На правах рукописи

Ларина Яна Юрьевна

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Специальность: 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владимир — 2017

Работа выполнена на кафедре математического анализа Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Научный руководитель: Родина Людмила Ивановна
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры функционального анализа
и его приложений ВлГУ

Официальные оппоненты: Бортаковский Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Математическая
кибернетика» МАИ

Глызин Сергей Дмитриевич
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой компьютерных
сетей ЯрГУ им. П.Г. Демидова

Ведущая организация: Воронежский государственный педагогический
университет, г. Воронеж.

Защита состоится 23 марта 2018 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете по адресу 600024, г. Владимир, проспект Строителей 11, ауд. 136, факс (4922) 53-25-75, 33-13-91; e-mail: oid@vlsu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета и на сайте http://diss.vlsu.ru

Автореферат разослан «....» февраля 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08 Наумова С. Б.

Актуальность темы. Одной из важнейших задач математической теории управления является задача исследования инвариантности, устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости множеств относительно различных управляемых систем и дифференциальных включений. Данной тематике посвящены работы Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, Ж. П. Обена, Е. А. Панасенко, Л. И. Родиной, А. И. Субботина, Е. Л. Тонкова, В. Н. Ушакова, Т. Ф. Филипповой, П. Хартмана и многих других авторов.

В последние годы появились работы, связанные с исследованием множеств, которые немного отличаются от инвариантных или слабо инвариантных (см. работы В. Н. Ушакова[1] и его учеников), а именно — рассматривается инфинитезимальное представление свойства инвариантности и вычисляется дефект инвариантности, который оценивает степень несогласованности множества и динамики системы с точки зрения понятия инвариантности. В работах Л. И. Родиной и Е. Л. Тонкова[2] также исследуются множества, не являющиеся инвариантными в «классическом» смысле; для таких множеств вводится естественное расширение понятия инвариантности, которое названо статистической инвариантностью. Пусть $D(t,X)$ — множество достижимости управляемой системы

$$\dot{x}=f(t,x,u), \quad (t,x,u)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \tag{1}$$

в момент времени t из начального множества X. Множество

$$\mathfrak{M}=\big\{(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n : x\in M(t)\big\}$$

называется *статистически инвариантным* относительно системы (1), если относительная частота пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ равна единице.

В диссертации изучены статистически инвариантные, статистически слабо инвариантные множества и статистические характеристики множества достижимости управляемой системы (1), а также управляемых систем

---

[1] Ушаков В.Н., Зимовец А.А. Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 98–111.

Ушаков В.Н., Котельникова А.Н., Малёв А.Г. Об оценке дефекта слабой инвариантности множеств с кусочно-гладкой границей // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 250–266.

[2] Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.

Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.

с импульсным воздействием. Исследуются такие характеристики, как верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости системы заданным множеством $\mathfrak{M}$:

$$\operatorname{freq}^*(X) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta - t_0},$$
$$\operatorname{freq}_*(X) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta - t_0},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если $\operatorname{freq}_*(X) = \operatorname{freq}^*(X)$, то общий предел

$$\operatorname{freq}(X) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]: D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta - t_0}$$

называется *относительной частотой поглощения множества достижимости* системы (1) множеством $\mathfrak{M}$.

Для систем с импульсным воздействием вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений и систем исследовались в работах О.В. Анашкина, Д.Д. Баинова, Р.И. Гладилиной, Т.В. Довжик, А.О. Игнатьева, О.В. Митько, А.Д. Мышкиса, Н.А. Перестюка, В.И. Плотникова, А.М. Самойленко, Н.В. Скрипник, О.С. Черниковой. Отметим также, что системам с импульсным воздействием посвящены работы А.В. Арутюнова, В.И. Гурмана, В.А. Дыхты, С.Т. Завалищина, Д.Ю. Карамзина, Б.М. Миллера, Ф.Л. Перейра, И.В. Расиной, Е.Я. Рубиновича, О.Н. Самсонюк, А.Н. Сесекина и многих других.

В диссертации рассматриваются управляемые системы с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,u), \quad t\neq\tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= g(x,w_i), \quad (t,x,u,w_i)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^p, \end{aligned} \tag{2}$$

где векторы w_i, $i=1,2,\ldots$, являются управляющими воздействиями, влияющими на поведение системы в моменты времени $t=\tau_i$ и принимают значения в заданном компактном множестве $W\subset\mathbb{R}^p$.

Получены условия положительной инвариантности заданного множества $\mathfrak{M}$ относительно управляемой системы (2), условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости, выраженные в терминах функций А.М. Ляпунова и производной Ф. Кларка. Доказаны утверждения о слабой положительной инвариантности и получены условия слабой асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$. Отметим, что в этой работе рассматривается функция Ляпунова относительно заданного множества и ее определение отличается от общепринятых.

Также в работе доказаны теоремы сравнения для решений систем и уравнений с импульсным воздействием, в которых приведены условия существования инвариантных и устойчивых множеств. Получены оценки статистических характеристик решений систем и уравнений с импульсами.

Результаты работы проиллюстрированы на различных моделях математической биологии, таких как модель конкуренции двух видов и модель о динамике численности популяции вредителей при наличии биологического контроля.

Цель работы. Целью диссертации является изучение положительно инвариантных, устойчивых по Ляпунову, асимптотически устойчивых и статистически инвариантных множеств относительно управляемой системы с импульсным воздействием (2); оценка статистических характеристик решений систем и уравнений с импульсным воздействием; исследование статистических характеристик, возникающих в различных прикладных задачах.

Методы исследований. Работа опирается на методы качественной теории дифференциальных уравнений, математической теории управления, теории динамических систем и эргодической теории. Также применяются численные методы программного пакета Mathematica версии 11.0.1.

Научная новизна. Все полученные в работе результаты являются новыми. Основные результаты состоят в следующем:

1) получены условия существования статистически слабо инвариантного множества относительно управляемой системы (1), исследованы свойства статистических характеристик непрерывных функций;

2) получены условия существования положительно инвариантного, устойчивого по Ляпунову и асимптотически устойчивого множеств относительно управляемой системы с импульсным воздействием (2);

3) получены условия существования слабо положительно инвариантного, слабо устойчивого по Ляпунову и слабо асимптотически устойчивого множеств относительно управляемой системы (2);

4) получены теоремы сравнения для решений систем и уравнений с импульсным воздействием, а также теоремы сравнения для статистических характеристик функций, являющихся решениями системы и уравнения с импульсным воздействием соответственно;

5) для модели конкуренции двух видов и модели изменения численности популяции вредителей в условиях биологического контроля получены условия существования асимпотически устойчивых множеств с использованием

аналитических и численных методов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Все основные утверждения в ней сформулированы в виде теорем и сопровождаются строгими доказательствами. Результаты работы и примененные методы могут быть использованы при проведении исследований по математической теории управления в Институте математики и механики УрО РАН, в Институте динамики систем и теории управления СО РАН, в Московском, Владимирском, Воронежском, Пермском, Белорусском, Удмуртском и Ярославском государственных университетах, а также при чтении специальных курсов для студентов и магистров математических и естественно-научных специальностей Удмуртского госуниверситета.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на многочисленных научных семинарах и международных конференциях, среди которых:

1) международная конференция «Современные методы прикладной математики, теория управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013)» (Воронеж, 2013);

2) международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и её приложений» (Екатеринбург, 2014);

3) международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2014, 2016);

4) международная конференция «Динамика систем и процессы управления» (Екатеринбург, 2014);

5) всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2015);

6) международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2015);

7) международный симпозиум «Дифференциальные уравнения - 2016» в рамках форума «Математика и глобальные вызовы XXI века» (Пермь, 2016);

8) Ижевский городской семинар по дифференциальным уравнениям и теории управления (УдГУ, Ижевск, 2012–2017);

9) Семинар "Нелинейный анализ и его приложения"(ВлГУ, Владимир, 2017).

Личный вклад автора. Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 17 печатных изданиях [1–17]. Статьи [1–5] входят в перечень реферируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций, статьи [3–5] входят в системы цитирования Scopus.

В совместных работах из реферируемых изданий автору принадлежат следующие результаты:

Работа 1: доказательство основной теоремы 1 и исследование примера 1.

Работа 4: доказательство теорем 2 и 3 и исследование модели биологического контроля популяции.

Работа 5: доказательство теоремы 2 и исследование статистически слабо инвариантных множеств управляемых систем.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, 8 параграфов (нумерация параграфов сквозная), заключения и списка литературы. Полный объем диссертации 106 страниц текста с 6 рисунками. Список литературы содержит 70 наименований, включая работы автора.

Краткое изложение содержания работы

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, дается общая характеристика рассматриваемого в диссертации круга вопросов, приведен краткий обзор работ предшественников по данной проблеме, определена цель работы и сформулированы основные полученные результаты.

В **первой главе** исследуются статистические характеристики для непрерывных функций такие как верхняя и нижняя относительные частоты попадания графика функции в заданное множество и статистически слабо инвариантные множества управляемой системы (1). Предполагаем, что функция $f(t,x,u)$ непрерывна, управление u содержится в компактном множестве $U(t,x) \subset \mathbb{R}^m$ и функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Верхнюю относительную частоту попадания ее графика в множество $\mathfrak{M}$ определим равенством

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [t_0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta - t_0} \tag{3}$$

Нижнюю относительную частоту $\operatorname{freq}_*(\varphi)$ определим тем же равенством, но с заменой в нем верхнего предела нижним, а если эти пределы совпадают $\operatorname{freq}^*(\varphi) = \operatorname{freq}_*(\varphi)$, то общий предел обозначим

$$\operatorname{freq}(\varphi) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [t_0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta - t_0} \tag{4}$$

и назовем *относительной частотой попадания графика функции* φ в множество $\mathfrak{M}$.

Рассматривается множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\},$$

заданное функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа; предполагаем, что для каждого $t \in [t_0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно.

В первом параграфе приведены основные определения и свойства характеристик (3), (4). Обозначим через ∂M границу множества M, через $\mathrm{int} M$ — внутренность данного множества, $\varrho(x,M) \doteq \inf\limits_{y\in M}|x-y|$ — расстояние от точки x до множества M. Рассмотрим функцию

$$R_\varphi(t) = \begin{cases} \varrho\big(\varphi(t), \partial M(t)\big), & \text{если} \quad \varphi(t) \notin M(t), \\ -\varrho\big(\varphi(t), \partial M(t)\big), & \text{если} \quad \varphi(t) \in M(t). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — сигма-алгебра всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Определим для каждого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ функции

$$\mu^*(B) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [t_0,\vartheta] : R_\varphi(t) \in B\}}{\vartheta - t_0},$$

$$\mu_*(B) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [t_0,\vartheta] : R_\varphi(t) \in B\}}{\vartheta - t_0}.$$

Теорема 1 ([5],[15]). *Пусть функции* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *и множество* $\mathfrak{M}$ *таковы, что* $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\psi(t)| = 0$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \mu^*\left([-\varepsilon,\varepsilon]\right) \doteq \lim_{\varepsilon\to 0+0} \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [t_0,\vartheta] : |R_\varphi(t)| \leqslant \varepsilon\}}{\vartheta - t_0} = 0. \qquad (5)$$

Тогда $\mathrm{freq}_*(\varphi) = \mathrm{freq}_*(\psi) \leqslant \mathrm{freq}^*(\psi) = \mathrm{freq}^*(\varphi)$.

Следовательно, если один из пределов $\mathrm{freq}(\varphi)$ *или* $\mathrm{freq}(\psi)$ *существует, то другой предел также существует и* $\mathrm{freq}(\varphi) = \mathrm{freq}(\psi)$.

Приведены примеры вычисления статистических характеристик при помощи теоремы 1.

В первом параграфе также получено условие существования статистически слабо инвариантного множества управляемой системы (1).

Допустимым процессом управляемой системы (1) назовем функцию

$$t \mapsto (u(t), x(t)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) управление $u(t)$ определено на $I = [t_0, +\infty)$, ограничено и измеримо по Лебегу;

2) решение $x(t)$ в смысле Каратеодори системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t, x, u(t))$, определено для всех $t \in I$;

3) имеет место включение $u(t) \in U(t, x(t))$.

Отвечающее допустимому процессу $(u(t), x(t))$ управление $u(t)$ называется *допустимым управлением* системы (1).

Поставим в соответсвие управляемой системе (1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad F(t, x) = \overline{\text{co}}\, H(t, x), \tag{6}$$

где $H(t, x)$ представляет собой множество всех предельных значений функции $f\big(t_i, x_i, U(t_i, x_i)\big)$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$, $\overline{\text{co}}\, H(t, x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(t, x)$, то есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее множество $H(t, x)$.

Множество $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$ называется *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (1), если для любой точки $x \in M(t_0)$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t)$ включения (6), определенное при всех $t \geqslant t_0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x$ и равенству $\text{freq}^*(\varphi) = 1$.

Теорема 2 ([5],[15]). *Пусть для любой точки $x \in M(t_0)$ существует решение $\psi(t)$ включения* (6), *удовлетворяющее начальному условию $\psi(t_0) = x$ и равенству $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$, где $\varphi(t)$ — решение данного включения, для которого*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \mu^*\big((-\infty, -\varepsilon)\big) \doteq \lim_{\varepsilon \to 0+0} \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\text{mes}\,\{t \in [t_0, \vartheta] : R_\varphi(t) \leqslant -\varepsilon\}}{\vartheta - t_0} = 1.$$

Тогда множество $\mathfrak{M}$ статистически слабо инвариантно относительно системы (1).

Во втором параграфе получены формулы для нахождения среднего значения и характеристики

$$\widetilde{\varkappa} = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\text{mes}\{t \in [t_0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta - t_0}$$

для почти периодических в смысле Бора функций $z(t)$, которые зависят от конечного числа периодических функций. Приведем основные утверждения.

Теорема 3 ([5]). *Пусть $z(t) = F\big(z_1(t), \dots, z_k(t)\big)$, функции $z_i(t)$ — периодические с периодами T_i, $i = 1, \dots, k$, функция $F\big(z_1(x_1), \dots, z_k(x_k)\big)$ интегрируема по Риману на множестве $[0, T_1] \times \ldots \times [0, T_k]$. Если числа $T_1, \dots, T_k$ рационально независимы, то для среднего значения*

$$\overline{z} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} z(t) dt$$

функции $z(t)$ выполнено равенство

$$\overline{z} = \frac{\displaystyle\int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_k} F\big(z_1(x_1), \dots, z_k(x_k)\big) dx_1 \dots dx_k}{T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_k}.$$

Следствие 1 ([5]). *Пусть $z(t) = H\big(z_1(t), \dots, z_k(t)\big)$, функции $z_i(t)$ — периодические с периодами T_i, $i = 1, \dots, k$, функция $H\big(z_1(x_1), \dots, z_k(x_k)\big)$ интегрируема по Риману на множестве $[0, T_1] \times \dots \times [0, T_k]$. Если числа $T_1, \dots, T_k$ рационально независимы, то имеет место равенство*

$$\widetilde{\varkappa} = \frac{\operatorname{mes}\big\{x_1 \in [0, T_1], \dots, x_k \in [0, T_k] : \, H\big(z_1(x_1), \dots, z_k(x_k)\big) \leqslant 0\big\}}{T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_k},$$

где mes *— k-мерная мера Лебега.*

В третьем параграфе изучаются статистические характеристики, возникающие в различных прикладных задачах естествознания. Для любого $c \in \mathbb{R}$ вводится характеристика

$$\varkappa_c \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [t_0, \vartheta] : z(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta - t_0}.$$

Рассматривается следующая задача. Пусть задано число $\lambda_0 \in [0, 1]$ и функция $z(t)$ является размером популяции (или концентрацией веществ, или объемом производства). Необходимо найти значение $c = c\,(\lambda_0)$ такое, что величина $z(t)$ не превышает $c\,(\lambda_0)$ с относительной частотой, равной λ_0.

Также в третьем параграфе вычисляются статистические характеристики $\varkappa_c$ и $\widetilde{\varkappa}_c$ для решения уравнения Ферхюльста:

$$\dot{z} = \big(\varepsilon(t) - \alpha(t) z\big) z,$$

где в правой части $\varepsilon(t)$ — удельная (средняя) скорость рождаемости, а $\alpha(t) z$ — удельная (средняя) смертность, которая пропорциональна размеру популяции. Предполагаем, что функции $\varepsilon(t)$ и $\alpha(t)$ положительные и почти периодические в смысле Бора.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости, слабой устойчивости и слабой асимптотической устойчивости множеств относительно управляемых систем с импульсным воздействием (2).

Пусть $M^r(t)$ — замкнутая r-окрестность множества $M(t)$, то есть множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что $\varrho(x, M(t)) \leqslant r$, $N^r(t) = M^r(t) \backslash M(t)$ — внешняя r-окрестность границы множества $M(t)$. Построим множества

$$\mathfrak{M}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M^r(t)\big\},$$

$$\mathfrak{N}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(t)\big\}.$$

Скалярная функция $V(t, x)$ переменных $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет условию Липшица по переменным (t, x) и следующим условиям:

1) $V(t, x) = 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}$;

2) $V(t, x) > 0$ для некоторого $r > 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$.

Функция $V(t, x)$ называется *определенно положительной* (относительно множества $\mathfrak{M}$), если для каждого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(t, x) \geqslant \delta$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}^r \setminus \mathfrak{M}^\varepsilon$.

Для липшицевой функции $V(t, x)$ *обобщенной производной*[3] в точке $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q = (1, p)$, $p \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка) называется следующий предел

$$V^o(t, x; p) \doteq \limsup_{(\vartheta, y, \varepsilon) \to (t, x, +0)} \frac{V(\vartheta + \varepsilon, y + \varepsilon p) - V(\vartheta, y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(t, x) \doteq \inf\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; p)$, $V^o_{\max}(t, x) \doteq \sup\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; p)$ называются *нижней и верхней производной* функции V в силу включения (6).

В четвертом параграфе получены условия положительной инвариантности, устойчивости по Ляпунову, а также асимптотической устойчивости множеств относительно управляемой системы (2).

Условие 1. Для любого $x_0 \in M^r(t_0)$ каждое решение $\varphi(t, x_0)$ включения (6), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0, x_0) = x_0$, определено при всех $t \geqslant t_0$.

Теорема 4 ([2]). *Пусть выполнено условие 1 и существует функция $V(t, x)$ — определенно положительная функция Ляпунова относительно*

[3] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.

множества $\mathfrak{M}$ *такая, что неравенство* $V^o_{\max}(t,x) \leqslant 0$ *выполнено для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ *и*

$$\max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x,w)) - V(\tau_i, x) \leqslant -\psi\big(V(\tau_i,x)\big)$$
$$\text{для всех } x \in N^r(\tau_i), i = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi(s)$ *— непрерывная при* $s \geqslant 0$ *функция такая, что* $\psi(0) = 0$ *и* $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$. *Тогда множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно системы* (2).

Теорема 5 ([4]). *Пусть существуют функции* $V(t,x)$ *и* $q(t,z)$ *такие, что:*

1) $V(t,x)$ *— определенно положительная функция Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$;

2) *функция* $q(t,z)$ *локально липшицева по* z, $q(t,0) \equiv 0$ *и тривиальное решение уравнения* $\dot z = q(t,z)$ *асимптотически устойчиво (в классическом смысле)*;

3) $V^o_{\max}(t,x) \leqslant q\big(t, V(t,x)\big)$ *для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$;

4) $\max\limits_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x,w)) \leqslant V(\tau_i, x)$ *для всех* $x \in M^r(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Тогда множество $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво относительно управляемой системы* (2).

Теорема 6 ([4]). *Предположим, что существуют* $\alpha < 0$ *и функция Ляпунова* $V(t,x)$ *относительно множества* $\mathfrak{M}$ *такая, что неравенство* $V^o_{\max}(t,x) \leqslant \alpha < 0$ *выполнено для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ *и*

$$\max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x,w)) \leqslant V(\tau_i, x) \quad \text{для всех } x \in M^r(\tau_i),\ i = 1, 2, \ldots.$$

Тогда для каждого решения $x(t,x_0)$ *системы* (2), *удовлетворяющего начальному условию* $x_0 \in N^r(t_0)$, *существует момент времени* $t^* = t^*(x(t,x_0)) > t_0$ *такой, что точка* $(t, x(t,x_0))$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}$ *при всех* $t \in [t^*, +\infty)$.

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ *определенно положительная, то множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво относительно управляемой системы* (2).

В пятом параграфе приведены условия слабой положительной инвариантности, слабой устойчивочти по Ляпунову и слабой асимптотической устойчивости множеств относительно управляемой системы (2).

Теорема 7 ([3]). *Пусть выполнено условие 1 и существует функция* $V(t,x)$ *— определенно положительная функция Ляпунова относительно* *множества* $\mathfrak{M}$ *такая, что для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ *выполнено неравенство* $V^o_{\min}(t,x) \leqslant 0$ *и найдутся такие* $\widehat{w}_i \in W$, *что*

$$V(\tau_i, x+g(x,\widehat{w}_i)) - V(\tau_i,x) \leqslant -\psi\big(V(\tau_i,x)\big)$$
$$\text{для всех } x \in N^r(\tau_i), i = 1,2,\ldots,$$

где $\psi(s)$ *— непрерывная при* $s \geqslant 0$ *функция такая, что* $\psi(0)=0$ *и* $\psi(s)>0$ *при* $s>0$. *Также предполагаем, что если* $x \in M(\tau_i)$, *то* $x+g(x,\widehat{w}_i) \in M(\tau_i)$. *Тогда множество* $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно системы* (2).

Теорема 8 ([4]). *Пусть существуют функции* $V(t,x)$ *и* $q(t,z)$ *такие, что:*

1) $V(t,x)$ *— определенно положительная функция Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$;

2) *функция* $q(t,z)$ *локально липшицева по* z, $q(t,0) \equiv 0$ *и тривиальное решение уравнения* $\dot{z} = q(t,z)$ *асимптотически устойчиво (в классическом смысле);*

3) $V^o_{\min}(t,x) \leqslant q\big(t, V(t,x)\big)$ *для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$;

4) *найдутся такие* $\widehat{w}_i \in W$, *что* $V(\tau_i, x+g(x,\widehat{w}_i)) \leqslant V(\tau_i,x)$ *для всех* $x \in M^r(\tau_i)$, $i=1,2,\ldots$.

Тогда множество $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно системы* (2).

Теорема 9 ([4]). *Предположим, что существуют* $\alpha < 0$ *и функция Ляпунова* $V(t,x)$ *относительно множества* $\mathfrak{M}$ *такая, что неравенство* $V^o_{\min}(t,x) \leqslant \alpha < 0$ *выполнено для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ *и найдутся такие* $\widehat{w}_i \in W$, *что*

$$V(\tau_i, x+g(x,\widehat{w}_i)) \leqslant V(\tau_i,x) \quad \text{для всех } x \in M^r(\tau_i),\ i=1,2,\ldots.$$

Тогда для каждой начальной точки $x_0 \in N^r(t_0)$ *существует решение* $x(t,x_0)$ *системы* (2), *для которого найдется момент времени* $t^* = t^*(x(t,x_0)) > t_0$ *такой, что точка* $(t, x(t,x_0))$ *принадлежит* $\mathfrak{M}$ *при всех* $t \in [t^*, +\infty)$.

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ *определенно положительная, то множество* $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно управляемой системы* (2).

Шестой парагаф посвящен практическому применению результатов предыдущих параграфов. Рассматривается модель конкуренции двух видов и модель изменения численности популяции вредителей в условиях биологического контроля. Используются аналитические методы, при невозможности получения результата таким способом применяются численные методы пакета Mathematica версии 11.0.1.

В **третьей главе** получены теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием, а также изучаются статистические характеристики данных систем. В седьмом параграфе получены аналоги теоремы Ла Салля[4] для управляемых систем с импульсным воздействием (2). Отметим, что для систем без импульсов $\dot{x} = f(t, x, u)$ подобные утверждения доказаны в работах Панасенко Е.А., Тонкова Е.Л.[5] и Родиной Л.И.[6].

Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\dot{z} = q(t, z), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z|_{t=\tau_i} = l(z), \quad (t, z) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}, \tag{7}$$

где функция $q(t, z)$ локально липшицева по z, а функция $l(z)$ непрерывна. Введем в рассмотрение функцию $L(z) = l(z) + z$ в предположении, что $L(z)$ неубывающая для всех $z \in \mathbb{R}$.

Теорема 10 ([2]). *Пусть выполнено условие* 1 *и существуют функции* $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ *такие, что* $V(t, x)$ *является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и для всех* $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ *выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(t, x) \leqslant q(t, V(t, x)),$$
$$\max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Тогда, если для решения $z(t)$ *уравнения* (7) *с начальным условием* $z(t_0) = \max\limits_{x_0 \in N^r(t_0)} V(t_0, x_0)$ *выполнено равенство* $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = 0$, *то множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно управляемой системы* (2).

Теорема 11 ([3]). *Пусть существуют функции* $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ *такие, что* $V(t, x)$ *является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$, *для всех* $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ *выполнено неравенство* $V^o_{\min}(t, x) \leqslant q(t, V(t, x))$ *и найдутся такие* $\widehat{w}_i \in W$, *что*

$$V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w}_i)) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right) \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots.$$

[4]Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

[5]Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.

[6]Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем// Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.

Тогда, если для решения $z(t)$ уравнения (7) *с начальным условием* $z(t_0) = \max\limits_{x_0 \in N^r(t_0)} V(t_0, x_0)$ *выполнено равенство* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$, *то множество* $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно системы* (2).

В восьмом параграфе получены оценки статистических характеристик управляемых систем с импульсным воздействием.

Пусть $\text{freq}^*(x)$ и $\text{freq}_*(x)$ — *верхняя и нижняя относительные частоты* попадания решения $x(t, x_0)$ системы (2) в множество $\mathfrak{M}$ (см. равенства (3) и (4)). Также рассмотрим характеристики

$$\varkappa^* \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\text{mes}\{t \in [t_0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta - t_0}, \quad \varkappa_* \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\text{mes}\{t \in [t_0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta - t_0}.$$

Теорема 12 ([5], [10]). *Предположим, что существуют функции* $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ *такие, что* $V(t, x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и для всех* $(t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ *выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(t, x) \leqslant q(t, V(t, x)),$$
$$\max_{w\in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Пусть $z(t)$ — *решение уравнения* (7), *удовлетворяющее начальному условию* $z(t_0) = V(t_0, x_0)$. *Тогда для любого решения* $x(t, x_0)$ *системы* (2) *такого, что* $x(t_0, x_0) = x_0$, *имеют место неравенства*

$$\text{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*, \quad \text{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*. \tag{8}$$

Также получены условия, при которых неравенства (8) выполнены только для некоторого решения $x(t, x_0)$ системы (2).

Заключение диссертации подводит итог проделанной работы.

Автор диссертации выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Л. И. Родиной за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

А) Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Статистические характеристики управляемых систем, возникающие в различных моделях естествознания // Моделирование и анализ информационных систем, 2013. Т. 20, № 5. С. 62–77.

2. Ларина Я.Ю. Функции Ляпунова и теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2015. Т.25. Вып. 1. С. 51–59.

3. Ларина Я.Ю. О слабой асимпотической устойчивости управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2016. Т.26. Вып. 1. С. 68–78.

4. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Асимптотически устойчивые множества управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 490–502.

5. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Статистические характеристики непрерывных функций и статистически слабо инвариантные множества управляемой системы // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 2. С. 34-43. English translation: Larina Ya.Yu., Rodina L.I. Statistical characteristics of continuous functions and statistically weakly invariant sets of controllable system // Russian Mathematics. 2017. vol. 61, No. 2. P. 28-35.

Б) Другие публикации

6. Ларина Я.Ю. Условия статистической инвариантности для управляемых систем с периодическими коэффицентами // Современные методы прикладной математики, теория управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013): сб. тр. 6 Междунар. конф., г. Воронеж. 10-16 сент. 2013 г. Воронеж: Издат.-полиграф. центр Воронеж. гос. ун-та, 2013. С. 136–138.

7. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. О существовании статистически слабо инвариантных множеств управляемых систем // Динамика систем и процессы управления: труды Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Красовского, Екатеринбург, Россия, 15-20 сент. 2014 г. Ин-т математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. С. 236–242.

8. Ларина Я.Ю. Статистические характеристики систем с почти периодическими коэффициентами // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: сб. науч. тр. по материалам

междунар. заоч науч.-практ. конф. Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях: Междунар. открытая конф., 18-19 июня 2014 г. Воронеж: ФГБОУ ВПО «ВГЛТА», 2014. - № 4, ч. 2 (9-2). С. 417–420.

9. Ларина Я.Ю. Статистически инвариантные множества для периодических систем // Современные проблемы математики и её приложений: тр. 45-й Междунар. молодеж. шк.-конф., посв. 75-лет. В. И. Бердышева, 2 - 8 февр. 2014 г. Ин-т математики и механики УрО РАН, Урал. фед. ун-т, Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УрФУ, 2014. С. 81–83.

10. Ларина Я.Ю. Об асимптотическом поведении решений управляемых систем с импульсным воздействием // Теория управления и математическое моделирование: тезисы докладов Всерос. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 9-11 июня 2015 г. М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО «УдГУ», Ижевск: Удмуртский университет, 2015. С. 180–182.

11. Ларина Я.Ю. Статистические характеристики управляемых систем с импульсным воздействием // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2015. Вып. 2 (46). С. 99–105.

12. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. О статистически слабой инвариантности множеств относительно управляемых систем // Теория управления и математическое моделирование: тезисы докладов Всерос. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 9-11 июня 2015 г. М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО «УдГУ», Ижевск: Удмуртский университет, 2015. С. 182–184.

13. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. О расширении понятия инвариантности множеств относительно управляемых систем // Международная конференция по математической теории управления и механике: тез. докл.: Суздаль, 3-7 июля 2015 г. Суздаль, 2015. С. 83–85.

14. Ларина Я.Ю. Слабо асимптотически устойчивые множества относительно управляемых систем с импульсным воздействием // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тез. докл.: Суздаль, 8-12 июля 2016 г. Суздаль, 2016. С. 118–119.

15. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Об оценках относительных частот и статистически слабо инвариантных множествах управляемых систем // Материалы симпозиума «Дифференциальные уравнения – 2016», проводимого в рамках форума «Математика и глобальные вызовы XXI века» и посвященного столетию Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, 16-21 мая 2016 г. Пермь, 2016. С. 55–57.

16. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Расширение понятия инвариантности и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2017. Вып. 132. С. 57—60.

17. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Об асимптотической устойчивости множеств относительно управляемых систем // Тезисы докладов XVII международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2017», 16-20 мая 2017 года, Минск, 2017. С. 81.

Подписано в печать .... 2017 г.
Тираж 100 экземпляров. Заказ .
Типография Удмуртского Государственного Университета.
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. корп. 4.