На правах рукописи

Сурначёв Михаил Дмитриевич

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА P-ЛАПЛАСИАНА

специальность 01.01.02 —
дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Автореферат диссертации
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук” (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН).

Научный консультант: **Алхутов Юрий Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, профессор

Официальные оппоненты: **Мукминов Фарит Хамзаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, ведущий научный сотрудник

Панов Евгений Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, главный научный сотрудник

Тедеев Анатолий Фёдорович, доктор физико-математических наук, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, врио директора

Ведущая организация: **Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова**

Защита состоится «8» декабря 2017 г. в «16» часов «00» мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, по адресу: 600024, г. Владимир, пр-т Строителей, д. 11, корп. 7 ВлГУ, ауд. 133, Факс (4922) 53-25-75, 33-13-91; e-mail: `oid@vlsu.ru`

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых и на сайте `http://diss.vlsu.ru`

Автореферат разослан «____» ______________ 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08
кандидат физико-математических наук С.Б. Наумова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. Основная часть работы посвящена исследованию свойств решений нелинейных параболических уравнений типа p–лапласиана, имеющего вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right), \quad p > 1. \tag{1}$$

Такого рода уравнения возникают при моделировании процессов нелинейной теплопроводности, нелинейной диффузии, течения газа в пористой среде [1]. Модификация системы уравнений Навье-Стокса, в которой вязкость зависит степенным образом от модуля тензора скоростей деформаций [2]–[4], также приводит к уравнениям типа (1). Отметим, что изучение нелинейных процессов диффузии и теплопереноса началось в 1950х годах с другой известной модели — уравнения пористой среды

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(|u|^{m-1}\nabla u\right), \quad m > 0. \tag{2}$$

Здесь идёт речь о процессе теплопроводности [5] или диффузионном [6], в котором коэффициент теплопроводности (диффузии) пропорционален степени температуры (концентрации вещества). Оказалось, что в отличие от классического уравнения теплопроводности, решения нелинейных уравнений теплопроводности могут иметь качественно иные свойства [5]–[12].

Математическое исследование уравнений типа (2) началось с известной работы А.С. Калашникова, О.А. Олейник и Чжоу Юйлинь [13]. Эти исследования были продолжены в работах А.С. Калашникова, Е.С. Сабининой, С. Каменомостской (S. Kamin), D.G. Aronson, A. Friedman, P. Benilan, L. Caffarelli, J.L. Vazquez и других авторов. На данный момент уравнение типа пористой среды можно считать достаточно хорошо изученным. В большом количестве работ, посвящённых уравнению пористой среды, рассматривалось только модельное уравнение (2), что позволяет использовать явные функции сравнения и оценки Аронсона-Бенилана [14]. Результаты для класса квазилинейных уравнений типа пористой среды получены Э. ДиБенедетто и А.В. Ивановым. Теории уравнения пористой среды посвящены обзор [15] и книга [16].

Для эллиптических уравнений типа p–лапласиана применима техника Мозера и ДиДжорджи [17]. В нестационарном случае ситуация сложнее, и результаты [18] параболический p–лапласиан не покрывали.

Активное развитие теории параболического p–лапласиана началось во второй половине 1980-х годов с работ E. DiBenedetto, Y.Z. Chen, A. Friedman, Y.C. Kwong, M.A. Xerrero и др. Доказательство гёльдеровской непрерывности решений для уравнений типа параболического p–лапласиана дано в работах [19], [20]. Гёльдеровские оценки модуля непрерывности градиента получены в [21], [22]. Существование и единственность неотрицательных решений задачи Коши в «предельных» классах установлено в [23] для случая $p > 2$. X. Xu [24] доказал теорему существования и единственности знакопеременных «ренормализованных» решений для $1 < p < 2$. Неравенство Харнака для параболического p–Лапласиана доказано в [25],[26]. Существенно позже E. DiBenedetto, U. Gianazza, V. Vespri доказали неравенство Харнака для уравнений общей структуры [27]–[30]. Теории параболического p–лапласиана посвящены книги [31],[32].

Рассматривались (А.В. Иванов, V. Vespri и др.) и уравнения с двойной нелинейностью, совмещающие эффекты (1) и (2), вида

$$u_t = \operatorname{div}(|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Интересным направлением в теории эллиптических и параболических уравнений с частными производными является моделирование существенно неоднородных сред. В этом случае уравнение содержит вес. Исследование дивергентных неравномерно эллиптических уравнений с весами общей структуры началось с работ С.Н. Кружкова [33] и N. Trudinger [34]. Случай эллиптического уравнения с весом из класса Макенхаупта A_2 изучен в [35],[36]. Линейные параболические уравнения с весами из классов Макенхаупта изучались F. Chiarenza, M. Frasca, R. Serapioni [37]–[41]. Гёльдеровская непрерывность решений уравнений типа параболического p–лапласиана с весом из класса Макенхаупта доказана И.И. Скрыпником [42].

Ю.А. Алхутовым и В.В. Жиковым [43], [44] разработана техника анализа регулярности решений эллиптических уравнений с частично макенхауптовым весом, то есть в ситуации, когда область разделена гиперплоскостью на две части и в каждой из частей вес является макенхауптовым. Получена гёльдеровская непрерывность решений и показано, что неравенство Харнака в обычной форме, вообще говоря, отсутствует. В специальной форме неравенство Харнака установлено в [45]. В работе [46] рассмотрено линейное дивергентное эллиптическое уравнение с весом, принимающем с одной стороны от разделяющей гиперплоскости значение единица, а с другой стороны равным малому параметру. Доказана гёльдеровская непрерывность решений с показателем Гёльдера, не зависящим от малого параметра. Для линейных параболических уравнений аналогичный результат доказан в [47].

Одним из центральных вопросов теории параболических уравнений является асимптотическое поведение решений при неограниченном возрастании времени. Вопросы стабилизации решений линейных уравнений освещены в обзорах [48]–[50]. В случае нелинейных уравнений ситуация усложняется, так как поведение решений нелинейного уравнения теплопроводности может существенно отличаться от линейного случая.

Например, в случае начально-краевой задачи в цилиндрической области с ограниченным основанием и нулевым условием Дирихле на боковой границе, для параболического p–лапласиана в случае $p > 2$ скорость убывания решения при $t \to \infty$ есть $t^{1/(2-p)}$, а для $1 < p < 2$ решение полностью затухает за конечное время [51]. Асимптотическое поведение решение задачи Коши с достаточно быстро затухующими на бесконечности начальными данными также достаточно хорошо изучено [52]–[54]. В этом случае феномен полного затухания за конечное время имеет место для $p < 2n/(n+1)$, при $p = 2n/(n+1)$ решение убывает при $t \to \infty$ с экспоненциальной скоростью, а при $p > 2n/(n+1)$ со степенной.

В случае задачи Коши для линейных дивергентных уравнений заключительным аккордом ряда более ранних работ послужила статья В.В. Жикова [55]. В частности, был установлен критерий равномерной стабилизации решений. В этой же работе доказан и критерий поточечной стабилизации решений при выполнении на коэффициенты уравнения некоторых дополнительных условий. Для уравнения пористой среды критерий стабилизации решений задачи Коши доказан N.D. Alikakos и R. Rostamian [56].

Задача Дирихле в цилиндрических областях с неограниченным основанием изучалась Ф.Х. Мукминовым, Л.М. Кожевниковой, Р.Х. Каримовым и др. В работе [57] получены оценки скорости стабилизации задачи Дирихле для уравнения теплопроводности в терминах геометрических характеристик основания («раствора на бесконечности»). В [58] получены оценки скорости стабилизации для решений дивергентных линейных параболических уравнений в терминах поведения собственного значения оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле в шаре радиуса r. Эти оценки уточнены в [59], [60]. На уравнения типа p–лапласиана этот метод перенесён в [61]. В приведённых результатах начальная функция является гладкой, имеет компактный носитель, и класс ограниченных решений не покрывается. Разработанные в [58]–[61] методы дают достаточно точные оценки скорости убывания решений первой начально-краевой задачи с нулевыми граничными условиями, однако не дают необходимого и достаточного условия на основание цилиндра, которое бы гарантировало стабилизацию решения к нулю. Критерий равномерной стабилизации ограниченных решений задачи Дирихле для линейных дивергентных параболических уравнений в цилиндрической области с неограниченным основанием доказан в [62].

В работах В.Н. Денисова [63], [64] для линейных дивергентных параболических уравнений установлен критерий стабилизации ограниченных решений задачи Дирихле в цилиндрической области с неограниченным основанием с однородным краевым условием на боковой поверхности цилиндра: стабилизация произвольного ограниченного решения равносильно расходимости ряда Винера для бесконечно удалённой точки.

Фундаментальным вопросом в теории краевых задач математической физики является вопрос о единственности решений. Тесно связан с этим вопросом так называемый эффект Лаврентьева — различие точной нижней грани интегрального функционала по всем допустимым функциям и по множеству гладких функций. В силу теоремы Тонелли для интегранта $f(\nabla u)$ с выпуклой f эффект Лаврентьева отсутствует. В.В. Жиков [65] привёл простой пример наличия эффекта Лаврентьева для интегрального функционала с интегрантом вида $f(x,\xi) = |\xi|^{p(x)}$. В.В. Жиков и X.L. Fan нашли достаточное условие отсутствие эффекта Лаврентьева — условие логарифмической гёльдеровости [66]. Вопрос наличия или отсутствия эффекта Лаврентьева сводится к вопросу о плотности гладких функций в соответствующем пространстве Соболева-Орлича. Позже В.В. Жиковым показал [67], что условие логарифмической гёльдеровости можно ослабить. Вопрос о плотности гладких функций нетривиален и в случае весовых пространств Соболева [68], [69].

Важной для приложений является задача о (стационарной) диффузии в несжимаемом потоке $-\operatorname{div}(\nabla u + au) = f$, $\operatorname{div} a = 0$. В ряде случаев [70]–[72] соленоидальный конвективный член естественно записывать в обобщенной форме — как кососимметрическую часть матрицы в главной части дифференциального оператора $-\operatorname{div}((I + A)\nabla u) = f$, $A^T = -A$. В двухмерном случае это соответствует переходу к функции тока, а в трёхмерном — переходу к векторному потенциалу поля скоростей: $\operatorname{div}(w \times \nabla u) = \operatorname{div}(u \operatorname{rot} w)$. В случае неограниченного поля скорости возникает вопрос о единственности решений. Примеры неединственности построены В.В. Жиковым в [73], там же приведён ряд достаточных условий единственности решения.

Таким образом, актуальность выбранной тематики обоснована важностью рассматриваемых задач для приложений и большим многолетним интересом к ним различных групп исследователей. При этом, несмотря на значительную развитость теории, остаётся и ряд недостаточно исследованных, открытых вопросов. Это касается как свойств решений нелинейных параболических уравнений (регулярность в весовом случае, асимптотическое поведение при больших значениях времени), так и такой классической области, как вопросы единственности решений эллиптических уравнений, даже в линейном случае. Часть таких вопросов решается в настоящей работе.

Цели и задачи работы. Целью работы является изучение регулярности и асимптотических свойств решений нелинейных параболических уравнений типа p–Лапласиана, а также нахождение новых условий единственности решений эллиптических уравнений с нестандартными условиями коэрцитивности и роста. В диссертации рассматриваются следующие вопросы.

1. Неравенство Харнака и гёльдеровская непрерывность для решений нелинейных параболических уравнений с весом.

2. Равномерная стабилизация ограниченных решений задачи Коши во всём пространстве для нелинейных параболических уравнений типа p–лапласиана.

3. Критерий стабилизации ограниченных решений задачи Дирихле в цилиндрической области с неограниченным основанием для нелинейных параболических уравнений типа p–лапласиана.

4. Существование решений задачи Коши для уравнений типа параболического

p–лапласиана со знакопеременными начальными данными.
5. Плотность гладких функций в весовом пространстве Соболева-Орлича с переменным показателем суммируемости.
6. Единственность решения задачи Дирихле для стационарного уравнения диффузии в несжимаемом потоке.

Научная новизна полученных результатов. Все полученные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Разработаны новые методы анализа регулярности решений нелинейных параболических уравнений с весом. Исследовано асимптотическое поведения решений нелинейных параболических уравнений типа p–лапласиана в неограниченных областях. Получены новые условия единственности решений для эллиптических уравнений с нестандартными условиями коэрцитивности и роста.

Методы исследования. В первой главе работы, посвящённой регулярности решений нелинейных уравнений с весами, основным инструментом исследования служит развитие итерационной техники ДиДжорджи-Ладыженской-Уральцевой, а также развитие идей и методов, использованных Е.М. Ландисом, Н.В. Крыловым и М.В. Сафоновым для линейных эллиптических и параболических уравнений (*расползание чернильных пятен*). Во второй главе, где рассматриваются вопросы существования и стабилизации решений уравнений типа параболического p–лапласиана, разработан новый метод получения оценок пространственного градиента решений. Доказательство стабилизации решений основано на полученных оценках. В третьей главе основным методом служит «липшицева срезка» (Lipschitz truncation).

Положения, выносимые на защиту. В первой главе диссертациии рассматриваются уравнения типа параболического p–лапласиана с весами. В первом разделе доказано неравенство Харнака для уравнений типа параболического p–лапласиана с весом из класса Макенхаупта $A_{1+p/n}$, стоящим под знаком дивергенции. Во втором разделе доказано неравенства Харнака и гёльдеровская непрерывность решений вырождающихся уравнений с двойной нелинейностью с p–допустимым (*p-admissible*) весом, стоящим под знаком дивергенции и при производной по времени. В третьем разделе рассмотрен «нерегулярный» вес, который принимает значение единица по одну сторону от разделяющей гиперплоскости и значение малого параметра «эпсилон» по другую сторону. Для уравнений типа параболического p–лапласиана с таким весом, находящимся под знаком дивергенции и при производной по времени, доказано неравенство Харнака в специальной форме и гёльдеровская непрерывность решений.

Во второй главе диссертации рассматриваются вопросы асимптотического поведения решений нелинейных параболических уравнений типа p–Лапласиана. Для задачи Коши в классе ограниченных решений доказан критерий равномерной стабилизации решений при неограниченном возрастании времени: решение задачи Коши стремится к нулю при стремлении времени к бесконечности равномерно по пространственной переменной тогда и только тогда, когда начальная функция имеет равномерное нулевое среднее.

Для уравнений типа параболического p–лапласиана доказан критерий стабилизации ограниченных решений задачи Дирихле в цилиндрической области с неограниченным основанем. Доказано, что произвольное ограниченное решение с нулевыми условиями на боковой границе цилиндра сходится к нулю при стремлении времени к бесконечности тогда и только тогда, когда ряд (или интеграл) Винера (выписываемый в терминах p–ёмкости [74]) для бесконечно удалённой точки расходится. Если этот ряд сходится и коэффициенты не зависят от времени, то существует нетривиальное ограниченное стационарное решение.

Кроме того, во второй главе диссертации доказано существование решений задачи Коши для уравнений типа параболического p–Лапласиана, где $p > 2$, со знакопеременными начальными данными из $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ с точными условиями роста на бесконечности.

В третьей главе диссертации исследуются вопросы единственности решений эллиптических уравнений с нестандартными условиями коэрцитивности и роста. В первом разделе доказано условие плотности гладких функция в соболевском пространстве для весового пространства Соболева-Орлича с переменным показателем. Во втором разделе получено новое условие единственности решений стационарной задачи диффузии в обобщенном несжимаемом потоке. В случае неединственности указан способ однозначного выделения решений.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из результатов совместных работ использованы только принадлежащие автору диссертации. Результаты первой главы диссертации опубликованы в работах автора [81], [88]–[90]. Результаты первого, второго и третьего раздела второй главы опубликованы в совместных с В.В. Жиковым работах [84]–[86]. В.В. Жикову принадлежало доказательство критерия равномерной стабилизации для модельного параболического p–лапласиана, автору диссертации — доказательство в общем случае. Результат четвёртого раздела второй главы опубликован в работах автора [91], пятого раздела в [94]. Результат первого раздела третьей главы опубликован в работе автора [87] и совместной с В.В. Жиковым работе [92]. В.В. Жикову принадлежит доказательство в случае $p = 2$, автору диссертации — случай переменного показателя $p(x)$. Результаты второго раздела третьей главы опубликованы в работе автора [93]. Также по теме диссертации опубликованы работы [82], [83], [95].

Реализация и внедрение результатов работы. Исследования рассматриваемых в диссертации задач проводились при поддержке проектов РФФИ 09-01-00446-а «Качественные свойства и асимптотическое поведение решений эллиптических и параболических уравнений», 11-01-00989-а «Качественные свойства решений нелинейных дифференциальных уравнений», 12-01-00058-а «Качественные свойства решений линейных и квазилинейных уравнений второго порядка эллиптического и параболического типов», 14-01-31341-мол-а «Гамма-сходимость некоторых классов интегрантов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста: невыпуклые задачи», 15-01-00471-а «Свойства регулярности и асимптотическое поведение решений эллиптических и параболических уравнений второго порядка с переменным показателем нелинейности», проекта Минобрнауки России 14.В37.21.0362, задания Минобрнауки России № 1.3270.2017/4.6, проекта РНФ 14-11-00398 «Проблемы асимптотического анализа на тонких и высоко-контрастных структурах».

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты настоящей работы докладывались на семинарах в МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством В.В. Жикова, Е.В. Радкевича и А.С. Шамаева (МехМат) и под руководством акад. Е.И. Моисеева (ВМиК), семинаре им. К.И. Бабенко в ИПМ им. М.В. Келдыша, семинаре во ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых под руководством В.В. Жикова и Ю.А. Алхутова, семинаре в РУДН им. П. Лумумбы под руководством А.Л. Скубачевского, семинаре в МИАН им В.А. Стеклова под руководством

А.К. Гущина, семинаре в МЭИ под руководством Ю.А. Дубинского, семинарах ИМВЦ УНЦ РАН, ЮМИ ВНЦ РАН, НовГУ им. Ярослава Мудрого, а также на конференциях в Москве, Суздале, Донецке, Львове, Swansea (Wales, UK), Padua (Italy), Orlando (FL, USA), Lubbock (TX, USA), Tucson (AZ, USA), San-Diego (CA, USA), Либлице (Чехия), Телч (Чехия).

По теме диссертации опубликовано 15 работ в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций, или входящих в международные базы данных и системы цитирования Scopus, Web of Science. Полный список публикаций приводится в конце автореферата.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, списка литературы и приложения. Объём работы 352 страницы. Список литературы содержит 412 наименований. Главы диссертации делятся на разделы, разделы на параграфы. Нумерация параграфов, формул, лемм, теорем в каждом разделе отдельная.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Далее через $B(x, R)$ обозначим открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром x радиуса R, а через B_R — открытый шар радиуса R с центром в начале координат.

Во введении даётся общая характеристика работы. Описана степень разработанности выбранной темы, обоснована её актуальность. Определяются цели и задачи исследования. Показана научная новизна, теоретическая значимость работы. Сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава диссертации посвящена нелинейным параболическим уравнениям с весом. Данная глава состоит из трёх разделов.

В первом разделе первой главы изучаются уравнения типа параболического p–лапласиана с весом. Пусть Ω ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (T_1, T_2)$ рассматривается уравнение

$$u_t - \operatorname{div} \mathbf{A}(x, t, u, \nabla u) = B(x, t, u, \nabla u) \tag{3}$$

в предположении, что $\mathbf{A}(x, t, u, \xi)$ и $B(x, t, u, \xi)$ есть каратеодориевские функции (то есть, измеримые по (x, t) для всех $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и непрерывные по (u, ξ) для почти всех $(x, t) \in \Omega \times (T_1, T_2)$), удовлетворяющие следующим структурным условиям: для всех $(u,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ почти всюду в Q выполняется

$$\mathbf{A}(x,t,u,\xi)\cdot\xi\ge\nu(x)\left(C_0|\xi|^p-C_3^p\right),\quad |\mathbf{A}(x,t,u,\xi)|\le\nu(x)\left(C_1|\xi|^{p-1}+C_3^{p-1}\right),$$
$$|B(x,t,u,\xi)|\le\nu(x)\left(C_2|\xi|^{p-1}+C_3^p\right).$$

Здесь $p=\mathrm{const}>2$, константы C_0, C_1 положительны, константы C_2, C_3 неотрицательны. Вес ν принадлежит классу Макенхаупта $A_{1+p/n}$, то есть

$$C_\nu:=\sup\left(\frac{1}{|B|}\int_B\nu(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left(\frac{1}{\nu(x)}\right)^{n/p}dx\right)^{p/n}<+\infty,$$

где $|E|$ означает n-мерную меру Лебега множества $E\subset\mathbb{R}^n$, а супремум берётся по всем шарам $B\subset\mathbb{R}^n$.

Для области G через $W^{1,p}(G;\nu)$ обозначим замыкание $C^\infty(G)$ относительно нормы $\|\varphi\|_{W^{1,p}(G;\nu)}=\left(\int_G\left(|\varphi|^p+|\nabla\varphi|^p\right)\nu\,dx\right)^{1/p}$. Пусть $W_0^{1,p}(G;\nu)$ обозначает замыкание $C_0^\infty(G)$ относительно этой же нормы.

Скажем, что $u\in C(T_1,T_2;L^2(\Omega))\cap L^p(T_1,T_2;W^{1,p}(\Omega;\nu))$ есть решение уравнения (3) в Ω_T, если для любого интервала $[t_1,t_2]\subset(T_1,T_2)$ и любой пробной функции $\xi\in W^{1,1}(T_1,T_2;L^2(\Omega))\cap L^p(T_1,T_2;W_0^{1,p}(\Omega;\nu))$ выполняется

$$\int_\Omega u\xi\,dx\Big|_{t_1}^{t_2}-\iint_{\Omega\times(t_1,t_2)}u\xi_t\,dxdt+\iint_{\Omega\times(t_1,t_2)}\mathbf{A}(x,t,u,\nabla u)\cdot\nabla\xi\,dxdt$$
$$=\iint_{\Omega\times(t_1,t_2)}B(x,t,u,\nabla u)\xi\,dxdt.$$

Основной результат этого раздела — неравенство Харнака. Положим

$$h(y,\rho)=\left(\int_{B(y,\rho)}\nu^{-n/p}\,dx\right)^{p/n}.$$

Теорема 1. *Пусть u — неотрицательное решение уравнения* (3) *в Q, $\theta>0$, $(x_0,t_0)\in Q$ и $0<k\le\lim_{\tau\to0+}\operatorname{ess\,sup}\{u;\ Q(\tau)\}$, где $Q(\tau)=B(x_0,\tau\rho)\times(t_0-\tau h(x_0,\rho),t_0)$. Тогда найдутся такие положительные константы $\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3$, что, если $B(x_0,25\rho)\times[t_0-\theta h(x_0,\rho)k^{2-p},t_0+\Lambda_1h(x_0,\rho)k^{2-p}]\subset Q$ и $k\ge\Lambda_3C_3\rho$, то $\operatorname{ess\,inf}\{u(x,t_0+\Lambda_1h(x_0,\rho)k^{2-p});\ B(x_0,\rho)\}\ge\Lambda_2k$. Постоянные Λ_1,Λ_2 и Λ_3 зависят только от $C_0,C_1,C_2\operatorname{diam}\Omega,n,p,C_\nu$ и θ.*

Из теоремы 1 следует локальная гёльдеровская непрерывность решений.

Теорема 2. *Любое решение уравнения* (3) *в цилиндре* Q *непрерывно по Гёльдеру в* Q. *Показатель Гёльдера зависит только от* C_0, C_1, n, p, C_ν.

Во втором разделе первой главы изучаются параболические уравнения с двойной нелинейностью и p–допустимым весом (*p-admissible weight*). Рассматриваются уравнения вида

$$\nu(x)u_t = \operatorname{div}\left(\nu(x)\mathbf{A}(x,t,u,\nabla u)\right), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (T_1, T_2). \tag{4}$$

Предполагается, что поток $\mathbf{A}(x,t,u,\xi)$ есть каратеодориевская функция, удовлетворяющая условиям роста и коэрцитивности

$$|\mathbf{A}(x,t,u,\xi)| \leq C_0|u|^{m-1}|\xi|^{p-1} + C_2, \quad \mathbf{A}(x,t,u,\xi)\cdot\xi \geq C_1|\xi|^p|u|^{m-1} - C_3$$

для почти всех $(x,t) \in \Omega \times (T_1,T_2)$ и всех $u \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $p = \mathrm{const} > 2$ и $m = \mathrm{const} > 1$. Здесь константы C_0, C_1 положительные, C_2, C_3 - неотрицательные.

Предполагается, что на вес ν наложено условие *p–допустимости* (*p–admissibility condition*). Это значит, что для веса выполнено условие удвоения, имеют место неравенство Соболева с повышенным показателем суммируемости и неравенство Пуанкаре, а также корректно определена процедура замыкания гладких функций по весовой норме. Весовое соболевское пространство $W^{1,p}(\Omega;\nu)$ с нормой $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega;\,\nu)} = \left(\int_\Omega (|u|^p + |\nabla u|^p)\,\nu\,dx\right)^{1/p}$ определяются как замыкание $C^\infty(\Omega)$ относительно этой нормы. Пространство $W_0^{1,p}(\Omega;\nu)$ определяется как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,p}(\Omega;\nu)$. Примером p–допустимых весов являются веса из класса Макенхаупта A_p, а также выражения вида $[J(x)]^{1-p/n}$, где $J(x)$ есть якобиан квазиконформного отображения при $1 < p < n$. Теория эллиптических уравнений с p–допустимыми весами изложена в [75].

Скажем, что функция u есть решение уравнения (4) в цилиндре $Q = \Omega \times (T_1,T_2)$, если $u \in C(T_1,T_2;L^2(\Omega\,;\nu)) \cap L^p(T_1,T_2;W^{1,p}(\Omega;\nu))$, $|u|^{\frac{(m-1)p}{p-1}}|\nabla u|^p \in L^1(Q;\nu)$, и для любых $\varphi \in W^{1,1}(T_1,T_2;L^2(\Omega;\nu)) \cap L^p(T_1,T_2;W_0^{1,p}(\Omega;\nu))$ и $[a,b] \subset$

(T_1, T_2) выполняется интегральное тождество

$$\int u\varphi\,\nu\,dx\bigg|_{t=a}^{t=b} - \int_{\Omega\times(a,b)} u\varphi_t\,\nu\,dxdt + \int_{\Omega\times(a,b)} \mathbf{A}(x,t,u,\nabla u)\nabla\varphi\,\nu\,dxdt = 0.$$

Сформулируем теорему о гёльдеровской непрерывности решений.

Теорема 3. *Любое решение уравнения* (4) *в Q непрерывно по Гёльдеру в Q с показателем Гёльдера зависящим только от n, p, m и постоянных C_0—C_3.*

Обозначим $\Gamma(k,R) = \left(C_3 + pC_2kR^{-1}\right)(k/R)^{-p}\,k^{1-m}$. В следующем утверждении установлено неравенство Харнака.

Теорема 4. *Пусть u — неотрицательное решение уравнения* (4) *в цилиндре $B(x_0,R)\times(t_0-\theta k^{3-m-p}R^p, t_0+T)$, где $k,\theta>0$. Найдутся положительные константы γ_1, γ_2, γ_3 такие, что, если $u(x_0,t_0)\ge k$, $T\ge\gamma_1 k^{3-p-m}R^p$ и $\Gamma(k,R)\le\gamma_2$, то $u(x, t_0+\gamma_1 k^{3-p-m}R^p)\ge\gamma_3 k$ для всех $x\in B(x_0,R)$. Величины γ_i зависят только от n, p, m и постоянных C_0—C_3.*

Оценки теорем 3, 4 устойчивы при $p\to 2$, $m\to 1$.

В третьем разделе первой главы рассматриваются параболические уравнения типа p–лапласиана с равномерным вырождением на части области. Исследуется регулярность решений параболических уравнений вида

$$\omega_\varepsilon(x)u_t = \operatorname{div}\left(\omega_\varepsilon(x)\mathbf{A}(x,t,u,\nabla u)\right), \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, \quad t\in(T_1,T_2). \tag{5}$$

Предполагается, что поток $\mathbf{A}(x,t,u,\xi)$ есть каратеодориевская функция, удовлетворяющая условиям роста и коэрцитивности

$$|\mathbf{A}(x,t,u,\xi)|\le C_0|\xi|^{p-1}, \quad \mathbf{A}(x,t,u,\xi)\cdot\xi\ge C_1|\xi|^p,$$

для почти всех $(x,t)\in\Omega\times(T_1,T_2)$ и всех $(u,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, где $p=\mathrm{const}>1$ и C_0, C_1 — положительные константы. Вес ω_ε задается как

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases}\varepsilon, & x_n>0,\\ 1, & x_n<0,\end{cases} \qquad 0<\varepsilon\le 1, \quad x=(x_1,\dots,x_{n-1},x_n).$$

Функция $u\in C(T_1,T_2;L^2(\Omega))\cap L^p(T_1,T_2;W^{1,p}(\Omega))$ есть решение уравнения

(5) в цилиндре $\Omega \times (T_1, T_2)$, если

$$\int\limits_{\Omega} u\varphi\,\omega_\varepsilon\,dx\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int\limits_{\Omega\times(t_1,t_2)} (-u\varphi_t + \mathbf{A}(x,t,u,\nabla u)\nabla\varphi)\omega_\varepsilon\,dxdt = 0$$

для всех $T_1 < t_1 < t_2 < T_2$ и $\varphi \in W^{1,1}(T_1, T_2; L^2(\Omega)) \cap L^p(T_1, T_2; W_0^{1,p}(\Omega))$.

Через Σ будем обозначать гиперплоскость $\{x_n = 0\}$. Будем считать, что Ω имеет непустое пересечение с Σ. Если удалить из области Ω гиперплоскость Σ, то в любой из оставшихся частей поведение решений описывается хорошо разработанной теорией [31],[32]. Основным результатом этого раздела является равномерная по ε гёльдеровская непрерывность решений в окрестности Σ.

Теорема 5. *Пусть u — решение уравнения* (5) *в цилиндре $Q = B(z_0, R) \times (T_1, T_2)$, $z_0 \in \Sigma$. Тогда u локально непрерывна по Гёльдеру в Q с показателем Гёльдера, зависящим только от n, p, C_0, C_1. В каждом внутреннем цилиндре $Q' \Subset Q$ постоянная Гёльдера зависит только от $n, p, C_0, C_1, T_2 - T_1, R$, $\|u\|_{L^\infty(Q)}$ и расстояния от Q' до параболической границы Q.*

В диссертации показано, что имеют место мозеровские оценки максимума модуля решения через интегральную норму с постоянными, не зависящими от малого параметра ε, а также выполняется специальная форма неравенства Харнака с постоянными, не зависящими от ε. Сама форма неравенства Харнака существенно зависит от величины показателя p.

Теорема 6. *Пусть $p > 2$ и функция u — неотрицательное решение уравнения* (5) *в цилиндре $B(x_0, 32R) \times (t_0 - \theta k^{2-p} R^p, t_0 + T)$, где $x_0 \in \Sigma$ и $k, \theta > 0$. Найдутся положительные константы γ_1 и γ_2, зависящие только от n, p, C_0, C_1 и θ, такие, что, если $u(z, t_0) \geq k$, где $z \in B(x_0, R) \cap \{x_n < -R/2\}$ и решение, то $u(x, t_0 + \gamma_1 k^{2-p} R^p) \geq \gamma_2 k$ для всех $x \in B(x_0, R)$.*

Теорема 7. *Пусть $2n/(n+1) < p < 2$, $x_0 \in \Sigma$, $z \in B(x_0, R) \cap \{x_n < -R/2\}$, и функция u — неотрицательное решение уравнения* (5) *в цилиндре $B(x_0, 32R) \times (t_0 - M^{2-p}(32R)^p, t_0 + M^{2-p}(32R)^p)$, $M = \sup\{u(\cdot, t_0); B(z, R/2)\}$. Найдутся положительные константы γ_1 и γ_2, зависящие только от n, p, C_0, C_1, такие, что $u(x,t) \geq \gamma_1 u(z, t_0)$ для всех $x \in B(x_0, R)$, $|t - t_0| \leq \gamma_2 u(z, t_0)^{2-p} R^p$.*

Вторая глава диссертации посвящена вопросам стабилизации решений параболических уравнений типа p–лапласиана.

В первом разделе второй главы изучается вопрос о монотонности потока. При изучении нелинейных параболических уравнений вида $u_t = \operatorname{div} \mathbf{A}(x,t,\nabla u)$ важным свойством является свойство монотонности потока:

$$(\mathbf{A}(x,t,\xi_1) - \mathbf{A}(x,t,\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \geq 0 \tag{6}$$

для почти всех (x,t) и всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим поток

$$\mathbf{A}(\xi) = |\xi|^{p-2}\mathcal{A}\xi \tag{7}$$

с симметрической положительно определённой матрицей $\mathcal{A}$. В случае потока $\mathbf{A}(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, соответствующего уравнению (1), свойство монотонности (6) имеет место. Условие монотонности (6) для потока (7) может и не выполняться. Это легко увидеть на примере $\mathcal{A} = \operatorname{diag}(1,\lambda)$, $\xi_1 = (t,0)$, $\xi_2 = (1,1)$ с подходящим t и достаточно малым значением λ.

В диссертации показано, что при выполнении условия

$$\mu(\mathcal{A}) := \sup_{|x|=1} \frac{|\mathcal{A}x|}{(\mathcal{A}x,x)} < \frac{p}{|p-2|}.$$

для потока (7) выполняется свойство (6). Более того, если $1 < p < 2$, то

$$\left| |\eta|^{p-2}\mathcal{A}\eta - |\xi|^{p-2}\mathcal{A}\xi \right|^{\frac{p}{p-1}} \leq C \left(|\eta|^{p-2}\mathcal{A}\eta - |\xi|^{p-2}\mathcal{A}\xi,\, \eta - \xi \right),$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Если $p > 2$, тогда

$$\left| |\eta|^{p-2}\mathcal{A}\eta - |\xi|^{p-2}\mathcal{A}\xi \right|^2 \leq C(|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2}) \left(|\eta|^{p-2}\mathcal{A}\eta - |\xi|^{p-2}\mathcal{A}\xi,\, \eta - \xi \right),$$
$$\left(|\eta|^{p-2}\mathcal{A}\eta - |\xi|^{p-2}\mathcal{A}\xi \ \eta - \xi \right) \geq C(|\eta|^{p-2} + |\xi|^{p-2})|\eta - \xi|^2, \quad C > 0$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Константы здесь зависят только от n, p, минимального и максимального собственных значений матрицы $\mathcal{A}$ и величины $\mu(\mathcal{A})$. Неравенства для $p > 2$ хорошо известны для случая $\mathcal{A} = I$ (см. [31]). Неравенство для $1 < p < 2$ было неизвестно автору даже в модельном случае.

Во втором разделе второй главы содержится изложение L^2_{loc} теории решения задачи Коши для уравнений типа параболического p–лапласиана. Рассматривается задача Коши

$$u_t = \operatorname{div} \mathbf{A}(x, t, \nabla u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{8}$$

$$u|_{t=0} = f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{9}$$

Предполагается, что поток $\mathbf{A}(x, t, \xi)$ есть каратеодориевская функция, такая, что для почти всех $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются условия монотонности (6), роста и коэрцитивности

$$|\mathbf{A}(x, t, \xi)| \le C_0 |\xi|^{p-1}, \quad \mathbf{A}(x, t, \xi) \cdot \xi \ge C_1 |\xi|^p, \quad p = \mathrm{const} > 1, \quad p \ne 2. \tag{10}$$

В случае $1 < p < 2$ мы также потребуем выполнения неравенства

$$|\mathbf{A}(x, t, \xi_1) - \mathbf{A}(x, t, \xi_2)|^{\frac{p}{p-1}} \le C_2 (\mathbf{A}(x, t, \xi_1) - \mathbf{A}(x, t, \xi_2), \xi_1 - \xi_2). \tag{11}$$

для почти всех (x, t) и всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$. Здесь C_0, C_1, C_2 — положительные постоянные. Далее полагается $p > p_{cr} = \max(1, 2n/(n+2))$.

Под решением задачи Коши (8)–(9) в полосе $\Pi_T = \mathbb{R}^n \times (0, T)$ мы понимаем функцию $u \in C(0, T; L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)) \cap L^p(0, T; W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n))$, такую, что для любой $\varphi \in W^{1,1}(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^p(0, T; W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$, обращающейся в ноль при $|x| > R(\varphi)$, и любого $\tau \in (0, T)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, \tau) \varphi(x, \tau)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n \times (0, \tau)} \big(- u \varphi_t + \mathbf{A}(x, t, \nabla u) \nabla \varphi \big)\, dx dt = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x, 0)\, dx. \tag{12}$$

Глобальным решением задачи (8)-(9) назовём решение, которое существует в любой полосе Π_T, $T > 0$.

В случае $p_{cr} < p < 2$ энергетические оценки носят локальный характер: для решения задачи (8)-(9) и любых $R, T > 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{B_R} u^2\, dx + C_1 \int_{B_R \times (0, T)} |\nabla u|^p\, dx dt \le 2 \int_{B_{2R}} f^2\, dx + C T^{\frac{2}{2-p}} R^{n + \frac{2p}{p-2}}, \tag{13}$$

где $C = C(n, p, C_0, C_1)$. Для разности двух решений u_1, u_2 задачи Коши (8)-(9)

с начальными данными f_1 и f_2 и любых $R, T > 0$ имеет место оценка

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{B_R}(u_1-u_2)^2(x,t)\,dx \le 2\int_{B_{2R}}(f_1-f_2)^2\,dx + CT^{\frac{2}{2-p}}R^{n+\frac{2p}{p-2}}, \tag{14}$$

где $C = C(n,p,C_2)$. Из оценок (13) и (14) следует существование и единственность решения задачи (8)-(9) без ограничений на рост начальных данных и самого решения при $|x|\to\infty$.

Теорема 8. *Пусть* $p_{cr} < p < 2$. *Тогда для любой начальной функции* $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *существует и единственно решение задачи Коши* (8)-(9). *Это решение удовлетворяет оценке* (13) *для всех* $R > 0$ *и* $T > 0$. *Для решений* u_1, u_2 *с начальными данными* f_1, f_2 *такими, что* $f_1 \le f_2$, *выполнено неравенство* $u_1 \le u_2$.

Перейдём к случаю $p > 2$. Положим $\mu = n + 2p/(p-2)$. Для решения u задачи (8)–(9) при $p > 2$ для любого $\sigma \in (0,1)$ верна оценка

$$R^{-\mu}\int_{B_{\sigma R}\times(0,T)}\left(|\nabla u|^p + R^{-p}|u|^p\right)\,dxdt \le CR^{-\mu}\int_{B_R} f^2\,dx + \\ + C(1-\sigma)^{-\nu}\int_0^T\left(R^{-\mu}\int_{B_R}u^2(x,t)\,dx\right)^{p/2}dt, \tag{15}$$

где $\nu = (n(p-2)+2p)/2$ и $C = C(n,p,C_0,C_1)$. Обозначим

$$[u(t)]_\rho = \sup_{R>\rho} R^{-\mu}\int_{B_R}u^2(x,t)\,dx,\quad [f]_\rho = \sup_{R>\rho}R^{-\mu}\int_{B_R}f^2\,dx,\quad [u]_{T,\rho} = \sup_{0\le t\le T}[u(t)]_\rho.$$

Из оценки (15) вытекает следующий результат.

Теорема 9. *Пусть* u *— решение задачи* (8)-(9) *в* Π_T, $p > 2$, *и* $[u]_{T,\rho} < \infty$. *Найдётся положительная константа* $\gamma = \gamma(n,p,C_0,C_1)$ *такая, что, если* $T \le \gamma[f]_\rho^{(2-p)/2}$, *то выполняется оценка*

$$[u]_{T,\rho} + \sup_{R>\rho}R^{-\mu}\int_{B_R\times(0,T)}\left(|\nabla u|^p + |u|^pR^{-p}\right)\,dxdt \le C[f]_\rho, \tag{16}$$

где $C = C(n,p,C_0,C_1)$.

Отсюда следует, что решение задачи (8)-(9) в Π_T с нулевыми начальными данными, для которого $[u]_{T,\rho} < \infty$, тождественно равно нулю.

Сформулируем теорему существования решения задачи Коши для $p > 2$.

Теорема 10. *Пусть* $p > 2$ *и начальная функция* f *удовлетворяет условию* $[f]_\rho < \infty$. *Тогда для* $T = C[f]_\rho^{(2-p)/2}$, $C = C(n, p, C_0, C_1) > 0$, *существует решение задачи Коши* (8)-(9) *в полосе* Π_T, *удовлетворяющее оценке* (16). *Если же* $\lim_{\rho\to\infty}[f]_\rho = 0$, *то существует глобальное решение задачи Коши* (8)-(9).

Ограничения на рост решения и начальных данных на бесконечности здесь существенны, как показывают хорошо известные примеры [31].

В диссертации также доказан следующий вариант принципа максимума: если u — ограниченное решение задачи Коши (8)-(9) в Π_T, то $\operatorname{ess\,sup}\{u;\, \Pi_T\} \leq \operatorname{ess\,sup}\{f;\, \mathbb{R}^n\}$, $\operatorname{ess\,inf}\{u;\, \Pi_T\} \geq \operatorname{ess\,inf}\{f;\, \mathbb{R}^n\}$.

В третьем разделе второй главы доказывается критерий равномерной стабилизации решений задачи Коши для параболических уравнений типа p–лапласиана. Этот критерий обобщает результат, доказанный В.В. Жиковым [55] для решений линейных равномерно параболических уравнений дивергентного вида.

Будем говорить, что ограниченная функция f имеет равномерное среднее $\overline{f}$, если $\int_{\{|x|<1\}} f(z + \omega x)\, dx \to \overline{f}$ при $\omega \to +\infty$ равномерно по $z \in \mathbb{R}^n$. Классический пример функций с равномерным средним даётся периодическими или почти периодическими функциями.

Теорема 11. *Пусть* u *— ограниченное решение задачи Коши* (8)–(9) *с ограниченной начальной функцией* f. *Предположим, что выполнены условия* (6), (10) *и* $p > p_{cr}$. *Функция* u *равномерно сходится к нулю при* $t \to \infty$ *тогда, и только тогда, когда* f *имеет нулевое равномерное среднее значение.*

В четвёртом разделе второй главы получены улучшенные оценки решений уравнений типа параболического p–лапласиана и доказано существование знакопеременных решений задачи Коши. В цилиндре $\Omega \times (T_1, T_2)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, рассмотрим уравнение (8). Предполагаются выполненными условия роста и коэрцитивности (10).

Решением уравнения (8) в цилиндре $\Omega \times (T_1, T_2)$ будем называть функцию $u \in C\left(T_1, T_2;\, L^2_{loc}(\Omega)\right) \cap L^p_{loc}\big(T_1, T_2;\, W^{1,p}_{loc}(\Omega)\big)$ такую, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times (T_1, T_2))$ и почти всех $T_1 < t_1 < t_2 < T_2$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} u\varphi\, dx\bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{\Omega\times(t_1,t_2)} (-u\varphi_t + \mathbf{A}(x,t,\nabla u)\nabla\varphi)\; dxdt = 0. \qquad (17)$$

В следующих двух утверждениях u обозначает решение уравнения (8) в цилиндре $\mathcal{Q} = B(x_0,R)\times(t_0-T,t_0)$, такое, что $u\in C([t_0-T,t_0],L^1(B(x_0,R)))$, $\mu = (R^p/T)^{1/(p-2)}$,

$$S = \sup_{t_0-T<t<t_0} R^{-n}\mu^{-1}\int_{B(x_0,R)} |u(x,t)|\,dx, \quad S_0 = R^{-n}\mu^{-1}\int_{B(x_0,R)} |u(x,t_0-T)|\,dx.$$

Теорема 12. *Пусть $r>0$ таково, что $\lambda_r = n(p-2)+pr > 0$. Тогда для любых $\sigma,\sigma'\in(0,1)$ выполнена оценка*

$$\sup\{|u|;\; B(x_0,\sigma R)\times(t_0-\sigma' T,t_0)\} \le C\mu(1-\sigma)^{-n/r}K^{1/r} + C\mu(1-\sigma')^{-n/\lambda_r}K^{p/\lambda_r},$$

где константа $C=C(n,p,r)$ и

$$K = \frac{(1-\sigma)^{-p}}{TR^n}\int_{\mathcal{Q}}\left(\frac{|u|}{\mu}\right)^{p+r-2} dxdt + \frac{(1-\sigma')^{-1}}{TR^n}\int_{\mathcal{Q}}\left(\frac{|u|}{\mu}\right)^{r} dxdt.$$

Если же $\lambda = n(p-2)+p>0$, то имеет место оценка

$$\operatorname{ess\,sup}\{|u|;\; B(x_0,R/2)\times(t_0-T/2,t_0)\} \le C\mu\left[S^{p/2}+S^{p/\lambda}\right],$$

Теорема 13. *Пусть $p>2$, $\sigma\in(0,1)$, $1<\gamma<(n+1)/n$. Для $p-1\le r\le p-\gamma n/(n+1)$ и $q = n(\gamma r-(p-r))/(nr-(n-r))$ выполняется оценка*

$$R^{r-n}T^{-1}\int_{Q(\sigma)} |\nabla u|^r\,dxdt \le C\mu^r\left[(SS_0)^{r/p} + (S^{1-q}S_0)^{\frac{r}{p-q}} + S^r(1-\sigma)^{-\nu}\right],$$

где $Q(\sigma) = B(x_0,\sigma R)\times(t_0-T,t_0)$, $\nu=\nu(n,p,\gamma,r)>0$, $C=C(n,p,\gamma,r)>0$. В случае, когда $1<p<2$, для любого $\sigma\in(0,1)$ имеет место оценка

$$R^{p-n-1}T^{-1}\int_{Q(\sigma)} |\nabla u|^{p-1}\,dxdt \le C\mu^{p-1}\left[(1-\sigma)^{1-p}S^{p-1} + (SS_0)^{(p-1)/p}\right],$$

где $C = C(n,p,C_0,C_1,\gamma)$.

Из оценки теоремы 13 для $r=p-1$ вытекает конечность скорости распространения носителя решения.

Теорема 14. *Пусть* u *— решение задачи* (8)–(9)*, где* $p > 2$*, и начальная функция* f *равна нулю в шаре* $B(x_0, 2R)$*. Тогда найдётся положительная постоянная* $C = C(n, p, C_0, C_1)$ *такая, что* $u \equiv 0$ *в цилиндре* $B(x_0, R) \times (0, T_*)$*, где*

$$T_* = C \left(R^{-n-\frac{p}{p-2}} \sup_{0 \le t \le T} \int_{B(x_0,R)} |u(x,t)|\, dx \right)^{2-p}.$$

Сформулируем теорему существования решений задачи Коши для знакопеременных начальных данных. Рассмотрим задачу Коши

$$u_t = \operatorname{div} \mathbf{A}(x, t, \nabla u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \qquad (18)$$

Потребуем дополнительно к (10) выполнения условия строгой монотонности:

$$(\mathbf{A}(x, t, \xi) - \mathbf{A}(x, t, \eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n : \quad \xi \neq \eta.$$

Считаем, что начальные данные в задаче Коши (18) удовлетворяют условию

$$\psi_0(\rho) := \sup_{R > \rho} R^{\lambda/(2-p)} \int_{B_R} |u_0|\, dx < \infty, \quad \lambda = n(p-2) + p. \qquad (19)$$

Теорема 15. *Пусть* $p > 2$ *и начальная функция* $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условию* (19) *для некоторого* $\rho > 0$*. Тогда в полосе* $\Pi = \mathbb{R}^n \times (0, T(u_0))$*, где* $T(u_0) = \gamma \psi_0^{2-p}$*,* $\gamma = \gamma(n, p, C_0, C_1) > 0$*, существует решение задачи Коши* (18)*, для которого выполнены следующие оценки:*

$$\sup_{0 < t < T(u_0)} \sup_{R > \rho} R^{-n-\frac{p}{p-2}} \int_{B_R} |u(x,t)|\, dx + \sup_{R > \rho} R^{-n-\frac{2(p-1)}{p-2}} \int_{\Pi} |\nabla u|^{p-1}\, dxdt \le C \psi_0(\rho),$$

$$\sup |u(x,t)| \le C \left(|x| + \rho\right)^{\frac{p}{p-2}} \left(t^{-n/\lambda} \psi_0^{p/\lambda}(\rho) + t^{1/2} \psi_0^{p/2}(\rho) \right), \quad 0 < t < T(u_0).$$

Здесь $C = C(n, p, C_0, C_1) > 0$*. Начальные данные принимаются в смысле сходимости* $u(t) \to u_0$ *в* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*. Если* $\lim_{\rho \to \infty} \psi_0(\rho) = 0$*, то решение задачи Коши* (18) *является глобальным, то есть определено в* $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$*.*

Из оценки теоремы 13 для $r = p - 1$ следует единственность решений задачи Коши (18) в классе решений, для которых $\sup_{0 \le t < T} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|\, dx < \infty$.

В пятом разделе второй главы доказывается критерий стабилизации ограниченных решений уравнений типа параболического p–лапласиана в цилиндрической области с неограниченным основанием, удовлетворяющих однородному условию Дирихле на боковой границе цилиндра.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, +\infty)$ рассматриваем решение уравнения (8), удовлетворяющее однородному условие Дирихле на боковой границе цилиндра:

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, +\infty). \tag{20}$$

Предполагаются выполненными условия (6), (10). Решением задачи (8), (20) будем называть функцию u такую, что для любой $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место $u\eta \in C\big(0, +\infty;\ L^2(\Omega)\big) \cap L^p_{loc}\big(0, +\infty; W_0^{1,p}(\Omega)\big)$ и интегральное тождество (17) выполнено для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, +\infty))$ и почти всех $t_2 > t_1 > 0$.

Нас интересует вопрос о поточечной стабилизации к нулю ограниченных решений уравнения (8), удовлетворяющих нулевым условиями Дирихле (20), при неограниченном возрастании времени. Случай, когда $p > n$, является наиболее простым и сводится к теореме вложения из $W^{1,p}$ в $C^{1-n/p}$.

Теорема 16. *Пусть $p > n$ и $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ не пусто (т.е. содержит хотя бы одну точку). Тогда ограниченное решение уравнения* (8) *в Q, удовлетворяющее условию Дирихле* (20)*, стремится к нулю при $t \to \infty$. Найдётся $\alpha > 0$, зависящее только от n, p, C_0, C_1, такое, что $\lim_{t\to\infty} t^\alpha u(x,t) = 0$ для всех $x \in \Omega$.*

Нам понадобится понятие p-ёмкости компакта $K \subset B(x_0, r)$ относительно шара $B(x_0, r)$:

$$C_p(K,\ B(x_0,r)) := \inf \int |\nabla\varphi|^p \, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(B(x_0,r)), \quad \varphi \geq 1 \quad \text{на} \quad K.$$

Теорема 17. *Пусть $2n/(n+1) < p \leq n$. Ограниченное решение u уравнения* (8)*, удовлетворяющее однородному условию Дирихле* (20)*, поточечно стремится к нулю при $t \to \infty$, если*

$$\int^\infty \left(\frac{C_p(\overline{B}(x_0,r) \setminus \Omega,\ B(x_0,2r))}{r^{n-p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} = +\infty. \tag{21}$$

Если в уравнении (8) поток не зависит от времени, то условие (21) является необходимым для стабилизации произвольного ограниченного решения.

Теорема 18. *Пусть $1 < p \leq n$. Если в уравнении* (8) *поток* $\mathbf{A}$ *не зависит от* *времени, и условие* (21) *не выполнено, то есть*

$$\int^{\infty} \left(\frac{C_p(\overline{B}(x_0, r) \setminus \Omega,\ B(x_0, 2r))}{r^{n-p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} < +\infty, \tag{22}$$

то существует стационарное решение уравнения (8)*, удовлетворяющее условию* (20)*, и не равное тождественно нулю.*

Таким образом, для $p > 2n/(n+1)$ и потока $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, \xi)$, не зависящего от времени, доказан критерий стабилизации к нулю произвольного ограниченного решения (8) с условием Дирихле (20) в цилиндре с неограниченным основанием Ω. Условие (21) можно рассматривать, как аналог условия Винера регулярности граничной точки (см. [74]), записанного в бесконечно удалённой точке.

В формулировках теорем 17, 18 точка x_0 может быть любой, так как сходимость или расходимость интеграла в (21) от выбора x_0 не зависит. Отметим, что равномерной стабилизации в условиях теоремы 17 может и не быть.

Пусть дополнение к области Ω имеет вид воронки вращения $\{|x'| \le f(x_n)\}$, $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. В случае $n - 1 < p \le n$ для расходимости интеграла (21) достаточно, чтобы функция f была неотрицательна, то есть, чтобы дополнение к области Ω содержало луч. Если $p = n - 1$ и $f(s) \ge as^{-\gamma}$, то выполнено (21), а ограничение $f(s) \le C \exp(-a \ln^{1+\varepsilon} s)$, $\varepsilon > 0$, влечёт (22). Для $p < n - 1$, если $f(s) \ge cs(\ln s)^{-\alpha}$, $\alpha \le \alpha_0 = (p-1)/(n-1-p)$, то имеет место (21), если же $f(s) \le cs(\ln s)^{-\alpha}$, $\alpha > \alpha_0$, то справедливо (22).

Доказательство теоремы 17 основано на лемме о возрастании (в терминологии Е.М. Ландиса [76]). Идея доказательства этой леммы восходит к работам И.И. Скрыпника [77], [78]. В этой лемме $2n/(n+1) < p \le n$, а u — решение задачи Дирихле (8), (20) в цилиндре $Q_0 = (B(x_0, 2r) \times (t_0 - \theta, t_0)) \cap Q$.

Лемма. *Найдутся положительные постоянные* $\sigma_0, \varepsilon_0, H$ *и* $\widetilde{H}$*, зависящие только от* n, p, C_0, C_1*, такие, что, если* $\sup\{|u|,\ Q_0\} \le M$ *и* $\theta = (H + \widetilde{H})(\delta M)^{2-p} r^p$*, где* $\delta = \left(r^{p-n} C_p(\overline{B}(x_0, \varepsilon_0 r/2) \setminus \Omega, B(x_0, r))\right)^{1/(p-1)}$*, то* $\sup\{|u|,\ Q_*\} \le (1 - \sigma_0\delta)M$*, где* $Q_* = \big(B(x_0, r) \times \big(t_0 - H(\delta M)^{2-p} r^p/4,\ t_0\big)\big) \cap Q$.

Третья глава диссертации посвящена вопросам единственности решений.

В первом разделе третьей главы изучается вопрос о плотности гладких функций в весовом пространстве Соболева-Орлича с переменным показателем суммируемости. В ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, задан вес ρ

— неотрицательная функция, суммируемая в Ω. Пусть ещё дан измеримый в Ω показатель $p = p(x)$, удовлетворяющий условию

$$1 < \alpha < p(x) < \beta < \infty. \tag{23}$$

Стандартным образом вводится норма Люксембурга

$$\|f\|_{p(\cdot),\,\rho} = \inf \left\{ \lambda > 0 \,:\, \int |\lambda^{-1} f|^{p(x)} \rho \, dx \leq 1 \right\}.$$

Класс $L^{p(\cdot)}(\Omega;\, \rho)$ с этой нормой является рефлексивным сепарабельным банаховым пространством. Будем считать, что показатель $p(x)$ удовлетворяет логарифмическому условию

$$|p(x) - p(y)| \leq k_0 \left(\ln \frac{1}{|x-y|} \right)^{-1}, \quad |x-y| < 1/2. \tag{24}$$

Введём весовое пространство Соболева-Орлича

$$W = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) \,:\, \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \rho \, dx < \infty \right\}, \quad \|u\|_W := \|\nabla u\|_{p(\cdot),\,\rho}.$$

Будем считать, что $\rho^{-1/p} \in L^{p'}(\Omega)$, где $p'(x) = p(x)/(p(x)-1)$. Это условие обеспечивает полноту пространства W. Определим пространство H как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме W. Будем говорить, что вес ρ регулярен, если $H = W$. В силу условия (24) вес $\rho \equiv 1$ регулярен (см. [66]).

Для постоянного показателя p известным достаточным условием равенства $H = W$ является принадлежность веса ρ классу Макенхаупта A_p. Это следует из ограниченности классических интегральных сглаживающих операторов в $L^p(\Omega;\, \rho)$. При использовании этой техники продвинуться дальше весов из классов Макенхаупта нельзя — равномерная ограниченность семейства сглаживающих интегральных операторов в весовом пространстве Лебега $L^p(\Omega;\, \omega)$ эквивалентна принадлежности ω классу A_p (напр. [79]).

Скажем, что неотрицательная локально суммирумая функция ω принадлежит классу Макенхаупта $A_{p(\cdot)}(\Omega)$ с переменным показателем $p(\cdot)$, если

$$\|w\|_{A_{p(\cdot)}(\Omega)} := \sup_Q \int_Q \left(\frac{\omega(Q)}{|Q|^p \omega} \right)^{\frac{1}{p-1}} dx < \infty,$$

где $\omega(Q) = \int_Q \omega\,dx$, а супремум берётся по всем кубам $Q \subset \Omega$ с гранями параллельными координатным гиперплоскостям. Для постоянного значения показателя p указанное условие совпадает с условием принадлежности веса классу Макенхаупта A_p.

В диссертации доказано, что при выполнении логарифмического условия (24) для классов Макенхаупта с переменным показателем $A_{p(\cdot)}$ остаётся верным свойство самоулучшаемости классов Макенхаупта с постоянным показателем: для любого $\omega \in A_{p(\cdot)}(\Omega)$ найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $\omega \in A_{p(\cdot)-\varepsilon}(\Omega)$.

Сформулируем основной результат этого раздела.

Теорема 19. *Пусть показатель $p(\cdot)$ удовлетворяет условиям* (23) *и* (24)*, вес ρ представим в виде $\rho = \omega\omega_0$, где $\omega_0 \in A_{p(\cdot)}(\Omega)$ и выполнено условие*

$$\liminf_{t\to\infty} \left(\int_\Omega \omega^{-t}\omega_0\,dx\right)^{1/t} \left(\int_\Omega \left(t^{-p(x)}\omega\right)^t \omega_0\,dx\right)^{1/t} < \infty.$$

Тогда вес ρ регулярен.

В случае $p \equiv 2$ этот результат был доказан В.В. Жиковым [69]. Приведём конструкцию построения примеров, обобщающую пример В.В. Жикова [67]. Пусть $n = 2$ и $\Omega = B_R$. Если для четырёх последовательно расположенных непересекающихся секторов $A_1 - A_4$ круга B_R выполнено

$$\int_{A_{(1)}\cup A_{(3)}} |x|^{-p'(x)}\rho^{1/(1-p(x))}\,dx < \infty, \quad \int_{A_{(2)}\cup A_{(4)}} |x|^{-p(x)}\rho\,dx < \infty,$$

то $H \neq W$.

Во втором разделе третьей главы диссертации обсуждается вопрос единственности решений стационарной задачи диффузии в несжимаемом потоке. Рассмотрим задачу

$$Tu = -\operatorname{div}(\nabla u + A\nabla u) = f \in H^{-1}(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{25}$$

где Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, матрица A кососимметрична ($A_{ij} = -A_{ji}$) и квадратично-суммируема ($A \in L^2(\Omega)$). Помимо (25) будем рассматривать ещё одну задачу

$$\mathcal{T}u = -\operatorname{div}(\nabla u + au) = f \in H^{-1}(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{26}$$

с соленоидальным векторным полем a. Соленоидальность здесь понимается в смысле распределений, то есть $\int_\Omega a\nabla\varphi\,dx = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Будем считать, что $a \in L^{2n/(n+2)}(\Omega)$, если $n > 2$, и $a \in L\log^{1/2} L(\Omega)$, если $n = 2$.

Определим билинейную форму $[u, \varphi]$ для $u \in H_0^1(\Omega)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, которая в случае задачи (25) имеет вид

$$[u, \varphi] = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx,$$

а в случае задачи (26) определяется как

$$[u, \varphi] = \int_\Omega au\nabla\varphi\,dx.$$

Решением задачи (25) (или (26)) будем называть функцию $u \in H_0^1(\Omega)$ такую, что интегральное тождество

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\;dx + [u, \varphi] = (f, \varphi).$$

выполнено для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Поясним связь уравнений в форме (25) и (26). Для кососимметрической матрицы A в смысле распределений выполняется $(A_{ij}u_{x_j})_{x_i} = (u\,(\operatorname{div} A)_j)_{x_j}$, где $(\operatorname{div}A)_j = A_{ij,x_i}$, причём $\operatorname{div}\operatorname{div} A = A_{ij,x_ix_j} = 0$. Таким образом, для кососимметрической матрицы $A \in W^{1,2}(\Omega)$ задача Дирихле (25) может быть записана в виде (26) с соленоидальным векторным полем $a = \operatorname{div} A$. Для негладкой матрицы A уравнение (25) описывает диффузию в несжимаемом турбулентном потоке [70], [71], так как поле скоростей $a = \operatorname{div} A$ определено только в смысле распределений. Похожий класс уравнений изучался в [72].

С другой стороны, если дано соленоидальное поле a, то при $n = 2$ задача нахождения кососимметрической матрицы с $\operatorname{div} A = a$ сводится к нахождению функции тока поля a, при $n = 3$ — к нахождению векторного потенциала поля a, в общем случае — к решению уравнения $\delta\beta = a_i dx^i$, где δ—кодифференциал.

При выполнении указанных в начале работы условий задачи (25) и (26) имеют аппроксимационные решения [73], которые получаются аппроксимацией матрицы A или векторного поля a ограниченными с последующим переходом к пределу. Для аппроксимационных решений имеет место энергетическое неравенство

$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \le (f,u)$. В.В. Жиков [73] построил примеры неаппроксимационных решений, которые не могут быть получены таким способом. Для этих решений энергетическое неравенство выполняется в другую сторону: $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx > (f,u)$. Так как аппроксимационное решение есть всегда, это даёт пример неединственности. В связи с этим возникает вопрос о нахождении условий единственности решений задач Дирихле (25) и (26).

Определим множество

$$D = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) :\ [u,\varphi] \le C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

Множество D состоит из решений задачи (25) (или (26)), соответствующих различным $f \in H^{-1}(\Omega)$. Для $u \in D$ форма $[u,\varphi]$ распространяется по непрерывности на $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Для аппроксимационных решений всегда $[u,u] \ge 0$, для неаппроксимационных решений из примера В.В. Жикова $[u,u] < 0$.

В случае неединственности решения в диссертации найден способ однозначного выбора решения. Такой выбор даётся максимизацией $[u,u]$ по множеству $u \in T^{-1}f$. Этот максимум достигается на единственном элементе. Выбранный элемент $T^{-1}f$ характеризуется тем, что $[u,z] + [z,u] = 0$ для всех $z \in T^{-1}0$. Оператор, сопоставляющий $f \in H^{-1}(\Omega)$ такой элемент, линейный.

Известно, что принадлежность коэффициентов кососимметрической матрицы A пространству BMO гарантирует однозначную разрешимость задачи (25), справедливость равенств $D = H_0^1(\Omega)$, $[u,u]_A = 0$ для всех $u \in H_0^1(\Omega)$ и выполнение для решений энергетического тождества

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = (f,u). \tag{27}$$

При этом условии конвективный член подчинён диффузионному,

$$[u,v] \le C(n)\|A\|_{BMO}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{для всех} \quad u,v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{28}$$

Согласно [80], выполнение (28) равносильно тому, что $\operatorname{div} A = \operatorname{div} C$, где C — кососимметрическая матрица с коэффициентами из BMO.

В работе В.В. Жикова [73] доказана единственность решения задачи (25) при условии

$$\lim_{p\to\infty} p^{-1}\|A\|_{L^p(\Omega)} = 0. \tag{29}$$

Для $A \in BMO$ оценка Джона-Ниренберга даёт

$$\lim_{p\to\infty} p^{-1}\|A\|_{L^p(\Omega)} < \infty. \tag{30}$$

Свойство (29) для функций из BMO, вообще говоря, не имеет место.

В той же работе при условии $A \in BMO$ доказана единственность аппроксимационных решений. Единственность произвольных решений задачи (25) при условии $A \in BMO$ из результатов [73] не следовала. В диссертации получен следующий результат.

Теорема 20. *Если выполнено условие* (30)*, то решение задачи* (25) *с любой правой частью* $f \in H^{-1}(\Omega)$ *единственно, и для него выполнено энергетическое тождество* (27).

Известно [71], [73], что для задачи (26) с соленоидальным полем $a \in L^2(\Omega)$ единственность решения имеет место для любой правой части $f \in H^{-1}(\Omega)$, и для решения выполнено энергетическое тождество (27). В размерности $n \geq 3$ при этом, вообще говоря, конвективный член не подчинён диффузионному.

В [73] доказана единственность аппроксимационного решения задачи (26) при условии $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\|a\|_{L^{2-\varepsilon}(\Omega)} = 0$. Для случая размерности $n = 2$ этот результат усилен в следующей теореме.

Теорема 21. *Пусть* $n = 2$ *и соленоидальное поле* a *удовлетворяет условию* $\lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{\varepsilon}\|a\|_{L^{2-\varepsilon}(\Omega)} = 0$*. Тогда решение задачи* (26) *единственно, и выполняется энергетическое тождество* (27).

В случае пространства произвольной размерности доказан следующий новый результат об уравнениях со сносом из пространства Морри M^n.

Теорема 22. *Пусть соленоидальное векторное поле* a*, в дополнение к приведённым в начале условиям, принадлежат пространству Морри* $M^n(\Omega)$*, то есть* $\sup |B|^{-1+1/n} \int_{\Omega\cap B} |a|\, dx < \infty$*, где супремум берётся по всем шарам* B*. Тогда решение задачи* (26) *единственно и для него выполняется энергетическое тождество* (27).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен ряд вопросов, связанных с поведением решений нелинейных параболических уравнений типа p–лапласиана. Для различных вариантов уравнений с весами установлена локальная гёльдеровская непрерывность решения и неравенство Харнака. Приведены и новые результаты по асимптотическому поведению решений уравнений типа параболического p–лапласиана, а именно, критерий равномерной стабилизации решений задачи Коши во всём пространстве и критерий стабилизации ограниченных решений задачи Дирихле в цилиндрической области с неограниченным основанием. Доказано эффективное условие плотности гладких функций в весовом пространстве Соболева-Орлича с переменным показателем. Получены новые условия единственности решений стационарной задачи диффузии в несжимаемом потоке, и указан способ однозначного выделения решения в случае неединственности.

Разработанные методы могут быть применены к анализу нелинейных параболических уравнений с весами более сложной структуры, исследованию асимптотического поведения решений при неограниченном возрастании времени, изучению уравнений конвекции-диффузии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лейбензон Л.С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ОГИЗ. Гостехиздат, 1947.

[2] *Ладыженская О.А.* О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 102. С. 85–104.

[3] *Ладыженская О.А.* О модификациях уравнений Навье-Стокса для больших градиентов скоростей // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1968. Т. 7. С. 126–154

[4] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Пер. с фр. М.:Мир, 1972.

[5] *Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб. посвященный 70-летию акад. А.Ф. Иоффе. — М.: Изд-во АН СССР, 1950. — С. 61–71.

[6] *Pattle R.E.* Diffusion from an instanteneous point source with concentration dependent coefficient // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1959. V. 12. P. 407–409.

[7] *Баренблатт Г.И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16, № 1. С. 67–78.

[8] *Баренблатт Г.И.* Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16, № 6. С. 679–698.

[9] *Баренблатт Г.И.* Об одном классе точных решений плоской одномерной задачи нестационарной фильтрации газа в пористой среде // ПММ. 1953. Т. 17, №6. С. 739–742.

[10] *Баренблатт Г.И.* Об автомодельных решениях задачи Коши для нелинейного параболического уравнения нестационарной фильтрации газа в пористой среде // ПММ. 1956. Т. 20, № 6. С. 761–763.

[11] *Баренблатт Г.И., Вишик М.И.* О конечной скорости распространения возмущений в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // ПММ. 1956. Т. 20, № 3. С. 411–417.

[12] *Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б.* О решениях типа диполя в задачах нестационарной фильтрации газа при политропическим режиме // ПММ. 1957. Т. 21, № 5. С. 718–720.

[13] *Калашников А.С., Олейник О.А., Чжоу Юйлинь* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 5. С. 667–704.

[14] *Aronson D.G., Benilan P.* Regularite des solutions de l'equation des milleux poreux dans R^n // C. R. Acad. Sc. Paris. 1979. V. 288. P. 103–105.

[15] *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. 1987. Т. 42, № 2 (254). С. 135–176.

[16] *Vazquez J.L.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.

[17] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Изд. 2-е перераб. М.: Наука, 1973.

[18] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

[19] *DiBenedetto E.* On the local behaviour of solutions of degenerate parabolic equations with measurable coefficients // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1986. V. 13, № 3. P. 487–535.

[20] *Chen Y.Z., DiBenedetto E.* Hölder estimates of solutions of singular parabolic equations with measurable coefficients // Arch. Ration. Mech. Anal. 1992. V. 118. P. 257–271.

[21] *DiBenedetto E., Friedman A.* Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems // J. Reine Angew. Math. 1985. V. 357. P. 1–22.

[22] *Chen Y.Z., DiBenedetto E.* Boundary estimates for solutions of nonlinear degenerate parabolic systems // J. Reine Angew. Math. 1989. V. 395. P. 102–131.

[23] *DiBenedetto E., Herrero M.A.* On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 314, № 1. P. 187–224.

[24] *Xu X.* On the Cauchy problem for a singular parabolic equation // Pacific J. Math. 1996. V. 174, № 1. P. 277–294.

[25] *DiBenedetto E.* Intrinsic Harnack type inequalities for solutions of certain degenerate parabolic equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1988. V. 100. P. 129–147.

[26] *DiBenedetto E., Kwong Y.C.* Harnack estimates and extinction profile for weak solutions of certain parabolic equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 330. P. 783–811.

[27] *DiBenedetto E., Gianazza U., Vespri V.*, Harnack estimates for quasi-linear degenerate parabolic differential equations // Acta Math. 2008. V. 200, № 2. P. 181–209.

[28] *DiBenedetto E., Gianazza U., Vespri V.* Forward, backward and elliptic Harnack inequalities for non-negative solutions to certain singular parabolic partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5). 2010. V. 9, № 2. P. 385–422.

[29] *DiBenedetto E., Gianazza U., Vespri V.* Harnack type estimates and Hölder continuity for non-negative solutions to certain sub-critically singular parabolic partial differential equations // Manuscripta Math. 2010. V. 131. P. 231–245.

[30] *DiBenedetto E., Gianazza U., Vespri V.* A new approach to the expansion of positivity set of non-negative solutions to certain singular parabolic partial differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 2010. V. 138, № 10. P. 3521–3529.

[31] *DiBenedetto E.* Degenerate parabolic equations. New York: Springer-Verlag, 1993.

[32] *DiBenedetto E., Gianazza U., Vespri V.* Harnack's Inequality for Degenerate and Singular Parabolic Equations. New York: Springer-Verlag, 2012.

[33] *Кружков С.Н.* Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений // Матем. сб. 1964. Т. 65(107), № 4. С. 522–570.

[34] *Trudinger N.S.* On the regularity of generalized solutions of linear, non-uniformly elliptic equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1970. 1971. V. 42, № 1. P. 50–62.

[35] *Fabes E.B., Kenig C.E., Serapioni R.P.* The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1982. V. 7, № 1. P. 77–116.

[36] *Fabes E.B., Jerison D.S., Kenig C.E.* The Wiener test for degenerate elliptic equations // Annales de l'institut Fourier. 1982. V. 32, № 3. P. 151–182.

[37] *Chiarenza F., Frasca M.* Boundedness for the solutions of a degenerate parabolic equation // Appl. Anal. 1984. V. 17. P. 243–261.

[38] *Chiarenza F.M., Serapioni R.P.* A Harnack inequality for degenerate parabolic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1984. V. 9, № 8. P. 719–749.

[39] *Chiarenza F., Serapioni R.* Degenerate parabolic equations and Harnack inequality // Ann. Mat. Pura Appl. (4) 1984. V. 137. P. 139–162.

[40] *Chiarenza F., Serapioni R.* A remark on a Harnack inequality for degenerate parabolic equations // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1985. V. 73. P. 179–190.

[41] *Chiarenza F., Serapioni R.* Pointwise estimates for degenerate parabolic equations // Appl. Anal. 1987. V. 23, № 4. P. 287–299.

[42] *Skrypnik I.I.* Regularity of solutions of degenerate quasilinear parabolic equations (weighted case) // Ukr. Math. J. 1996. V. 48, № 7. P. 1099–1118.

[43] *Алхутов Ю.А., Жиков В.В.* О гёльдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений // Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 583–588.

[44] *Алхутов Ю.А., Жиков В.В.* О классе вырождающихся эллиптических уравнений // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. 2003. Т. 23. С. 16–27.

[45] *Алхутов Ю.А., Хренова Е.А.* Неравенство Харнака для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 7–15.

[46] *Алхутов Ю.А., Гусейнов С.Т.* Гёльдерова непрерывность решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 54–59.

[47] *Alkhutov Yu.A., Liskevich V.* Hölder continuity of solutions to parabolic equations uniformly degenerating on a part of the domain // Adv. Differential Equations. 2012. V. 17, № 7–8. P. 747–766.

[48] *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17, № 3. С. 3–146.

[49] *Порпер Ф.О., Эйдельман С.Д.* Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения // УМН. 1984. Т. 39, № 3 (237). С. 107–156.

[50] *Денисов В.Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // УМН. 2005. Т. 60, № 4 (364). С. 145–212.

[51] *Bamberger A.* Etude d'une équation doublement non-linéaire // J. Funct. Anal. 1977. V. 24, № 2. P. 148–155.

[52] *Véron L.* Effets régularisants de semi-groupes non-linéaires dans des espaces de Banach // Annales de la Faculté des Sciences Toulouse 5^e serie. 1979. V. 1, № 2. P. 171–200.

[53] *Herrero M.A., Vazquez J.L.* Asymptotic behaviour of the solutions of a strongly nonlinear parabolic problem // Annales de la Faculté des Sciences Toulouse 5^e série. 1981. V. 3. P. 113–127.

[54] *Alikakos N.D., Rostamian R.* Gradient estimates for degenerate diffusion equations II // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1982. V. 91. P. 335–346.

[55] *Жиков В.В.* О стабилизации решений параболических уравнений // Матем. сб. 1977. Т. 104, № 4. С. 597–616.

[56] *Alikakos N.D., Rostamian R.* On the uniformization of the solutions of the porous medium equation in $\mathbb{R}^N$ // Isr. J. Math. 1984. V. 47, № 4. P. 270–290.

[57] *Мукминов Ф.Х.* О поведении при $t \to \infty$ решений первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности в неограниченных по пространственным переменным областях // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 11. С. 2021–2033.

[58] *Мукминов Ф.Х.* Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1980. Т. 111(153), № 4. С. 503–521.

[59] *Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х.* Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 2. С. 91–131.

[60] *Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х.* Об убывании L_2-нормы решения первой смешанной задачи для нелинейной системы параболических уравнений в области с нерегулярной границей // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 8. С. 1079–1084.

[61] *Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М.* Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 9. С. 3–26.

[62] *Мукминов Ф.Х.* О равномерной стабилизации решений первой смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1990. Т. 181, № 11. С. 1486–1509.

[63] *Денисов В.Н.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Дирихле для уравнения теплопроводности // Докл. РАН. 2006. Т. 407, № 2. С. 163–166.

[64] *Денисов В.Н.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решения первой краевой задачи для параболического уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2013. Т. 29. С. 248–280.

[65] *Жиков В.В.* Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, № 4. С. 675–710.

[66] *Zhikov V.V.* On Lavrentiev's Phenomenon // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 3, № 2. P. 249–269.

[67] *Жиков В.В.* О плотности гладких функций в пространствах Соболева-Орлича // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 310. С. 67–81.

[68] *Жиков В.В.* О весовых соболевских пространствах // Матем. сб. 1998. Т. 189, № 8. С. 27–58.

[69] *Жиков В.В.* О плотности гладких функций в весовом соболевском пространстве // Докл. РАН. 2013. Т. 453, № 3. С. 247–251.

[70] *Fannjiang A., Papanicolaou G.* Diffusion in Turbulence // Probab. Theory Related Fields. 1996. V. 105. P. 279–334.

[71] *Жиков В.В.* Диффузия в несжимаемом случайном потоке // Функц. анализ и его прил. 1997. Т. 31, № 3. С. 10–22.

[72] *Osada H.* Diffusion processes with generators of generalized divergence form // J. Math. Kyoto Univ. 1987. V. 27, № 4. P. 597–619.

[73] *Жиков В.В.* Замечания о единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с младшими членами // Функц. анализ и его прил. 2004. Т. 38, № 3. С. 15–28.

[74] *Мазья В.Г.* О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений // Вестн. Ленингр. ун-та. 1970. Т. 13. С. 42–55.

[75] *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Mineola, NY: Dover Publ. Inc., 2006.

[76] *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.

[77] *Skrypnik I.I.* Regularity of a boundary point for degenerate parabolic equations with measurable coefficients // Ukr. Math. J. 2000. V. 52, № 11. P. 1768–1786.

[78] *Skrypnik I.I.* Regularity of a boundary point for singular parabolic equations with measurable coefficients // Ukr. Math. J. 2004. V. 56, № 4. P. 614–627.

[79] *Stein E.M.* Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press 1993.

[80] *Mazya V.G., Verbitskiy I.E.* Form boundedness of the general second-order differential operator // Comm. Pure Appl. Math. 2006. V. 59, № 9. P. 1286–1329.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[81] *Surnachev M.* A Harnack inequality for weighted degenerate parabolic equations // J. Differential Equations. 2010. V. 248. P. 2092–2129.

[82] *Gianazza U., Surnachev M., Vespri V.* A new proof of the Hölder continuity of solutions to p–Laplace type parabolic equations // Adv. Calc. Var. 2010. V. 3, № 3. P. 263–278.

[83] *Сурначёв М.Д.* Об улучшенных оценках для параболических уравнений с двойным вырождением // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 250–259. (Англ. перев.: *Surnachev M.D.* On improved estimates for parabolic equations with double degeneracy // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. V. 278. P. 241–250.)

[84] *Жиков В.В., Сурначёв М.Д.* О классах существования и единственности для задачи Коши для параболического уравнения с p–Лапласианом // Докл. РАН. 2012. Т. 445, № 3. С. 251–255. (Англ. перев.:*Surnachev M.D., Zhikov V.V.* On existence and uniqueness classes for the Cauchy problem for the parabolic p–Laplace equation // Dokl. Math. 2012. V. 86, № 1. P. 492–496.)

[85] *Surnachev M.D., Zhikov V.V.* Stabilization of solutions to nonlinear parabolic equations of the p-Laplace type // Russ. J. Math. Phys. 2013. V. 20, № 4. P. 523–541.

[86] *Surnachev M., Zhikov V.* On existence and uniqueness classes for the Cauchy problem for parabolic equations of the p–Laplace type // Comm. Pure Appl. Anal. 2013. V. 12, № 4. P. 1783–1812.

[87] *Сурначёв М.Д.* О плотности гладких функций в весовом соболевском пространстве с переменным показателем // Докл. РАН. 2014. Т. 455, № 1. С. 18–22. (Англ. перев.: *Surnachev M.D.* Density of smooth functions in weighted Sobolev spaces wth variable exponent // Dokl. Math. 2014. V. 89, № 2. P. 146–150.)

[88] *Сурначёв М.Д.* О регулярности решений параболических уравнений с двойной нелинейностью и весом // Тр. ММО. 2014. Т. 75, № 2. С. 309–334. (Англ. перев.: *Surnachev M.D.* Regularity of solutions of parabolic equations with a double nonlinearity and a weight // Trans. Moscow Math. Soc. 2014. P. 259–280.)

[89] *Сурначёв М.Д.* О гёльдеровости решений нелинейных параболических уравнений, вырождающихся на части области // Докл. РАН. 2015. Т. 463, № 1. С. 23–27. (Англ. перев.:*Surnachev M.D.* On the Hölder continuity of solutions to nonlinear parabolic equations degenerating on part of the domain // Dokl. Math. 2015. V. 92, № 1. P. 412–416.)

[90] *Сурначёв М.Д.* Гёльдеровская непрерывность решений нелинейных параболических уравнений, вырождающихся на части области // Проблемы матем. анализа. 2015. Т. 83. С. 135–155. (Англ. перев.: *Surnachev M.* Hölder continuity of solutions to nonlinear parabolic equations degenerated on a part of the domain // J. Math. Sci. 2016. V. 213, № 4. P. 610–635.)

[91] *Сурначёв М.Д.* Об улучшенных оценках для параболических уравнений типа p–Лапласа // Проблемы матем. анализа. 2015. Т. 81. С. 81–106. (Англ. перев.*Surnachev M.* Improved estimates for parabolic p-Laplace type equations // J. Math. Sci. 2015. V. 120, № 4. P. 429–457.)

[92] *Жиков В.В., Сурначёв М.Д.* О плотности гладких функций в весовых соболевских пространствах с переменным показателем // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 3. С. 95–124. (Англ. перев.:*Surnachev M.D., Zhikov V.V.* On density of smooth functions in weighted Sobolev spaces with variable exponents // St. Petersburg Math. J. 2016. V. 27. P. 415–436.)

[93] *Сурначёв М.Д.* О единственности решений задачи о стационарной диффузии в несжимаемом турбулентном потоке // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2015. № 96. 32 с. URL: `http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-96` ; `http://mi.mathnet.ru/rus/ipmp/y2015/p96`

[94] *Сурначёв М.Д.* О стабилизации решений задачи Коши-Дирихле в цилиндрической области для параболического p–Лапласиана // Проблемы матем. анализа. 2016. Т. 86. С. 95–117. (Англ. перев.: *Surnachev M.D.* Stabilization of solutions to the Dirichlet problem in a cylindrical domain for the parabolic p–Laplacian // J. Math. Sci. 2016. V. 219, № 2. P. 275–299.)

[95] *Алхутов Ю.А., Сурначёв М.Д.* О неравенстве Харнака для эллиптического (p, q)–Лапласиана // Докл. РАН. 2016. Т. 470, № 6. С. 623–627. (Англ. перев.: *Alkhutov Yu.A., Surnachev M.D.* On a Harnack Inequality for the elliptic (p, q)–Laplacian // Dokl. Math. 2016. V. 94, № 2. P. 569–573.)