МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.957

Кисатов Марат Александрович

О ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ МАРАНГОНИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Научные руководители:	Доктор физ.-мат. наук, профессор **Самохин Вячеслав Николаевич**
	Доктор физ.-мат. наук, профессор **Чечкин Григорий Александрович**
Официальные оппоненты:	**Панкратов Леонид Сергеевич,** Доктор физ.-мат. наук, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», доцент кафедры высшей математики
	Королёва Юлия Олеговна, Кандидат физ.-мат. наук, ФГАОУ ВО «РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина», доцент кафедры высшей математики
Ведущая организация:	Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Защита диссертации состоится 09 сентября 2022 г. в 17:30 на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном Университете им. А.Г. и Н.Г. Столетовых по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 237, ВлГУ, Педагогический институт.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного Университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых и на сайте http://diss.vlsu.ru/.

Автореферат разослан 18 июля 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Основными направлениями в математической гидродинамике являются исследование корректной разрешимости краевых задач для систем дифференциальных уравнений, описывающих движение жидкости, и построение новых математических моделей вязких сплошных сред, адекватных экспериментальным данным.

В связи со стремительным развитием технологий уравнений Навье-Стокса оказывается недостаточно для описания многих вязких сред. Возникает потребность в новых моделях, описывающих жидкости, которые обладают более сложной реологией. Одну из таких моделей предложила О.А. Ладыженская. В данной диссертационной работе рассматрвиается система уравнений Навье-Стокса в модификации О.А. Ладыженской, которая в двумерном случае имеет вид[1]

$$
\begin{gathered}
-\nu \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\big(1+kB^2(u)\big)B_{ij}(u)\Big) + \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1{,}2, \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \qquad (1) \\
B_{ij}(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \qquad B^2(u) = \sum_{i,j=1}^{2} B_{ij}^2(u),
\end{gathered}
$$

Здесь ν — кинематический коэффициент вязкости, k — малая положительная постоянная, p — давление, ρ — плотность жидкости; x_1, x_2 — координаты, а u_1 и u_2 — соответствующие этим направлениям компоненты скорости.

Известно, что при достаточно большой скорости течения жидкости можно выделить пограничный слой Прандтля[2,3,4,5] вблизи твердой поверх-

[1] *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. Физмалит. 1970.

[2] *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibund // Verh. Int. Math. Kongr. Heidelberg, 1904. Teubner, 1905. P. 484 - 494.

[3] *Олейник О.А.* О системе уравнений Прандтля в теории пограничного слоя // ДАН СССР. 1963. Т.150, № 1. С. 28-32.

[4] *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997 - 512 с.

[5] *Хуснутдинова Н.В.* Математические вопросы управления пограничным слоем с помощью отсосов. // Сиб.мат.ж. 1972. Т.13. №2. С.485–489.

ности и слой Марангони[6,7,8,9,10,11] вблизи свободной границы. Пограничные слои Маранони начали изучаться во второй половине XX века. Явление переноса жидкости вдоль границы раздела двух фаз, которое возникает из-за наличия градиента поверхностного натяжения, называется конвекцией Марангони (или эффектом Марангони-Гиббса). Это явление впервые было качественно описано Томсоном в 1855 году при исследовании причин возникновения так называемых «слез» в вине или в любом другом крепком спиртном. Поэтому эффект Марангони иногда называют эффектом Томсона. Только в 1865 году итальянский физик Марангони провел подробное исследование описанного эффекта в своей докторской диссертации. Полное теоретическое описание эффекта Марангони на основе уравнений Навье-Стокса и уравнений термодинамики опубликовано Чандрасекаром в 1961 году. Первые результаты расчетов пограничного слоя Марангони, опубликованные в 1979 году, принадлежат итальянскому инженеру-физику Наполитано[12].

Среди явлений, которые инициируют движение жидкости вблизи свободной границы, выделяют следующие: неравномерное распределение температуры (термокапиллярность), поток газа вдоль свободной поверхности; добавление поверхностно активных веществ (соленой морской воды, масла, жидкого мыла,...); массоперенос, конвекция и другие типы принудительного течения. Все эти эффекты вызывают неравномерность в поверхностном натяжении, что приводит к возникновению движения на границе раздела фаз.

Интерес к экспериментам по микрогравитация с участием эффектов Марангони в большей степени обусловлен желанием выращивать идеальные кристаллы. Эффект Марангони (или конвекция Марангони) играет большую роль при выращивании желаемых видов кристаллов. Были отмечены случаи, когда в невесомости удавалось получать монокристаллы вместо их аналогов в наземных условиях.

---

[6] *Кузнецов В.В.* О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 67. С. 68–75.

[7] *Batishchev V.A., Kuznetsov V.V., Pukhnachov V.V.* Marangoni boundary layers // Prog. Aerospace Sci. 1989. V. 26. P. 353–370.

[8] *Пухначев В.В.* Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 5. С 1061–1064.

[9] *Кузнецов В.В.* О задаче перехода пограничного слоя Марангони в слой Прандтля // Сиб. мат. журнал. 2000. Т. 41. № 4. С. 822-838.

[10] *Кузнецов В.В.* Поганичные слои Марангони: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Кузнецов Владимир Васильевич. - Новосибирск, 1984. С. 29-42.

[11] *C. Marangoni.* Sull'espansione delle goccie di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquido. — 1865.

[12] *Napolitano L.G.* Marangoni boundary layers // Proc. 3rd Europ. symp. on material sci. in space. Grenoble, 1979. P. 349–358.

Результаты, полученные в данной работе, относятся к вопросу однозначной разрешимости «в целом» решений уравнений для пограничного слоя Марангони в случае жидкости Ладыженской, а также решений уравнений для температурного слоя Марангони.

Актуальность диссертационной работы обусловлена важностью в теоретическом плане исследований пограничных слоев Марангони вязкой жидкости. Результаты данной работы могут быть применены в отраслях, где эффект Марангони играет ключевую роль, например, в выращивании монокристаллов.

Целью работы является получение условий существования единственного решения задачи продолжения пограничного слоя Марангони для реологической среды Ладыженской, а также установление условий для существования единственного решения температурного слоя в случае слоя Марангони.

Также целью является доказательство теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи сопряжения типа Стефана для магнитогидродинамического пограничного слоя вблизи твердой поверхности, через которую происходит впрыск жидкости Ладыженской.

Методы исследования. Для доказательства основных утверждений данной диссертационной работы используется замена переменных фон Мизеса, которая позволяет перевести систему уравнений стационарного пограничного слоя к квазилинейному параболическому уравнению. Применяется принцип максимума, справедливый для уравнений параболического типа. Также применяются теоремы вложения Соболева и тоерема Арцела.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные научные результаты:

– доказана теорема существования и единственности классического решения задачи о пограничном слое Марангони для жидкости Ладыженской;
– доказана теорема существования и единственности классического решения задачи о температурном пограничном слое Марангони для жидкости Ладыженской;
– доказана теорема существования и единственности обощенного решения задачи сопряжения типа Стефана для магнитогидродинамического пограничного слоя вблизи твердой поверхности, через которую происходит инъекция жидкости Ладыженской.

Теоретическая и практическая значимость. Предлагаемая работа носит теоретический характер и может быть использована в различных разделах качественной теории дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, механики сплошных сред.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара под руководством Чечкина Г.А., на спецсеминаре «Вопросы математического моделирования критических явлений» под руководством Е.В. Радкевича, С.А. Степина, А.В. Боровских и В.В. Палина, на спецсеминаре под руководством В.И. Данченко во ВлГУ, на семинаре «Прикладная гидродинамика» под руководством В.В. Пухначева и Е.В. Ерманюка в Институте гидродинамики им. Лаврентьева.

Результаты работы также докладывались на следующих научных конференциях:

1. XXVII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», г. Москва, Россия, (10-27 ноября 2020);
2. Всероссийская научно-практическая конференция, Московский Политех, Москва (17 июня 2021 г.);
3. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная выдающемуся математику И.Г.Петровскому (24 сессия совместных заседаний ММО и семинара им. И.Г.Петровского) (26-30 декабря 2021);

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 публикациях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в прочих научных журналах и материалах конференций.

Личный вклад автора.

В совместных работах из реферируемых изданий автору принадлежат следующие результаты:

– Работа [2]: получено обобщение теоремы существования и единственности решения температурного пограничного слоя в случае слоя Марангони.
– Работа [4]: установлена теорема существования и единственности решения магнитогидродинамического пограничного слоя вблизи твердой стенки при условии впрыска в этот слой жидкости, удовлетворяющей реологическому закону Ладыженской.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, включающего 73 наименования. Общий объем диссертации составляет 117 страниц.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук профессору Чечкину Григорию Александровичу и доктору физико-математических наук профессору Самохину Вячеславу Николаевичу за постоянное внимание к работе и плодотворное сотрудничество.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются научная новизна и практическая значимость поставленной работы.

В **первой главе** установлена теорема существования единственного решения задачи о продолжении пограничного слоя Марангони на интервал произвольной протяженности. Получено асимптотическое при $x \to \infty$ неравенство для продольной компоненты скорости в решении задачи о пограничном слое.

С помощью процедуры, предложенной Прандтлем, из системы уравнений (1) получается система уравнений стационарного пограничного слоя

$$\begin{aligned} \nu\left[1+3k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}+U(x)\frac{dU(x)}{dx}&=0,\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=0,\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=0, \end{aligned} \tag{2}$$

где скорость внешнего течения $U(x)$ связана с давлением $p(x)$ уравнением Бернулли

$$U^2(x)+2p(x)=const$$

Предполагается, что система уравнений (2) выполняется в области

$$D=\{0<x<X,\, 0<y<\infty\}$$

вместе с граничными условиями

$$\begin{gathered} u|_{x=0}=u_0(y),\quad v|_{y=0}=v_0(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\widehat{A}(x),\\ u(x,y)\to U(x)\quad \text{равномерно по } x\in[0,X] \text{ при } y\to+\infty, \end{gathered} \tag{3}$$

где функции $u_0(y)$, $v_0(x)$, $\widehat{A}(x)$ обозначают, соответственно, исходный профиль скоростей, скорость всасывания (или впрыска) жидкости из потока (в поток) через границу $\{y=0\}$ и касательное напряжение вдоль границы $\{y=0\}$.

Определение 1. *Классическим решением задачи (2), (3) называются функции $u(x,y)$, $v(x,y)$, которые обладают следующими свойствами:*

- *$u(x,y)$, $v(x,y)$ непрерывны в $\overline{D}$, имеют в D непрерывные производные, входящие в (2);*
- *$u(x,y)$, $v(x,y)$ удовлетворяют поточечно уравнениям (2) и условиям (3).*

Для исследования вопроса о существовании единственного классического решения задачи (2), (3) вводится замена Мизеса

$$\begin{gathered} x=x,\quad \psi=\psi(x,y),\quad w(x,\psi)=u^2(x,y),\\ u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v-v_0=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \psi|_{y=0}=0, \end{gathered} \tag{4}$$

при помощи которой система уравнений (2) сводится к одному квазилинейному уравнению

$$\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}-\frac{\partial w}{\partial x}-v_0\frac{\partial w}{\partial\psi}+W'(x)=0, \tag{5}$$

где $W(x)=U^2(x)$. Граничные условия (3) в обобзначениях (4) переходят в условия

$$\begin{aligned} w|_{x=0}=w_0(\psi), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial\psi}\right|_{\psi=0}=A(x),\\ w(x,\psi)\to W(x) \quad \text{равномерно по } x\in[0,X] \text{ при } \psi\to+\infty, \end{aligned} \tag{6}$$

а прямоугольная область D — в область

$$G=\{0<x<X,\ 0<\psi<\infty\}, \quad X>0.$$

В условиях (6) функции $w_0(\psi)$, $A(x)$ являются исходным профилем скоростей и касательным напряжением, соответственно. Причем $A(x)=2\widehat{A}(x)$.

Определение 2. *Классическим решением задачи (5), (6) называется неотрицательная функция $w(x,\psi)$, которая обладает следующими свойствами:*

- *$w(x,\psi)$ — непрерывна в $\overline{G}$, имеет в G непрерывные производные $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial\psi}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}$;*
- *$w(x,\psi)$ удовлетворяет уравнению (5) и условиям (6).*

Для классического решения задачи (5), (6) справедливо утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

$$\begin{aligned} A(x), W(x), v_0(x)\in C^1[0,X],\ w_0(\psi)\in C^{2+\beta}[0,\infty),\ \beta>0,\\ A(x)\le 0,\ W(x)\ge 0\ \forall x\in[0,X],\\ w_0(\psi)>W(0)\ \forall\psi\in[0,\infty),\ w_0'(0)=A(0),\\ w_0(\psi)\to W(0) \quad \textit{при} \quad \psi\to\infty \end{aligned}$$

и пусть существует постоянная $C>0$, такая что

$$\left|\nu\sqrt{w_0}\left(1+\frac{3}{4}k(w_0')^2\right)w_0''-v_0w_0'\right|\le C\Big[w_0(\psi)-W(0)\Big]. \tag{7}$$

Тогда существует единственное решение $w(x,\psi)$ задачи (5), (6), такое что $w(x,\psi)$ непрерывно и ограничено в $\overline{G}$, а частные производные $\frac{\partial w}{\partial\psi}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ непрерывны и ограничены в G.

Из теоремы 1 и замены (4) вытекают следующие утверждения относительно существования и единственности решения $u(x,y)$, $v(x,y)$ исходной задачи (2), (3).

Теорема 2 (Существования решения задачи (2), (3))**.** *Пусть выполнены следующие условия*

$$\begin{aligned}\widehat{A}(x), U(x), v_0(x) \in C^1[0,X],\ u_0(y) \in C^{2+\beta}[0,\infty),\ \beta > 0,\\ \widehat{A}(x) \le 0, U(x) \ge 0\ \forall x \in [0,X],\\ u_0(y) > U(0)\ \forall y \in [0,\infty),\ u_0'(0) = \widehat{A}(0),\\ u_0(y) \to U(0) \quad \textit{при} \quad y \to \infty\end{aligned}$$

и существует постоянная $C > 0$, такая что выполнено неравенство (7)*. Тогда в области $D = \{0 < x < X,\ 0 < y < +\infty\}$ существует решение $u(x,y)$, $v(x,y)$ задачи* (2), (3)*, обладающее свойствами:*

– *$u(x,y)$ — непрерывна и ограничена в $\overline{D}$,*
– *$u(x,y) > 0$ при $y > 0$,*
– *$\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ — непрерывны и ограничены в D; $\frac{\partial u}{\partial x}$, v, $\frac{\partial v}{\partial y}$ — непрерывны и ограничены в любой конечной части $\overline{D}$.*

Теорема 3 (Единственности решения задачи (2), (3))**.** *Пусть для решения $u(x,y)$, $v(x,y)$ задачи* (2), (3) *в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, выполняются неравенства*

$$\begin{aligned}0 < u < M_1, \qquad \psi > 0,\\ M_2 y \le u \le M_3 y, \qquad 0 < y < y_0,\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \le M_4, \qquad (x,y) \in D,\end{aligned}$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 и y_0 — некоторые положительные постоянные. Тогда $u(x,y)$, $v(x,y)$ — единственное решение задачи (2), (3)*.*

Теорема 1 справедлива также для частного случая, когда скорость внешнего течения $U(x)$ тождественно равна нулю. В этом случае имеют место уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left[\frac{\nu}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial \psi}\left(1 + \frac{k}{4}\left(\frac{\partial(u^2)}{\partial \psi}\right)^2\right) - \frac{v_0}{2}u\right] \tag{8}$$

и граничные условия

$$u(0,\psi) = \sqrt{w_0(\psi)}, \qquad \frac{\partial(u^2)}{\partial \psi} = 2\widehat{A}(x) \equiv A(x). \tag{9}$$

Введем определение обобщенного решения задачи (8), (9).

Определение 3. *Неотрицательную, непрерывную и ограниченную в G функцию $u(x,y)$ назовем обобщенным решением задачи* (8), (9), *если существует ограниченная в G обобщенная производная $\frac{\partial(u^2)}{\partial\psi}$ и для любой функции $f(x,\psi) \in C^1(G)$, равной нулю при $x = X$ и в окрестности границы области G, выполняется интегральное тождество*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial f}{\partial x}u - \frac{\partial f}{\partial \psi}\left(\frac{\nu}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial\psi}\left(1 + \frac{k}{4}\left(\frac{\partial(u^2)}{\partial\psi}\right)^2\right) - \frac{v_0}{2}u\right)\right) dx d\psi +$$

$$+ \int\limits_0^\infty f(0,\psi)\sqrt{w_0(\psi)}\, d\psi + \nu \int\limits_0^X f(x,0)\widehat{A}(x)(1 + k\widehat{A}^2(x))\, dx = 0.$$

Обобщенное решение задачи (8), (9) существует, единственно и удовлетворяет уравнению (8) в обычном смысле.

В предположении, что для решения $u(x,y)$, $v(x,y)$ задачи (2), (3) выполняются теоремы 2 и 3, для частного случая $U(x) \equiv const$ установлено утверждение.

Теорема 4. *Пусть $U(x) \equiv U_1 = const$, $w_1(x,\psi)$, $w_2(x,\psi)$ — два различных решения задачи* (5), (6) *с начальными условиями $w_1(0,\psi) = w_{10}(\psi)$ и $w_2(0,\psi) = w_{20}(\psi)$, соответственно. Если*

$$\int\limits_0^\infty \left|\sqrt{w_{10}(\psi)} - \sqrt{w_{20}(\psi)}\right| d\psi < \infty,$$

то

$$\left(\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}\right)^2 \leq \frac{M_5}{(1+x)^{\frac{1}{4}}}$$

при $0 < \psi_* \leq \psi \leq \psi^* < \infty$, где M_5, ψ_*, ψ^* — постоянные, причем выбор постоянной M_5 зависит от ψ_* и ψ^*.

Во **второй главе** обобщена теорема существования и единственности решения задачи о температурном пограничном слое[13] в случае слоя Марангони. В прямоугольной области $D = \{0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$, $X > 0$ выполняются следующие уравнения

$$\nu\left[1 + 3k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = -UU_x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{10}$$

$$a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{11}$$

[13] *Джураев Т.Д.* Об однозначной разрешимости основной краевой задачи теории температурного пограничного слоя. Прикладная математика и механика, 1974, т. 38, № 1, с. 170-175.

вместе с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \widehat{A}(x), \quad u|_{x=0} = u_0(y), \quad v|_{y=0} = v_0(x),$$
$$u(x,y) \to U(x) \quad \text{равномерно по } x \in [0,X] \text{ при } y \to +\infty, \tag{12}$$

$$T|_{y=0} = T_w(x),$$
$$T(x,y) \to T_\infty \quad \text{равномерно по } x \in [0,X] \text{ при } y \to +\infty. \tag{13}$$

В задаче (10)–(13) неизвестными являются компоненты скорости $u(x,y)$, $v(x,y)$ и температура среды $T(x,y)$. Постоянные физические параметры среды ν, k, a, c и T_∞, где T_∞ — температура внешнего потока, считаются заданными. Также заданными считаются функции $U(x)$, $\widehat{A}(x)$, $v_0(x)$ и $T_w(x)$, где $T_w(x)$ характеризует температуру среды вблизи границы $\{y = 0\}$.

Поскольку решение $u(x,y)$, $v(x,y)$ задачи (10), (12) не зависят от температуры $T(x,y)$, то задача (10), (12) может быть решена отдельно. Существование единственного решения $u(x,y)$, $v(x,y)$ этой задачи установлено[14]. Для классического решения $T(x,y) \in C^2(D) \cup C(\overline{D})$ задачи (11), (13) имеет место утверждение.

Теорема 5. *Пусть функции $u(x,y)$, $v(x,y) \in C(\overline{Q})$ являются решением задачи (10), (12), для которого выполнены теоремы 2 и 3. Пусть, кроме того, функция $f(x,y) \in C(D)$ локально удовлетворяет условию Гельдера в D с показателем $0 < \gamma \leq 1$, а функция T_w является дифференцируемой на $[0,X]$ и ее производная ограничена на $[0,X]$. Пусть также*

$$\int_0^{+\infty} \exp\Big(\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big)dt < \infty,$$

где $\beta(y) = \max\limits_{0\leq x\leq X} v(x,y)$, а для функции $g(y) = \max\limits_{0\leq x\leq X} |f(x,y)|$ выполнено

$$\int_0^{+\infty} g(\tau)\exp\Big(-\int_0^\tau \beta(s)ds\Big)d\tau < \infty.$$

Тогда задача (11), (13) имеет в D единственное классическое ограниченное решение $T(x,y)$.

В **третьей главе** установлено существование единственного обобщенного решения системы уравнений ламинарного магнитогидродинамического пограничного слоя на проницаемой твердой поверхности, через которую производится инъекция в пограничный слой жидкости, удовлетворя-

[14] *Кисатов М.А.* Система уравнений пограничного слоя Марангони в среде с реологическим законом О.А.Ладыженской // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2021, т. 498, с. 41–44.

ющей реологическому закону Ладыженской. При этом возникает задача типа Стефана с неизвестной границей[15].

Предполагается, что область $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ разделена непрерывной кривой $\gamma = \{(x,y):\ y = y_*(x) > 0,\ 0 \le x \le X\}$ на области

$$D_1 = \{0 < x < X, 0 < y < y_*(x)\}$$

и

$$D_2 = \{0 < x < X, y_*(x) < y < \infty\},$$

причем граница γ неизвестна, а значение $y_*(0)$ задано. В области D_1 рассматривается система уравнений

$$\begin{gathered} \nu_1\left[1+3k\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{1}{\rho_1}\frac{dp(x)}{dx} - \\ -\frac{\sigma_1}{\rho_1}B(x)\Big(u_1B(x)+E(x)\Big) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

а в области D_2 — система уравнений

$$\begin{gathered} \nu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{1}{\rho_2}\frac{dp(x)}{dx} - \frac{\sigma_2}{\rho_2}B(x)\Big(u_2B(x)+E(x)\Big) = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

В уравнениях (14), (15) ν_i, ρ_i, σ_i, $i = 1,2$ — вязкость, плотность и электропроводность соответствующих жидкостей, k — малая положительная постоянная, $B(x)$ — y-компонента вектора магнитной индукции, $E(x)$ — компонента вектора напряженности электрического поля, ортогональная плоскости XOY, $p(x)$ – давление.

Уравнения (14), (15) дополняются граничными условиями

$$\begin{gathered} u_1(0,y) = u_{10}(y) \text{ при } 0 \le y \le y_*(0), \quad u_1(x,0) = 0,\ v_1(x,0) = v_0(x), \\ u_2(0,y) = u_{20}(y) \text{ при } y_*(0) \le y < \infty, \\ u_2(x,y) \to U(x) \text{ равномерно по } x \in [0,X] \text{ при } y \to +\infty, \end{gathered} \tag{16}$$

где функции $U(x)$, $u_{10}(y)$, $u_{20}(y)$, $v_0(x)$ считаются заданными, причем $U(x) > 0$, $u_{i0}(y) \le U(0)$, $i = 1,2$.

[15] *Kisatov M.A., Samokhin V.N., Chechkin G.A.* On Solutions to Equations of Magnetohydrodynamic Boundary Layer with Injection of a Medium Obeying the Ladyzhenskaya Rheological Law // Journal of Mathematical Sciences. Plenum Publishers (United States). 2022. T. 260, № 6, P. 774-797.

На кривой γ заданы условия

$$u_1(x,y_*(x)) = u_2(x,y_*(x)), \tag{17}$$

$$\nu_1\rho_1\frac{\partial u_1(x,y_*(x))}{\partial y}\left(1+k\Big[\frac{\partial u_1(x,y_*(x))}{\partial y}\Big]^2\right) = \nu_2\rho_2\frac{\partial u_2(x,y_*(x))}{\partial y}, \tag{18}$$

$$\frac{dy_*(x)}{dx} = \frac{v_1(x,y_*(x))}{u_1(x,y_*(x))} = \frac{v_2(x,y_*(x))}{u_2(x,y_*(x))}. \tag{19}$$

Для задачи (14)—(19) справедливо утверждение.

Теорема 6. *Предположим, что функции $p'(x)$, $v_0(x)$, $B(x)$, $E(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $0 \le x \le X$, $u_{i0}(y)$, $u'_{i0}(y)$, $u''_{i0}(y)$, $i = 1{,}2$, ограничены и удовлетворяют условию Гельдера, $u'_{10}(0) > 0$, $u_{20}(y) \to U(0)$ при $y \to \infty$, $u_{i0}(y) \le U(0)$, $i = 1{,}2$, выполняются равенства*

$$u_{10}(y_*(0)) = u_{20}(y_*(0)),$$

$$\nu_1\rho_1 u'_{10}\big(y_*(0)\big)\left(1+k\Big(u'_{10}\big(y_*(0)\big)\Big)^2\right) = \nu_2\rho_2 u'_{20}\big(y_*(0)\big)$$

и условие согласования в точке $(0{,}0)$

$$\nu_1\Big(1+\frac{3}{4}k\big(u'_{10}(y)\big)^2\Big)u''_{10}(y) - v_0(0)u'_{10}(y) - \frac{p'(0)}{\rho_1} - \frac{\sigma_1}{\rho_1}B^2(0)u_{10}(y) - \\ - \frac{\sigma_1}{\rho_1}B(0)E(0) = O(y^2) \;\; \textit{при} \;\; y \to 0.$$

Тогда при некотором $X > 0$ существует обобщенное решение задачи (14)–(19). Если, кроме того, выполняется неравенство

$$\frac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x) \le -\beta_0 < 0,$$

где $\beta_0 = const$, то решение существует при любом $X > 0$. Если же выполнены условия

$$\frac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x) \le 0, \qquad v_0(x) \ge 0,$$

то решение задачи (14)–(19) единственно.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Кисатов М.А. Система уравнений пограничного слоя Марангони в среде с реологическим законом О.А.Ладыженской // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2021, т. 498, с. 41–44
2. Кисатов М.А., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. О температурном пограничном слое в вязкой неньютоновской среде // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, т. 502, с. 28–33

   В работе [2] Кисатову М.А. принадлежит обобщение теоремы существования и единственности решения температурного пограничного слоя в случае слоя Марангони.
3. Кисатов М.А. О задаче Стефана для системы уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя с инъекцией среды с реологическим законом О.А.Ладыженской // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, т. 503, с. 58–62
4. Kisatov M.A., Samokhin V.N., Chechkin G.A. On Solutions to Equations of Magnetohydrodynamic Boundary Layer with Injection of a Medium Obeying the Ladyzhenskaya Rheological Law // Journal of Mathematical Sciences. Plenum Publishers (United States). 2022. Т. 260, № 6, P. 774-797

   В работе [4] Кисатову М.А. принадлежит доказательство теоремы существования и единственности решения магнитогидродинамического пограничного слоя вблизи твердой стенки при условии впрыска в этот слой жидкости, удовлетворяющей реологическому закону Ладыженской.

Остальные публикации автора по теме диссертации

5. Кисатов М.А. О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности для жидкости Ладыженской // Математика: теоретические и прикладные исследования: материалы Всероссийской научно-практической конференции (Москва, 17 июня 2021 г.), Московский Политех, Москва, с. 101-103
6. Кисатов М.А. О задаче Стефана для магнитогидродинамической среды с реологическим законом О. А. Ладыженской. // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная выдающемуся математику И. Г. Петровскому (XXIV-е совместное заседание Московского математического общества и Семинара имени И. Г. Петровского. Москва, 26-30 декабря 2021 г.): Тезисы докладов.-240,-М.: ЛЕНАНД, 2022- 370 с., с. 240. ISBN 978-5-9710-9783-9

Кисатов Марат Александрович

О ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ МАРАНГОНИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография _______________________________________