\partial_t u = \mathrm{div}_x\big(A^*\nabla_x u\big) & \text{в } \mathbb{R}^n\times(0,T),\\ u(x,0) = \dfrac{|Y^0|u^0(x) + |\partial\Sigma^0|_{n-1}v^0(x)}{|Y^0| + K|\partial\Sigma^0|_{n-1}} & \text{в } \mathbb{R}^n.\end{cases} \tag{21}$$

Замечание 3 *В предельном уравнении (21) отсутствуют члены первого порядка, поскольку предельное поведение u_ε и v_ε в (20) описывается функцией u в движущихся координатах. Выполнив обратную замену переменных $\tilde{u}_\varepsilon(t,x) = u\left(t, x - \frac{\bar{\mathbf{b}}}{\varepsilon}t\right)$, мы можем переписать эффективную задачу (21) в фиксированных координатах. Она принимает вид*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\bar{\mathbf{b}}\cdot\nabla\tilde{u}_\varepsilon - \operatorname{div}\left(A^*\nabla\tilde{u}_\varepsilon\right) = 0 & \text{в } \mathbb{R}^n\times(0,T) \\ \tilde{u}_\varepsilon(t=0,x) = \dfrac{|Y^*|u^0(x) + |\partial\mathcal{O}|_{n-1}v^0(x)}{|Y^*| + K|\partial\mathcal{O}|_{n-1}} & \text{в } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Замечание 4 *Отметим очень интересную особенность модели, рассматриваемой в третьей главе. Эффективная конвекция (скорость) зависит от параметров реакции на поверхности пор, что следует из формулы для эффективного векторного поля $\bar{b}$. Из этой формулы следует, что в присутствии реакции эффективное течение замедляется.*

Четвертая глава посвящена задачам описания предельного поведения решений нелинейных уравнений реакции-диффузии и конвекции-диффузии с большими младшими членами и с периодической микроструктурой.

В первой части главы выполняется усреднение нелинейного уравнения реакции-диффузии с большим младшим членом. Рассматривается задача усреднения в периодической среде для уравнения реакции-диффузии с большим нелинейным членом нулевого порядка. Предполагается, что коэффициенты уравнения быстро осциллируют как по пространственным переменным, так и по времени, причем период осцилляции по времени пропорционален квадрату периода осцилляции по пространственным переменным, что задает так называемый диффузионное масштабирование.

Обозначим период коэффициентов по пространственным переменным через ε. Мы изучаем начально-краевую задачу вида

$$\begin{cases} \rho\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)\partial_t u^\varepsilon = \operatorname{div}\Big(a\Big(\dfrac{x}{\varepsilon},\dfrac{t}{\varepsilon^2}\Big)\nabla u^\varepsilon\Big) + \dfrac{1}{\varepsilon}g\Big(\dfrac{x}{\varepsilon},\dfrac{t}{\varepsilon^2},u^\varepsilon\Big) \quad \text{в } Q\times(0,T), \\ u^\varepsilon(x,t) = 0 \quad \text{на } \partial Q\times(0,T), \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x)\in L^2(Q), \end{cases} \tag{22}$$

в липшицевой области $Q\subset\mathbb{R}^n$, где начальная функция u_0 лежит в $L^2(\mathbb{R}^n)$, и все коэффициенты $a(y,s)$, $\rho(y)$ и $g(y,s,u)$ периодичны по переменным y и s. Здесь $T>0$ это произвольное положительное число,

ε – малый параметр. Область Q может быть как ограниченной, так и неограниченной. Если $Q = \mathbb{R}^n$, то краевое условие в задаче (22) не требуется.

Функция u^ε может быть интерпретирована как концентрация химического вещества при его диффузии в пористой среде с коэффициентом пористости $\rho(y)$ и коэффициентом диффузии $a(y,s)$ и при наличии химической реакции, задаваемой нелинейным членом $g(y,s,u)$.

Коэффициенты в (22) удовлетворяют следующим условиям:

A1. Равномерная эллиптичность. Матрица a_{ij} действительная и положительно определенная. Найдется $\Lambda > 0$ такая, что

$$\|a_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \le \Lambda^{-1},\ 1 \le i,j \le n,$$

$$a_{ij}(y,s)\xi_i\xi_j \ge \Lambda|\xi|^2 \quad \text{при всех } (s,y) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A2. Положительность плотности. Существует константа $\Lambda > 0$ такая, что

$$\Lambda \le \rho(y) \le \Lambda^{-1} \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}^n.$$

A3. Периодичность. Плотность $\rho(y)$ – это $[0,1]^n$-периодическая функция. Все коэффициенты матрицы $a(s,y)$ являются $[0,1]^{n+1}$-периодическими функциями. При каждом $u \in \mathbb{R}^n$ функция $g(x,y,u)$ $[0,1]^{n+1}$-периодична.

A4. Условие центрирования. Мы предполагаем, что для любого $u \in \mathbb{R}$, выполнено равенство

$$\int\limits_{[0,1]^{n+1}} g(y,s,u)dsdy = 0.$$

A5. Непрерывности по Липшицу. Найдется константа $C > 0$ такая, что при всех $y,s \in [0,1]^{n+1}$ и $u \in \mathbb{R}$

$$|\partial_u g(y,s,u)| \le C\,,$$

$$|\partial_u g(y,s,u_1) - \partial_u g(y,s,u_2)| \le C|u_1 - u_2|\big(1 + |u_1| + |u_2|\big)^{-1}.$$

В частности это условие выполняется, если $g(y,s,u)$ дважды дифференцируемо по переменной u, и $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}(y,s,u)\right| \le C(1+|u|)^{-1}$.

A6. Мы также предполагаем, что

$$g(y,s,0) = 0 \qquad \text{при всех } y,s \in [0,1]^{n+1}.$$

В этом случае 0 это решение уравнения (22).

Без ограничения общности будем предполагать, что

$$\int_{[0,1]^n} \rho(y)dy = 1.$$

Обозначим через Y ячейку периодичности $[0,1]^n$ по пространственным переменным. Будем также использовать обозначение $\mathcal{Y} = Y \times [0,1] = [0,1]^{n+1}$.

Поскольку функция g удовлетворяет условию Липшица по переменной u, то при каждом $\varepsilon > 0$ задача (22) имеет единственное решение, причем $u^\varepsilon \in L^2\left((0,T); H_0^1(Q)\right) \cap C\left((0,T); L^2(Q)\right)$.

Обозначим

$$\bar{g}(s,u) = \int_Y g(y,s,u)dy, \qquad \overline{G}(s,u) = \int_0^s \bar{g}(\tau,u)\,d\tau, \tag{23}$$

$$\tilde{g}(y,s,u) = g(y,s,u) - \rho(y)\bar{g}(s,u).$$

Тогда

$$\int_Y \tilde{g}(y,s,u)dy = 0$$

при всех s и u.

Рассмотрим вспомогательные задачи на (n+1)-мерной ячейке периодичности

$$\rho\partial_s\chi - \mathrm{div}_y(a\nabla_y\chi) = \mathrm{div}_y a, \tag{24}$$

и

$$\rho\partial_s w_1(y,s,u) - \mathrm{div}_y(a\nabla_y w_1(y,s,u)) = \tilde{g}(y,s,u). \tag{25}$$

Лемма 1 *Уравнения (24) и (25) имеют $(0,1)^{n+1}$-периодические решения. При подходящем выборе аддитивной константы справедливы равенства*

$$\int_Y \rho\chi(y,s)\,dy = 0, \qquad \int_Y \rho(y)w_1(y,s,u)\,dy = 0 \quad \text{при всех } s \in (0,1),\ u \in \mathbb{R}.$$

Определим теперь

$$\hat{a} = \int_0^1\int_Y a(\nabla_y\chi + \mathbf{I})dyds,$$

$$F_1(u) = \int_0^1\int_Y a(y,s)\nabla_y w_1(y,s,u)dyds, \quad F_2(u) = \int_0^1\int_Y \partial_u\tilde{g}(y,s,u)\chi(y,s)dyds,$$

$$F_3(u)=\int_0^1\int_Y \partial_u\tilde g(y,s,u)w_1(y,s,u)dyds,\quad F_4(u)=\int_0^1\int_Y \partial_u\overline{G}(s,u)g(y,s,u)dyds.$$

и рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \partial_t u = \operatorname{div}\big(\hat a\nabla u\big) + \operatorname{div}F_1(u) - F_2(u)\cdot\nabla u - F_3(u) - F_4(u), \\ u(x,t) = 0 \text{ на } \partial Q\times(0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ в } Q. \end{cases} \tag{26}$$

Основным результатом первой части главы является

Теорема 5 *При условиях* **A1**–**A6** *решение* $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *задачи (22) сходится при* $\varepsilon\to 0$ *в пространстве* $L^2(Q\times(0,T))$ *к единственному решению предельной задачи (26). Задача (26) имеет единственное решение.*

Отметим так называемый дисперсный эффект: в отличие от исходного уравнения, которое имело нелинейность только в членах нулевого порядка, усредненное уравнение содержит нелинейные члены первого порядка.

Вторая часть главы посвящена усреднению задачи Коши для нелинейного уравнения конвекции-диффузии с большими членами первого порядка и с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами.

Мы исследуем асимптотическое поведение решений следующей задачи Коши

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{A}^\varepsilon(t,x)\nabla u^\varepsilon) + \varepsilon^{-1}b^\varepsilon(t,x,u^\varepsilon)\cdot\nabla u^\varepsilon = 0 \ \text{ в } \ ]0,T[\times\mathbb{R}^n \tag{27}$$

$$u^\varepsilon(0,x) = \varphi(x) \ \ x\in\mathbb{R}^n \ , \tag{28}$$

где

$$\mathbf{A}^\varepsilon(t,x) = \mathbf{A}(t,\frac{x'}{\varepsilon}), \qquad b^\varepsilon(t,x,v) = (a(t,\frac{x'}{\varepsilon}), h(t,\frac{x'}{\varepsilon})\, f(v)) \ , \tag{29}$$

причем $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n$, $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $x_n\in\mathbb{R}$. Мы предполагаем, что матрица $\mathbf{A}(t,y)=[\mathbf{A}_{ij}(t,y)]$, вектор-функция $a(t,y)=(a_1(t,y),\dots,a_{n-1}(t,y))$ и скалярная функция $h(t,y)$ 1-периодичны по каждой из переменных $y=(y_1,\dots,y_{n-1})$. В этом случае мы можем отождествить эти функции с функциями на соответствующем $(n-1)$-мерном торе, который будем обозначать через Y. Мы предполагаем, что:

- Коэффициенты $\mathbf{A}, a$ и h принадлежат пространству $C^2_{per}(Y)$.
- Нелинейная функция $f \in C^2(\mathbb{R})$.
- Начальное условие $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- Матрица диффузии $\mathbf{A}$ положительно определена, т.е., существует константа $c_0 > 0$ такая, что при всех $(t, y) \in]0, T[\, \times Y$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\xi \cdot \mathbf{A}\, \xi = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}(t, y)\, \xi_i\, \xi_j \geq c_0\, |\xi|^2 \,. \tag{30}$$

Важную роль играет вспомогательная задача на торе Y:

$$\mathrm{div}_y(\mathbf{A}^t\, \nabla_y z + az) = 0 \ \text{ на } \ Y \,, \tag{31}$$

здесь и далее, если не оговорено противное, мы будем считать функции переменной y периодическими. Мы также используем обозначения

$$\mathrm{div}_y v = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\alpha} \,, \quad \nabla_y\, \chi = (\frac{\partial \chi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \chi}{\partial y_{n-1}}) \,,$$

$$(\mathbf{A}^t\, \nabla_y z)_\alpha(t, y) = \sum_{\beta=1}^{n-1} A_{\alpha\beta}(t, y) \frac{\partial z}{\partial y_\beta} \,,$$

Уравнение (31) линейное, оно имеет нетривиальное решение в пространстве Y-периодических функций. Более того, при выполнении условия нормировки

$$\int_Y z(t, y) dy = 1 \tag{32}$$

такое решение единственно и строго положительно.
В дополнение к перечисленным выше условиям мы предполагаем, что нелинейная конвекция h удовлетворяет соотношению

$$\int_Y z(t, y)\; h(t, y)\; dy \; = 0 \,, \qquad \forall\, t \in [0, T] \,. \tag{33}$$

Отметим, что в случае когда векторное поле бездивергентно, т.е. $\mathrm{div}_{x'}\, a = 0$, функция z является константой, и условие (33) означает, что h имеет нулевое среднее.

Замечание 5 *При условии* (33) *эффективный перенос в направлении* x_n *обращается в ноль, что делает вектор эффективного переноса не зависящим от неизвестной функции u. В отсутствии этого условия формальная процедура усреднения приводит к некорректным задачам. Конкретный вид нелинейности в (29) по-видимому несущественен и является техническим предположением*

Вводим теперь движущиеся координаты $(t, x) \to (t, x + \varepsilon^{-1}B(t))$ и определяем функцию

$$w^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon(t, x + \varepsilon^{-1}B(t)) \ ,$$

где

$$B(t) = \int_0^t \int_Y (a(s, y) - \operatorname{div} \mathbf{A}(s, y))\, z(s, y)\, dy\, ds \ . \tag{34}$$

Теорема 6 *Функции* w^ε *сходятся при* $\varepsilon \to 0$ *в пространстве* $L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ *к функции* $w^0(t, x)$ *которая удовлетворяет квазилинейной задаче*

$$\frac{\partial w^0}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathcal{A}(w^0)\, \nabla w^0) = 0 \quad \text{в }]0, T[\, \times \mathbb{R}^n \ , \qquad w^0(0, \cdot\,) = \varphi \ \text{ в } \mathbb{R}^n \ ,$$

Эта задача имеет единственное решение.

Отметим, что коэффициенты матрицы $\mathcal{A}(w^0)$ определяются с помощью решений вспомогательных задач на ячейке периодичности. Проверяется, что эта матрица обладает свойствами коэрцитивности и регулярности, достаточными для доказательства единственности решения предельной задачи.

Целью пятой главы является описание предельного поведения решений как линейных так и нелинейных параболических уравнений второго порядка с большими младшими членами и с быстро осциллирующими коэффициентами периодическими по пространственным переменным и случайными стационарными по времени.

В первой части главы рассматривается случай, когда задача линейна, и когда зависимость от времени носит диффузионный характер.

Пусть $\alpha > 0$ – фиксированное число. Для произвольного $T > 0$ соответствующая задача Коши с малым параметром $\varepsilon > 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\partial_t u^\varepsilon(t, x) = \operatorname{div}\Big[a\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{t/\varepsilon^\alpha}\Big)\nabla u^\varepsilon(t, x)\Big] + \frac{1}{\varepsilon^{1\wedge\alpha/2}} c\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{t/\varepsilon^\alpha}\Big) u^\varepsilon(t, x) \\ &u^\varepsilon(0, x) = u_0(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [0, T], \end{aligned} \tag{35}$$

где $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Мы будем изучать предельное поведение решений этой задачи, когда $\varepsilon \to 0$.

Коэффициенты $a(z,y)$ и $c(z,y)$ – периодические по z функции, которые мы будем отождествлять с функциями на единичном торе $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, ξ_s – стационарный диффузионный процесс в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющий уравнению Ито

$$d\xi_s = B(\xi_s)\,ds + \sigma(\xi_s)\,dW_s; \tag{36}$$

здесь W_s – стандартный d-мерный винеровский процесс.

Обозначим символом $\mathcal{L}$ генератор процесса ξ_s:

$$\mathcal{L}\varphi(y) = q^{kl}(y)\frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^l}\varphi(y) + B(y)\cdot\nabla_y\varphi(y), \tag{37}$$

где $q(y) = \frac{1}{2}\sigma\sigma^*$. Обозначим также

$$\mathcal{A}h(x) = \mathrm{div}_x\big[a\big(x,y\big)\nabla_x h(x)\big], \qquad \mathcal{A}^\varepsilon h(x) = \mathrm{div}_x\Big[a\Big(\frac{x}{\varepsilon},y\Big)\nabla_x h(x)\Big],$$

причем индекс x в операторах div_x и ∇_x означает, что эти операторы действуют по переменной x, а y служит параметром.

Параметр $\alpha > 0$ характеризует отношение масштабов неоднородности по пространственным переменным и по времени.

Будем предполагать, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$ удовлетворяют следующим условиям:

h1. Коэффициенты $a(z,y)$, $c(z,y)$ и $q(y)$ и их первые производные равномерно ограничены, т.е.

$$|a^{ij}(z,y)| + |\nabla_z a^{ij}(z,y)| + |\nabla_y a^{ij}(z,y)| \le C,$$
$$|c(z,y)| + |\nabla_z c(z,y)| + |\nabla_y c(z,y)| \le C,$$
$$|q^{kl}(y)| + |\nabla_y q^{kl}(y)| \le C$$

при всех $(z,y) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d$, $1 \le i,\, j \le n$, $1 \le k,\, l \le d$.
Векторное поле B удовлетворяет оценке

$$|B(y)| + |\nabla_y B(y)| \le C\big(1+|y|\big)^{\mu_1}$$

с некоторым $\mu_1 \ge 0$.

h2. Равномерная эллиптичность. Существует константа $C > 0$ такая, что

$$a(z,y)\eta\cdot\eta \ge |\eta|^2 \quad \text{при всех } (z,y) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d,\ \eta \in \mathbb{R}^n,$$
$$q(y)\eta\cdot\eta \ge C|\eta|^2 \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}^d,\ \eta \in \mathbb{R}^d.$$

h3. Существуют константы $\mu > -1$, $R > 0$ и $C > 0$ такие, что

$$B(y) \cdot \frac{y}{|y|} \le -C|y|^{\mu} \qquad \text{при } |y| \ge R.$$

Если $q(y)$ и $B(y)$ удовлетворяют условиям **h1.**–**h3.**, то, как было показано в работе Парду и Веретенникова (1998), процесс ξ_s имеет единственную инвариантную меру в $\mathbb{R}^d$, эта мера абсолютно непрерывна. Плотность этой меры обозначим через $\rho(y)$. Функция ρ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}^*\rho = 0 \ \text{ в } \mathbb{R}^d, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)\,dy = 1. \tag{38}$$

Более того, выполнена оценка

$$\rho(y) \le C\exp(-c_0|y|^{1+\mu}), \qquad c_0 > 0.$$

Для краткости введем обозначения

$$\overline{f(\cdot)} = \mathbf{E}f(\xi_s) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\rho(y)\,dy,$$

для f интегрируемых в $\mathbb{R}^d$ с плотностью ρ, и

$$\langle f(\cdot)\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(z)\,dz$$

для периодических функций f. В частности

$$\overline{f(z,\cdot)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(z,y)\rho(y)\,dy, \quad \langle f(\cdot,y)\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(z,y)\,dz, \quad \overline{\langle f(\cdot,\cdot)\rangle} = \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{R}^d} f(z,y)\,dydz.$$

Мы будем также предполагать, что

h4. Функция $c(z,y)$ имеет нулевое среднее: $\overline{\langle c(\cdot,\cdot)\rangle} = 0$.

Отметим, что условие **h4.** не является ограничением. Действительно, выполняя замену неизвестной функции $\tilde u^\varepsilon(t,x) = \exp\big(-\overline{\langle c(\cdot,\cdot)\rangle}t/\varepsilon\big)u^\varepsilon(t,x)$, мы всегда можем добиться выполнения этого условия.

Определим пространство

$$V_T = L^2_w(0,T;H^1(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}(0,T;L^2_w(\mathbb{R}^n));$$

нижний индекс w означает, что соответствующее пространство снабжено топологией слабой сходимости. Пусть $\mathcal{F}$ это борелевская σ-алгебра в V_T.

При каждом $\varepsilon > 0$ обозначим через Q^ε вероятностную борелевскую меру на $(V_T, \mathcal{F})$, являющуюся распределением решения $\{u^\varepsilon(x,t),\ 0 \le t \le T\}$ в V_T.

Предельное поведение решений u^ε существенно отличается при $\alpha < 2$, $\alpha = 2$ и $\alpha > 2$. Мы формулируем результат о сходимости в каждом из этих случаев.

Теорема 7 *Пусть $\alpha < 2$, и пусть выполнены условия* **h1.**–**h4.** *Тогда семейство мер Q^ε слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ в V_T к мере $\hat{Q}$, являющейся распределением решения стохастического уравнения в частных производных*

$$\begin{gathered} d\hat{u} = \left[\operatorname{div}\big(\hat{a}\nabla\hat{u}\big) + \hat{c}\hat{u}\right] dt + \lambda\hat{u}d\hat{W}_t, \\ \hat{u}(0,x) = u_0(x); \end{gathered} \tag{39}$$

здесь $d\hat{W}_t$ стандартный одномерный винеровский процесс,

$$\hat{a} = \overline{\big\langle a(\cdot,\cdot)\big(\mathbf{I} + \nabla_z\Psi(\cdot,\cdot)\big)\big\rangle}, \qquad \hat{c} = \overline{G(\cdot)\langle c(\cdot,\cdot)\rangle} = \overline{q(\cdot)\nabla G(\cdot)\cdot\nabla G(\cdot)},$$
$$\lambda^2 = 2\overline{q(\cdot)\nabla G(\cdot)\cdot\nabla G(\cdot)},$$

функции $\Psi \in \bar{H}^1_\rho\big(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d\big)^n$ и $G \in \bar{H}^1_\rho(\mathbb{R}^d)$ являются решениями уравнений

$$\mathcal{A}\Psi^i(z,y) = -\partial_{z_j} a^{ij}(z,y) \tag{40}$$

и

$$\mathcal{L}G(y) = -\langle c(\cdot,y)\rangle;$$

напомним, что по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В самоподобном случае, т.е. при $\alpha = 2$ справедлив следующий результат

Теорема 8 *Пусть $\alpha = 2$, и пусть выполнены условия* **h1.**–**h4.** *Тогда семейство мер Q^ε слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ в V_T к мере $\hat{Q}$, являющейся распределением решения стохастического уравнения в частных производных*

$$\begin{gathered} d\hat{u} = \left[\operatorname{div}\big(\hat{a}\nabla\hat{u}\big) + \hat{b}\cdot\nabla\hat{u} + \hat{c}\hat{u}\right] dt + \lambda\hat{u}d\hat{W}_t, \\ \hat{u}(0,x) = u_0(x); \end{gathered} \tag{41}$$

здесь $d\hat{W}_t$ стандартный одномерный винеровский процесс,

$$\hat{a} = \overline{\big\langle a(\cdot,\cdot)\big(\mathbf{I} + \nabla_z\Psi(\cdot,\cdot)\big)\big\rangle}, \qquad \hat{b} = \overline{\langle\Psi(\cdot,\cdot)c(\cdot,\cdot) + a(\cdot,\cdot)\nabla_z G(\cdot,\cdot)\rangle},$$
$$\hat{c} = \overline{\langle G(\cdot,\cdot)c(\cdot,\cdot,\cdot)\rangle}, \qquad \lambda^2 = 2\overline{q(\cdot)\langle\nabla_y G(\cdot,\cdot)\rangle\cdot\langle\nabla_y G(\cdot)\rangle},$$

функции $\Psi \in \bar{H}^1_\rho(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d)^n$ *и* $G \in \bar{H}^1_\rho(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^d)$ *являются решениями уравнений*

$$\big(\mathcal{A} + \mathcal{L}\big)\Psi^i(z,y) = -\partial_{z_j} a^{ij}(z,y) \qquad \text{и} \qquad \big(\mathcal{A} + \mathcal{L}\big)G(z,y) = -c(z,y).$$

При $\alpha > 2$ имеем

Теорема 9 *Пусть* $\alpha > 2$, *и пусть выполнены условия* **h1.**–**h4.** *Тогда при* $\varepsilon \to 0$ *решение* u^ε *задачи* (35) *сходится по вероятности в* V_T *к решению* $\hat{u}$ *задачи Коши*

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u} &= \operatorname{div}\big(\hat{a}\nabla\hat{u}\big) + \hat{c}\hat{u}, \\ \hat{u}(0,x) &= u_0(x); \end{aligned} \tag{42}$$

здесь

$$\hat{a} = \Big\langle \overline{a(\cdot,\cdot)}\big(\mathbf{I} + \nabla_z\Psi(\cdot)\big)\Big\rangle, \qquad \hat{c} = \langle G(\cdot)\overline{c(\cdot,\cdot)}\rangle,$$

функции $\Psi \in \bar{H}^1(\mathbb{T}^n)^n$ *и* $G \in \bar{H}^1(\mathbb{T}^n)$ *являются решениями уравнений*

$$\overline{\mathcal{A}}\Psi^i(z) = -\partial_{z_j}\overline{a^{ij}(z,\cdot)} \qquad \text{и} \qquad \overline{\mathcal{A}}G(z) = -\overline{c(z,\cdot)}.$$

Во второй части главы изучается предельное поведение решений задачи Коши для параболического уравнения вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u^\varepsilon(x,t) = \operatorname{div}\left[a\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}, \dfrac{t}{\varepsilon^\alpha}\Big)\nabla u^\varepsilon(x,t)\right] + \dfrac{1}{\varepsilon^{1\wedge\frac{\alpha}{2}}}g\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}, \dfrac{t}{\varepsilon^\alpha}, u^\varepsilon(x,t)\Big) \\ \qquad\qquad + h\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}, \dfrac{t}{\varepsilon^\alpha}, u^\varepsilon(x,t)\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0; \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{43}$$

когда положительный параметр ε стремится к нулю. Как и в предыдущем параграфе коэффициенты уравнения периодичны по пространственным переменным и случайны стационарны по времени. Однако, здесь мы рассматриваем нелинейные уравнения и не предполагаем диффузионной зависимости коэффициентов от времени.

Нелинейность уравнения не позволяет использовать факторизацию, которая применялась для линейной задачи. Помимо этого в случае недиффузионного характера зависимости коэффициентов от времени мы не можем построить корректоры и сформулировать условия перемешивания, используя генератор соответствующего процесса.

Как и для линейных уравнений поведение решений различается при $\alpha < 2$, $\alpha = 2$ и $\alpha > 2$. Отметим, что при $\alpha \le 2$ решения u^ε сходятся по распределению к решению задачи Коши для предельного стохастического уравнения в частных производных, в то время как при $\alpha > 2$ предельное уравнение детерминированное, и u^ε сходятся по вероятности.

Мы предполагаем, что $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и что коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим условиям.

- **(A1)** (Периодичность). Все коэффициенты $a_{ij}(z,s)$, $g(z,s,u)$ и $h(z,s,u)$ периодичны по переменной z с периодом 1 в каждом координатном направлении.

- **(A2)** (Случайность). При каждом $u \in \mathbb{R}$ функции $a_{ij}(s,\cdot)$, $g(\cdot,s,u)$ and $h(\cdot,s,u)$ стационарные случайные эргодические поля, принимающие значения в $C(\mathbb{T}^n)$ и заданные на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$.

- **(A3)** (Условия роста и гладкости). При всех $s \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{T}^n$ и $\omega \in \Omega$ и любых $u,\ u_1,\ u_2 \in \mathbb{R}$ справедливы оценки

$$\begin{cases} |a(z,s)| \le C, \\ |g(z,s,u)| \le C|u|, \qquad |g'_u(z,s,u)| \le C, \\ (1+|u|)|g''_{uu}(z,s,u)| \le C, \qquad |h(z,s,u)| \le C(1+|u|), \\ |h(z,s,u_1) - h(z,s,u_2)| \le C|u_1-u_2|, \end{cases} \tag{44}$$

  здесь и далее в этом параграфе через C обозначена детерминированная константа, которая не зависит от s и z.

- **(A4)** (Равномерная эллиптичность). Для некоторого $c > 0$

$$a_{ij}(z,s)\eta_i\eta_j \ge c|\eta|^2, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

- **(A5)** (Условие центрирования). Справедливо равенство

$$\mathbf{E}\int_{\mathbb{T}^n} g(z,s,u)dz = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

- **(A6)** (Условие перемешивания). Пусть $\phi(t)$ это коэффициент равномерного перемешивания поля $\{a(\cdot,s),\ g(\cdot,s,u), h(\cdot,s,u)\}$, который определяется равенством

$$\phi(t) := \sup |P(A|B) - P(A)|,$$

где верхняя грань берется по всем $A \in \mathcal{F}_0$ и $B \in \mathcal{F}^t$, а $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}^t$ обозначают

$$\mathcal{F}_s := \sigma\{a_{ij}(z,r), g(z,r,u), h(z,r,u) \mid r \le s\}$$

и

$$\mathcal{F}^t := \sigma\{a_{ij}(z,r), g(z,r,u), h(z,r,u) \mid r \ge t\}.$$

Мы предполагаем, что

$$\int_0^\infty \phi(t)dt < \infty.$$

Фильтрация σ-алгебр $\{\mathcal{F}_s\}$ непрерывна справа.

- **(A7)** Для некоторого $p > n$ производная $\frac{\partial a}{\partial s}(z,s)$ почти наверное принадлежит пространству $L^p_{\rm loc}((\mathbb{T}^n \times (-\infty,+\infty))$.
- **(A8)** Справедливы оценки

$$|\nabla_z g(z,s,u)| \le C|u|, \qquad |\nabla_z a(z,s)| \le C.$$

Функция $z \to \nabla_z a(z,s)$ почти наверное непрерывна при всех $s > 0$.

Будем изучать задачу (43) на интервале времени $(0,T)$, где $T > 0$ это произвольное положительное число. Очевидно при условиях **(A.3), (A.4)** при любом $\varepsilon > 0$ эта задача имеет единственное решение u^ε, причем это решение принадлежит пространству

$$V_T = L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}([0,T];L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Снабдим пространство $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$ топологией слабой сходимости, и введем естественную топологию в пространстве $\mathcal{C}([0,T];L^2_w(\mathbb{R}^n))$, где индекс w означает топологию слабой сходимости. Обозначим через $\tilde{V_T}$ пространство V_T, снабженное максимальной топологией.

Пусть Q^ε – это распределение u^ε в пространстве $\tilde{V}_T$.

В дальнейшем для краткости будем использовать обозначения $a^\varepsilon(t) := a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha})$ и $A^\varepsilon u^\varepsilon(t) := \mathrm{div}[a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha})\nabla u^\varepsilon(x,t)]$. Положим также $A := A^1$. Для произвольной функции $f(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^\alpha}, u^\varepsilon(t,x))$ или $f(\frac{t}{\varepsilon^\alpha}, u^\varepsilon(t,x))$, если это не приводит к недоразумению, будем обозначать $f^\varepsilon(t)$.

Функцию $g(z,s,u)$ представим в виде суммы

$$g(z,s,u) = \bar{g}(s,u) + \tilde{g}(z,s,u),$$

где $\bar{g}(s,u) := \int_{\mathbb{T}^n} g(z,s,u)dz$.

Случай $\alpha = 2$.
Сначала сформулируем результат в случае $\alpha = 2$. Построим два корректора $\chi(z,s) = \{\chi_i(z,s)\}_{i=1}^n$ и $\tilde{G}(z,s)$. Первый из них определяется как стационарное по времени решение параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s}\chi_i(z,s) + \mathrm{div}\,[a(z,s)\nabla\chi_i(z,s)] = -\frac{\partial}{\partial z_k}a_{ik}(z,s), \quad (z,s) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \quad (45)$$

Существование такого решения гарантируется леммой **??**, доказанной ниже. Второй корректор $\tilde{G}(z,s,u)$ является стационарным решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial s}\tilde{G}(z,s,u) + \mathrm{div}\left[a(z,s)\nabla\tilde{G}(z,s,u)\right] = -\tilde{g}(z,s,u), \quad (z,s) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}; \ (46)$$

в котором $u \in \mathbb{R}$ это параметр. Нам также понадобится процесс $\bar{G}(t,u)$, задаваемый формулой

$$\bar{G}(t,u) = \int_0^\infty \mathbf{E}[\bar{g}(s+t,u)|\mathcal{F}_t]ds = \int_t^\infty \mathbf{E}[\bar{g}(s,u)|\mathcal{F}_t]ds, \qquad (47)$$

при всех $t \geq 0$ и $u \in \mathbb{R}$.

Теорема 10 *Пусть* $\alpha = 2$. *Тогда при выполнении условий* **(A1)**–**(A6)** *решение* $\{u^\varepsilon\}$ *задачи (43) сходится по распределению при* $\varepsilon \to 0$ *в пространстве* V_T, *к единственному решению мартингальной проблемы с оператором сноса* $\hat{A}(u(t))$ *и ковариационным оператором* $R(u(t))$, *где*

$$\hat{A}(u) := \mathrm{div}(\bar{\mathbf{a}}\nabla u) - \mathrm{div}\mathbf{F}(u) + \mathbf{H}(u), \qquad (48)$$

$$\bar{\mathbf{a}} := \mathbf{E}\int_{\mathbf{T^n}} a(z,s)(I + \nabla_z\chi(z,s))dz,$$

$$\mathbf{F}(u) := \mathbf{E}\int_{\mathbf{T^n}} \Big(a(z,s)\nabla_z\tilde{G}(z,s,u) + g(z,s,u)\chi(z,s)\Big)\, dz,$$

$$\mathbf{H}(u) := \mathbf{E}\int_{\mathbf{T^n}} \Big(g(z,s,u)(\tilde{G}'_u(z,s,u) + \bar{G}'_u(s,u)) + h(z,s,u)\Big)\, dz,$$

и

$$\begin{aligned}(R(u)\varphi,\varphi) \ &:= \ 2\mathbf{E}[(\bar{G}(s,u(\cdot))\varphi)(\bar{g}(s,u(\cdot)),\varphi)] \\ &= \ 2\mathbf{E}\int_{R^n}\int_{R^n}(\bar{G}(s,u(x))\varphi(x)\bar{g}(s,u(y))\varphi(y)dxdy.\end{aligned}$$

Замечание 6 *Отметим, что в случае* $\alpha = 2$ *условия* **(A7)** *и* **(A8)** *не накладываются, т.е. в этом случае гладкость коэффициентов не требуется.*

Случай $\alpha < 2$.
Переходим к случаю, когда осцилляция по времени медленнее, чем по пространству.

Теорема 11 *Пусть $\alpha < 2$, и пусть выполнены условия* **(A1)-(A7)**. *Тогда при $\varepsilon \to 0$ решение u^ε задачи (43) сходится по распределению в пространстве $\tilde{V}_T$, к единственному решению мартингальной проблемы с оператором сноса $\tilde{A}(u(s))$ ковариационным оператором $R(u(t))$, где $R(u)$ был определен в предыдущей теореме, и*

$$\tilde{A}(u) := \operatorname{div}(\hat{\mathbf{a}}\nabla u) + \hat{\mathbf{g}}(u),$$

$$\hat{\mathbf{a}} := \mathbf{E}\int_{\mathbf{T^n}} a(z,s)(I + \nabla_z \chi^-(z,s))dz,$$

$$\hat{\mathbf{g}}(u) := \mathbf{E}\int_{\mathbf{T^n}} \left(\bar{G}'_u(s,u)g(z,s,u) + h(z,s,u)\right)dz;$$

здесь через $\chi_i^-(z,s)$, $1 \le i \le n$, обозначено периодическое решение эллиптического уравнения

$$A\chi_i^-(z,s) = -\frac{\partial}{\partial z_k} a_{ki}(z,s),$$

подчиненное условию $\int_{\mathbb{T}^n} \chi^-(z,s)dz = 0$ при всех $s \ge 0$.

Случай $\alpha > 2$.
В предположении, что осцилляции по времени быстрее, чем по пространству справедлив следующий результат.

Теорема 12 *Пусть $\alpha > 2$, и пусть выполняются условия* **(A1)**–**(A.6)** *и* **(A8)**. *Тогда u^ε сходится по вероятности в пространстве $\tilde{V}_T$ к решению задачи Коши*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &=& \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{a}}\nabla u(t,x)) + \tilde{\mathbf{h}}(u); \qquad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n; \\ u^\varepsilon(0,x) &=& u_0(x) \end{cases}$$

где

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{E}\int_{\mathbf{T^n}} a(z,s)(I + \nabla_z \chi^+(z))dz,$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(u) = \mathbf{E}\int_{\mathbf{T^n}} [g(z,t,u)\partial_u \tilde{G}^+(z,u) + h(z,s,u)]dz,$$

а функции $\chi^+(z)$ и $\tilde{G}^+(z,u)$ это периодические решения эллиптических уравнений

$$\bar{A}\chi^+(z) = -\operatorname{div}\bar{a}_i(z),$$

и
$$\bar{A}\tilde{G}^{+}(z,u) = -\overline{(\tilde{g})}(z,u),$$
причем $\bar{A}$ обозначает оператор A с усредненными по времени коэффициентами, т.е.
$$\bar{A}(u)(z) = \mathrm{div}(\bar{a}(\cdot)\nabla u(\cdot))(z),$$
где
$$\bar{a}(z) := \mathbf{E}a(z,s), \qquad \overline{(\tilde{g})}(z,u) := \mathbf{E}\tilde{g}(z,s,u).$$

Основные результаты и выводы.

В диссертации разработаны методы исследования асимптотического поведения решений и усреднения дифференциальных операторов с быстроосциллирующими коэффициентами, которые содержат большой параметр при старших производных. Объяснены границы применимости этих методов, и для широкого класса задач построены усредненные модели и доказаны результаты о сходимости.

При усреднении параболических уравнений типа конвекции диффузии с малым коэффициентом диффузии (либо с большими членами первого порядка) введено понятие двухмасштабной сходимости в движущихся координатах и показано, что сходимость справедлива в асимптотически быстро движущихся координатах.

Для линейных параболических задач, содержащих как большую конвекцию, так и большой потенциал, разработан метод введения движущихся координат, который комбинируется с факторизацией решения. При этом для факторизации используется собственная функция вспомогательной параболической задачи с условием периодичности по всем переменным, включая время. Отметим, что периодическое по времени краевое условие является нестандартным для параболических задач.

Для сингулярно возмущенных параболических задач с быстроосциллирующими коэффициентами, периодическими по пространственным переменным и случайными стационарными по времени, при условии хорошего перемешивания доказывается сходимость решений по распределению к решению стохастического уравнения в частных производных. Это интересный пример того, как стохастическое уравнение в частных производных возникает в результате усреднения уравнений, не содержащих диффузионного члена.

Основные результаты диссертации отражены в следующих опубликованных работах. Из совместных работ используются только те результаты, которые были получены автором диссертации.

1. Piatnitski, A. Homogenization of singularly perturbed operators. Cioranescu, Doina (ed.) et al., *Homogenization and applications to material sciences*. Proceedings of the international conference, Nice, France, June 6–10, 1995. Tokyo: Gakkotosho. GAKUTO Int. Ser., Math. Sci. Appl. **9**, 355–361 (1997).

2. Piatnitski, A.L. Asymptotic behavior of the ground state of singularly perturbed elliptic equations. *Commun. Math. Phys.* **197**(3), 527–551 (1998).

3. Pardoux, E.; Piatnitski, A.L. Averaging of nonlinear random parabolic operators. J.L. Menaldi et al. (Eds.) *Optimal Control and Partial Differential Equations*. IOS Press. 268–276, (2001).

4. Campillo, F.; Kleptsyna, M. ; Piatnitski, A. Homogenization of random parabolic operator with large potential. *Stochastic Processes and their Applications*, **93**, No.1, 57–85, (2001).

5. Kleptsyna, M.; Piatnitski, A. Homogenization of Random Nonstationary Convection-Diffusion Problem. *Multiscale Problems in Science and Technology. Challenges to Mathematical Analysis and Perspectives*. N. Antonic et al. (Eds.), 251–270, Springer, Berlin, New-York, (2002).

6. Campillo, F.; Piatnitski, A. Effective diffusion in vanishing viscosity. *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*. College de France Seminar, Volume XIV. D. Cioranescu, J.-L. Lions (Eds.), Studies in Mathematics and its Applications, **31**, 133–145, Elsevier, North-Holland, (2002).

7. Клепцына, М.Л.; Пятницкий, А.Л. Усреднение случайной нестационарной задачи конвекции-диффузии. *УМН*, **57**, No.4, 95–118, (2002).

8. Allaire, G.; Piatnitski, A. Uniform spectral asymptotics for singularly perturbed locally periodic operators. *Communications in Partial Differential Equations*, **27**, No.3&4, 705–725, (2002).

9. Pardoux, E.; Piatnitski A. Homogenization of a nonlinear random parabolic partial differential equation. *Stochastic Processes and their Applications*, **104**, No.1, 1–27, (2003).

10. Bourgeat, A.; Jurak, M.; Piatnitski A. L. Averaging a transport equation with small diffusion and oscillating velocity. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **26**(2), 95–117, (2003)

11. Allaire, G.; Capdeboscq, Y.; Piatnitski, A. Siess, V.; Vannitathan, M. Homogenization of Periodic Systems with Large Potentials, *Arch. Rational Mech. Anal.* **174**, 179–220, (2004).

12. Marusic-Paloka, E.; Piatnitski, A. Homogenization of a nonlinear convection-diffusion equation with rapidly oscillating coefficients and strong convection. *Journal of London Math. Soc.* **72**, No.2, 391–409 (2005).

13. Donato, P.; Piatnitski, A. Averaging of nonstationary parabolic operators with large lower order terms. (English). Damlamian, A. et al. (Eds.) *Multi scale problems and asymptotic analysis.* The proceedings of Midnight Sun Narvik Conference, Tokyo: Gakkotosho. GAKUTO Int. Ser., Math. Sci. Appl. **24**, 153–166 (2005).

14. Diop, M. ; Iftimie, B.; Pardoux, E.; Piatnitski, A. Singular homogenization with stationary in time and periodic in space coefficients. *Journal of Functional Analysis*, **231**, No.1, 1–46 (2006).

15. Piatnitski, A.L. ; Homogenization of random nonstationary parabolic operators. *Topics on Concentration Phenomena and Problems with Multiple Scales*, A. Braides and V.Chiado Piat (Eds.) Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, **2**, 209–232 (2006).

16. Iftimie, B. ; Pardoux, E. ; Piatnitski, A.L. ; Homogenization of a singular random one-dimensional PDE. *AIHP, Prob & Stat.* **44**(3), 519–543 (2008).

17. Allaire, G.; Mikelic, A.; Piatnitski, A.; Homogenization Approach to the dispersion theory for reactive transport through porous media. *SIAM J. Math. Analysis*, **42** (1), 125–144 (2010).

18. Allaire, G.; Brizzi, R.; Mikelic, A.; Piatnitski, A.; Two-scale expansion with drift approach to the Taylor dispersion for reactive transport through porous media. *Chemical Engineering Science*, **65**, 2292–2300 (2010).

19. Allaire, G.; Piatnitski, A.; Homogenization of nonlinear reaction-diffusion equation with a large reaction term. *Ann. Univ. Ferrara*, **56** (1), 141–161 (2010).

20. Allaire, G; Pankratova, I.; Piatnitski, A. Homogenization and concentration for a diffusion equation with large convection in a bounded domain. *J. Func. Analysis*; **262**(1), 300–330 (2012).

21. Allaire, G; Pankratova, I.; Piatnitski, A. Homogenization of a nonstationary convection-diffusion equation in a thin rod and in a layer. *SeMA Journal*, **58**, 53–95 (2012).

22. Pardoux, E.; Piatnitski, A. Homogenization of a singular random one-dimensional PDE with time-varying coefficients. *Annals of Prob.*; **40**(3), 1316–1356 (2012).

Список литературы

[1] Марченко, В.А.; Хруслов Е.Я. *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей*, "Наукова думка" , Киев. 1974.

[2] Spagnolo, S. Sulla convergenza delle soluzioni di equazioni parabolich ed ellitiche, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **22**, 571–597, (1968).

[3] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов.* Москва, Наука, 1984.

[4] Jikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A., *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer, Berlin, 1994.

[5] Бахвалов Н.С., Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами, *ДАН СССР*, **221**, № 3, (1975).

[6] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis of Periodic Structures*, North - Holland, Amsterdam, 1978.

[7] F. Murat, Compacite per compensation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Math.*, **5**, 489–507, (1978).

[8] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations, in *Nonlinear Analysis and Mechanics*, Heriott-Watt Symposium, Vol. **4**, ed. R. J. Knopps, Research Notes in Mathematics, Vol. **39**, Pittman Press, 1979. pp. 136–211.

[9] В. В. Жиков, Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости, *Матем. сб.*, **187**(8), (1996), 3–40.

[10] Nguetseng G., A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.*, **20** (1989), 608-623.

[11] G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence,* SIAM J. Math. Anal. 23, 6, pp.1482-1518 (1992).

[12] G. Dal Maso, *An Introduction to* Γ*-convergence*, Springer, 1993.

[13] A. Braides and A. Defranceschi, *Homogenization of Multiple Integrals*, Oxford University Press, 1998.

[14] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *УМН*, **12**(5), 3–122, (1957).

[15] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.* Москва, Наука, 1979.

[16] С. М. Козлов, Осреднение случайных операторов, *Матем. сб.*, **109**(2), 188–202 , (1979).

[17] G.C. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan. Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients. *In Random fields*, Vol. I, II (Esztergom, 1979), Vol. **27** of Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, pages 835–873. North-Holland, Amsterdam, 1981.

[18] В. В. Жиков, О стабилизации решений параболических уравнений, *Матем. сб.*, **104**(4), 597–616, (1977).

[19] В. В. Жиков, Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения второго порядка с младшими членами, *Тр. ММО*, **46**, Издательство Московского университета, 69–98, 1983.

[20] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, Об операторных оценках в теории усреднения, *УМН*, **71**(3), 27–122, (2016).