МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи

Чечкин Алексей Григорьевич

УДК 517.956

ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2017

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Шамаев Алексей Станиславович
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор Камынин Виталий Леонидович
	доктор физико–математических наук Пятницкий Андрей Львович
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Защита диссертации состоится 8 декабря 2017 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 во Владимирском государственном университете им. А.Г. и Н.Г. Столетовых по адресу 600024, РФ, Владимир, проспект Строителей, 11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых и на сайте http://diss.vlsu.ru/

Автореферат разослан октября 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета ДМ 212.025.08 при
ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
кандидат физико–математических наук,
доцент Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Многие прикладные задачи, в частности, в теории диффузионных процессов, квантовой физики (см., например, работу[1]), финансовой математики (см., например, работу[2]) описываются динамическими моделями, включающими в себя краевые задачи для параболических уравнений специального вида, связанных с полиномами 2-го проядка от операторов $\partial/\partial x_i$ и операторов умножения на независимые переменные x_i. Причиной явной разрешимости таких задач можно считать то, что данные операторы следует рассматривать, как результат квантования классической линейной гамильтоновой системы с квадратичным гамильтонианом. Такая классическая система может быть явно проинтегрирована, что дает основу для интегрирования соответствующей квантовой системы.

Моделирование обобщённых гармонических осцилляторов (см., например, работы[3,4,5,6,7,8] и список литературы в них) приводит к исследованию задачи Коши. В работе[1] рассмотрена задача Коши специального вида и построено явное решение задачи для нестационарного одномерного уравнения Шрёдингера для заряженной частицы со спином, движущейся в однородном магнитном поле и электрическом поле меняющемся во времени. Соответствующая функция Грина (Feynman propagator, см. работы[9,10,11]) определяется в терминах элементарных функций и определенных интегралов от полей с характеристическими функциями, которые находятся аналитически или численно, как решения уравнения движения классического осциллятора с зависящей от времени частотой. При этом в отличие от работ[12,13] автор строит эволюционный оператор яв-

---

[1] *Cordero-Soto R., Lopez R. M., Suazo E., Suslov S. K.* Propagator of a Charged Particle with a Spin in Uniform Magnetic and Perpendicular Electric Fields. Lett. Math. Phys. Vol. 84. Num. 2–3. 2008. p. 159–178.

[2] *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Fifth Edition, Corrected. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1998.

[3] *Hannay J. H.* Angle Variable Holonomy in Adiabatic Excursion of an Integrable Hamiltonian. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 18. Num. 2. 1985. p. 221–230.

[4] *Leach P. G. L.* Berry's Phase and Wave Functions for Time-Dependent Hamiltonian Systems. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 23. 1990. p. 2695–2699.

[5] *Wolf K. B.* On Time-Dependent Quadratic Hamiltonians. SIAM J. Appl. Math. Vol. 40. Num. 3. 1981. p. 419–431.

[6] *Yeon K. -H., Lee K. -K., Um Ch. -I., George T. F., Pandey L. N.* Exact Quantum Theory of a Time-Dependent Bound Hamiltonian Systems. Phys. Rev. A. Vol. 48. Num. 4. 1993. p. 2716–2720.

[7] *Berry M. V.* Classical Adiabatic Angles and Quantum Adiabatic Phase. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 18. Num. 1. 1985. p. 15–27.

[8] *Dodonov V. V., Malkin I. A., Man'ko V. I.* Integrals of Motion, Green Functions, and Coherent States of Dynamical Systems. Int. J. Theor. Phys. Vol. 14. Num. 1. 1975. p. 37–54.

[9] *Feynman R. P.* The Theory of Positrons. Phys. Rev. Vol. 76. Num. 6. 1949. p. 749–759.

[10] *Feynman R. P.* Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics. Phys. Rev. Vol. 76. Num. 6. 1949. p. 769–789.

[11] *Feynman R. P., Hibbs A. R.* Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw–Hill, 1965.

[12] *Flügge S.* Practical Quantum Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[13] *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Introduction to the Theory of Quantized Fields.Third edition. New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley and Sons, 1980.

но для общего случая. Многомерный случай рассмотрен в работе[14]. Статья[15] посвящена исследованию линейных и квадратичных интегралов движения для квадратичных гамильтонианов с общей переменной. Были обнаружены фундаментальные связи между спектральной задачей для линейных динамических инвариантов и соответствующей задачей Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера. При этом построено разложение решения задачи Коши по собственным функциям. Устанавливается нелинейный принцип суперпозиции для обобщенных систем Ермакова с помощью разложения общего квадратичного инварианта в терминах линейных инвариантов.

Гармонические осцилляторы играют важную роль во многих квантовых задачах, таких как исследование когерентных состояний и соотношений неопределенностей (см. работы[16,17]), фаз Берри (см. работы[18,19]), асимптотических и численных методов (см. работы[20,21]), ловушек для заряженных частиц (см. работу[22]) и движения в однородных магнитных полях (см. работы[23,24]), молекулярной спектроскопии (см. работу[25]) и многоатомных молекул в изменяющихся внешних полях, кристаллов, через которые проходит электрон и различных моделей осцилляторов, и других взаимодействий моделей с внешними полями (см. работу[26]). Квадратичные гамильтонианы играют особую роль в квантовой электродинамике, поскольку электромагнитное поле может быть представлено в виде набора гармонических осцилляторов (см. работы[27,26]). Нелинейные осцилляторы играют центральную роль в новаторской теории конденсации Бозе–Эйнштейна (см. работу[28]). С общей точки зрения, динамика газов, состоящих

[14] *Meiler M., Cordero-Soto R., Suslov S. K.* Solution of the Cauchy Problem for a Time-Dependent Schrödinger Equation. J. Math. Phys. Vol. 49. Num. 7. 2008. 072102.

[15] *Suslov S. K.* Dynamical Invariants for Variable Quadratic Hamiltonians. Physica Scripta. Vol. 81. Num. 5. 2010. 55006 (11 pp).

[16] *Malkin I. A.,Man'ko V. I., Trifonov D. A.* Invariants and the Evolution of Coherent States for a Charged Particle in a Time-Dependent Magnetic Field. Phys. Lett. A.. Vol. 30. Num. 7. 1969. p. 414.

[17] *Klauder J. R., Sudarshan E. C. G.* Fundamentals of Quantum Optics. New York: Benjamin, 1968.

[18] *Berry M. V.* Classical Adiabatic Angles and Quantum Adiabatic Phase. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 18. Num. 1. 1985. p. 15–27.

[19] *Berry M. V., Hannay J.* Classical non-Adiabatic Angles. J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 21. Num. 6. 1988. p. L325–L331.

[20] *Kruskal M.* Asymptotic Theory of Hamiltonian and Other Systems with all Solutions Nearly Periodic. J. Math. Phys. Vol. 3. 1962. p. 806–828.

[21] *Maslov V. P., Fedoriuk M. V.* Semiclassical Approximation in Quantum Mechanics. Dordrecht, Boston: Reidel, 1981.

[22] *Major F. G., Gheorghe V. N., Werth G.* Charged Particle Traps. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.

[23] *Cordero-Soto R., Lopez R. M., Suazo E., Suslov S. K.* Propagator of a Charged Particle with a Spin in Uniform Magnetic and Perpendicular Electric Fields. Lett. Math. Phys. Vol. 84. Num. 2–3. 2008. p. 159–178.

[24] *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory. Oxford: Pergamon Press, 1977.

[25] *Doktorov E. V., Malkin I. A., Man'ko V. I.* Dynamical Symmetry of Vibronic Transitions in Polyatomic Molecules and Frank-Condon Principle. J. Mol. Spectrosc. Vol.64. 1977. p. 302–326.

[26] *Feynman R. P., Hibbs A. R.* Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw–Hill, 1965.

[27] *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Introduction to the Theory of Quantized Fields.Third edition. New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley and Sons, 1980.

[28] *Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L. P., Stringari S.* Theory of Bose-Einstein Condensation in Trapped Gases. Rev. Mod. Phys. Vol.71. 1999. p. 463–512.

из охлажденных атомов, в магнитной ловушке при очень низких температурах может быть описана с помощью эффективного уравнения Гросса–Питаевского (или нелинейного уравнения Шредингера) (см. работы[29,30]).

В монографии[2] рассматриваются модели построения финансового портфеля и управления им, которые позволяют хеджировать проданные опционы и прочие возможные иски. Также рассматриваются задачи выбора оптимального времени для продажи актива. Все эти финансовые ситуации моделируются задачами Коши для параболических уравнений со специфическими начальными данными.

В работе[31] исследуется задача Коши для уравнения Фоккера–Планка. Данное уравнение с добавленным квазилинейным членом используется в физике плазмы при взаимодействии радиочастотных волн с плазмой (см., например, работу[32]). В нелинейной фильтрации с плотностью вероятности состояния x_t при условии наблюдения $\{y(s) : 0 \leq s \leq t\}$ также описывается уравнением Фоккера–Планка с дополнительным членом первой степени. В статье описывается метод решения уравнения Фоккера–Планка с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Стоит отметить, что в статье[33] Kerbel и McCoy описали численный метод решения уравнения Фоккера–Планка третьей степени.

Ещё есть близкая работа[34]. В ней дана интерпретация задачи фильтрации диффузионных процессов как задачи квантования. На этой основе показано, что классические уравнения линейного фильтра Калмана–Бьюси описывают поток автоморфизмов алгебры Гейзенберга. Получены явные формулы для ненормированной условной плотности в линейном случае, новая интерпретация формулы Мелера для фундаментального решения оператора Шрёдингера в случае гармонического осциллятора, формулы для регуляризованного определителя оператора Штурма–Лиувилля.

Отметим также ещё несколько областей, где возникают аналогичные проблемы, связанные с эволюционными уравнениями и их фундаментальными решениями. Задачи о *линейно–квадратичном регуляторе* являются базовыми во многих прикладных задачах физики, инженерном и военном деле. В классической задаче о линейно–квадратичном регуляторе (см., например, работу[35])

[29] *Kivshar Yu. S., Alexander T. J., Turitsyn S. K.* Nonlinear Modes of a Macroscopic Quantum Oscillator. Phys. Lett. A. Vol.278. Num. 1. 2001. p. 225–230.

[30] *Kagan Yu., Surkov E. L., Shlyapnikov G. V.* Evolution of Bose Gas in Anisotropic Time-Dependent Traps. Phys. Rev. A . Vol.55. Num. 1. 1997. p. R18–R21.

[31] *Yau S. S.-T.* Computation of Fokker-Planck Equation. Quart. Appl. Math. Vol. 62. Num. 4. 2004. p. 643–650.

[32] *Karney C. F. F.* Fokker-Planck and Quasilinear Codes. Computer Physics Report. Vol.4. Num. 3–4. 1986. p. 183–244.

[33] *Kerbel G. D., McCoy M. G.* Kinetic Theory and Simulation of Multispecies Plasmas in Tokamaks Excited with Electromagnetic Waves in the Ion-Cyclotron Range of Frequencies. Phys. Fluids. Vol.28. 1985. p. 3629–3649.

[34] *Овсеевич А.И.* Фильтр Калмана и квантование. Пробл. передачи информ. Том 44. Ном. 1. 2008. p. 59–79.

[35] *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.

соответствующее уравнение Беллмана при определённой замене приобретает вид параболического уравнения, для которого в настоящей работе строится явная формула для фундаментального решения. Задачи о *фильтрации сигналов* также являются одними из основных во многих прикладных и инженерных областях науки. Выделение сигналов из шума — это и есть основная цель такой задачи. Оптимальное выделение сигнала можно проводить различными методами, в зависимости от того, какая ставится задача — обнаружение сигнала, сохранение формы сигнала и т.д. В классической задаче о фильтрации сигналов (см., например, работу[36]) необходимо найти "отфильтрованную кривую", которая строится по решению уравнения Закая. Уравнение Закая, в свою очередь, имеет в точности вид параболического уравнения, о котором мы упоминали выше. Стоит также кратко упомянуть, что аналогичные уравнения и проблемы возникают в задачах об *управлении инвестиционным портфелем* и *страховой цене иска* (см., например, работы[37,38,39]).

В настоящей работе исследуются системы параболических уравнений со специальными начальными условиями, которые в предыдущих математических работах не исследовались. При этом предлагается новый метод построения явных формул. Выводится явная формула для решения, которая строго обосновывается. В процессе анализа мы используем метод исследования параболических уравнений, предложенный в работе[40]. Результаты настоящей работы позволяют существенно упростить решения задач, о которых упоминалось выше.

Цель работы.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию поведения фундаментальных решений эволюционных дифференциальных операторов параболического типа как в действительном случае, так и в комплексном.

Целью работы является

- построение фундаментального решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова с действительными коэффициентами;
- построение фундаментального решения уравнения Шрёдингера с комплексными коэффициентами.

Методика исследования.

В диссертации используются методы качественной теории дифференциальных операторов в частных производных, функционального анализа, теории

[36] *Kalman R.E.* A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Basic Engineering. V. 82, No 1. 1960. p. 35–45.

[37] *Bielecki T., Pliska S.* Risk Sensitive Dynamic Asset Management. J. Appl. Math. and Optimiz. Vol. 37. Num. 3. 1999. p. 337–360.

[38] *Bielecki T., Pliska S., and Sherris M.* Risk Sensitive Asset Allocation. J. Econ. Dynamics and Contr. Vol. 24. Num. 8. 2000. p. 1145–1177.

[39] *Bielecki T., Pliska S.* Risk Sensitive Intertemporal CAPM with Application to Fixed Income Management," Automat. Contr., IEEE Trans. Vol. 49, No 3. 2004. P. 420–432.

[40] *Yau S. S.-T.* Computation of Fokker-Planck Equation. Quart. Appl. Math. Vol. 62. Num. 4. 2004. p. 643–650.

обыкновенных дифференциальных уравнений и алгебраические методы.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них следующие:

- Сведены эволюционные уравнения параболического типа второго порядка к нескольким системам обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида.
- Указаны правильные начальные условия в задачах Коши для этих систем.
- Построены фундаментальные решения соответствующих дифференциальных операторов для действительного и комплексного случаев.

Теоретическая и практическая значимость. В предлагаемой работе первые две главы носят теоретический характер. Использованные в работе подходы и полученные результаты могут быть применены к поиску фундаментальных решений других эволюционных операторов. Третья глава посвящена практическим применениям изложенных теоретических методов. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности математика.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара под руководством проф. А. С. Шамаева, а также кафедральном семинаре под руководством В. В. Жикова, Е. В. Радкевича, А. С. Шамаева и Т. А. Шапошниковой, МГУ, Механико–математический факультет.

Результаты диссертации докладывались также на следующих научных конференциях:

- Международный молодежный научный форум "Ломоносов-2015" (Москва, Россия, 13 – 17 апреля 2015 г.);
- Пятая международная конференция "Многомасштабные методы и моделирование: переход от микро- к макромасштабу в механике и медицине" (Москва, Россия, 25 – 27 июня 2015 г.);
- Третья международная научная конференция "Современные проблемы механики" (Киев, Украина, 27 – 29 августа 2015 г.);
- 58-я научная конференция МФТИ (Москва, Россия, 23 – 28 ноября 2015 г.);
- 59-я научная конференция МФТИ (Москва, Россия, 21 – 26 ноября 2016 г.);

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах, список которых приводится в конце автореферата [1–8].

Структура и объем работы. Диссертация занимает 100 страниц текста и состоит из введения, трех глав, разбитых на 13 параграфов и списка литературы, включающего 77 наименований. Нумерация формул, теорем и лемм тройная — номер главы, номер параграфа и собственный номер, например, лемма 1.2.3 — лемма 3 второго параграфа первой главы.

Основное содержание работы.

Первая глава. В первой главе исследуется параболическое уравнение специального вида с действительными коэффициентами. При этом предлагается новый метод построения фундаментального решения для данного дифференциального оператора.

В **первом параграфе** формулируется основная теорема и вводятся ограничения на коэффициенты оператора.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — векторная переменная размерности n, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — выделенная одномерная переменная, играющая роль времени, $u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, имеющая в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные $\partial_t, \partial_{x_k}, \partial^2_{x_k x_l} (k, l = 1, \ldots, n)$. Класс таких функций обозначим через $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

Оператор $\mathfrak{L}$ будем называть оператором "второго порядка", аналогичным оператору Фоккера–Планка–Колмогорова, если он имеет следующий вид:

$$\mathfrak{L}[v] = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_{ij}(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \left(\sum_j B_{ij}(t) x_j + c_i(t) \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \\ + \left(\sum_{ij} F_{ij}(t) x_i x_j + \sum_i g_i(t) x_i + h(t) \right) v,$$

где $A_{ij}(t)$, $B_{ij}(t)$, $c_i(t)$, $F_{ij}(t)$, $g_i(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $h(t)$ — некоторые функции. Соответственно, уравнением "второго порядка", соответствующим уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова, будем называть уравнение

$$\dot{u} = \mathfrak{L}[u] \tag{1}$$

про аналогичные операторы см., например, работу[41] и подробную библиографию в этой монографии.

Предполагается, что выполнены следующие гипотезы.

A. *Коэффициенты* $A(t)$, $B(t)$, $F(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ *оператора "второго порядка"* $\mathfrak{L}$ *суть функции, непрерывные на* $\mathbb{R}_+$ *и имеющие при* $t \to 0$ *конечные*

[41] *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: изд. "Мир", 1978.

пределы A_0, B_0, $F_0 \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ соответственно. При этом предполагается, что $A(t)$ — симметричная матрица, а матрица A_0 является положительно определенной.

Пусть решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} P' = -P\left(2AS + B^T\right) - (2AS + B)\,P - 2A, \\ P|_{t=0} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{2}$$

где $S(t)$ является симметричным решением задачи

$$\begin{cases} S' = 2SAS + SB + B^T S + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ S|_{t=0} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{3}$$

представимо в виде

$$P(t) = -2tA_0 + R(t) \tag{4}$$

в окрестности нуля, где $R(t)$ — некоторая матрица, заданная на отрезке $[0, \varepsilon]$. Здесь $0 < \varepsilon << 1$ — некоторая постоянная.

Замечание 1. *Вопросы существования решений* (2) *и* (3) *и их свойств, в частности, представимость в виде* (4), *см.* [1].

Введем следующие обозначения:

$$Q(t) = -\frac{1}{2t}R(t)A_0^{-1}, \tag{5}$$

$$\overline{Q}(t) = [E + Q(t)]^{-1} - E, \tag{6}$$

$$\tilde{Q}(t) = \overline{Q}(t) + (A(t) - A_0)A_0^{-1}[E + \overline{Q}], \tag{7}$$

$$\tilde{q}(t) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\tilde{Q}. \tag{8}$$

Б. *Существует несобственный интеграл* $\displaystyle\int\limits_0^t \frac{\tilde{q}(s)}{s}ds < +\infty$ *при* $0 \le t < \varepsilon$.

Будем считать данные предположения выполненными во всех дальнейших рассуждениях.

Пусть даны следующие две системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} S' = 2SAS + SB + B^T S + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = (2SA + B^T)q + 2Sc + g, \\ r' = \mathrm{tr}(AS) + \frac{1}{2}q^T Aq + q^T c + h \end{cases} \tag{9}$$

и

$$\begin{cases} P' = -P\left(2SA + B^T\right) - (2AS + B)\,P - 2A, \\ m' = -(2AS + B)m - Aq - c, \\ C' = C \cdot \left(\mathrm{tr}\left(AP^{-1}\right)\right). \end{cases} \tag{10}$$

А также рассмотрим задачу Коши для оператора $\mathfrak{L}$, введённого выше,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{L}[u], \\ u|_{t=0} = \delta_y(x), \end{array} \right. \tag{11}$$

где $\delta_y(x)$ есть дельта-функция с особенностью в точке $y \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* **А** *и* **Б**. *Тогда решением задачи Коши* (11) *будет функция* $u(t,x)$, *равная*

$$\exp\left\{x^T S(t)x + q^T(t)x + r(t)\right\} C(t) \exp\left\{\left\langle P^{-1}(t)(x - m(t;y)), (x - m(t;y))\right\rangle\right\}, \tag{12}$$

где $S(t)$, $q(t)$ *и* $r(t)$ *суть решения системы уравнений* (9) *с начальными условиями* $S_{ij}(0) = q_k(0) = r(0) = 0$ *для* $\forall i,j,k \in \overline{1,n}$, $P(t)$, $m(t;y)$ *суть решения двух первых уравнений системы* (10) *с начальными условиями* $P_{ij}(0) = 0$ *для* $\forall i,j \in \overline{1,n}$, $m(0) = y$, *а* $C(t)$ *есть частное решение третьего уравнения системы* (10) *вида*

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n \det A_0}} \ \exp\left\{ -\frac{n}{2} \int\limits_0^t \frac{\tilde{q}(s)}{s} ds \right\}.$$

Во **втором параграфе** приводятся вспомогательные утверждения и леммы.

Рассматривается уравнение в частных производных

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathfrak{J}[u(t,x)], \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{13}$$

где $\mathfrak{J}$ — дифференциальный (по переменным x) оператор вида

$$\mathfrak{J}[u] = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{1}{2} a_{kl}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} b_k(t,x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + C(t,x) \cdot u. \tag{14}$$

С помощью векторной записи уравнению (13) можно придать следующую форму:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left\langle \frac{1}{2} A, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle b, \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle + Cu. \tag{15}$$

Далее будем использовать утверждение из [1].

Лемма 1. *Пусть функция* $\rho \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $\rho(t,x) > 0$, *есть некоторое (известное) положительное решение уравнения* (13). *Тогда функция* $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, *равная*

$$v(t,x) = \frac{u(t,x)}{\rho(t,x)}, \ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle A\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + b, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle. \tag{17}$$

Положительные функции

$$\rho(t,x) = \exp\left\{x^T S(t)x + q^T(t)x + r(t)\right\}, \tag{18}$$

где $S \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, являются решениями уравнения "второго порядка" вида (1) (см. работу[42]) и имеет место утверждение (теорема 3.1 из работы[42]).

Лемма 2. *Функция* $\rho \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ *вида* (18) *является решением уравнения "второго порядка"* (1) *в том и только том случае, если ее коэффициенты* $S(t)$, $q(t)$ *и* $r(t)$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} S' = \frac{1}{2}S^T AS + \frac{1}{2}SAS^T + SAS + SB + B^T S^T + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = (SA + S^T A + B^T)q + Sc + S^T c + g, \\ r' = tr(AS) + \frac{1}{2}q^T Aq + q^T c + h. \end{cases} \tag{19}$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} S' = \frac{1}{2}S^T AS + \frac{1}{2}SAS^T + SAS + SB + B^T S^T + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ S|_{t=0} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

решение которой будем искать в пространстве симметричных матриц из $\mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. При этом, задача Коши переписывается в форме (3), а система (19) принимает вид (9).

Лемма 3. *Из предположения* **A** *вытекает, что для задачи Коши* (3) *решение* $S(t)$ *существует в* ϵ_1*–окрестности нуля.*

Определение 1. *Система вида* (19) *называется* ***системой типа Риккати***.

Подробнее о различных видах уравнений Риккати можно прочитать, например, в работах[43,44,45].

[42] *Yau S. S.-T.* Computation of Fokker-Planck Equation. Quart. Appl. Math. Vol. 62. Num. 4. 2004. p. 643–650.

[43] *Levin J.J.* On the Matrix Riccati Equation. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 10. Num. 4. 1959. p. 519–524.

[44] *Lancaster P., Rodman L.* Algebraic Riccati Equations. Oxford: Clarendon Press, 1995.

[45] *Abou–Kandil H., Freiling G., Ionescu V., Jank G.* Matrix Riccati Equations: in Control and Systems Theory. Basel: Birkhäuser, 2003.

Следствие 1. *Пусть тройка $S(t)$, $q(t)$ и $r(t)$ удовлетворяет системе (9). Тогда замена неизвестной функции (16) из условия леммы 1 с функцией ρ вида (18) в уравнении "второго порядка" (1) приводит к новому уравнению*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle \hat{B}x + \hat{c}, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle, \tag{20}$$

в котором $\hat{B} = 2AS + B$ и $\hat{c} = Aq + c$.

В качестве обоснования формул для $\hat{B}$ и $\hat{c}$ вспомним, что функция ρ вида (18) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 2Sx + q.$$

Пусть $u(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ удовлетворяет уравнению "второго порядка" (1).

Найдём решения этого уравнения не в форме (18), а в следующем виде:

$$u(t,x) = \exp\left\{x^T P^{-1}(t)x + q^T(t)x + r(t)\right\}, \tag{21}$$

где P^{-1} — симметричная матрица. Отличие от "стандартной" формы (18) заключается в изменении симметричной матрицы $S(t)$ квадратичной формы на некоторую симметричную обратную матрицу $P^{-1}(t)$. Чтобы найти решение уравнения (1) в форме (21), воспользуемся леммой 2. При этом мы получим систему

$$\begin{cases} (P^{-1})' = 2P^{-1}AP^{-1} + P^{-1}B + B^T P^{-1} + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = (2P^{-1}A + B^T)q + 2P^{-1}c + g, \\ r' = \operatorname{tr}(AP^{-1}) + \frac{1}{2}q^T A q + q^T c + h. \end{cases} \tag{22}$$

Нетрудно показать, что функция $u(t,x)$ вида (21) представима также в виде

$$u(t,x) = C(t) \cdot \exp\{\langle P^{-1}(t)(x - m(t)), (x - m(t))\rangle\}, \tag{23}$$

где коэффициенты $C(t)$ и $m(t)$ задаются следующим образом:

$$m = -\frac{1}{2}Pq, \qquad C = \exp\left\{r - \frac{1}{4}\langle Pq, q\rangle\right\}.$$

Замечание 2. *Невырожденность матрицы P^{-1} в окрестности нуля следует из леммы 7.*

Положим $\tilde{B} = -B^T$ и используем далее следующее утверждение из [1].

Лемма 4. *Функция* $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ *вида* (23) *есть решение уравнения "второго порядка"* (1) *в том и только том случае, если ее коэффициенты* $P(t)$, $m(t)$ *и* $C(t)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{cases} P' = -\frac{1}{2}P\left(F + F^T\right)P + P\tilde{B} + \tilde{B}^T P - 2A, \\ m' = -\frac{1}{2}P\left(F + F^T\right)m + \tilde{B}^T m - c - \frac{1}{2}Pg, \\ C' = C \cdot \left[tr\left(AP^{-1}\right) + \frac{1}{2}\left\langle\left(F + F^T\right)m, m\right\rangle + \langle g, m\rangle + h\right]. \end{cases} \tag{24}$$

Определение 2. *Система вида* (24) *называется* ***системой типа Риккати с особенностью****.*

Лемма 5. *Из предположения* **A** *вытекает, что решение* $P(t)$ *задачи Коши* (2) *существует в* ϵ_2*-окрестности нуля.*

Замечание 3. *Заметим, что* $\epsilon_2 \leq \epsilon_1$ *и постоянная* ε *из предположения* **A** *равна* ϵ_2.

Следующее утверждение вытекает из леммы 4.

Лемма 6. *Функция* $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ *вида* (23) *является решением уравнения* (20) *тогда и только тогда, когда ее коэффициенты удовлетворяют системе* (10).

Приведём ещё три утверждения из [1].

Лемма 7. *Матрица* $P(t)$ *является отрицательно определенной в некоторой окрестности нуля.*

Лемма 8. *Имеет место равенство* $\lim\limits_{t\to 0} I(t) = 1$, *где*

$$I(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} C(t) \cdot \exp\{\langle P^{-1}(t)(x - m(t;y)), (x - m(t;y))\rangle\}dx_1 \ldots dx_n$$

и $P(t)$, $m(t;y)$ *суть решения двух первых уравнений системы* (10) *с начальными условиями* $P_{ij}(0) = 0$ *для* $\forall i, j \in \overline{1,n}$, $m(0) = y$, *а* $C(t)$ *есть частное решение третьего уравнения системы* (10) *вида*

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n \det A_0}} \ \exp\left\{-\frac{n}{2}\int\limits_0^t \frac{\tilde{q}(s)}{s}ds\right\}.$$

Составим функцию

$$G(t, x; y) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$G(t, x; y) = C(t) \cdot \exp\{\langle P^{-1}(t)(x - m(t;y)), (x - m(t;y))\rangle\}.$$

где $P(t)$, $m(t)$ и $C(t)$ удовлетворяют условию леммы 8.

Лемма 9. *Пусть $\phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть также*

$$f(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(y) G(t,y;x) dy,$$

тогда $f(t,x) \to \phi(x)$ при $t \to 0$.

В **третьем параграфе** приводится доказательство основной теоремы 1.

Вторая глава. Во второй главе исследуется параболическое уравнение специального вида с комплексными коэффициентами. При этом предлагается метод построения фундаментального решения для данного дифференциального оператора, аналогичный действительному случаю в первой главе.

В **первом параграфе** формулируется основная теорема и вводятся ограничения на коэффициенты оператора.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — векторная переменная размерности n, $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — выделенная одномерная переменная, играющая роль времени, $u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция, имеющая в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные $\partial_t, \partial_{x_k}, \partial^2_{x_k x_l} (k,l = 1, \ldots, n)$. Класс таких функций обозначим через $C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.

Оператор $\mathcal{L}$ будем называть "комплексным оператором второго порядка", если он имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}[v] = \frac{(-i)^2}{2} \sum_{k,j=1}^n A_{kj}(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_j} + (-i) \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(B_{kj}(t)\, x_j + c_k(t) \right) \right) \frac{\partial v}{\partial x_k} +$$
$$+ \left(\sum_{k,j=1}^n F_{kj}(t)\, x_k x_j + \sum_{k=1}^n g_k(t)\, x_i + h(t) \right) v,$$

где $A_{kj}(t)$, $B_{kj}(t)$, $c_k(t)$, $F_{kj}(t)$, $g_k(t)$, $k,j = 1, \ldots, n$, и $h(t)$ — некоторые действительнозначные функции только от времени.

Соответственно, "комплексным уравнением второго порядка" будем называть уравнение вида

$$-i\,\hbar\,\dot{u} = \mathcal{L}[u] \tag{25}$$

Замечание 4. *Отметим, что уравнение* (25) *является аналогом многомерного уравнения Шрёдингера с гамильтонианом в правой части вида*

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n A_{kj}(t) p_k p_j + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(B_{kj}(t)\, x_j + c_k(t) \right) \right) p_k +$$
$$+ \left(\sum_{k,j=1}^n F_{kj}(t)\, x_k x_j + \sum_{k=1}^n g_k(t)\, x_i + h(t) \right),$$

где $p_k = -i\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ *— координата импульса квантовой частицы.*

Гипотеза А. *Коэффициенты* $A(t)$, $B(t)$, $F(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *“комплексного оператора второго порядка”* $\mathcal{L}$ *суть функции, непрерывные на* $\mathbb{R}_+$ *и имеющие при* $t \to 0$ *конечные пределы* A_0, B_0, $F_0 \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *соответственно. При этом предполагается, что* $A(t)$ *— симметричная матрица, а матрица* A_0 *является положительно определенной.*

Пусть решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} P\,' = -\dfrac{1}{\hbar}P\left(\dfrac{2}{\hbar}SA + B^T\right) - \dfrac{1}{\hbar}\left(\dfrac{2}{\hbar}AS + B\right)P - \dfrac{2}{\hbar^2}A, \\ P|_{t=0} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{26}$$

где $S(t)$ является симметричным решением задачи

$$\begin{cases} S\,' = \dfrac{2}{\hbar^2}SAS + \dfrac{1}{\hbar}\left(SB + B^TS\right) + \dfrac{1}{2}\left(F + F^T\right), \\ S|_{t=0} = \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{27}$$

представимо в виде

$$P(t) = -\frac{2t}{\hbar^2}A_0 + \frac{1}{\hbar^2}R(t) \tag{28}$$

в окрестности нуля, где $R(t)$ — некоторая матрица, заданная на отрезке $[0, \varepsilon]$. Здесь $0 < \varepsilon << 1$ — некоторая постоянная.

Введем следующие обозначения:

$$Q(t) = -\frac{1}{2t}R(t)A_0^{-1}, \tag{29}$$

$$\overline{Q}(t) = [E + Q(t)]^{-1} - E, \tag{30}$$

$$\tilde{Q}(t) = \overline{Q}(t) + (A(t) - A_0)A_0^{-1}[E + \overline{Q}], \tag{31}$$

$$\tilde{q}(t) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\tilde{Q}. \tag{32}$$

Гипотеза Б. *При* $0 \le t < \varepsilon$ *существует несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^t \frac{\tilde{q}(s)}{s}ds < +\infty.$$

Пусть даны следующие две системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} S' = \dfrac{2}{\hbar^2}SAS + \dfrac{1}{\hbar}\left(SB + B^TS\right) + \dfrac{1}{2}\left(F + F^T\right), \\ q' = \dfrac{1}{\hbar^2}\left(2SA + \hbar B^T\right)q + \dfrac{2}{\hbar}Sc + g, \\ r' = \dfrac{1}{2\hbar^2}q^TAq + \dfrac{1}{\hbar}q^Tc + h, \\ \psi' = -\dfrac{1}{\hbar}\mathrm{tr}(AS) \end{cases} \tag{33}$$

и

$$
\begin{cases}
P' = -\dfrac{1}{\hbar}P\left(\dfrac{2}{\hbar}SA + B^T\right) - \dfrac{1}{\hbar}\left(\dfrac{2}{\hbar}AS + B\right)P - \dfrac{2}{\hbar^2}A, \\
m' = -\dfrac{1}{\hbar}\left(\dfrac{2}{\hbar}AS + B\right)m - \dfrac{1}{\hbar^2}Aq - \dfrac{1}{\hbar}c, \\
C' = C \cdot \dfrac{1}{\hbar^2}\left(\mathrm{tr}\left(AP^{-1}\right)\right).
\end{cases} \tag{34}
$$

А также рассмотрим задачу Коши для оператора $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}$, введённого выше,

$$
\begin{cases}
-i\,\hbar\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}[u], \\
u|_{t=0} = \delta_y(x),
\end{cases} \tag{35}
$$

где $\delta_y(x)$ есть дельта–функция с особенностью в точке $y \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* **А** *и* **Б**. *Тогда решением задачи Коши* (35) *будет функция* $u(t,x)$, *равная*

$$
\begin{gathered}
\exp\left\{-\frac{x^T S(t)x + q^T(t)x + r(t) + i\psi(t)}{i\hbar}\right\}(1+i)\,C(t)\cdot \\
\cdot\exp\left\{-\frac{\left\langle P^{-1}(t)(x - m(t;y)),(x - m(t;y))\right\rangle}{i\hbar}\right\},
\end{gathered} \tag{36}
$$

где $S(t)$, $q(t)$, $r(t)$ *и* $\psi(t)$ *суть решения системы уравнений* (33) *с начальными условиями* $S_{kj}(0) = q_l(0) = r(0) = \psi(0) = 0$ *для* $\forall k,j,l \in \overline{1,n}$, $P(t)$, $m(t;y)$ *суть решения двух первых уравнений системы* (34) *с начальными условиями* $P_{kj}(0) = 0$ *для* $\forall k,j \in \overline{1,n}$, $m(0) = y$, *а* $C(t)$ *— частное решение третьего уравнения системы* (34) *вида*

$$
C(t) = \frac{\sqrt{\hbar^n}}{\sqrt{2i(-2i)^n(\pi t)^n \det A_0}}\ \exp\left\{-\frac{n}{2}\int\limits_0^t \frac{\tilde{q}(s)}{s}ds\right\}. \tag{37}
$$

Во **втором параграфе** приводятся вспомогательные утверждения и леммы.

Имеет место утверждение (аналог теоремы 3.1 из работы[46]).

Лемма 10. *Не обращающиеся в ноль функция* $\rho \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ *вида*

$$
\rho(t,x) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(x^T S(t)x + q^T(t)x + \tilde{r}(t)\right)\right\}, \tag{38}
$$

где $S \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *является решением "комплексного уравнения второго порядка"* (25) *в том и только том случае, если ее коэффициенты* $S(t)$, $q(t)$ *и*

[46] *Yau S. S.-T.* Computation of Fokker-Planck Equation. Quart. Appl. Math. Vol. 62. Num. 4. 2004. p. 643–650.

$\tilde{r}(t)$ удовлетворяют системе уравнений типа Риккати

$$\begin{cases} S' = \frac{1}{2\hbar^2}\left(S^T AS + SAS^T + 2SAS\right) + \frac{1}{\hbar}\left(SB + B^T S^T\right) + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = \frac{1}{2\hbar^2}\left(2SA + 2S^T A + 2\hbar B^T\right) q + \frac{1}{\hbar}\left(Sc + S^T c\right) + g, \\ \tilde{r}' = \frac{1}{2\hbar^2} + \frac{1}{2} q^T Aq + \frac{1}{\hbar}\left(q^T c - itr(AS)\right) + h. \end{cases} \tag{39}$$

Следующие две леммы аналогичны приведённым в [1].

Лемма 11. *Функция $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ вида*

$$v(t,x) = \frac{\tilde{C}(t)}{\rho(t,x)} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\langle P^{-1}(t)(x - m(t)), (x - m(t))\rangle\right\}, \tag{40}$$

где коэффициенты $\tilde{C}(t)$ и $m(t)$ задаются следующим образом:

$$m = -\frac{1}{2}Pq, \tag{41}$$

$$\tilde{C} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\tilde{r} - \frac{1}{4}\langle Pq, q\rangle\right)\right\}, \tag{42}$$

а $\rho(t,x)$ удовлетворяет (38), является решением уравнения

$$-i\hbar\frac{\partial v}{\partial t} = -\left\langle \frac{1}{2}A, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\rangle - \frac{i}{\hbar}\left\langle \hat{B}x + \hat{c}, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle, \tag{43}$$

в котором $\hat{B} = 2AS + \hbar B$ и $\hat{c} = Aq + \hbar c$, тогда и только тогда, когда при замене $\tilde{C}(t) = C(t)(1 + i)$ ее коэффициенты удовлетворяют системе (34).

Пусть $P(t)$, $m(t; y)$ суть решения двух первых уравнений системы (34) с начальными условиями $P_{ij}(0) = 0$ для $\forall i, j \in \overline{1, n}$, $m(0) = y$, а $C(t)$ — частное решение третьего уравнения системы (34) вида (37).

Составим функцию

$$G(t, x; y) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},$$

$$G(t, x; y) = (1 + i)C(t) \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\langle P^{-1}(t)(x - m(t; y)), (x - m(t; y))\rangle\right\}.$$

Лемма 12. *Пусть $\phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть также*

$$f(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(y)G(t, y; x)dy,$$

тогда $f(t, x) \to \phi(x)$ при $t \to 0$.

Во **третьем параграфе** приводится доказательство основной теоремы 2.

Третья глава. В третьей главе мы приводим известные результаты, касающиеся применения методов, изложенных в первой и второй главах, в прикладных задачах.

Основные публикации автора по теме диссертации

[1] Chechkin A.G. Explicit Form of the Fundamental Solution to a Second Order Parabolic Operator. Journ. of Math. Sc. Vol. 210. Num. 4. 2015. p. 545–555 (Английский перевод статьи Чечкин А.Г. Явный вид фундаментального решения параболического дифференциального оператора второго порядка. Проблемы мат. анализа. Вып. 81. 2015. с. 179–188.).

[2] Чечкин А.Г., Шамаев А.С. О фундаментальном решении уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Доклады Академии Наук. Том 472. Ном. 4. 2017. стр. 383–387.

В статье [2] Чечкину А.Г. принадлежит доказательство основной теоремы для $\mathbb{R}$.

[3] Чечкин А.Г., Шамаев А.С. О комплексном фундаментальном решении уравнения Шрёдингера. Доклады Академии Наук. Том 473. Ном. 1. 2017. стр. 21–23.

В работе [3] Чечкину А.Г. принадлежит доказательство основной теоремы для $\mathbb{C}$.

[4] Чечкин А.Г. О явном виде фундаментального решения параболиеского оператора. Материалы Международного молодежного научного форума "Ломоносов-2015" (с 13 по 17 апреля 2015 года, Москва, Россия). Москва: МАКС Пресс, 2015.

[5] Чечкин А.Г. Явный вид фундаментального решения параболического оператора с примерами. Сборник тезисов Пятой международной конференции "Многомасштабные методы и моделирование: переход от микро- к макромасштабу в механике и медицине" (с 25 по 27 июня 2015 года, Москва, Россия). Москва: Изд-во университета им. Баумана, 2015.

[6] Чечкин А.Г. Явный вид фундаментального решения параболического оператора. Сборник тезисов Третьей международной научной конференции "Современные проблемы механики" (с 27 по 29 августа 2015 года, Киев, Украина), стр. 88. Киев: Изд-во университета им. Тараса Шевченко, 2015.

[7] Чечкин А.Г., Шамаев А.С. Явный вид фундаментального решения параболического оператора с приложениями. Труды 58-й научной конференции МФТИ (с 23 по 28 ноября 2015 года, Москва, Россия). Москва: Изд-во университета МФТИ, 2015.

[8] Чечкин А.Г., Шамаев А.С. Явный вид фундаментального решения комплексного параболического оператора. Труды 59-й научной конференции МФТИ (с 21 по 26 ноября 2016 года, Москва, Россия), стр. 20–21. Москва: Изд-во университета МФТИ, 2016.