

На правах рукописи



Плышевская Светлана Петровна

**СЦЕНАРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ МЕТАУСТОЙЧИВЫХ
СТРУКТУР В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владимир — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова» на кафедре компьютерных сетей факультета информатики и вычислительной техники.

Научный руководитель:

Глызин Сергей Дмитриевич
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой компьютерных сетей
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова»

Официальные оппоненты:

Лерман Лев Михайлович
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой дифференциальных
уравнений, математического и численного
анализа Института информационных
технологий, математики и механики ФГАОУ
ВО «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
имени Н.И. Лобачевского»

Нефёдов Николай Николаевич
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой математики
физического факультета ФГБОУ ВО
«Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова»

Ведущая организация:

НИЯУ МИФИ


Защита состоится «25» ноября 2019 года в 16 ч 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 230, ВлГУ, Педагогический институт.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета и на сайте <http://diss.vlsu.ru>.

Автореферат разослан «___» _____ 2019 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.025.08,

кандидат физико-математических наук, доцент  Наумова С. Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Среди систем, развивающихся во времени (эволюционных систем), наибольший интерес представляют задачи, обладающие свойством диссипативности. Такие математические модели часто имеют самоподдерживающиеся образования с характерными пространственно-временными структурами. Эти структуры важны в различных прикладных областях, например радиофизики, механики, нелинейной оптики и теории горения. В целом, стационарные пространственно неоднородные структуры, бегущие волны, ротационные волны, движущиеся фронты представляют значительный интерес при исследовании процессов, описываемых нелинейными параболическими уравнениями.

Степень научной разработанности темы. Одним из основных предметов исследования нелинейной динамики являются устойчивые пространственно-временные структуры, которые изучались в работах таких авторов как Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский, А.В. Гапонов–Грехов, А.С. Ломов, Г.В. Осипов, М.И. Рабинович, а также Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов.

Идея сведения изучения решений обыкновенных дифференциальных уравнений к изучению отображений принадлежит А. Пуанкаре. Он же ввел понятие инвариантного многообразия отображения. Основная идея А. Пуанкаре об изучении отображений в теории дифференциальных уравнений использовалась Дж.Д. Биркгофом, который получил ряд фундаментальных результатов в теории динамических систем. А. Пуанкаре доказал существование устойчивых и неустойчивых многообразий для аналитических отображений в окрестности неподвижной точки седлового типа.

В 1934 г. Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов провели качественный анализ колебательных систем второго порядка и, используя результаты А. Пуанкаре и Данжуа по теории динамических систем на торе, установили наличие у этих систем квазипериодических решений и исследовали их устойчивость. В этой монографии Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов¹ заложили основы метода интегральных многообразий. Полное математическое обоснование развитых в асимптотических методов нелинейной механики было осуществлено Н.Н. Боголюбовым в 1945 году. Центральное место в работе Н.Н. Боголюбова занимает проблема обоснования метода усреднения. В так называемой третьей теореме Н.Н. Боголюбова для метода усреднения установлено соответствие между предельным циклом усредненного уравнения и соответствующим ему интегральным многообразием исходного уравнения. Как известно, принцип сведения в теории критических случаев устойчивости был открыт А.М. Ляпуновым. В дальнейшем принцип сведения для устойчивости по Ляпунову был доказан в работе В.А. Плисса. На системы, обладающие многообразием стационарных состояний, принцип сведения был распространен В.В. Стрыгиным и В.А. Соболевым.

¹Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Приложение методов нелинейных механики к теории стационарных колебаний / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. — Киев: Изд-во Всеукр. АН, 1934.

Фундаментальные работы Д. Рюэля (D. Ruelle) и Ф. Такенса (F. Takens) показали, что метод центральных многообразий можно успешно применять в теории бифуркаций Пуанкаре-Андронova-Хопфа. Бифуркация рождения предельного цикла была открыта А.А. Андроновым в 1931 году и активно использовалась при математическом моделировании радиотехнических систем, а также при построении теории колебаний. Анализ этой бифуркации для многомерных динамических систем был проведен З. Хопфом. Метод нормальных форм в окрестности стационарной точки или периодического решения позволяет привести исходное уравнение к более простому виду, в котором содержится основная информация о поведении решения и который часто допускает более полное дальнейшее исследование. Основы теории для обыкновенных дифференциальных уравнений были заложены в работах Пуанкаре. Для исследования локальных бифуркаций принципиальное значение имеют результаты А.Н. Шостайшвили.

В 1976 году была издана книга Дж. Марсдена, М. Мак-Кракена² (J. Marsden, M. McCracken) — фундаментальный труд по теории бифуркаций. Применяемая в ней техника основана на методе инвариантных многообразий. Общая теорема о центральном многообразии для отображений в банаховом пространстве используется в этой монографии для доказательства теоремы о центральном многообразии для полупотоков. Посредством дальнейшего тщательного анализа в работах Е.П. Белана устанавливается применимость этой теоремы для широкого класса параболических уравнений.

В 1981 году была опубликована фундаментальная монография Д. Хенри³ (D. Henry), в которой теоремы об инвариантных многообразиях и центральных многообразиях доказываются непосредственно для широкого класса полулинейных параболических уравнений. Принцип сведения доказан в общем случае. Указан и обоснован метод построения центрального многообразия в виде асимптотически сходящегося степенного ряда. Приводятся на удачно подобранных примерах также и способ редукции уравнения на его центральное многообразие. Д. Хенри получил общие результаты о существовании, устойчивости и гладкости инвариантных многообразий полулинейных параболических уравнений.

Ряд важных задач физики, химии, биологии, экологии приводят к исследованию систем с малой диффузией. При исследовании задач о бифуркациях в указанных системах характерны критические случаи бесконечной размерности. Для исследования этих задач в 80-х годах Ю.С. Колесов, опираясь на идеологию одночастотного метода Крылова–Боголюбова–Митропольского, предложил специальный асимптотический метод, названный методом квазинормальных форм. Глубокие идеи по исследованию бифуркационных задач для параболических уравнений с малой диффузией в случае бесконечномерного вырожде-

²Марсден Д., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Д. Марсден, М. Мак-Кракен. — пер. с англ. Л. М. Лермана. — М.: Мир, 1980. — 368 с.

³Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

ния были предложены в работе А.Б. Васильевой, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесова, Н.Х. Розова⁴.

Уравнение Гинзбурга–Ландау является ярким представителем общего класса скалярных параболических уравнений типа реакция–диффузия. Этот класс является одним из наиболее исследованных примеров в глобальной, геометрической теории параболических уравнений.

В работах С.Д. Глызина выполнены обширные численные эксперименты для разностных моделей уравнения Гинзбурга–Ландау и определены границы применимости асимптотических методов. Диффузионный хаос, как явление, характерное для широкого класса краевых задач параболического типа (систем «реакция–диффузия»), был изучен в цикле работ С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова. Здесь следует еще отметить работы тех же авторов, в которых на основе метода квазинормальных форм доказывается существование сколь угодно большого числа устойчивых автоволновых решений в краевых задачах с периодическими условиями.

Подчеркнем, что в параболических задачах с малой диффузией при определенных условиях возникают так называемые метаустойчивые структуры, под которыми мы подразумеваем медленно меняющиеся решения. Фундаментальные результаты по исследованию метаустойчивых структур сингулярно возмущенных параболических уравнений (скалярных уравнений Гинзбурга–Ландау) получены в работах Carr J., Pego R. L., Fusco G., Hale J. K. В работах Carr J., Pego R. L., Weinberger H. приведены примеры метаустойчивых структур уравнения Гинзбурга–Ландау, полученных численными расчетами.

В работе N. Alikakos, P. W. Bates, G. Fusco (1991) доказано существование метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений) уравнения Кана–Хилларда при малых значениях параметра ε^2 .

Несмотря на указанные публикации остаются не решенными вопросы представления решения параболического уравнения вблизи точки бифуркации и в области надкритичности, а также не исследовались сценарии развития рождающихся структур при отходе бифуркационного параметра от критического значения в область надкритичности. Актуальность темы предопределила постановку цели и основных задач, выбора объекта и предмета исследования.

Целью диссертационной работы является исследование условий рождения пространственно неоднородных стационарных решений для краевых задач параболических уравнений, анализ поведения решений в зависимости от бифуркационного параметра и определение характера устойчивости рожденных решений при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности (т.е. изменение бифуркационного параметра от бифуркационного значения параметра до значения, принадлежащего области надкритичности).

Для достижения цели необходимо было решить следующие **задачи**:

⁴Васильева А.Б. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / А.Б. Васильева, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесов, Н.Х. Розов // Мат. сборник. — 1989. — Т. 130 (172). — № 4 (8). — С. 488–499.

- описать условия существования и форму решений параболических уравнений Гинзбурга–Ландау и Кана–Хилларда с условиями типа Неймана на отрезке в зависимости от бифуркационного параметра;

- проанализировать динамику устойчивости рождающихся пространственно неоднородных структур при изменении бифуркационного параметра;

- исследовать условия и сценарии возникновения метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений);

- исследовать динамику уравнения, которое является модификацией (расширением) уравнения Кана–Хилларда, с условиями типа Неймана и периодическими. Выделить критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и исследовать бифуркационные явления;

- для обобщенного уравнения Кана–Хилларда с периодическими краевыми условиями показать, что в некоторой области фазового пространства его локальная динамика описывается с помощью бифуркации Андронова–Хопфа;

- выполнить серию численных экспериментов, основанных на методе центральных многообразий и методе Галеркина. Для определенных фиксированных параметров провести численный анализ формы и устойчивости структур.

Объект исследования — нелинейные параболические уравнения с краевыми условиями типа Неймана и периодическими.

Предмет исследования — пространственно неоднородные стационарные решения, их устойчивость и асимптотическая форма; медленно меняющиеся (метаустойчивые) структуры.

Гипотеза исследования заключается в том, что применение метода центральных многообразий и метода Галеркина к параболическим уравнениям с краевыми условиями типа Неймана приводит к качественно правильным результатам. Такой новый подход к построению приближенных решений указанных уравнений и исследованию динамики формы и устойчивости найденных решений при изменении бифуркационного параметра может быть использован в различных теоретических, прикладных и экспериментальных исследованиях.

Теоретико-методологическую основу диссертации составляют методы функционального анализа, качественной теории полулинейных параболических дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории бифуркаций, метод центральных многообразий, метод Галеркина. Используются как стандартные методы изучения локальной динамики, основанные на построении нормальных форм на центральных многообразиях, так и специальные методы бесконечномерной нормализации.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

- выполнено оригинальное исследование динамики формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений при изменении бифуркационного параметра (уменьшении и отходе от бифуркационного значения в область надкритичности);

- впервые получены и исследованы сценарии возникновения метаустойчивых

структур в параболических задачах с условиями на отрезке;

- показано, что задача о динамике и устойчивости состояния равновесия расширенной модели уравнения Кана–Хилларда расслаивается на континуальное (зависящее от некоторого параметра) семейство более специализированных краевых задач. Как правило рассматриваемые критические случаи имеют размерность 1 или 2.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. На основе метода центральных многообразий доказаны теоремы о существовании пространственно неоднородных стационарных решений параболического уравнения Гинзбурга–Ландау с краевыми условиями Неймана на отрезке.

2. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании пространственно неоднородных стационарных решений параболического уравнения Кана–Хилларда с краевыми условиями типа Неймана на отрезке.

3. В параболических задачах на отрезке на основе метода Галеркина проведен анализ формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений, рождающихся в результате бифуркации типа «вилка».

4. В параболических задачах на отрезке существуют метаустойчивые структуры (медленно меняющиеся решения), возникающие в результате седло-узловых бифуркаций. Исследованы условия и сценарии их возникновения.

5. Исследовано поведение решений расширенной модели уравнения Кана–Хилларда в окрестностях всего континуального множества его состояний равновесия. Выделены критические случаи, приведён бифуркационный анализ. Построены асимптотики неоднородных состояний равновесия, и изучена их устойчивость.

6. Для обобщенного уравнения Кана–Хилларда показано, что в некоторой области фазового пространства его локальная динамика описывается с помощью бифуркации Андронова–Хопфа. Приведена соответствующая нормальная форма, которая определяет поведение решений в этой области фазового пространства.

Теоретическое и практическое значение полученных результатов.

Результаты работы использованы в учебном процессе на факультете математики и информатики Таврической академии ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» в курсах «Качественная теория бифуркаций», «Динамика структур в бесконечномерных динамических системах», «Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений», «Элементы теории бифуркаций». Сведения из диссертации могут быть полезны как специалистам, работающим в области функционально-дифференциальных уравнений и функционального анализа, так и в исследованиях прикладного характера.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались на конференциях: Международная конференция «Моделирование, управление, устойчивость» (MSC-2012) (10–14 сентября 2012, Севастополь, Украина); The 4th international conference «Nonlinear dynamics-2013» (19–22

June 2013, Sevastopol, Ukraine); «Боголюбские чтения DIF-2013» (23–30 июня 2013, Севастополь, Украина); Крымская международная математическая конференция «КММК–2013» (22 сентября – 4 октября 2013, Судак, Украина); Международная конференция («Метод функций Ляпунова MFL-2014», 15–20 сентября 2014; «Метод функций Ляпунова MFL-2016», 15–18 сентября 2016, Алушта, Россия); Крымская осенняя математическая школа («КРОМШ–2014», 21–30 сентября 2014, Судак; «КРОМШ–2015», 17–29 сентября 2015; «КРОМШ–2016», 16–29 сентября 2016; КРОМШ–2017, 17–29 сентября 2017 года; КРОМШ–2018, 17–29 сентября 2018 года, Батилиман (Ласпи), Россия); Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения (24–29 апреля 2016; 23–28 апреля 2017 года; 22–27 апреля 2018 года, Ростов-на-Дону, Россия); Всероссийская научно-практическая конференция «Математика. Информатика. Компьютерные науки. Моделирование. Образование» (МИКМО-2017, 10–14 апреля 2017 года; МИКМО-2018, 17–20 апреля 2018; МИКМО-2019, 16–19 апреля 2019 года, Симферополь, Россия); Научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых «Дни науки Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского» в рамках Фестиваля Науки КФУ (1–3 ноября 2017 года; 12–17 октября 2018 года, Симферополь, Россия); Международная конференция «Динамические системы в науке и технологиях» (DSST–2018) (17–21 сентября 2018 года, Алушта, Россия); на семинарах: семинары кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского (руководители д.ф.-м.н., проф. О.В. Анашкин, д.ф.-м.н., проф. Е.П. Белан); семинар кафедры математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского (руководитель д.ф.-м.н., проф. Н.Д. Копачевский); семинар «Нелинейная динамика и синергетика» математического факультета Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова (руководитель д.ф.-м.н., проф. С.Д. Глызин) .

Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях [1]–[7], входящих в перечень ВАК Минобрнауки РФ, 19 — в тезисах докладов [8]–[26]. Статьи [1], [7] выполнены совместно с Е.П. Беланом и С.А. Кащенко соответственно: в этих работах соавторам принадлежит постановка задач и выбор методов исследования, а автору — применение методов и исследование полученных решений.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка иллюстраций, списка литературы. Полный объем диссертации составляет 140 страниц с 29 рисунками. Список литературы содержит 91 наименование.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность темы, характеризуется ее научная разработанность, формулируются цели и задачи исследования, объект и предмет исследования, научная новизна и положения, выносимые на защиту, а

так же практическое значение полученных результатов и апробация работы.

В **главе 1** исследуется математическая модель пространственно неоднородных структур канонической параболической задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + \Lambda u^2 - u^3, \quad t > 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями второго рода:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 \quad (2)$$

и начальными условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3)$$

при изменении положительного бифуркационного параметра μ , их описание и исследование устойчивости. Здесь $\mu > 0$ и Λ — параметры, $0 \leq x \leq \pi$.

Множество стационарных решений E_μ уравнения (1), т.е. решений краевой задачи

$$\mu u_{xx} + u + \Lambda u^2 - u^3 = 0, \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad (4)$$

зависит от параметра μ .

Задачу (1)–(2) в соболевском пространстве $H^1(0, \pi)$ будем записывать в виде:

$$\dot{u} + Bu = g(u), \quad (5)$$

где $B = B(\mu) = \mu A - I$, $Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $g(u) = \Lambda u^2 - u^3$.

При помощи метода центральных многообразий доказана теорема о существовании и форме пространственно неоднородных стационарных решениях задачи (1)–(2).

Теорема 1.1. Пусть выполнено условие $\Lambda = 0$. Существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < 1 - \mu < \delta$ уравнение (5) имеет по крайней мере два неустойчивых с индексом неустойчивости 1 стационарных решения

$$u_1 = \varphi_1(x, \mu), \quad u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu), \quad (6)$$

где функция $\varphi_1(x, \mu)$ удовлетворяет равенству

$$\varphi_1(x, \mu) = (z \cos x + z^3 p_3(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu) + z^7 p_7(x, \mu) + r(z, x, \mu)) |_{z=z(\mu)}, \quad (7)$$

$r(z, x, \mu) = O(|z|^7)$, а $z(\mu) > 0$ — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z - \frac{3}{4}z^3 + \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)}z^5 - \frac{3}{32(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left(\frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{3}{2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \right) z^7 + \dots, \\ -\lambda_k = -1 + k^2\mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Конкретный вид функций $p_3(x, \mu)$, $p_5(x, \mu)$, $p_7(x, \mu)$ представлен в соответствующей части диссертационной работы.

Для дальнейшего исследования решений, рождающихся при уменьшении бифуркационного параметра μ и его переходе в область надкритичности, рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (1) в виде

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \cos kx. \quad (8)$$

Подставим (8) в (1) и приравняем затем коэффициенты при $\cos kx$, $k = 0, \dots, N$. В результате приходим к градиентной системе уравнений

$$\dot{z}_k = -\frac{\partial G_N(z, \mu)}{\partial z_k}, \quad k = 0, \dots, N, \quad (9)$$

где $G_N(z, \varepsilon)$ – потенциальная функция, представление которой дано в соответствующей части работы.

В системе (9) нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при $\mu > 1$, а решения $(\pm 1, 0, \dots, 0)$ устойчивы для $\mu > 0$. При переходе параметра μ через 1 индекс неустойчивости (размерность неустойчивого многообразия) нуля увеличивается на порядок. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две ветви неподвижных точек $\pm z^1(\mu, N)$, определённые на $[0, 1)$. Справедливо следующее приближенное равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx \sum_{k=0}^m z_{2k+1}^1(\mu, N) \cos(2k+1)x, \quad (10)$$

$2m+1 = N$, если N – нечётно, $2m+2 = N$, если N – чётно.

Пара решений $\pm \varphi_1$ рождается неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1. Характер устойчивости $\pm \varphi_1$, как отмечено выше, сохраняется на промежутке $(0, 1)$ изменения параметра μ .

С помощью принципа подобия можно построить, опираясь на $\varphi_1(x, \mu)$, решения $\varphi_k(x, \mu)$, $k = 2, 3, \dots$, краевой задачи (4). Подчеркнём, что при малых μ $\varphi_2(x, \mu)$ является решением (1) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$.

Пара решений $\pm \varphi_2(x, \mu)$ рождается при $\mu = 1/4$ неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2. На основе аналогичных приведенным выше рассуждениям получено приближенное галеркинское представление $\varphi_2(x, \mu)$. Проведен численный анализ поведения спектров решений $\varphi_1(x, \mu)$, $\varphi_2(x, \mu)$ при средних значениях параметра μ .

В градиентных системах (9) размерности N согласно проведенному бифуркационному анализу для значений N от 20 до 30 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при средних (не очень малых) значениях параметра μ . В результате бифуркации седло-узел в однопараметрической системе (9)

появляются две непрерывные по μ ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра μ , которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (9) отвечают в силу (8) две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (2) типа внутреннего переходного слоя.

Рассмотрим решения $S_\mu^t \varphi_1^s$, $S_\mu^t \varphi_1^u$ уравнения (1) с начальными условиями $\varphi_1^s = \varphi_1^s(x, \mu, N)$, $\varphi_1^u = \varphi_1^u(x, \mu, N)$. Согласно численным расчетам на значительных промежутках изменения времени решения $S_\mu^t \varphi_1^s$, $S_\mu^t \varphi_1^u$ меняются медленно. Приближенные решения φ_1^s , φ_1^u краевой задачи (4) порождают метаустойчивые структуры с одной точкой перехода.

Для метаустойчивых структур с двумя точками перехода реализуются два сценария эволюции. Первый вариант характеризуется переходом метаустойчивой структуры после малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода. Второму варианту отвечает переход метаустойчивой структуры в окрестность одного из двух устойчивых решений ± 1 .

Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и неустойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений $\varphi_1(x, \mu)$, $\varphi_1(\pi - x, \mu)$ уравнения (5), ответвляющихся от нулевого решения при $\mu = 1$.

Теорема 1.2. Пусть выполнено условие $\Lambda \neq 0$. Существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < 1 - \mu < \delta$ уравнение (5) имеет по крайней мере два неустойчивых с индексом неустойчивости 1 стационарных решения

$$u_1 = \varphi_1(x, \mu), \quad u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu), \quad (11)$$

где функция $\varphi_1(x, \mu)$ удовлетворяет равенству

$$\varphi_1(x, \mu) = (z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) + z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu) + r(z, x, \mu)) \Big|_{z=z(\mu)},$$

$r(z, x, \mu) = O(|z|^6)$, а $z(\mu) > 0$ — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + \left(-\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right) z^3 + c_5 z^5 + \dots, \quad (12)$$

$$-\lambda_k = -1 + k^2 \mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В случае $\Lambda \neq 0$, как и при $\Lambda = 0$, рассматриваются галеркинские аппроксимации (8) уравнения (1). Подставляя (8) в (1) и приравнивая коэффициенты при $\cos kx$, $k = 0, \dots, N$, приходим к системам уравнений, правые части которых представляют собой полиномы степени 3. Это позволяет получить системы

обыкновенных дифференциальных уравнений, стационарным точкам которых отвечают приближенные стационарные решения исходной задачи.

В системах порядка $N + 1$, нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при $\mu > 1$, а решения $(\frac{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 + 4}}{2}, 0, 0)$ устойчивы для $\mu > 0$. При переходе параметра μ через 1 индекс неустойчивости (размерность неустойчивого многообразия) нуля увеличивается на единицу. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две ветви неподвижных точек $z^{1,1}(\mu, N)$ и $z^{1,2}(\mu, N)$, определённые на $[0, 1)$. Справедливо следующее приближенное равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx z_0^{1,1} + \sum_{k=1}^N z_k^{1,1}(\mu, N) \cos kx. \quad (13)$$

Как и при $\Lambda = 0$, с помощью принципа подобия найдено решение $\varphi_2(x, \mu)$, которое ответвляется от нуля при прохождении μ через значение $1/4$. Проведен анализ поведения спектров решений $\varphi_1(x, \mu)$, $\varphi_2(x, \mu)$ при средних значениях параметра μ .

В **главе 2** на отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассматривается уравнение Кана–Хилларда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + u^3 \right], \quad t > 0, \quad (14)$$

с краевыми условиями

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad u_{xxx}(0, t) = 0, \quad u_{xxx}(\pi, t) = 0, \quad (15)$$

где $\varepsilon^2 > 0$ — постоянная.

Краевая задача (14)–(15) допускает существование аттрактора: т.е. при $t \rightarrow \infty$ её решения сходятся к решениям стационарной задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + u^3 \right] = 0, \quad (16)$$

$$u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad u_{xxx}(0) = u_{xxx}(\pi) = 0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть вещественное z_0 удовлетворяет условию: $|z_0| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Существует $\delta > 0$ такое, что если ε^2 удовлетворяет неравенству: $1 - 3z_0^2 - \delta < \varepsilon^2 < 1 - 3z_0^2$, то уравнение (14)–(15) имеет по крайней мере два экспоненциально устойчивых семейства стационарных решений $(z_0, \varphi_1^\pm(x, \varepsilon, z_0))$, для которых справедливо асимптотическое равенство:

$$\varphi_1^\pm(x, \varepsilon, z_0) = z_0 + z_1 \cos x + p_3(z_0, z_1, x, \varepsilon) + p_5(z_0, z_1, x, \varepsilon) + O(|z_1|^7) \Big|_{z_1 = \pm u_1(\varepsilon, z_0)},$$

где $(z_0, \pm u_1(\varepsilon, z_0))$ — две непрерывные по (ε, z_0) ветви стационарных точек системы уравнений:

$$z_0 = 0, \quad z_1 = \lambda_1(\varepsilon)z_1 - 3z_0^2z_1 - \frac{3}{4}z_1^3 + \frac{18z_0^2z_1^3}{2\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{27z_1^5}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \dots, \quad (17)$$

бифурцирующие из семейства $(z_0, 0)$ при $\varepsilon^2 = 1 - 3z_0^2$, где

$$\lambda_k(\varepsilon) = k^2 - k^4 \varepsilon^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

В параграфе 2.2 проведен анализ иерархии упрощенных моделей уравнения Кана–Хилларда — галеркинских аппроксимаций, для этого, как и ранее рассмотрим галеркинскую аппроксимацию (8) для уравнения (14). Подставим (8) в (14) и приравняем затем коэффициенты при $\cos kx$, $k = 0, \dots, N$. В результате приходим к градиентной системе уравнений:

$$\dot{z}_0 = 0, \quad \dot{z}_k = -\frac{\partial G_N(z, \varepsilon)}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (19)$$

где $z = (z_0, \dots, z_N)$.

Из первого уравнения системы следует, что $z_0 = \text{const} = a$ является постоянной величиной. В системе (19) семейство решений $\pm(a, 0, \dots, 0)$, $a \in \mathbb{R}$, устойчиво при $\varepsilon^2 > 0$, если $|a| > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Если же $|a| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, то семейство решений устойчиво при $\varepsilon^2 > 1 - 3a^2$. Решения $\pm(1, 0, \dots, 0)$ устойчивы для $\varepsilon^2 > 0$. При переходе параметра ε^2 через значение $\varepsilon^2 = 1 - 3a^2$ семейство решений $\pm(a, 0, \dots, 0)$ становится неустойчивым с индексом неустойчивости 1. В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две ветви неподвижных точек $\pm z^1(\varepsilon, N, a)$, определённые по ε на $[0, 1 - 3a^2)$. Справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_1(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^N z_k^1(\varepsilon, N, a) \cos kx. \quad (20)$$

Проведенный анализ для N от 25 до 40 дает основание предполагать, что пара решений (14) $\pm \varphi_1$ устойчива и характер устойчивости $\pm \varphi_1$ сохраняется на промежутке $[0, 1 - 3a^2)$ изменения параметра ε^2 .

Динамика $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$ при уменьшении ε^2 от критического значения $1/4 - 3a^2$ следует из равенства

$$\varphi_k(x, \varepsilon, a) = \varphi_1(kx, k\varepsilon, a), \quad k = 2, 3, \dots \quad (21)$$

Подчеркнём, что при малых ε^2 $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$ является решением (14) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода.

Пара решений $\pm \varphi_2(x, \varepsilon, a)$ рождается при $\varepsilon^2 = 1/4 - 3a^2$ неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1.

Рассуждая, как и выше, получим следующее приближенное равенство:

$$\varphi_2(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^m z_{2k}^2(\varepsilon, N, a) \cos 2kx, \quad (22)$$

$m + 1 = N$, если N — нечётно; $m = N$, если N — чётно.

Динамика $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$ при уменьшении ε^2 от критического значения $1/9 - 3a^2$ следует из равенства (21). Подчеркнём, что при малых ε $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$ является решением (14) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Пара решений $\pm\varphi_3(x, \varepsilon, a)$ рождается при $\varepsilon^2 = 1/9 - 3a^2$ неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2.

Рассуждая, как и выше, получим следующее приближенное равенство:

$$\varphi_3(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^m z_{3k}^3(\varepsilon, N, a) \cos 3kx, \quad (23)$$

$m = N$, если $N = 3l$, $l = 1, 2, \dots$; $m = N - 2$, если $N = 3l + 2$, $l = 1, 2, \dots$; $m = N - 1$, если $N = 3l - 2$, $l = 2, 3, \dots$.

В градиентных системах (19) размерности N согласно проведенному в работе бифуркационному анализу для значений N от 30 до 40 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при малых значениях параметра ε^2 . В результате бифуркации седло-узел в двухпараметрической системе (19) появляются две непрерывные по ε^2 ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (19) отвечают в силу (8) две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (16) типа внутреннего переходного слоя.

Рассмотрим один из сценариев эволюции метаустойчивых структур с двумя точками перехода. Он характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода. Этот вариант эволюции характерен медленным движением при увеличении t правой точки перехода рассматриваемой структуры к π и медленным же движением левой точки перехода к одной из точек промежутка $(0, \pi)$.

Сценарий эволюции метаустойчивых структур с тремя точками перехода характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

В первой части **главы 3** рассматривается уравнение, которое является модификацией (расширением) широко известной модели Кана–Хилларда,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 u + a_3 u^2 + a_4 u^3 \right]. \quad (24)$$

Вместе с (24) рассматривают либо краевые условия типа Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad (25)$$

либо периодические краевые условия

$$u(t, x + 1) \equiv u(t, x). \quad (26)$$

Для коэффициентов a_j выполнены неравенства

$$a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad a_4 > 0. \quad (27)$$

Отметим, что количество параметров в (24) можно уменьшить, произведя нормировку «времени» $t \rightarrow (-a_2)t$ и нормировку функции $u \rightarrow (a_4 a_2^{-1})^{\frac{1}{2}} u$. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + bu^2 + u^3 \right], \quad (28)$$

где $\alpha = -a_1 a_2^{-2}$ ($\alpha > 0$), $b = a_3 a_2^{-3/2} a_4^{1/2}$.

Для изучения решений из малой окрестности состояния равновесия $u_0(t, x) \equiv c$ в (28) произведём замену $u = c + v$ и перейдем к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta v + \gamma v^2 + v^3 \right], \quad (29)$$

где

$$\beta = 1 - 2bc - 3c^2, \quad \gamma = b + 3c,$$

с краевыми условиями либо

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad (30)$$

либо

$$v(t, x+1) \equiv v(t, x). \quad (31)$$

Ниже через $M(\varphi)$ будем обозначать среднее на отрезке $[0, 1]$ значение функции $\varphi(x)$:

$$M(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Теорема 3.1. *Для каждого $c \in (-\infty, \infty)$ множество всех решений краевой задачи (28), (25) и краевой задачи (28), (26), определённых при $t > t_0$, для которых выполнены условия $u(t, x) = c + v(t, x)$ и*

$$M(v) = 0, \quad (32)$$

является инвариантным интегральным многообразием.

Отсюда естественным образом возникает задача исследования локальной — в окрестности нулевого состояния равновесия — динамики краевых задач (29), (30) и (29), (31), зависящих от параметра $c \in (-\infty, \infty)$.

Характеристическое уравнение для линеаризованных в нуле краевых задач (29), (30), (32) и (29), (31), (32) имеет вид

$$\lambda_k = \pi^2 k^2 [-\alpha \pi^2 k^2 + 1 - 2bc - 3c^2], \quad (33)$$

где $k = 1, 2, \dots$ в случае условий (30), (32) и $k = \pm 2, \pm 4, \dots$ в случае (31), (32).

При условии

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + \pi^2 \alpha = 0, \quad (34)$$

для некоторого c_0 в задаче об устойчивости краевой задачи (29), (30), (32) возникает критический случай. Этот критический случай имеет размерность единица. Для краевой задачи (29), (31), (32) критический случай размерности два (с двумя группами решений) выделяется равенством

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + 4\pi^2 \alpha = 0. \quad (35)$$

Далее в главе рассматривается вопрос о локальной динамике краевой задачи (29), (30), (32) при условии $c = c_0 + \varepsilon c_1$, где c_0 является корнем уравнения (34), $c_1 \neq 0$ — как-то фиксировано, а ε — малый положительный параметр, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Введём в рассмотрение стандартный для метода нормальных форм ряд

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau) \cos(\pi x) + \varepsilon v_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} v_3(\tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (36)$$

Подставим (36) в (29), (30), (32) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. На третьем шаге, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим уравнение для $v_3(\tau, x)$. Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем равенство

$$\dot{\xi} = \delta \xi + \sigma \xi^3, \quad (37)$$

где $\delta = 2\pi^2(b + 3c_0^2)c_1$, $\sigma = -\frac{3}{4}\pi^2 - \gamma^2(6\alpha)^{-1}$.

Таким образом, уравнение (37) с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon)$ является нормальной формой для краевой задачи (29), (30), (32).

Сформулируем итоговое утверждение.

Теорема 3.2. *При условиях $\delta \neq 0$, $\sigma \neq 0$ и при всех достаточно малых ε поведение решений (29), (30), (32) из некоторой достаточно малой и независимой от ε окрестности нулевого состояния равновесия определяется уравнением (37):*

1⁰. *При $\delta > 0$, $\sigma > 0$ в этой окрестности не существует аттрактора;*

2⁰. *При $\delta > 0$, $\sigma < 0$ нулевое решение неустойчиво и существует два устойчивых состояния равновесия $v_{\pm}(x, \varepsilon) = \pm(-\frac{\varepsilon\delta}{\sigma})^{1/2} \cos(\pi x) + O(\varepsilon)$;*

3⁰. *При $\delta < 0$, $\sigma > 0$ нулевое решение устойчиво, а $v_{\pm}(x, \varepsilon)$ — неустойчивы;*

4⁰. При $\delta < 0$, $\sigma < 0$ все решения из рассматриваемой окрестности стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Далее в главе рассматривается вопрос о локальной динамике краевой задачи (29), (31), (32). Здесь предполагаем, что выполнено условие (35). При этом два корня характеристического уравнения (33) при $k = \pm 2$ являются нулевыми, а все остальные отрицательные. Положим, как и выше, $c = c_0 + \varepsilon c_1$, где $0 < \varepsilon \ll 1$ и введём в рассмотрение формальный ряд

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau) \exp(2\pi i x) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-2\pi i x)] + \varepsilon v_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} v_3(\tau, x) + \dots, \quad (38)$$

где $\tau = \varepsilon t$, а $v_j(\tau, x)$ — 2π -периодичны по x .

Подставим (38) в (29), (31), (32) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε , тогда на третьем шаге при $\varepsilon^{3/2}$ получим уравнение для $v_3(\tau, x)$. Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем равенство

$$(2\pi)^{-2} \cdot \frac{d\xi}{d\tau} = \beta_1 \cdot \xi + d \cdot \xi |\xi|^2, \quad (39)$$

в котором $\beta_1 = -2\gamma_0 c_1$, $d = -3 + 2\gamma_0^2 (16\pi^2 \alpha - \beta_0)^{-1}$. Отметим, что при $\beta_1 d < 0$ уравнение (39) имеет множество состояний равновесия вида $\xi_0 \exp(i\varphi)$ ($\varphi \in [0, 2\pi)$), где $\xi_0 = (-\frac{\beta_1}{d})^{1/2}$.

Теорема 3.3. При условиях $\beta_1 \neq 0$, $d \neq 0$ и при всех достаточно малых ε динамика уравнения (39) определяет поведение решений краевой задачи (29), (31), (32) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Более подробно: при $\beta_1 d < 0$ краевая задача (29), (31), (32) имеет неоднородное состояние равновесия $v_0(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi_0 \cos(2\pi x) + O(\varepsilon)$. Оно устойчиво при $\beta_1 > 0$ и неустойчиво при $\beta_1 < 0$. При $\beta_1 < 0$, $d < 0$ все решения из малой окрестности нуля стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если же $\beta_1 > 0$, $d > 0$, то задача о динамике становится нелокальной.

В этой же части третьей главы построены асимптотики и изучена устойчивость неоднородных состояний равновесия краевой задачи (28), (26).

Во второй части третьей главы исследуется обобщенное уравнение Кана-Хилларда, которое отличается от (24) наличием ещё одного слагаемого $\lambda \partial u / \partial x$, стоящего в скобках:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + u + bu^2 - u^3 \right]. \quad (40)$$

Вместе с (40) будем рассматривать периодические краевые условия

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (41)$$

В отличие от (24), (25) у краевой задачи (40), (41) могут быть только однородные состояния равновесия $u(t, x) \equiv c$ ($c \in (-\infty, \infty)$).

В результате замены в (40): $u(t, x) = v(t, x) + c$ получим краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} + \beta v + \gamma v^2 - v^3 \right], \quad (42)$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad (43)$$

где $\beta = 1 + 2bc - 3c^2$, $\gamma = b - 3c$. Важно отметить, что из условия

$$M(v(t_0, x)) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t_0, x) dx = 0$$

следует выполнение при всех $t > t_0$ условия

$$M(v(t, x)) = 0. \quad (44)$$

При исследовании локальной динамики краевой задачи (42)–(44) важную роль играет расположение корней λ_k характеристического уравнения для линейризованной в нуле краевой задачи:

$$\lambda_k = -\alpha k^4 + ik^3 \lambda + \beta k^2, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (45)$$

Ниже будем предполагать, что имеет место критический случай. Пусть значение $c = c_0$ такое, что

$$\alpha = \beta = 1 + 2bc_0 - 3c_0^2. \quad (46)$$

Фиксируем произвольно значение c_1 и положим в (42)

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad (47)$$

где ε — малый положительный параметр, т. е.

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (48)$$

Далее исследуется поведение всех решений краевой задачи (42)–(44) из некоторой достаточно малой и независимой от ε окрестности нулевого состояния равновесия при условиях (46)–(48).

В этом случае характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{\pm 1} = \pm i\lambda + O(\varepsilon)$, а все остальные его корни имеют отрицательные (и отделенные от мнимой оси) вещественные части. Тем самым выполнены условия бифуркации Андронова — Хопфа.

Введём в рассмотрение формальный ряд

$$v = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau) \exp(ix + i\lambda t) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-ix - i\lambda t)] + \varepsilon v_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} v_3(t, \tau, x) + \dots \quad (49)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$ — медленное «время»; функции $v_j(t, \tau, x)$ — $2\pi/\lambda$ -периодичны по t и 2π -периодичны по x .

Подставим (49) в (42)—(44) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. На третьем шаге для нахождения $v_3(t, \tau, x)$ приходим к краевой задаче, условие разрешимости которой в указанном классе функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \quad (50)$$

в котором

$$\delta = 2\gamma c_1, \quad \sigma = 2A\gamma - 3, \quad A = 2\gamma[8\alpha - 2\beta_0 + 3i\lambda]^{-1}.$$

Отсюда и из общих утверждений вытекает следующий результат.

Теорема 3.4. Пусть $\delta \neq 0$ и $\operatorname{Re}\sigma \neq 0$. Тогда при всех достаточно малых ε динамика уравнения (50) определяет локальную динамику краевой задачи (42)—(44).

Далее исследуются решения краевой задачи (42)—(44) при достаточно больших значениях параметра $|\lambda|$. Здесь реализуется критический в задаче об устойчивости стационара — случай бесконечной размерности. Показано, что локальная динамика исходной краевой задачи определяется нелокальным поведением решений специально построенной более простой нелинейной краевой задачи.

В **заключении** подводятся итоги диссертационной работы, формулируются основные выводы.

В **приложении** приведен список некоторых определений и обозначений, используемых в работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. Плышевская С.П. Метаустойчивые структуры скалярного уравнения Гинзбурга–Ландау / Е.П. Белан, С.П. Плышевская // Динамические системы. — 2014. — Т. 4(32) — С. 27–42.

2. Плышевская С.П. Динамика стационарных структур в канонической параболической задаче / С.П. Плышевская // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 4(29). — С. 66–76.

3. Плышевская С.П. Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке / С.П. Плышевская // Динамические системы. — 2016. — Т. 6(34). — № 4. — С. 323–336.

4. Плышевская С.П. Метаустойчивые структуры Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // Динамические системы. — 2018. — Т. 8(36). — № 3. — С. 281–295.

5. Плышевская С.П. Асимптотическое исследование локальной динамики семейств уравнений Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // Известия вузов. ПНД. — 2019. — Т. 27. — № 1. — С. 63–76.

6. *Плышевская С.П.* Бифуркационный анализ уравнения Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // Вестник национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". — 2019. — Т. 8. — № 1. — С. 56–62.

7. *Kashchenko S.A.* Local dynamics of Cahn–Hilliard equation / S.A. Kashchenko, S.P. Plyshevskaya // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2019. — Vol. 22, № 1. — P. 93–97.

Другие издания:

8. *Плышевская С.П.* Устойчивые структуры второй краевой задачи Чэфи–Инфанте / С.П. Плышевская // Международная конференция «Моделирование, управление, устойчивость» (MSC-2012), 10–14 сентября 2012, Севастополь, Украина. — С. 61–62.

9. *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в канонической параболической задаче / С.П. Плышевская // «Боголюбовские чтения, DIF-2013», 23–30 июня 2013, Севастополь, Украина. — С. 160–161.

10. *Плышевская С.П.* Галёркинские аппроксимации метастабильных структур в канонической параболической задаче / С.П. Плышевская // Крымская международная математическая конференция «КММК-2013», 22 сентября–4 октября 2013, Судак, Украина. — С. 30–31.

11. *Плышевская С.П.* Метастабильные структуры уравнения Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // Метод функций Ляпунова «MFL-2014», 15–20 сентября 2014, Алушта, Россия. — С. 31–32.

12. *Плышевская С.П.* Метастабильные структуры уравнения Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // XXV Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2014», 21–30 сентября 2014, Судак, Россия. — С. 54–55.

13. *Плышевская С.П.* Структуры уравнения Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // XXVI Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2015», 17–29 сентября 2015, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 58–59.

14. *Плышевская С.П.* Метастабильные структуры скалярного параболического уравнения / С.П. Плышевская // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI, 24–29 апреля 2016, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 118–119.

15. *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в сингулярно возмущённой параболической задаче / С.П. Плышевская // Метод функций Ляпунова «MFL-2016», 15–18 сентября 2016, Алушта, Россия. — С. 25.

16. *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче / С.П. Плышевская // XXVII Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2016», 16–29 сентября 2016, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 57.

17. *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке / С.П. Плышевская // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII, ISBN: 978-5-7890-1271-0, 23–28 апреля 2017, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 106–107.

18. *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке / С.П. Плышевская // Всероссийская научно-

практическая конференция «Математика. Информатика. Компьютерные. Образование» (МИКМО-2017), 10–14 апреля 2017, Симферополь, Россия. — С. 87–88.

19. *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке / С.П. Плышевская // XXVIII Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2017», 17–29 сентября 2017, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 107–109.

20. *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры уравнения Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VIII, 22–27 апреля 2018, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 95.

21. *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры уравнения Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции «МИКМО-2018» и Таврической научной школы-конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В.А. Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2018. — Вып. 2. — С. 52–56.

22. *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры с двумя точками перехода уравнения Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // XXIX Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2018», 17–29 сентября 2018, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 26–27.

23. *Плышевская С.П.* Сценарии возникновения метаустойчивых структур уравнения Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // Динамические системы в науке и технологиях «DSST-2018», 17–21 сентября 2018, Алушта, Россия. — С. 37–38.

24. *Плышевская С.П.* Один из сценариев возникновения метаустойчивых структур уравнения Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // IV Научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых «Дни науки Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского» в рамках IV Фестиваля Науки КФУ, 12–17 октября 2018, Симферополь, Россия. — С. 275–276.

25. *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры с тремя точками перехода уравнения Кана–Хилларда / С.П. Плышевская // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IX, 22–25 апреля 2019, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 95–96.

26. *Plyshevskaya S.P.* Dynamics of structures in the canonical parabolic problem / S.P. Plyshevskaya // The 4th international conference «Nonlinear dynamics», 19–22 June, 2013, Sevastopol, Ukraine. — P. 204–209.