

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ П.Г. ДЕМИДОВА

На правах рукописи



ПЛЫШЕВСКАЯ СВЕТЛАНА ПЕТРОВНА

**СЦЕНАРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ МЕТАУСТОЙЧИВЫХ  
СТРУКТУР В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

Специальность 01.01.02 —

«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное  
управление»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Глызин Сергей Дмитриевич

Ярославль – 2019

# Содержание

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>ГЛАВА 1. МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ</b>	
<b>ЗАДАЧИ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ</b> . . . . .	<b>32</b>
1.1. Постановка задачи . . . . .	32
1.2. Бифуркационный анализ . . . . .	34
1.3. Галеркинские аппроксимации . . . . .	38
1.4. Неустойчивые решения уравнения . . . . .	42
1.5. Метаустойчивые структуры с одной точкой перехода . . . . .	47
1.6. Метаустойчивые структуры с двумя точками перехода . . . . .	54
1.7. Структуры параболической задачи с квадратичным слагаемым . . . . .	62
1.8. Неустойчивые стационарные решения . . . . .	73
1.9. Выводы . . . . .	76
<b>ГЛАВА 2. МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ УРАВНЕНИЯ</b>	
<b>КАНА-ХИЛЛАРДА</b> . . . . .	<b>77</b>
2.1. Постановка задачи . . . . .	77
2.2. Структуры уравнения Кана-Хилларда . . . . .	82
2.3. Неустойчивые решения с индексом неустойчивости равным 1 уравнения Кана-Хилларда. . . . .	85
2.4. Неустойчивые решения с индексом неустойчивости равным 2 уравнения Кана-Хилларда . . . . .	88
2.5. Метаустойчивые структуры с двумя точками перехода урав- нения Кана-Хилларда . . . . .	92
2.6. Метаустойчивые структуры с тремя точками перехода урав- нения Кана-Хилларда . . . . .	97
2.7. Выводы . . . . .	102
<b>ГЛАВА 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬ-</b>	
<b>НОЙ ДИНАМИКИ СЕМЕЙСТВ УРАВНЕНИЙ</b>	
<b>КАНА –ХИЛЛАРДА</b> . . . . .	<b>104</b>
3.1. Постановка задачи . . . . .	104

3.2. Динамика краевых задач (3.1), (3.2) и (3.1), (3.3) . . . . .	104
3.2.1 Критический случай в краевой задаче (3.7), (3.8), (3.10)	108
3.2.2 Критический случай в краевой задаче (3.7), (3.9), (3.10)	110
3.2.3 О неоднородных состояниях равновесия краевой задачи (3.5), (3.3) . . . . .	112
3.3. Бифуркации в обобщенном уравнении Кана — Хилларда . . . . .	113
3.3.1 Постановка задачи . . . . .	113
3.3.2 Бифуркация Андронова — Хопфа . . . . .	115
3.3.3 Исследование решений краевой задачи (3.29)—(3.31) при достаточно больших значениях параметра $ \lambda $ . . .	118
3.4. Выводы . . . . .	121
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>123</b>
<b>Список иллюстраций . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>128</b>
<b>Приложение А . . . . .</b>	<b>141</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Среди систем, развивающихся во времени (эволюционных систем), наибольший интерес представляют задачи, обладающие свойством диссипативности. Такие математические модели часто имеют самоподдерживающиеся образования с характерными пространственно-временными структурами. Одним из основных предметов исследования нелинейной динамики являются устойчивые пространственно-временные структуры, которые изучались в работах таких авторов как Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский [61], А.В. Гапонов-Грехов, А.С. Ломов, Г.В. Осипов, М.И. Рабинович [14], а так же Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов [33].

Стационарные пространственно неоднородные структуры, бегущие волны, ротационные волны, движущиеся фронты представляют значительный интерес при исследовании процессов, описываемых нелинейными параболическими уравнениями.

Идея сведения изучения решений обыкновенных дифференциальных уравнений к изучению отображений принадлежит А. Пуанкаре. Он же и ввел понятие инвариантного многообразия отображения. Основная идея А. Пуанкаре об изучении отображений в теории дифференциальных уравнений использовалась Дж.Д. Биркгофом [7], который получил ряд фундаментальных результатов в теории динамических систем. А. Пуанкаре доказал существование устойчивых и неустойчивых многообразий для аналитических отображений в окрестности неподвижной точки седлового типа.

В 1934 г. Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов [28] провели качественный анализ колебательных систем второго порядка и, используя результаты

А. Пуанкаре и Данжуа по теории динамических систем на торе, установили наличие у этих систем квазипериодических решений и исследовали их устойчивость. В этой монографии Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов заложили основы метода интегральных многообразий. Полное математическое обоснование развитых в [28] асимптотических методов нелинейной механики было осуществлено Н.Н. Боголюбовым в 1945 году [8]. Центральное место в [8] занимает проблема обоснования метода усреднения. В так называемой третьей теореме Н.Н. Боголюбова для метода усреднения установлено соответствие между предельным циклом усредненного уравнения и соответствующим ему интегральным многообразием исходного уравнения.

Как известно, принцип сведения в теории критических случаев устойчивости был открыт А.М. Ляпуновым [31]. В дальнейшем принцип сведения для устойчивости по Ляпунову был доказан в работе [34]. На системы, обладающие многообразием стационарных состояний, принцип сведения был распространен В.В. Стрыгиным и В.А. Соболевым [62].

Фундаментальные работы Д. Рюэля (D. Ruelle) [88] и Ф. Такенса (F. Takens) [59, 89] показали, что метод центральных многообразий можно успешно применять в теории бифуркаций Пуанкаре-Андронova-Хопфа. Бифуркация рождения предельного цикла была открыта А.А. Андроновым в 1931 году и активно использовалась при математическом моделировании радиотехнических систем, а также при построении теории колебаний [1, 32]. Анализ этой бифуркации для многомерных динамических систем был проведен З. Хопфом.

Значение нормальных форм для исследования дифференциальных уравнений хорошо известно. Метод нормальных форм в окрестности стационарной точки или периодического решения позволяет привести исходное урав-

нение к более простому виду, в котором содержится основная информация о поведении решения и который часто допускает более полное дальнейшее исследование. Основы теории для обыкновенных дифференциальных уравнений были заложены в работах Пуанкаре [2].

Для исследования локальных бифуркаций принципиальное значение имеют результаты А.Н. Шошитайшвили [65].

В 1976 году была издана книга Дж. Марсдена, М. Мак-Кракена (J. Marsden, M. McCracken) [32, 84] — фундаментальный труд по теории бифуркаций. Применяемая в ней техника основана на методе инвариантных многообразий. Общая теорема о центральном многообразии для отображений в банаховом пространстве используется в этой монографии для доказательства теоремы о центральном многообразии для полупотоков. Посредством дальнейшего тщательного анализа в работе [6] устанавливается применимость этой теоремы для широкого класса параболических уравнений.

В 1981 году была опубликована фундаментальная монография Д. Хенри (D. Henry) [63, 82], в которой теоремы об инвариантных многообразиях и центральных многообразиях доказываются непосредственно для широкого класса полулинейных параболических уравнений. Принцип сведения доказан в общем случае. Указан и обоснован метод построения центрального многообразия в виде асимптотически сходящегося степенного ряда. Приводится на удачно подобранных примерах также и способ редукции уравнения на его центральное многообразие. Д. Хенри получил общие результаты о существовании, устойчивости и гладкости инвариантных многообразий полулинейных параболических уравнений.

Ряд важных задач физики, химии, биологии, экологии приводят к ис-

следованию систем с малой диффузией. При исследовании задач о бифуркациях в указанных системах характерны критические случаи бесконечной размерности. Для исследования этих задач в 80-х годах Ю.С. Колесов [27], опираясь на идеологию одночастотного метода Боголюбова-Митропольского, предложил специальный асимптотический метод, названный методом квазинормальных форм. Глубокие идеи по исследованию бифуркационных задач для параболических уравнений с малой диффузией в случае бесконечномерного вырождения были предложены в работе А.Б. Васильевой, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесова, Н.Х. Розова [13].

Уравнение Гинзбурга–Ландау является ярким представителем общего класса скалярных параболических уравнений типа реакция-диффузия. Этот класс является одним из наиболее исследованных примеров в глобальной, геометрической теории параболических уравнений [63].

В работах С.Д. Глызина [16, 19, 79] выполнены обширные численные эксперименты для разностных моделей уравнения Гинзбурга–Ландау и определены границы применимости асимптотических методов. Диффузионный хаос, как явление, характерное для широкого класса краевых задач параболического типа (систем «реакция-диффузия»), был изучен в цикле работ С.Д. Глызина, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова [15, 17, 18, 80, 81]. Здесь следует еще отметить работы [20, 21] тех же авторов, в которых на основе метода квазинормальных форм доказывается сосуществование сколь угодно большого числа устойчивых автоволновых решений в краевых задачах с периодическими условиями. Отметим также ряд работ, выполненных С.В. Алешиным, С.Д. Глызиным и С.А. Кащенко [67, 68, 69], в которых аналитическими и численными методами изучаются пространственно неоднородные структуры, возникающие в уравнении Колмогорова–Петровского–

Пискунова с запаздыванием по времени и отклонением по пространству.

Подчеркнем, что в параболических задачах с малой диффузией при определенных условиях возникают так называемые метаустойчивые структуры, под которыми мы подразумеваем медленно меняющиеся решения [75, 78, 5]. Фундаментальные результаты по исследованию метаустойчивых структур сингулярно возмущенных параболических уравнений (скалярных уравнений Гинзбурга–Ландау) получены в работах Carr J., Pego R. L. [75], Fusco G., Hale J. K. [78]. В работах [91, 75] приведены примеры метаустойчивых структур уравнения Гинзбурга–Ландау, полученных численными расчетами.

Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния [77, 83, 87]. Одной из самых знаменитых моделей, которая описывает процесс изотермического разделения фаз концентрации [70], является уравнение Кана–Хилларда:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + u^3 \right], \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad u_{xxx}(0, t) = 0, \quad u_{xxx}(\pi, t) = 0.$$

Здесь неизвестная функция  $u(x, t)$  является концентрацией одной из компонент бинарной смеси. Параметр  $\varepsilon^2$  является коэффициентом при градиентной энергии в функционале Гинзбурга–Ландау и пропорционален величине поверхностной энергии на межфазной границе, возникающей при расслоении концентрации при  $T \rightarrow T_c$ , где  $T_c$  – критическая температура. Поскольку единственным механизмом переноса атомов является диффузионный механизм (см., например, [90]), то  $\varepsilon^2 \propto D$ , где  $D$  – коэффициент диффузии [30].

Уравнение Кана–Хилларда рассматривалось в работах многих авторов



[35, 72, 73, 74, 60, 64, 22]. В частности, в [30] рассматривается бинарная смесь, которая граничит с подложкой и вакуумом и образует плёнку. Распределение одной из компонент смеси описывается уравнением Кана–Хилларда с несимметричными граничными условиями, учитывающим процессы (смачивания), происходящие на границе и приповерхностных слоях плёнки и, возможно, влияние внешнего постоянного магнитного поля.

При спинодальном распаде можно наблюдать спонтанные коррелированные поверхностные и(или) объемные структуры, состоящие из кластеров повышенной (пониженной) концентрации. Распределение концентрации также моделируется уравнением Кана–Хилларда [86, 90].

В работе [70] N. Alikakos, P. W. Bates, G. Fusco (1991) доказано существование метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений) уравнения Кана–Хилларда при малых значениях параметра  $\varepsilon^2$ .

В работе А.С. Коротких [29] выявлена связь процедур поиска решений уравнения "реакция-диффузия" и уравнения Кана–Хилларда (при расширенном краевом условии Неймана).

Модификацией (расширением) широко известной модели Кана–Хилларда является уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + bu^2 + u^3 \right], \quad (0.1)$$

Как правило вместе с этим уравнением рассматривают либо краевые условия типа Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad (0.2)$$

либо периодические краевые условия

$$u(t, x + 1) \equiv u(t, x). \quad (0.3)$$

Такого вида краевые задачи изучались в работе С.А.Кащенко [24].

**Целью** данной работы является исследование условий рождения пространственно неоднородных стационарных решений для краевых задач параболических уравнений, анализ поведения решений в зависимости от бифуркационного параметра и определение характера устойчивости рожденных решений при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности (т.е. изменение бифуркационного параметра от бифуркационного значения параметра до значения, принадлежащего области надкритичности).

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Описать условия существования и форму решений параболических уравнений Гинзбурга–Ландау и Кана–Хилларда с условиями типа Неймана на отрезке в зависимости от бифуркационного параметра.
2. Проанализировать динамику устойчивости рождающихся пространственно неоднородных структур при изменении бифуркационного параметра.
3. Исследовать условия и сценарии возникновения метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений).
4. Исследовать динамику уравнения, которое является модификацией (расширением) уравнения Кана–Хилларда, с условиями типа Неймана и периодическими. Выделить критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и исследовать бифуркационные явления.
5. Для обобщенного уравнения Кана–Хилларда с периодическими краевыми условиями показать, что в некоторой области фазового про-

странства его локальная динамика описывается с помощью бифуркации Андронова–Хопфа.

6. Выполнить серию численных экспериментов, основанных на методе центральных многообразий и методе Галеркина. Для определенных фиксированных параметров провести численный анализ формы и устойчивости структур.

**Основные положения**, выносимые на защиту:

1. На основе метода центральных многообразий доказаны теоремы о существовании пространственно неоднородных стационарных решений параболического уравнения Гинзбурга–Ландау с краевыми условиями Неймана на отрезке.
2. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании пространственно неоднородных стационарных решений параболического уравнения Кана–Хилларда с краевыми условиями типа Неймана на отрезке.
3. В параболических задачах на отрезке на основе метода Галеркина проведен анализ формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений, рождающихся в результате бифуркации типа «вилка».
4. В параболических задачах на отрезке существуют метаустойчивые структуры (медленно меняющиеся решения), возникающие в результате седло-узловых бифуркаций. Исследованы условия и сценарии их возникновения.

5. Исследовано поведение решений расширенной модели уравнения Кана–Хилларда в окрестностях всего континуального множества его состояний равновесия. Выделены критические случаи, приведён бифуркационный анализ. Построены асимптотики неоднородных состояний равновесия, и изучена их устойчивость.
6. Для обобщенного уравнения Кана–Хилларда показано, что в некоторой области фазового пространства его локальная динамика описывается с помощью бифуркации Андронова–Хопфа. Приведена соответствующая нормальная форма, которая определяет поведение решений в этой области фазового пространства.

**Объект исследования** — нелинейные параболические уравнения с краевыми условиями типа Неймана и периодическими.

**Предмет исследования** — пространственно неоднородные стационарные решения, их устойчивость и асимптотическая форма; медленно меняющиеся (метаустойчивые) структуры (определение см. в работах [75, 78]). Основные определения приведены в приложении на страницах 141-144.

**Методы исследования.** В данной работе применяются методы функционального анализа, качественной теории полулинейных параболических дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории бифуркаций, метод центральных многообразий, метод Галеркина. Используются как стандартные методы изучения локальной динамики, основанные на построении нормальных форм на центральных многообразиях, так и специальные методы бесконечномерной нормализации.

**Научная новизна:**

1. Выполнено оригинальное исследование динамики формы и устойчи-

вости пространственно неоднородных стационарных решений при изменении бифуркационного параметра (уменьшении и отходе от бифуркационного значения в область надкритичности).

2. Впервые получены и исследованы сценарии возникновения метаустойчивых структур в параболических задачах с условиями на отрезке.
3. Показано, что задача о динамике и устойчивости состояния равновесия расширенной модели уравнения Кана–Хилларда расслаивается на континуальное (зависящее от некоторого параметра) семейство более специализированных краевых задач. Как правило, рассматриваемые критические случаи имеют размерность 1 или 2.

**Научная и практическая значимость.** Результаты работы использованы в учебном процессе на факультете математики и информатики Таврической академии ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» в курсах «Качественная теория бифуркаций», «Динамика структур в бесконечномерных динамических системах».

**Степень достоверности** полученных результатов обеспечивается теоретическими выкладками, доказанными теоремами и численными расчетами, дающими качественно правильные результаты. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на конференциях:

Международная конференция «Моделирование, управление, устойчивость» (MSC-2012) (10–14 сентября 2012, Севастополь, Украина); The 4th international conference «Nonlinear dynamics-2013» (19–22 June 2013, Sevastopol, Ukraine); «Боголюбовские чтения DIF-2013» (23–30 июня 2013, Сева-

стополь, Украина); Крымская международная математическая конференция «КММК-2013» (22 сентября – 4 октября 2013, Судак, Украина); Международная конференция «Метод функций Ляпунова MFL-2014» (15–20 сентября 2014, Алушта, Россия); Международная конференция «Метод функций Ляпунова MFL-2016» (15–18 сентября 2016, Алушта, Россия); XXVII Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2016» (16–29 сентября 2016, Батилиман (Ласпи), РФ); Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII, (23–29 апреля 2017 год, Ростов-на-Дону, РФ); Всероссийская научно-практическая конференция «Математика. Информатика. Компьютерные науки. Моделирование. Образование» (МИКМО-2017) (10–14 апреля 2017 года, Симферополь, РФ); Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения -VIII» (22–27 апреля 2018 года, Ростов-на-Дону, РФ); Всероссийская научно-практическая конференция «Математика. Информатика. Компьютерные науки. Моделирование. Образование» (МИКМО-2018) (17–20 апреля 2018, Симферополь, РФ); XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2018) (17–29 сентября 2018 года, Батилиман (Ласпи), РФ); Международная конференция «Динамические системы в науке и технологиях» (DSST-2018) (17–21 сентября 2018 года, Алушта, РФ);

на семинарах:

семинары кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского (руководители д.ф.-м.н., проф. О.В. Анашкин, д.ф.-м.н., проф. Е.П. Белан); семинар кафедры математического анализа фа-

культета математики и информатики Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского (руководитель д.ф.-м.н., проф. Н.Д. Копачевский); семинар «Нелинейная динамика и синергетика» математического факультета Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова (руководитель д.ф.-м.н., проф. С.Д. Глызин).

Автор выражает благодарность Евгению Петровичу Белану и Сергею Дмитриевичу Глызину за постановку задачи и помощь в процессе исследований.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях [5], [36], [37], [38], [39], [40], [71], входящих в перечень ВАК, 18 — в тезисах докладов [41]–[58], [85].

**Объем и структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка иллюстраций, списка литературы и одного приложения. Полный объем диссертации составляет 140 страниц с 29 рисунками. Список литературы содержит 91 наименование.

Во **введении** обосновывается актуальность темы, характеризуется ее научная разработанность, формулируются цели и задачи исследования, объект и предмет исследования, научная новизна и положения, выносимые на защиту, а так же практическое значение полученных результатов и апробация работы.

В **главе 1** исследуется математическая модель пространственно неоднородных структур канонической параболической задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + \Lambda u^2 - u^3, \quad t > 0 \quad (0.4)$$

с краевыми условиями второго рода:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 \quad (0.5)$$

и начальными условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0.6)$$

при изменении положительного бифуркационного параметра  $\mu$ , их описание и исследование устойчивости. Здесь  $\mu > 0$  и  $\Lambda$  — параметры,  $0 \leq x \leq \pi$ .

Множество стационарных решений  $E_\mu$  уравнения (0.4), т.е. решений краевой задачи

$$\mu u_{xx} + u + \Lambda u^2 - u^3 = 0, \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad (0.7)$$

зависит от параметра  $\mu$ .

Задачу (0.4)–(0.5) в соболевском пространстве  $H^1(0, \pi)$  будем записывать в виде:

$$\dot{u} + Bu = g(u), \quad (0.8)$$

где  $B = B(\mu) = \mu A - I$ ,  $Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $g(u) = \Lambda u^2 - u^3$ .

При помощи метода центральных многообразий доказана теорема о существовании и форме пространственно неоднородных стационарных решениях задачи (0.4)–(0.5).

**Теорема 1.1.** Пусть выполнено условие  $\Lambda = 0$ . Существует  $\delta > 0$  такое, что при  $0 < 1 - \mu < \delta$  уравнение (0.8) имеет по крайней мере два неустойчивых с индексом неустойчивости 1 стационарных решения

$$u_1 = \varphi_1(x, \mu), \quad u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu), \quad (0.9)$$

где функция  $\varphi_1(x, \mu)$  удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \mu) = & (z \cos x + z^3 p_3(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu) + \\ & + z^7 p_7(x, \mu) + r(z, x, \mu)) \Big|_{z=z(\mu)}, \quad (0.10) \end{aligned}$$



$r(z, x, \mu) = O(|z|^7)$ , а  $z(\mu) > 0$  – непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z - \frac{3}{4}z^3 + \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)}z^5 - \frac{3}{32(3\lambda_1 - \lambda_3)}\left(\frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{3}{2(5\lambda_1 - \lambda_3)}\right)z^7 + \dots, \quad -\lambda_k = -1 + k^2\mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Конкретный вид функций  $p_3(x, \mu)$ ,  $p_5(x, \mu)$ ,  $p_7(x, \mu)$  представлен в соответствующей части работы.

Для дальнейшего исследования решений, рождающихся при уменьшении бифуркационного параметра  $\mu$  и его переходе в область надкритичности, рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (0.4) в виде

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \cos kx. \quad (0.11)$$

Подставим (0.11) в (0.4) и приравняем затем коэффициенты при  $\cos kx$ ,  $k = 0, \dots, N$ . В результате приходим к градиентной системе уравнений

$$\dot{z}_k = -\frac{\partial G_N(z, \mu)}{\partial z_k}, \quad k = 0, \dots, N, \quad (0.12)$$

где  $G_N(z, \varepsilon)$  – потенциальная функция, представление которой дано в соответствующей части работы.

В системе (0.12) нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при  $\mu > 1$ , а решения  $(\pm 1, 0, \dots, 0)$  устойчивы для  $\mu > 0$ . При переходе параметра  $\mu$  через 1 индекс неустойчивости (размерность неустойчивого многообразия) нуля увеличивается на порядок. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две ветви неподвижных точек  $\pm z^1(\mu, N)$ , определённые на  $[0, 1)$ . Справедливо следующее приближенное равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx \sum_{k=0}^m z_{2k+1}^1(\mu, N) \cos(2k+1)x, \quad (0.13)$$

$2m + 1 = N$ , если  $N$  — нечётно;  $2m + 2 = N$ , если  $N$  — чётно.

Пара решений  $\pm\varphi_1$  рождается неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1. Характер устойчивости  $\pm\varphi_1$ , как отмечено выше, сохраняется на промежутке  $(0, 1)$  изменения параметра  $\mu$ .

Следуя [33], с помощью принципа подобия можно построить, опираясь на  $\varphi_1(x, \mu)$ , решения  $\varphi_k(x, \mu)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , краевой задачи (0.7).

Подчеркнём, что при малых  $\mu$   $\varphi_2(x, \mu)$  является решением (0.4) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода  $\frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{3\pi}{4}$ .

Пара решений  $\pm\varphi_2(x, \mu)$  рождается при  $\mu = 1/4$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2. На основе аналогичных приведенным выше рассуждениям получено приближенное галеркинское представление  $\varphi_2(x, \mu)$ . Проведен численный анализ поведения спектров решений  $\varphi_1(x, \mu)$ ,  $\varphi_2(x, \mu)$  при средних значениях параметра  $\mu$ .

В градиентных системах (0.12) размерности  $N$  согласно проведенному бифуркационному анализу для значений  $N$  от 20 до 30 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при средних (не очень малых) значениях параметра  $\mu$ . В результате бифуркации седло-узел в однопараметрической системе (0.12) появляются две непрерывные по  $\mu$  ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра  $\mu$ , которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (0.12) отвечают в силу (0.11) две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (0.5) типа внутреннего переходного слоя.

Рассмотрим решения  $S_\mu^t \varphi_1^s$ ,  $S_\mu^t \varphi_1^u$  уравнения (0.4) с начальными условиями  $\varphi_1^s = \varphi_1^s(x, \mu, N)$ ,  $\varphi_1^u = \varphi_1^u(x, \mu, N)$ . Согласно численным расчетам

на значительных промежутках изменения времени решения  $S_\mu^t \varphi_1^s$ ,  $S_\mu^t \varphi_1^u$  меняются медленно. Приближенные решения  $\varphi_1^s$ ,  $\varphi_1^u$  краевой задачи (0.7) порождают метаустойчивые структуры с одной точкой перехода.

Для метаустойчивых структур с двумя точками перехода реализуются два сценария эволюции. Первый вариант характеризуется переходом метаустойчивой структуры после малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода. Второму варианту отвечает переход метаустойчивой структуры в окрестность одного из двух устойчивых решений 1,  $-1$ .

Методом центральных многообразий доказана теорема о существовании и неустойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений  $\varphi_1(x, \mu)$ ,  $\varphi_1(\pi - x, \mu)$  уравнения (0.8), ответвляющихся от нулевого решения при  $\mu = 1$ .

**Теорема 1.2.** Пусть выполнено условие  $\Lambda \neq 0$ . Существует  $\delta > 0$  такое, что при  $0 < 1 - \mu < \delta$  уравнение (0.8) имеет по крайней мере два неустойчивых с индексом неустойчивости 1 стационарных решения

$$u_1 = \varphi_1(x, \mu), \quad u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu), \quad (0.14)$$

где функция  $\varphi_1(x, \mu)$  удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \mu) = & (z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) + z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) + \\ & + z^5 p_5(x, \mu) + r(z, x, \mu)) \Big|_{z=z(\mu)}, \end{aligned}$$

$r(z, x, \mu) = O(|z|^6)$ , а  $z(\mu) > 0$  — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z} = \lambda_1(\mu)z + \left( -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right) z^3 + c_5 z^5 + \dots, \quad (0.15) \\ -\lambda_k = -1 + k^2 \mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В случае  $\Lambda \neq 0$ , как и при  $\Lambda = 0$ , рассматриваются галеркинские аппроксимации (0.11) уравнения (0.4). Подставляя (0.11) в (0.4) и приравнивая коэффициенты при  $\cos kx$ ,  $k = 0, \dots, N$ , приходим к системам уравнений, правые части которых представляют собой полиномы степени 3. Это позволяет получить системы обыкновенных дифференциальных уравнений, стационарным точкам которых отвечают приближенные стационарные решения исходной задачи.

В системах порядка  $N + 1$ , нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при  $\mu > 1$ , а решения  $(\frac{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 + 4}}{2}, 0, 0)$  устойчивы для  $\mu > 0$ . При переходе параметра  $\mu$  через 1 индекс неустойчивости (размерность неустойчивого многообразия) нуля увеличивается на единицу. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две ветви неподвижных точек  $z^{1,1}(\mu, N)$  и  $z^{1,2}(\mu, N)$ , определённые на  $[0, 1)$ . Справедливо следующее приближенное равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx z_0^{1,1} + \sum_{k=1}^N z_k^{1,1}(\mu, N) \cos kx. \quad (0.16)$$

Как и при  $\Lambda = 0$ , с помощью принципа подобия найдено решение  $\varphi_2(x, \mu)$ , которое ответвляется от нуля при прохождении  $\mu$  через значение  $1/4$ . Проведен анализ поведения спектров решений  $\varphi_1(x, \mu)$ ,  $\varphi_2(x, \mu)$  при средних значениях параметра  $\mu$ .

В главе 2 на отрезке  $0 \leq x \leq \pi$  рассматривается уравнение Кана–Хилларда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + u^3 \right], \quad t > 0, \quad (0.17)$$

с краевыми условиями

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad u_{xxx}(0, t) = 0, \quad u_{xxx}(\pi, t) = 0, \quad (0.18)$$

где  $\varepsilon^2 > 0$  — постоянная.

Краевая задача (0.17)– (0.18) допускает существование аттрактора: т.е. при  $t \rightarrow \infty$  её решения сходятся к решениям стационарной задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + u^3 \right] = 0, \quad (0.19)$$

$$u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad u_{xxx}(0) = u_{xxx}(\pi) = 0.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Пусть вещественное  $z_0$  удовлетворяет условию:  $|z_0| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Существует  $\delta > 0$  такое, что если  $\varepsilon^2$  удовлетворяет неравенству:  $1 - 3z_0^2 - \delta < \varepsilon^2 < 1 - 3z_0^2$ , то уравнение (0.17)–(0.18) имеет по крайней мере два экспоненциально устойчивых семейства стационарных решений  $(z_0, \varphi_1^\pm(x, \varepsilon, z_0))$ , для которых справедливо асимптотическое равенство:

$$\varphi_1^\pm(x, \varepsilon, z_0) = z_0 + z_1 \cos x + p_3(z_0, z_1, x, \varepsilon) + p_5(z_0, z_1, x, \varepsilon) + O(|z_1|^7) \Big|_{z_1 = \pm u_1(\varepsilon, z_0)},$$

где  $(z_0, \pm u_1(\varepsilon, z_0))$  — две непрерывные по  $(\varepsilon, z_0)$  ветви стационарных точек системы уравнений:

$$\dot{z}_0 = 0, \quad \dot{z}_1 = \lambda_1(\varepsilon)z_1 - 3z_0^2 z_1 - \frac{3}{4}z_1^3 + \frac{18z_0^2 z_1^3}{2\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{27z_1^5}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \dots, \quad (0.20)$$

бифурцирующие из семейства  $(z_0, 0)$  при  $\varepsilon^2 = 1 - 3z_0^2$ , где

$$\lambda_k(\varepsilon) = k^2 - k^4 \varepsilon^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (0.21)$$

Проведем анализ иерархии упрощенных моделей уравнения Кана–Хилларда — галеркинских аппроксимаций, для этого, как и ранее рассмотрим галеркинскую аппроксимацию (0.11) для уравнения (0.17). Подставим (0.11) в (0.17) и приравняем затем коэффициенты при  $\cos kx$ ,  $k = 0, \dots, N$ . В результате приходим к градиентной системе уравнений:

$$\dot{z}_0 = 0, \quad \dot{z}_k = -\frac{\partial G_N(z, \varepsilon)}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (0.22)$$

где  $z = (z_0, \dots, z_N)$ .

Из первого уравнения системы следует, что  $z_0 = \text{const} = a$  является постоянной величиной. В системе (0.22) семейство решений  $\pm(a, 0, \dots, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , устойчиво при  $\varepsilon^2 > 0$ , если  $|a| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Если же  $|a| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ , то семейство решений устойчиво при  $\varepsilon^2 > 1 - 3a^2$ . Решения  $\pm(1, 0, \dots, 0)$  устойчивы для  $\varepsilon^2 > 0$ . При переходе параметра  $\varepsilon^2$  через значение  $\varepsilon^2 = 1 - 3a^2$  семейство решений  $\pm(a, 0, \dots, 0)$  становится неустойчивым с индексом неустойчивости 1. В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две ветви неподвижных точек  $\pm z^1(\varepsilon, N, a)$ , определённые по  $\varepsilon$  на  $[0, 1 - 3a^2)$ . Справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_1(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^N z_k^1(\varepsilon, N, a) \cos kx. \quad (0.23)$$

Проведенный анализ для  $N$  от 25 до 40 дает основание предполагать, что пара решений (0.17)  $\pm\varphi_1$  устойчива и характер устойчивости  $\pm\varphi_1$  сохраняется на промежутке  $[0, 1 - 3a^2)$  изменения параметра  $\varepsilon^2$ .

Динамика  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при уменьшении  $\varepsilon^2$  от критического значения  $1/4 - 3a^2$  следует из равенства

$$\varphi_k(x, \varepsilon, a) = \varphi_1(kx, k\varepsilon, a), \quad k = 2, 3, \dots \quad (0.24)$$

Подчеркнём, что при малых  $\varepsilon^2$   $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  является решением (0.17) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода.

Пара решений  $\pm\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  рождается при  $\varepsilon^2 = 1/4 - 3a^2$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1.

Рассуждая, как и выше, получим следующее приближенное равенство:

$$\varphi_2(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^m z_{2k}^2(\varepsilon, N, a) \cos 2kx, \quad (0.25)$$

$m + 1 = N$ , если  $N$  — нечётно;  $m = N$ , если  $N$  — чётно.

Динамика  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  при уменьшении  $\varepsilon^2$  от критического значения  $1/9 - 3a^2$  следует из равенства (0.24). Подчеркнём, что при малых  $\varepsilon$   $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  является решением (0.17) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Пара решений  $\pm\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  рождается при  $\varepsilon^2 = 1/9 - 3a^2$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2.

Рассуждая, как и выше, получим следующее приближенное равенство:

$$\varphi_3(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^m z_{3k}^3(\varepsilon, N, a) \cos 3kx, \quad (0.26)$$

$m = N$ , если  $N = 3l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ;  $m = N - 2$ , если  $N = 3l + 2$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ;  $m = N - 1$ , если  $N = 3l - 2$ ,  $l = 2, 3, \dots$

В градиентных системах (0.22) размерности  $N$  согласно проведенному бифуркационному анализу для значений  $N$  от 30 до 40 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при малых значениях параметра  $\varepsilon^2$ . В результате бифуркации седло-узел в двухпараметрической системе (0.22) появляются две непрерывные по  $\varepsilon^2$  ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (0.22) отвечают в силу (0.11) две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (0.19) типа внутреннего переходного слоя.

Рассмотрим один из сценариев эволюции метаустойчивых структур с двумя точками перехода. Он характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного

изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода. Этот вариант эволюции характерен медленным движением при увеличении  $t$  правой точки перехода рассматриваемой структуры к  $\pi$  и медленным же движением левой точки перехода к одной из точек промежутка  $(0, \pi)$ .

Сценарий эволюции метаустойчивых структур с тремя точками перехода характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

В первой части **главы 3** рассматривается уравнение, которое является модификацией (расширением) широко известной модели Кана–Хилларда,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 u + a_3 u^2 + a_4 u^3 \right]. \quad (0.27)$$

Вместе с (0.27) рассматривают либо краевые условия типа Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad (0.28)$$

либо периодические краевые условия

$$u(t, x + 1) \equiv u(t, x). \quad (0.29)$$

Для коэффициентов  $a_j$  выполнены неравенства

$$a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad a_4 > 0. \quad (0.30)$$

Отметим, что количество параметров в (0.27) можно уменьшить, произведя нормировку «времени»  $t \rightarrow (-a_2)t$  и нормировку функции  $u \rightarrow (a_4 a_2^{-1})^{\frac{1}{2}} u$ . В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + bu^2 + u^3 \right], \quad (0.31)$$



где  $\alpha = -a_1 a_2^{-2}$  ( $\alpha > 0$ ),  $b = a_3 a_2^{-3/2} a_4^{1/2}$ .

Для изучения решений из малой окрестности состояния равновесия  $u_0(t, x) \equiv c$  в (0.31) произведём замену  $u = c + v$  и перейдем к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta v + \gamma v^2 + v^3 \right], \quad (0.32)$$

где

$$\beta = 1 - 2bc - 3c^2, \quad \gamma = b + 3c,$$

с краевыми условиями либо

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad (0.33)$$

либо

$$v(t, x + 1) \equiv v(t, x). \quad (0.34)$$

Ниже через  $M(\varphi)$  будем обозначать среднее на отрезке  $[0, 1]$  значение функции  $\varphi(x)$ :

$$M(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

**Теорема 3.1.** *Для каждого  $c \in (-\infty, \infty)$  множество всех решений краевой задачи (0.31), (0.28) и краевой задачи (0.31), (0.29), определённых при  $t > t_0$ , для которых выполнены условия  $u(t, x) = c + v(t, x)$  и*

$$M(v) = 0, \quad (0.35)$$

*является инвариантным интегральным многообразием.*

Отсюда естественным образом возникает задача исследования локальной — в окрестности нулевого состояния равновесия — динамики краевых задач (0.32), (0.33) и (0.32), (0.34), зависящих от параметра  $c \in (-\infty, \infty)$ .

Характеристическое уравнение для линеаризованных в нуле краевых задач (0.32), (0.33), (0.35) и (0.32), (0.34), (0.35) имеет вид

$$\lambda_k = \pi^2 k^2 [-\alpha \pi^2 k^2 + 1 - 2bc - 3c^2], \quad (0.36)$$

где  $k = 1, 2, \dots$  в случае условий (0.33), (0.35) и  $k = \pm 2, \pm 4, \dots$  в случае (0.34), (0.35).

При условии

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + \pi^2 \alpha = 0, \quad (0.37)$$

для некоторого  $c_0$  в задаче об устойчивости краевой задачи (0.32), (0.33), (0.35) возникает критический случай. Этот критический случай имеет размерность единица. Для краевой задачи (0.32), (0.34), (0.35) критический случай размерности два (с двумя группами решений) выделяется равенством

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + 4\pi^2 \alpha = 0. \quad (0.38)$$

Далее в главе рассматривается вопрос о локальной динамике краевой задачи (0.32), (0.33), (0.35) при условии  $c = c_0 + \varepsilon c_1$ , где  $c_0$  является корнем уравнения (0.37),  $c_1 \neq 0$  — как-то фиксировано, а  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Введём в рассмотрение стандартный для метода нормальных форм ряд

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau) \cos(\pi x) + \varepsilon v_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} v_3(\tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (0.39)$$

Подставим (0.39) в (0.32), (0.33), (0.35) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon^{1/2}$ . На третьем шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{3/2}$ , получим уравнение для  $v_3(\tau, x)$ . Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем равенство

$$\dot{\xi} = \delta \xi + \sigma \xi^3, \quad (0.40)$$

где  $\delta = 2\pi^2(b + 3c_0^2)c_1$ ,  $\sigma = -\frac{3}{4}\pi^2 - \gamma^2(6\alpha)^{-1}$ .

Таким образом, уравнение (0.40) с точностью до слагаемых порядка  $O(\varepsilon)$  является нормальной формой для краевой задачи (0.32), (0.33), (0.35).

Сформулируем итоговое утверждение.

**Теорема 3.2.** *При условиях  $\delta \neq 0$ ,  $\sigma \neq 0$  и при всех достаточно малых  $\varepsilon$  поведение решений (0.32), (0.33), (0.35) из некоторой достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия определяется уравнением (0.40):*

1<sup>0</sup>. *При  $\delta > 0$ ,  $\sigma > 0$  в этой окрестности не существует аттрактора;*

2<sup>0</sup>. *При  $\delta > 0$ ,  $\sigma < 0$  нулевое решение неустойчиво и существует два устойчивых состояния равновесия  $v_{\pm}(x, \varepsilon) = \pm(-\frac{\varepsilon\delta}{\sigma})^{1/2} \cos(\pi x) + O(\varepsilon)$ ;*

3<sup>0</sup>. *При  $\delta < 0$ ,  $\sigma > 0$  нулевое решение устойчиво, а  $v_{\pm}(x, \varepsilon)$  — неустойчивы;*

4<sup>0</sup>. *При  $\delta < 0$ ,  $\sigma < 0$  все решения из рассматриваемой окрестности стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .*

Далее в главе рассматривается вопрос о локальной динамике краевой задачи (0.32), (0.34), (0.35). Здесь предполагаем, что выполнено условие (0.38). При этом два корня характеристического уравнения (0.36) при  $k = \pm 2$  являются нулевыми, а все остальные отрицательные. Положим, как и выше,  $c = c_0 + \varepsilon c_1$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$  и введём в рассмотрение формальный ряд

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau) \exp(2\pi i x) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-2\pi i x)] + \\ + \varepsilon v_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} v_3(\tau, x) + \dots, \quad (0.41)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ , а  $v_j(\tau, x)$  —  $2\pi$ -периодичны по  $x$ .

Подставим (0.41) в (0.32), (0.34), (0.35) и приравняем коэффициенты

при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , тогда на третьем шаге при  $\varepsilon^{3/2}$  получим уравнение для  $v_3(\tau, x)$ . Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем равенство

$$(2\pi)^{-2} \cdot \frac{d\xi}{d\tau} = \beta_1 \cdot \xi + d \cdot \xi |\xi|^2, \quad (0.42)$$

в котором  $\beta_1 = -2\gamma_0 c_1$ ,  $d = -3 + 2\gamma_0^2(16\pi^2\alpha - \beta_0)^{-1}$ . Отметим, что при  $\beta_1 d < 0$  уравнение (0.42) имеет множество состояний равновесия вида  $\xi_0 \exp(i\varphi)$  ( $\varphi \in [0, 2\pi)$ ), где  $\xi_0 = (-\frac{\beta_1}{d})^{1/2}$ .

**Теорема 3.3.** *При условиях  $\beta_1 \neq 0$ ,  $d \neq 0$  и при всех достаточно малых  $\varepsilon$  динамика уравнения (0.42) определяет поведение решений краевой задачи (0.32), (0.34), (0.35) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.*

Более подробно: при  $\beta_1 d < 0$  краевая задача (0.32), (0.34), (0.35) имеет неоднородное состояние равновесия  $v_0(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi_0 \cos(2\pi x) + O(\varepsilon)$ . Оно устойчиво при  $\beta_1 > 0$  и неустойчиво при  $\beta_1 < 0$ . При  $\beta_1 < 0$ ,  $d < 0$  все решения из малой окрестности нуля стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Если же  $\beta_1 > 0$ ,  $d > 0$ , то задача о динамике становится нелокальной.

В этой же части третьей главы построены асимптотики и изучена устойчивость неоднородных состояний равновесия краевой задачи (0.31), (0.29).

Во второй части третьей главы исследуется обобщенное уравнение Кана–Хилларда, которое отличается от (0.27) наличием ещё одного слагаемого  $\lambda \partial u / \partial x$ , стоящего в скобках:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + u + bu^2 - u^3 \right]. \quad (0.43)$$

Вместе с (0.43) будем рассматривать периодические краевые условия

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (0.44)$$

В отличие от (0.27), (0.28) у краевой задачи (0.43), (0.44) могут быть только однородные состояния равновесия  $u(t, x) \equiv c$  ( $c \in (-\infty, \infty)$ ).

В результате замены в (0.43):  $u(t, x) = v(t, x) + c$  получим краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} + \beta v + \gamma v^2 - v^3 \right], \quad (0.45)$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad (0.46)$$

где  $\beta = 1 + 2bc - 3c^2$ ,  $\gamma = b - 3c$ . Важно отметить, что из условия

$$M(v(t_0, x)) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t_0, x) dx = 0$$

следует выполнение при всех  $t > t_0$  условия

$$M(v(t, x)) = 0. \quad (0.47)$$

При исследовании локальной динамики краевой задачи (0.45)–(0.47) важную роль играет расположение корней  $\lambda_k$  характеристического уравнения для линеаризованной в нуле краевой задачи:

$$\lambda_k = -\alpha k^4 + ik^3 \lambda + \beta k^2, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (0.48)$$

Ниже будем предполагать, что имеет место критический случай. Пусть значение  $c = c_0$  такое, что

$$\alpha = \beta = 1 + 2bc_0 - 3c_0^2. \quad (0.49)$$

Фиксируем произвольно значение  $c_1$  и положим в (0.45)

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad (0.50)$$

где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр, т. е.

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (0.51)$$

Далее исследуется поведение всех решений краевой задачи (0.45)—(0.47) из некоторой достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия при условиях (0.49)—(0.51).

В этом случае характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней  $\lambda_{\pm 1} = \pm i\lambda + O(\varepsilon)$ , а все остальные его корни имеют отрицательные (и отделенные от мнимой оси) вещественные части. Тем самым выполнены условия бифуркации Андронова–Хопфа.

Введём в рассмотрение формальный ряд

$$v = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau) \exp(ix + i\lambda t) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-ix - i\lambda t)] + \varepsilon v_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} v_3(t, \tau, x) + \dots \quad (0.52)$$

Здесь  $\tau = \varepsilon t$  — медленное «время»; функции  $v_j(t, \tau, x)$  —  $2\pi/\lambda$ -периодичны по  $t$  и  $2\pi$ -периодичны по  $x$ .

Подставим (0.52) в (0.45)—(0.47) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon^{1/2}$ . На третьем шаге для нахождения  $v_3(t, \tau, x)$  приходим к краевой задаче, условие разрешимости которой в указанном классе функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \quad (0.53)$$

в котором

$$\delta = 2\gamma c_1, \quad \sigma = 2A\gamma - 3, \quad A = 2\gamma[8\alpha - 2\beta_0 + 3i\lambda]^{-1}.$$

Отсюда и из общих утверждений (см., например, [32]) вытекает следующий результат.

**Теорема 3.4.** Пусть  $\delta \neq 0$  и  $\operatorname{Re}\sigma \neq 0$ . Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  динамика уравнения (0.53) определяет локальную динамику краевой задачи (0.45)—(0.47).

Далее исследуются решения краевой задачи (0.45)—(0.47) при достаточно больших значениях параметра  $|\lambda|$ . Здесь реализуется критический в задаче об устойчивости стационара случай бесконечной размерности. Методика изучения такого типа критических случаев разработана в [24, 25, 10, 11]. Применяв её для рассматриваемой задачи, показано, что локальная динамика исходной краевой задачи определяется нелокальным поведением решений специально построенной более простой нелинейной краевой задачи.

В **приложении** приведен список некоторых определений и обозначений, используемых в работе.

# ГЛАВА 1. МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ

## ЗАДАЧИ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ

### 1.1 Постановка задачи

Целью данного раздела является изучение математической модели пространственно неоднородных структур канонической параболической задачи при изменении положительного бифуркационного параметра  $\mu$ , их описание и исследование устойчивости.

На отрезке  $0 \leq x \leq \pi$  рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^3, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

с краевыми условиями второго рода:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 \quad (1.2)$$

и начальными условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (1.3)$$

где  $\mu$  - положительный параметр.

Уравнение (1.1) является ярким представителем общего класса скалярных параболических уравнений типа реакция-диффузия. Этот класс является одним из наиболее исследованных примеров в глобальной, геометрической теории параболических уравнений [63].

Уравнение (1.1) в пространстве  $H^1_0(0, \pi)$  (соболевское пространство функций, определённых на промежутке  $(0, \pi)$ , удовлетворяющих условиям (1.2)) порождает диссипативную динамическую систему  $\{S_\mu^t : H^1_0(0, \pi) \rightarrow$



$H^1(0, \pi)$  с глобальным аттрактором  $A_\mu \subset H^1(0, \pi)$  [75, 78]. Множество стационарных решений  $E_\mu$  уравнения (1.1), т.е. решений краевой задачи

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^3 = 0, \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad (1.4)$$

зависит от параметра  $\mu$ .

Приведем теперь основной результат работ [75, 78] в следующей форме.

Для любого фиксированного натурального  $n$  и достаточно малых  $\mu$  существует  $n$ -параметрическое семейство решений задачи (1.1) - (1.2). Каждое решение этого семейства является медленно меняющейся функцией типа внутреннего переходного слоя [12, 66] с  $n$  точками перехода  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . Переменные  $h_1, h_2, \dots, h_n$  удовлетворяют системе из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений, поведение которой определяется следующей системой:

$$\dot{h}_j = \sqrt{\mu} S [q(h_{j+1} - h_j) - q(h_j - h_{j-1})], \quad j = 1, \dots, n,$$

где  $q(s) = K \exp(-\frac{As}{\sqrt{\mu}})$ , а  $S, K, A$  — постоянные порядка 1.

Указанная система уравнений определяет движение по  $n$ -параметрическому многообразию решений — многообразию медленных движений.

При  $\mu = 0$  уравнение (1.1), рассматриваемое как обыкновенное дифференциальное уравнение, имеет две устойчивые стационарные точки 1 и -1, и одну неустойчивую 0 [75, 78]. Таким образом, уравнение (1.1) с диффузией относится к классу триггерных систем. Очевидно, что стационарные решения 1 и -1 экспоненциально устойчивы для любого  $\mu > 0$ . Стационарное решение 0 является при  $\mu > 1$  неустойчивым с индексом неустойчивости, т.е. размерностью его неустойчивого многообразия, 1.

Отметим теперь, что уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразования:  $x \rightarrow \pi - x$ ,  $u \rightarrow -u$ .

## 1.2 Бифуркационный анализ

Задачу (1.1) - (1.2) в пространстве  $H^1(0, \pi)$  представим в виде:

$$\dot{u} + Bu = g(u), \quad (1.5)$$

где

$$B = B(\mu) = \mu A - I, \quad Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$g(u) = -u^3. \quad (1.6)$$

Оператор  $B$ , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве  $L_2[0, \pi]$ , имеет полную ортогональную систему собственных функций

$$\cos kx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

соответствующих собственным значениям

$$-\lambda_k = -1 + k^2\mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.1.** (см. [36]) *Существует  $\delta > 0$  такое, что при  $0 < 1 - \mu < \delta$  уравнение (1.5) имеет по крайней мере две стационарные точки*

$$u_1 = \varphi_1(x, \mu), \quad u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu), \quad (1.8)$$

где функция  $\varphi_1(x, \mu)$  удовлетворяет равенству

$$\varphi_1(x, \mu) = (z \cos x + z^3 p_3(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu) + z^7 p_7(x, \mu) + r(z, x, \mu)) |_{z=z(\mu)}. \quad (1.9)$$

Здесь

$$p_3 = -\frac{1}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x, \quad (1.10)$$

$$p_5 = \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left( -\frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_3} \cos 3x + \frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_5} \cos 5x \right), \quad (1.11)$$

$$p_7 = \frac{9}{64(7\lambda_1 - \lambda_3)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left( -\frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_5} - \frac{3}{5\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} \right) \cos 3x +$$

$$+ \frac{3}{64(7\lambda_1 - \lambda_5)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left( \frac{9}{5\lambda_1 - \lambda_5} + \frac{3}{5\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} \right) \cos 5x +$$

$$(1.12)$$

$$+ \frac{3}{64(7\lambda_1 - \lambda_7)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left( -\frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{3}{5\lambda_1 - \lambda_5} \right) \cos 7x,$$

$r(z, x, \mu) = O(|z|^7)$ , а  $z(\mu) > 0$  - непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z - \frac{3}{4}z^3 + \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)}z^5 - \frac{3}{32(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left( \frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{3}{2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \right) z^7 + \dots \quad (1.13)$$

Стационарные точки  $u_1 = \varphi_1(x, \mu)$ ,  $u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu)$  неустойчивы с индексом неустойчивости 1.

*Доказательство.* В окрестности  $u = 0$ ,  $\mu = 1$  существует центральное многообразие [63, с. 160, 186] надстроенной системы

$$\dot{u} + B(\mu)u = g(u), \quad \dot{\mu} = 0, \quad (1.14)$$

представимое в виде:

$$u = z \cos x + p_3(x, \mu)z^3 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots, \quad (1.15)$$

где  $p_3(x, \mu)$ ,  $p_5(x, \mu)$ , ... функции из пространства  $H_0^1[0, \pi]$ . На многообразии (1.15) уравнение (1.14) принимает вид:

$$\dot{z} = \lambda_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots \quad (1.16)$$

Найдем коэффициенты разложений (1.15), (1.16). С этой целью подставим (1.15), (1.16) в уравнение (1.14):

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots) \cos x + 3z^2(\lambda_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots)p_3 + \\
 & + 5z^4(\lambda_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots)p_5 + \dots + B(z \cos x + p_3 z^3 + p_5 z^5 + \dots) = \\
 & = g(z \cos x + p_3(x)z^3 + p_5(x)z^5 + \dots).
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Отметим, что коэффициент при  $z$  в левой и правой частях этого равенства совпадают. Приравняв коэффициент при  $z^3$ , получим уравнение:

$$c_3 \cos x + (B + 3\lambda_1)p_3 = -\frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x. \tag{1.18}$$

Из условия его разрешимости в пространстве  $H_0^1[0, \pi]$  в классе гладких по параметру  $\mu$  функций следует, что  $c_3 = -\frac{3}{4}$ . При этом его решением в указанном классе является определенная в (1.10) функция.

Приравняв теперь в равенстве (1.17) коэффициент при  $z^5$  и используя (1.6), приходим к уравнению:

$$c_5 \cos x + (B + 5\lambda_1)p_5 = -3(\cos^2 x + c_3)p_3. \tag{1.19}$$

Из его условия разрешимости находим  $c_5 = \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)}$ . Затем, как и выше, убеждаемся, что этому уравнению удовлетворяет функция, удовлетворяющая равенству (1.11).

Из равенств (1.17),(1.6) следует:

$$c_7 \cos x + (B + 7\lambda_1)p_7 = -3(\cos^2 x + c_3)p_5 - 3 \cos x p_3^2 - 3c_5 p_3 + \frac{3}{2}p_5. \tag{1.20}$$

Условие разрешимости этого уравнения приводит к равенству:

$$c_7 = -\frac{3}{32(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left( \frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{3}{2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \right).$$

При этом ему удовлетворяет определенная в (1.12) функция.

Процесс последовательного построения коэффициентов разложений (1.15), (1.16) неограниченно продолжим. Получающийся в результате ряд (1.15) допускает представление в виде степенного ряда по степеням  $z$ ,  $1 - \mu$ . Указанный ряд, как известно, является сходящимся в окрестности  $z = 0$ ,  $\mu = 1$ .

Переходим теперь к анализу уравнения (1.13). Его нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при  $\mu > 1$ . При уменьшении параметра  $\mu$  и его прохождении через 1 от нуля ответвляются две непрерывные ветви неустойчивых стационарных точек. Отсюда в силу принципа сведения следует справедливость теоремы.

Подчеркнём, что утверждения теоремы о существовании, форме и неустойчивости носят локальный по параметру  $\mu$  характер. Однако анализ построения инвариантного многообразия (1.15) даёт основания для следующего утверждения. В достаточно широком диапазоне изменения параметра  $\mu$  справедливо приближенное равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx (z \cos x + z^3 p_3(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu) + z^7 p_7(x, \mu)) \Big|_{z=z(\mu)}. \quad (1.21)$$

Очевидно, для  $\varphi_1(\pi - x, \mu)$  справедливо аналогичное приближённое равенство.

В равенстве (1.21)  $z(\mu) > 0$  — непрерывная ветвь особых точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z - \frac{3}{4}z^3 + \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)}z^5 - \frac{3}{32(3\lambda_1 - \lambda_3)^2}z^7. \quad (1.22)$$

□

На рис. 1.1 изображены графики функции  $\varphi_1(x, \mu)$  при различных значениях параметра  $\mu$ .

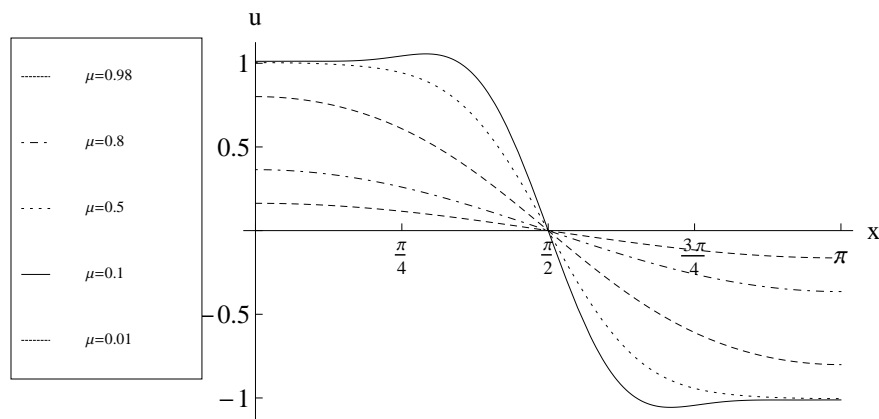


Рис. 1.1: Функция  $\varphi_1(x, \mu)$  при  $\mu = 0.98$ ,  $\mu = 0.8$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\mu = 0.01$

Как видно, на рис. 1.1 при достаточно малых  $\mu$  функция  $\varphi_1(x, \mu)$  близка к ступенчатой функции со значениями  $1, -1$  и одной точкой перехода [75, 78]. Следует отметить, что правая часть равенства (1.21) при малых  $\mu$  колеблется в силу явления Гиббса.

Подчеркнём, что при малых  $\mu$   $\varphi_1(x, \mu)$  является решением задачи (1.1) - (1.2) типа внутреннего переходного слоя с одной точкой перехода  $\frac{\pi}{2}$ .

Построим решение задачи (1.1)- (1.3) при  $\mu = 0.01$ . В качестве начальной функции (1.3) возьмём функцию  $\varphi_1(x, \mu)$ , удовлетворяющую приближенному равенству (1.21).

Для построения решения воспользуемся пакетом "Mathematica". Отметим теперь, что на рис. 1.2 решение не меняется в течение достаточно долгого времени  $\approx 10^{19}$ , то есть порождает метастойчивые структуры (медленно меняющиеся решения).

### 1.3 Галеркинские аппроксимации

Для описания динамики поведения уравнения (1.5) при дальнейшем уменьшении  $\mu$  и отходе от бифуркационного значения построим и проведем ана-

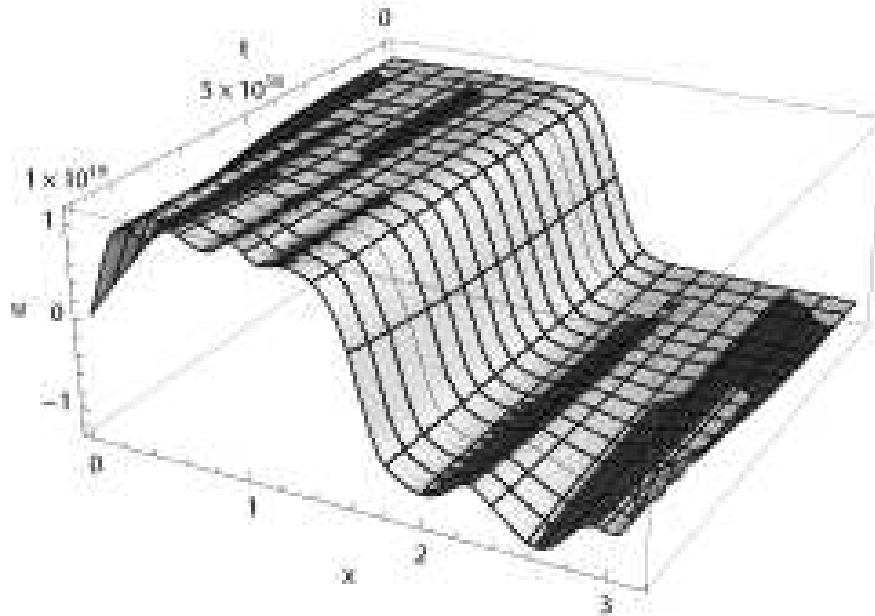


Рис. 1.2: Решение (1.1) - (1.3),  $\varphi(x) = \varphi_1(x, \mu)$ ,  $\mu = 0.01$

лиз иерархии упрощенных моделей уравнения (1.1), (1.2) — галеркинских аппроксимаций (1.1), (1.2) средних размерностей. Как известно [75], анализ иерархии упрощенных моделей многих нелинейных диссипативных систем позволил предсказать как качественные особенности решений, так и основные их количественные характеристики.

Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (1.1), (1.2) в виде:

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \cos kx. \quad (1.23)$$

Подставим (1.23) в (1.1) и приравняем затем коэффициенты при  $\cos kx$ ,  $k = 0, \dots, N$ . В результате приходим к градиентной системе уравнений

$$\dot{z}_k = -\frac{\partial G_N(z, \mu)}{\partial z_k}, \quad k = 0, \dots, N, \quad (1.24)$$

где

$$\begin{aligned}
G_N(z, \mu) = & \sum_0^N \nu_s z_s^2 + \frac{1}{4} z_0^4 + \frac{3}{16} \sum_1^N z_s^4 + \frac{1}{4} \sum_{1 \leq s, 3s \leq N} z_s^3 z_{3s} + \frac{3}{4} z_0^2 \sum_{s=1}^N z_s^2 + \\
& \frac{3}{8} \sum_{s=1}^N z_s^2 \sum_{k=1, k \neq s}^N z_k^2 + \frac{3}{2} z_0 \sum_{k=1}^N z_k \sum_{l=k+1}^{N-k} z_l z_{l+k} + \frac{3}{2} \sum_{s=1}^N z_s \sum_{k=s+1}^N z_k \left( \sum_{l=k+1}^{N-s-k} z_l z_{l+k+s} + \right. \\
& \left. \sum_{l=k+1}^{N-s+k} z_l z_{l+k-s} \right),
\end{aligned}$$

$$\nu_s = -\mu^2 s^2 + 1.$$

В системе (1.24) нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при  $\mu > 1$ , а решения  $\pm(1, 0, \dots, 0)$  устойчивы для  $\mu > 0$ . При переходе параметра  $\mu$  через 1 индекс неустойчивости (размерность неустойчивого многообразия) нуля увеличивается на порядок. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две ветви неподвижных точек  $\pm z^1(\mu, N)$ , определённые на  $[0, 1)$ . Нулевая и все чётные компоненты  $z^1(\mu, N)$  равны 0. Нечётные компоненты  $z_{2k+1}^1(\mu, N)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , отличны от нуля, причём  $(-1)^k z_{2k+1}^1 > 0$ ,  $z_1^1 > -z_3^1 > z_5^1 > \dots$ . Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx \sum_{k=0}^m z_{2k+1}^1(\mu, N) \cos(2k+1)x, \quad (1.25)$$

$2m+1 = N$ , если  $N$  — нечётно,  $2m+2 = N$ , если  $N$  — чётно.

Анализ непрерывной ветви  $z^1(\mu, N)$  неподвижных точек (1.24), выполненный для  $N$  от 20 до 30, и равенство (1.25) дают основание для следующих заключений. Если  $1 - \mu > 0$  мало, то функция  $\varphi_1(x, \mu)$  имеет квазигармоническую форму с малой амплитудой:  $\varphi_1(x, \mu) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \mu^2} \cos x + O(1 - \mu^2)$ . Решение  $\varphi_1(x, \mu)$  монотонно убывает на промежутке  $[0, \pi]$ , причём  $\varphi_1(\frac{\pi}{2}, \mu) = 0$ ,  $\varphi_1(\pi - x, \mu) = -\varphi_1(x, \mu)$ . Для каждого фиксированного



$x \in [0, \pi/2)$   $\varphi_1(x, \mu)$  монотонно возрастает при уменьшении параметра  $\mu$ ,  $\varphi_1(x, \mu) \rightarrow 1$ ,  $\mu \rightarrow 0$ . Следует отметить, что правая часть равенства (1.25) при малых  $\mu$  в силу явления Гиббса колеблется. Таким образом, указанное выше поведение функции  $\varphi_1(\cdot, \mu)$ , согласно (1.25), при малых  $\mu$  справедливо по модулю явления Гиббса.

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости  $\pm\varphi_1$ . Эта пара решений (1.1), (1.2) рождается неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1. Характер устойчивости  $\pm\varphi_1$ , как отмечено выше, сохраняется на промежутке  $(0, 1)$  изменения параметра  $\mu$ . Согласно [78] максимальное собственное значение решения  $\varphi_1(x, \mu)$  положительно, а его асимптотическое поведение при  $\mu \rightarrow 0$  определяется функцией  $C \exp(-\frac{\sqrt{2}\pi}{\mu})$ , где  $C > 0$  — постоянная, значение которой для дальнейшего анализа не существенно.

Рассмотрим здесь задачу о поведении максимального собственного значения решения  $\varphi_1(x, \mu)$  при средних значениях параметра  $\mu$ . Обратимся в этой связи к вопросу о динамике по параметру  $\mu$  максимального собственного значения  $\lambda_1(\mu, N, 1)$  неподвижных точек  $z^1(\mu, N)$  системы (1.24). Спектр устойчивости  $z^1(\mu, N)$  лежит на вещественной оси, а его максимальная точка  $\lambda_1 = \lambda_1(\mu, N, 1)$  при малых  $1 - \mu^2 > 0$  принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра неподвижной точки  $z^1(\mu, N)$  для всех  $0 < \mu < 1$  лежат на отрицательной полуоси и при убывании  $\mu$  сближаются: максимальная точка убывает, минимальная возрастает. Согласно численному анализу для  $20 < N < 30$  поведение  $\lambda_1$  зависит от  $N$ . Если  $N$  нечетно, то  $\lambda_1$  убывает при убывании  $\mu$ . При приближении  $\lambda_1$  к нулю скорость изменения  $\lambda_1$  уменьшается. При этом выделяется интервал  $(\mu_1(N), \mu_2(N))$  изменения  $\mu$ , на которых  $\lambda_1(\mu, N, 1)$  медленно меняется вблизи нуля. При убывании  $\mu$  от значения  $\mu_1(N)$   $\lambda_1$  принимает отрица-

тельные значения и медленно, монотонно убывает. Пусть  $N$  — чётно. Тогда  $\lambda_1(\mu, N, 1)$  не принимает отрицательных значений. Процесс медленной эволюции  $\lambda_1$  на интервале  $(\mu_1(N), \mu_2(N))$ , на котором  $\lambda_1$  принимает малые положительные значения, переходит в стадию медленного монотонного возрастания при уменьшении  $\mu$  от  $\mu_1(N)$ . Отметим, что возрастание  $N$  приводит к возрастанию  $(\mu_2(N) - \mu_1(N))$  и убыванию  $\mu_2(N)$ .

Приведём иллюстрирующие примеры:

$$\mu_1(23) \approx 0.23, \quad \mu_2(23) \approx 0.32;$$

$$\lambda_1(0.32, 23, 1) = 0.000075, \quad \lambda_1(0.23, 23, 1) = 0.000000013, \quad \lambda_1(0.22, 23, 1) = -0.000000087;$$

$$\mu_1(22) \approx 0.223, \quad \mu_2(22) \approx 0.28;$$

$$\lambda_1(0.28, 22, 1) = 0.000014, \quad \lambda_1(0.223, 22, 1) = 0.00000094, \quad \lambda_1(0.221, 22, 1) = 0.000001.$$

На рис. 1.3 изображены графики функции  $\varphi_1(x, \mu)$  при различных значениях параметра  $\mu$  и  $N = 23$ .

Построим решение задачи (1.1) - (1.3) при  $\mu = 0.01$ . В качестве начальной функции (1.3) возьмём функцию  $\varphi_1(x, \mu)$ , удовлетворяющую приближенному равенству (1.25) при  $N = 23$ .

Согласно рис. 1.4 решение медленно меняется в течение времени  $\approx 10^{11}$ . Это значит, что оно приводит к медленно меняющимся решениям.

## 1.4 Неустойчивые решения уравнения

Следуя [33], с помощью принципа подобия можно построить, опираясь на  $\varphi_1(x, \mu)$ , решения  $\varphi_k(x, \mu)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , краевой задачи (1.4). Пусть  $\varphi(x, \mu)$

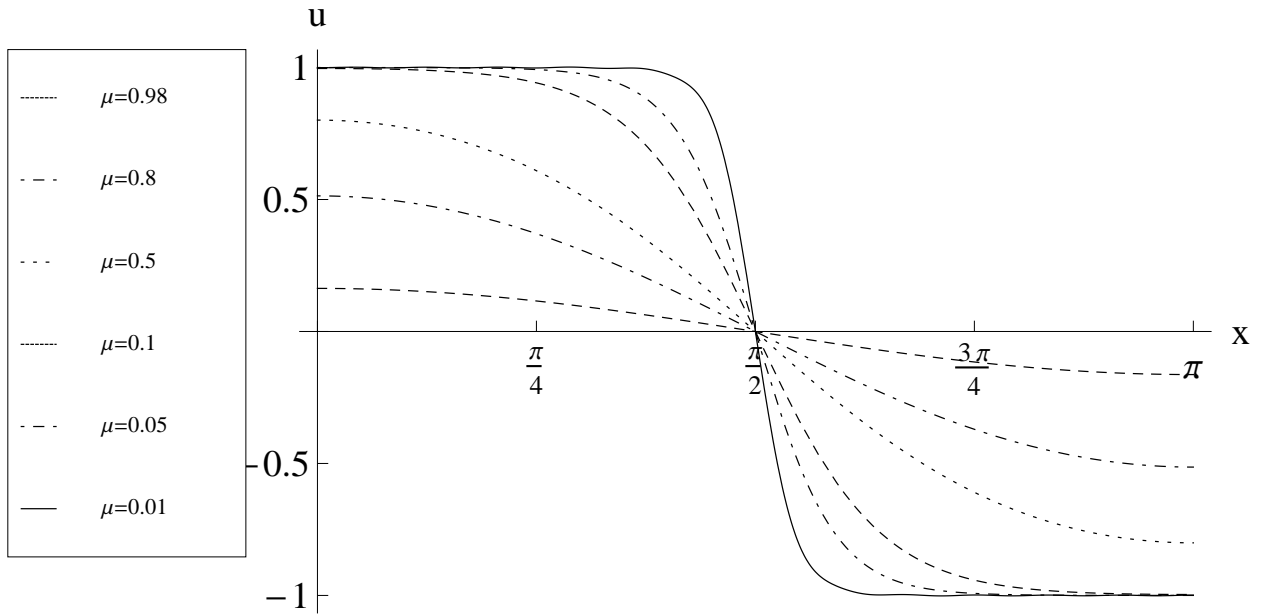


Рис. 1.3: Графики решений  $\varphi_1(x, \mu)$  при  $\mu = 0.98; 0.8; 0.5; 0.1; 0.05, 0.01$ ,  $N = 23$

- отличное от нуля решение (1.4), определенное для всех  $0 < \mu < a$ . Продолжим функцию  $\varphi(x, \mu)$  на промежуток  $[-\pi, 0)$  чётным образом, а затем на всю ось  $x$  по периодичности с периодом  $2\pi$ . Тогда при любом натуральном  $k$  функция  $\varphi(kx, k\mu)$  будет удовлетворять краевой задаче (1.4) для всех  $0 < \mu < \frac{a}{k}$ . Отсюда вытекает, что на промежутке  $0 < \mu < \frac{1}{k}$  справедливо равенство:

$$\varphi_k(x, \mu) = \varphi_1(kx, k\mu), \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.26)$$

Динамика  $\varphi_2(x, \mu)$  при уменьшении  $\mu$  от критического значения  $4^{-1}$  следует из равенства (1.26). Подчеркнём, что при малых  $\mu$   $\varphi_2(x, \mu)$  является решением (1.1) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ .

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости стационарных решений  $\pm\varphi_2(x, \mu)$ . Эта пара решений (1.1), (1.2) рождается при  $\mu = 4^{-1}$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2. Характер устойчивости решений

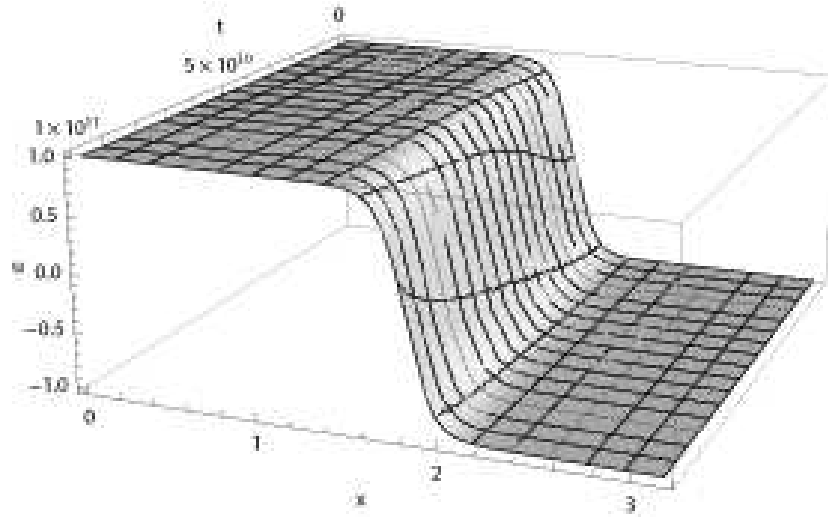


Рис. 1.4: Решение (1.1) - (1.3),  $\varphi(x) = \varphi_1(x, \mu)$ ,  $\mu = 0.01$

$\pm\varphi_2(x, \mu)$  сохраняется, а их две наибольших точек спектра согласно [78] экспоненциально стремятся к нулю при  $\mu \rightarrow 0$ .

Для анализа поведения спектра решения (1.1), (1.2)  $\varphi_2(x, \mu)$  при средних значениях параметра  $\mu$  обратимся вновь к системе (1.24). Для каждого  $N$  в системе (1.24) при уменьшении параметра  $\mu$  и его переходе через значение  $4^{-1}$  индекс неустойчивости нуля увеличивается на 1. В результате этой бифуркации от нулевого решения ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^2(\mu, N)$ , определённые на  $[0, 2^{-2})$ . Рассуждая, как и выше, получаем приближенное галеркинское представление  $\varphi_2(x, \mu)$ .

Переходим к анализу спектра спектра неподвижных точек  $\pm z^2(\mu, N)$ . Точки  $\pm z^2(\mu, N)$  рождаются неустойчивыми с индексом неустойчивости 2: две точки спектра  $\lambda_1(\mu, N, 2) > \lambda_2(\mu, N, 2) > 0$ , а остальные точки принадлежат отрицательной полуоси. При уменьшении параметра  $\mu$  отрицательные точки спектра сближаются: максимальная точка убывает, а минимальная возрастает. Значительный интерес представляет вопрос о поведении  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ . Приведем здесь результаты анализа о поведении  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$  для  $20 < N < 30$ . При уменьшении параметра

$\mu$  функции  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают и приближаются к нулю. При подходе этих функций к нулю скорость их изменения становится малой. При этом наблюдались интервалы изменения  $\mu$ , на которых  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ , медленно меняются вблизи нуля. Указанные интервалы зависят от  $N$ . При условии уменьшения  $\mu$  и выхода из соответствующего интервала медленной эволюции имеет место монотонное убывание или возрастание  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ . Функции  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают, если  $N = 2(2k + 1)$ , и переходят с положительной на отрицательную полуоси. Подчеркнём, что значения параметра  $\mu$ , при которых реализуется этот переход, являются достаточно близкими. Для  $N = 22$  в качестве иллюстрации указанного поведения спектра  $\pm z^2(\mu, N)$  приводятся его четыре наибольшие точки :

$$\mu = 0.030, \quad \{-1.498, -1.480, 0.00021, 0.00007\};$$

$$\mu = 0.029, \quad \{-1.498, -1.482, 0.00015, 0.00003\};$$

$$\mu = 0.027, \quad \{-1.499, -1.486, 0.00004, -0.00003\};$$

$$\mu = 0.025, \quad \{-1.499, -1.489, -0.00012, -0.00005\};$$

$$\mu = 0.020, \quad \{-1.501, -1.495, -0.00050, -0.00042\};$$

$$\mu = 0.010, \quad \{-1.522, -1, 512, -0.00656, -0.00602\};$$

$$\mu = 0.001, \quad \{-1.742, -1.644, -0.08016, -0.07943\}.$$

Пусть теперь  $N \neq 2(2k + 1)$ . Тогда имеет место медленное увеличение  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ , при уменьшении параметра  $\mu$ . Переход этих функций через 0 не наблюдается. В качестве иллюстрации указанного поведения спектра приведём примеры для  $N = 21$ . При этом, как и выше, укажем

четыре наибольшие точки спектра:

$$\mu = 0.030, \quad \{-1.498, -1.480, 0.00039, 0.00025\};$$

$$\mu = 0.029, \quad \{-1.498, -1.482, 0.00037, 0.00025\};$$

$$\mu = 0.027, \quad \{-1.499, -1.486, 0.00038, 0.00029\};$$

$$\mu = 0.025, \quad \{-1.500, -1.490, 0.00045, 0.00038\};$$

$$\mu = 0.020, \quad \{-1.501, -1.498, 0.00109, 0.00100\};$$

$$\mu = 0.010, \quad \{-1.532, -1.516, 0.01038, 0.00984\};$$

$$\mu = 0.001, \quad \{-1.630, -1.513, 0.08718, 0.08645\}.$$

На рис. 1.5 изображены графики функции  $\varphi_2(x, \mu)$  при различных значениях параметра  $\mu$  и  $N = 21$ .

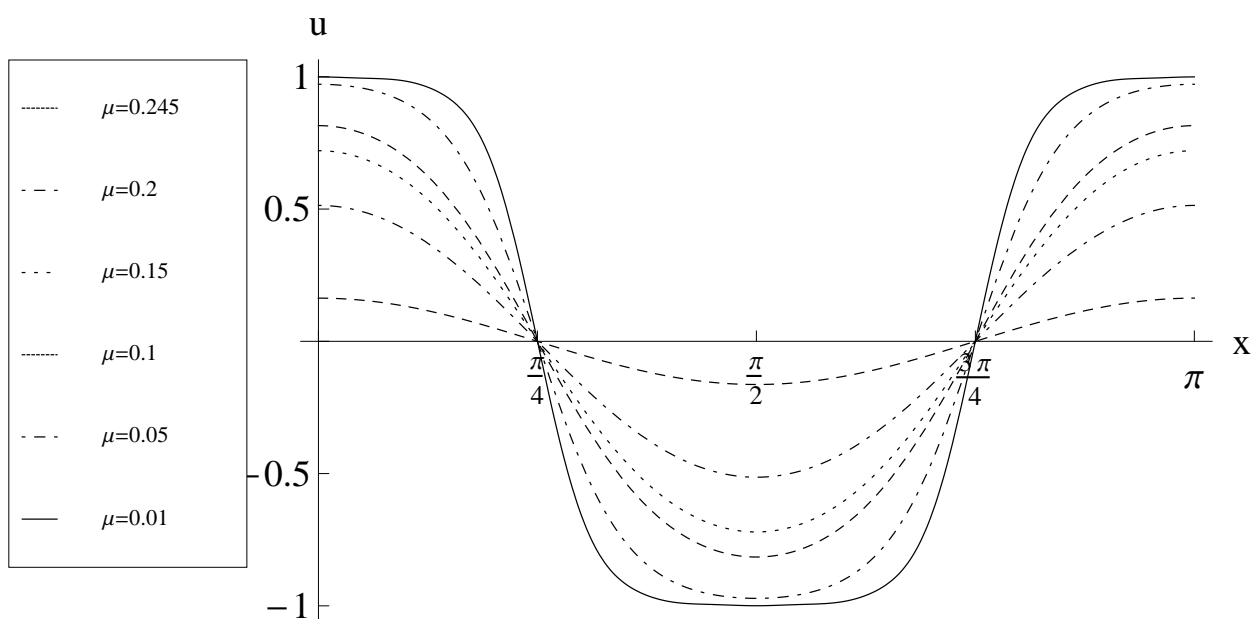


Рис. 1.5: Графики решений  $\varphi_2(x, \mu)$  при  $\mu = 0.245; 0.2; 0.15; 0.1; 0.05; 0.01$ ,  $N = 21$

Построим решение задачи (1.1) - (1.3) при  $\mu = 0.01$ . В качестве начальной функции (1.3) возьмём  $\varphi_2(x, \mu)$ , построенную с помощью принципа подобия.

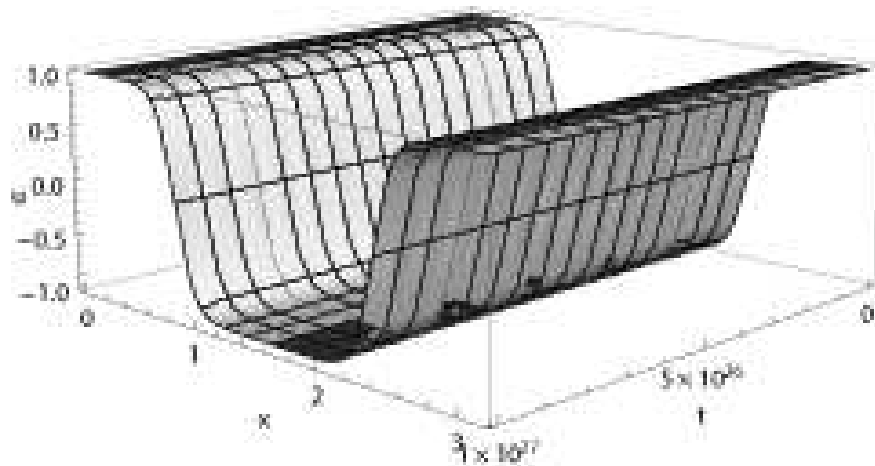


Рис. 1.6: Решение (1.1) - (1.3),  $\varphi(x) = \varphi_2(x, \mu)$ ,  $\mu = 0.01$

Для этого снова воспользуемся пакетом "Mathematica". Согласно рис. 1.6 решение не меняется в течение достаточно долгого времени  $\approx 10^{27}$ . Это значит, что оно приводит к медленно меняющимся решениям.

## 1.5 Метаустойчивые структуры с одной точкой перехода

Под метаустойчивыми (медленно меняющимися) структурами понимают такие решения, которые длительный промежуток времени сохраняют свою форму, а потом за очень короткий промежуток времени переходят на устойчивый режим.

В градиентных системах (1.24) размерности  $N$  согласно проведенному бифуркационному анализу для значений  $N$  от 20 до 30 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при средних (не очень малых) значениях параметра  $\mu$ . В результате бифуркации седло-узел в однопараметрической системе (1.24) появляются две непрерывные по  $\mu$  ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра  $\mu$ , которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым

двум ветвям стационарных точек (1.24) отвечают в силу (1.23) две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (1.2) типа внутреннего переходного слоя. Будем говорить, что приближенные решения (1.4) указанного типа порождаются седло-узловыми бифуркациями в системе (1.24). Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (1.24) порождают непрерывные по  $\mu$  ветви приближенных решений краевой задачи (1.4) типа внутреннего переходного слоя с одной точкой перехода. Седло-узловые бифуркации в этом случае обладают следующими свойствами. Характер устойчивости соответствующих ветвей стационарных точек (1.24) не меняется, а максимальные точки их спектров медленно отходят от нуля с уменьшением параметра  $\mu$ . Подчеркнем, что следующая за максимальной точка спектра медленно эволюционирует вблизи  $-1.5$ . Этими свойствами бифуркации седло-узел указанного выше типа вполне определяются.

Реализация в системе (1.24) бифуркаций седло-узел с указанными выше свойствами вызвана медленной эволюцией вблизи нуля на значительном интервале изменения параметра  $\mu$  максимальной точки спектра ветвей стационарных точек  $\pm z^1(\mu, N)$ . Далее, для определенности, ограничимся анализом бифуркаций седло-узел, связанных с ветвью стационарных точек  $z^1(\mu, N)$ . В этом случае система (1.24) генерирует два сопряженных относительно преобразования  $z_k \rightarrow (-1)^k z_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $z^1 = (z_k, k = 1, \dots, N)$  каскада бифуркаций седло-узел. Рассмотрим тот из этих каскадов, который порождает приближенные решения краевой задачи (1.2) с точками перехода, принадлежащими интервалу  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ . Имеет место 9 таких бифуркаций с бифуркационными значениями  $\mu = \mu_k$ ,  $k = 1, \dots, 9$ ,  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_9$ . Здесь  $\mu_k = \mu_k(N)$ ,  $k = 1, \dots, 9$ . Подчеркнем, что  $\mu_k(N)$ ,  $k = 1, \dots, 9$ , убывают с ростом  $N$ . Приведем теперь качестве иллюстрации для случая  $N = 22$



приближенные бифуркационные значения  $\mu$ , соответствующие им приближённые седло-узловые точки и 3 их наибольших точки спектров:

$$\mu = 0.0310, \quad (0.044, 1.240, -0.080, -0.339, 0.061, 0.141, \dots),$$

$$\{-2.000, -1.500, -0.000044\};$$

$$\mu = 0.0300, \quad (0.132, 1.218, -0.235, -0.283, 0.168, 0.077, \dots),$$

$$\{-2.000, -1.500, -0.000059\};$$

$$\mu = 0.0293, \quad (0.222, 1.178, -0.372, -0.173, 0.218, -0.225, \dots),$$

$$\{-2.000, -1.500, -0.00006\};$$

$$\mu = 0.0285, \quad (0.309, 1.098, -0.477, -0.038, 0.205, -0.111, \dots),$$

$$\{-2.000, -1.499, -0.000035\};$$

$$\mu = 0.0275, \quad (0.399, 1.007, -0.553, 0.107, 0.133, -0.152, \dots),$$

$$\{-2.000, -1.498, -0.00006\};$$

$$\mu = 0.0252, \quad (0.497, 0.885, -0.586, 0.247, 0.004, -0.114, \dots),$$

$$\{-2.000, -1.495, -0.00008\};$$

$$\mu = 0.0232, \quad (0.579, 0.771, -0.582, 0.339, -0.119, -0.029, \dots),$$

$$\{-2.000, -1.493, -0.00008\};$$

$$\mu = 0.0218, \quad (0.666, 0.658, -0.548, 0.398, -0.244, 0.099, \dots),$$

$$\{-2.000, -1.510, -0.00006\};$$

$$\mu = 0.0110, \quad (0.751, 0.489, -0.444, 0.373, -0.282, 0.199, \dots),$$

$\{-2.000, -1.510, -0.00009\}$ .

С целью сокращения многоточием обозначены остальные координаты стационарных точек.

Устойчивая и неустойчивая ветви неподвижных точек, родившиеся в результате седло-узловой бифуркации системы (1.24), расходятся медленно с уменьшением параметра  $\mu$ . Соответственно медленно расходятся и отвечающие им в силу (1.23) непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (1.4). В приводимой далее последовательности стационарных точек системы (1.24), где  $N = 22$ ,  $\mu = 0.01$ , неустойчивая точка следует за устойчивой точкой. При этом пары стационарных точек расположены согласно приведенному выше порядку седло-узловых точек:

(0.04, 1.25, -0.085, -0.385, 0.076, 0.196, -0.064, -0.11, 0.051, 0.06, -0.03, ...)

(0.08, 1.25, -0.169, -0.360, 0.147, 0.16, -0.118, -0.07, 0.087, 0.024, -0.06, ...)

(0.132, 1.23, -0.24, -0.31, 0.2, 0.105, -0.15, -0.013, 0.097, -0.023, -0.053, ...)

(0.177, 1.21, -0.32, -0.26, 0.250, 0.037, -0.150, 0.045, 0.07, -0.060, -0.02, ...)

(0.22, 1.187, -0.39, -0.198, 0.270, -0.034, -0.13, 0.094, 0.034, -0.07, 0.02, ...)

(0.26, 1.154, -0.456, -0.123, 0.27, -0.10, -0.09, 0.12, -0.018, -0.06, 0.05, ...)

(0.30, 1.11, -0.509, -0.04, 0.260, -0.15, -0.03, 0.120, -0.06, -0.025, 0.06, ...)

(0.35, 1.072, -0.552, 0.037, 0.220, -0.19, 0.030, 0.09, -0.09, 0.021, 0.04, ...)

(0.39, 1.024, -0.58, 0.11, 0.168, -0.208, 0.09, 0.041, -0.091, 0.062, 0.002, ...)

(0.440, 0.91, -0.601, 0.190, 0.102, -0.19, 0.131, -0.010, -0.06, 0.07, -0.03, ...)

(0.486, 0.911, -0.61, 0.260, 0.023, -0.16, 0.151, -0.07, -0.016, 0.06, -0.06, ...)

(0.530, 0.84, -0.613, 0.31, -0.05, -0.108, 0.153, -0.112, 0.036, 0.02, -0.05, ...)

(0.57, 0.78, -0.59, 0.35, -0.12, -0.041, 0.122, -0.124, 0.079, -0.02, -0.023, ... )  
(0.61, 0.713, -0.574, 0.383, -0.188, 0.02, 0.071, -0.109, 0.09, -0.05, 0.01, ... )  
(0.66, 0.638, -0.537, 0.39, -0.238, 0.09, 0.006, -0.067, 0.08, -0.077, 0.05, ... )  
(0.706, 0.56, -0.491, 0.38, -0.269, 0.15, -0.058, -0.01, 0.051, -0.06, 0.06, ... )  
(0.75, 0.48, -0.43, 0.36, -0.27 0.193, -0.113, 0.04, -0.0007, -0.029, 0.043, ... )  
(0.78, 0.41, -0.386, 0.33, -0.273, 0.206, -0.143, 0.08, -0.040, 0.007, 0.01, ... )

Приведенным стационарным точкам системы (1.24), где  $N = 22$ ,  $\mu = 0.01$ , отвечают приближенные решения задачи (1.4) на рис. 1.2. На этом рисунке также представлено приближенное решение (1.4) с точкой перехода  $\frac{\pi}{2}$ . Порядок следования приближенных решений задачи (1.4) на этом рисунке отвечает приведенному порядку выше стационарных точек системы (1.24). Последнее означает, что первой устойчивой стационарной точке (1.24) отвечает приближённое решение (1.4) с первой от  $\frac{\pi}{2}$  в порядке возрастания точкой перехода. Первой неустойчивой стационарной точке (1.24) отвечает приближенное решение (1.4) со второй от  $\frac{\pi}{2}$  в порядке возрастания точкой перехода и так далее.

Обозначим  $\varphi_k^s = \varphi_k^s(x, \mu, N)$ ,  $\varphi_k^u = \varphi_k^u(x, \mu, N)$ ,  $k = 1, \dots, 9$ , непрерывные по  $\mu$  ветви приближенных решений (1.4), отвечающие соответственно в силу (1.23) устойчивой, неустойчивой непрерывным ветвям стационарных решений системы (1.24), рожденных в результате седло-узловой бифуркации с номером  $k$ . Подчеркнем, что имеет место слабая зависимость указанных функций от  $N$  при изменении  $N$  от 20 до 30. Обозначим  $x_k^s = x_k^s(\mu, N)$ ,  $x_k^u = x_k^u(\mu, N)$ ,  $k = 1, \dots, 9$ , — соответствующие точки перехода функций  $\varphi_k^s$ ,  $\varphi_k^u$ . Справедливы неравенства:  $x_1^s < x_1^u < x_2^s < x_2^u < \dots$ .

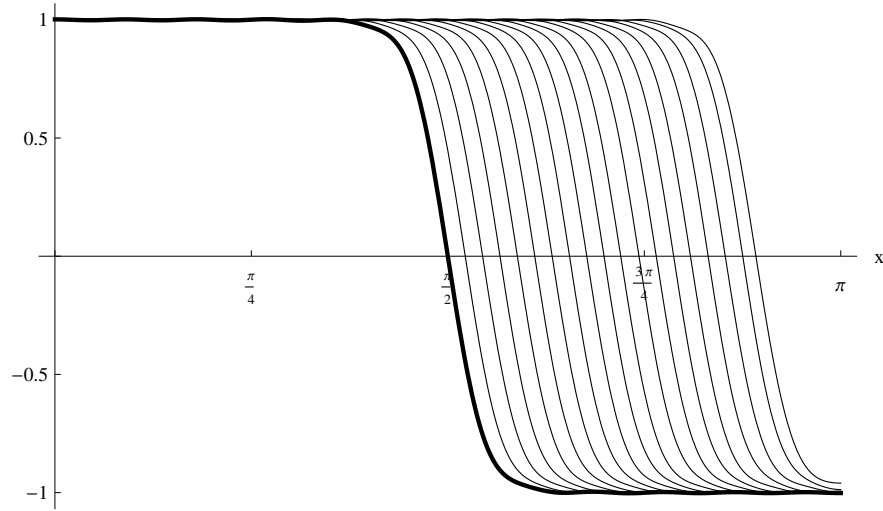


Рис. 1.7: Приближённые решения (1.4),  $\mu = 0.01$

Положим далее  $N = 22$ . Рассмотрим решения  $S_\mu^t \varphi_1^s$ ,  $S_\mu^t \varphi_1^u$  уравнения (1.1) с начальными условиями  $\varphi_1^s = \varphi_1^s(x, \mu, N)$ ,  $\varphi_1^u = \varphi_1^u(x, \mu, N)$ . Согласно численным расчетам на значительных промежутках изменения времени решения  $S_\mu^t \varphi_1^s$ ,  $S_\mu^t \varphi_1^u$  меняются медленно. Нули  $h_1^s = h_1^s(t, \mu)$ ,  $h_1^u = h_1^u(t, \mu)$ ,  $\frac{\pi}{2} < h_1^s < h_1^u$ , соответствующих решений  $S_\mu^t \varphi_1^s$ ,  $S_\mu^t \varphi_1^u$  медленно возрастают с увеличением  $t$ . При этом с убыванием  $\mu$  быстро убывает скорость изменения  $h_1^s$ ,  $h_1^u$ . Итак, приближенные решения  $\varphi_1^s$ ,  $\varphi_1^u$  краевой задачи (1.4) порождают метаустойчивые структуры.

На рис. 1.8 представлено решение  $S_\mu^t \varphi_1^s$  уравнения (1.1), где  $\mu = 0.03$ . Видно, что в течение времени  $\approx 8 \times 10^7$  решение  $S_\mu^t \varphi_1^s$  медленно меняется. Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени  $S_\mu^t \varphi_1^s$  оказывается вблизи устойчивого стационарного решения  $\varphi_0 = 1$ .

Решение  $S_\mu^t \varphi_1^s$  при увеличении  $t$  последовательно проходит вблизи приближённых решений  $\varphi_1^u$ ,  $\varphi_2^s, \dots$  краевой задачи (1.4). В свою очередь,  $S_\mu^t \varphi_1^u$  последовательно проходит вблизи  $\varphi_2^s$ ,  $\varphi_2^u, \dots$ . Соответствующая динамика присуща и решениям (1.1)  $S_\mu^t \varphi_2^s$ ,  $S_\mu^t \varphi_2^u, \dots, S_\mu^t \varphi_9^u$ . При этом каждая функ-

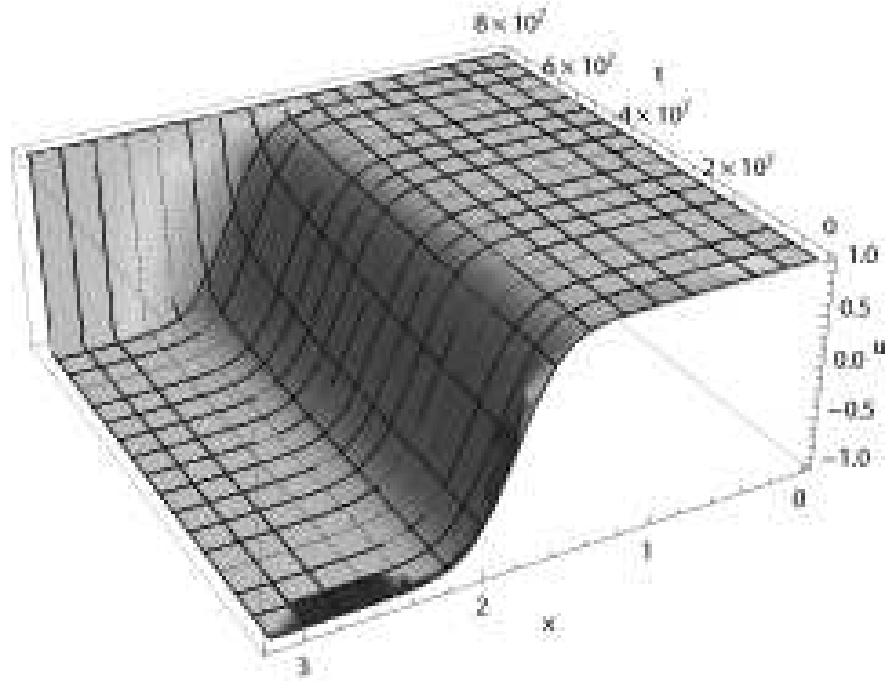


Рис. 1.8: Решение (1.1),  $\mu = 0.03$

ция в приведённой последовательности имеет свой промежуток медленной эволюции — времени жизни метастойчивой структуры. Отметим, что время жизни метастойчивых структур  $S_\mu^t \varphi_1^s, S_\mu^t \varphi_1^u, \dots, S_\mu^t \varphi_9^u$  убывает быстро с переходом от одной из них к последующей в приведённой последовательности. Подчеркнем, что время жизни метастойчивых структур быстро растёт с уменьшением параметра  $\mu$ .

Рассмотрим теперь решение  $S_\mu^t \varphi$  уравнения, где  $\varphi \in H^1(0, \pi)$  и  $\varphi(x)$  имеет на  $(0, \pi)$  единственный простой нуль  $\hat{x} > \frac{\pi}{2}$  такой, что  $\varphi'(\hat{x}) < 0$ . При средних значениях параметра  $\mu$   $S_\mu^t \varphi$  быстро меняется на промежутке  $(0, T_1)$ , где  $T_1 = T_1(\varphi, \mu)$  быстро убывает при убывании  $\mu$ . В завершении этапа быстрого изменения  $S_\mu^t \varphi$  попадает в зону влияния одного из решений  $S_\mu^t \varphi_1^s, S_\mu^t \varphi_1^u, \dots, S_\mu^t \varphi_9^u$ . Таким образом, понятен ответ на вопрос о характере эволюции  $S_\mu^t \varphi$  на промежутке  $(T_1, \infty)$  при сформулированных выше условиях. Пусть теперь  $\varphi \in H^1(0, \pi)$  и имеет на  $(0, \pi)$  единственный простой нуль, но сформулированные выше дополнительные условия не выполнены.

Исследование динамики решения  $S_{\mu}^t \varphi$ , очевидно, сводится к рассмотренному выше случаю.

## 1.6 Метаустойчивые структуры с двумя точками перехода

Задача исследования метаустойчивых структур (1.1) с двумя точками перехода, разумеется, сложнее, чем соответствующая задача для метаустойчивых структур с одной точкой перехода. Рассмотрим сценарии эволюции метаустойчивых структур с двумя точками перехода. В принципе реализуются два варианта эволюции. Первый вариант характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода. Второму варианту отвечает переход метаустойчивой структуры в окрестность одного из двух устойчивых решений (1.1).

Первый вариант эволюции характеризуется медленным движением при увеличении  $t$  левой точки перехода рассматриваемой структуры к нулю и медленным же движением правой точки перехода к одной из точек  $(0, \pi)$ . Напомним, что согласно [75, 78] при приближении точки перехода к нулю скорость приближения точки перехода к нулю быстро возрастает. Ввиду инвариантности (1.1) относительно преобразований  $x \mapsto \pi - x$  уравнение (1.1) имеет сопряженную структуру с очевидной эволюцией точек перехода.

Есть основания полагать, что значительно число различных вариантов эволюции точек перехода метаустойчивых структур.

Перейдем теперь к описанию второго варианта эволюции метаустойчивых структур. В этом случае две точки перехода рассматриваемой структуры медленно сближаются к некоторой точке интервала  $(0, \pi)$ . Процесс

медленной эволюции метаустойчивой структуры в этом случае завершается переходом в стадию быстрого по сравнению с предыдущим этапом изменения решения, в результате которого решение оказывается вблизи одного из двух устойчивых решений  $1, -1$ . Отметим, что если рассматриваемое медленно меняющееся решение симметрично относительно  $\pi/2$  в начальный момент времени, то симметричность решения сохраняется в процессе эволюции и, разумеется, точкой сближения ее двух точек перехода является  $\pi/2$ . Однако, есть основания полагать, что достаточно велико количество различных вариантов сближения двух точек перехода. В частности, возможен случай, когда одна из точек перехода не эволюционирует.

Как выше отмечалось, в градиентных системах (1.24) размерности  $N$  реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Рассмотрим порожденные седло-узловыми бифуркациями непрерывные ветви неподвижных точек (1.5), которым в силу (1.23) отвечают две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (1.4) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода. Каждая пара непрерывных ветвей неподвижных точек (1.24) указанного выше типа медленно меняется при уменьшении параметра  $\mu$ . Следовательно, медленно меняются при этом и соответствующие им ветви приближенных решений (1.4). Отметим, что найти бифуркационные значения параметра  $\mu$ , как правило, не удаётся. В этой связи далее приводятся их приближенные значения  $\mu$  и для каждого из них соответствующие стационарные точки (1.24), индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Реализуются следующие два случая:

1) одна из неподвижных точек — устойчива, две ее близкие нулю точки спектра принадлежат отрицательной полуоси, у второй же две близкие нулю точки спектра лежат по разные стороны от нуля;

2) две близкие нулю точки спектра одной из неподвижных точек лежат по разные стороны от нуля, у второй же две ее близкие нулю точки спектра принадлежат положительной полуоси. Подчеркнем, что индекс неустойчивости неподвижных точек на каждой ее непрерывной ветви сохраняется. При этом с уменьшением параметра  $\mu$  две максимальные точки спектра неподвижных точек медленно отходят от нуля. Остальные точки спектра принадлежат отрицательной полуоси, при этом первая из них в порядке убывания находится вблизи  $-1.5$ .

Рассматриваемые здесь седло-узловые бифуркации образуют каскады. Согласно проведенным исследованиям для значений  $N$  от 20 до 30 в (1.24) в каждый такой каскад входят 6 седло-узловых бифуркаций. Заметим, что для всех седло-узловых бифуркаций, образующих каскад, реализуется либо случай 1), либо случай 2) поведения точек спектра их ветвей неподвижных точек. Перейдем к описанию одного из указанных седло-узловых каскадов при фиксированном значении  $N$ . С этой целью упорядочим седло-узловые бифуркации каскада по убыванию бифуркационного значения параметра  $\mu$ . Рассмотрим седло-узловую бифуркацию с наибольшим бифуркационным значением параметра  $\mu$ . В этом случае седло-узловая точка находится вблизи одной из двух стационарных точек  $\pm z^2(\mu_1, N)$  системы (1.24). Для определенности будем далее считать, что таковой является  $z^2(\mu_1, N)$ . Пары непрерывных ветвей неподвижных точек (1.24), порожденной указанной седло-узловой бифуркацией каскада, отвечает пара приближенных непрерывных ветвей решений задачи (1.4) типа внутреннего переходного слоя. Обозначим:  $x_{11}^s = x_{11}^s(\mu)$ ,  $x_{12}^s = x_{12}^s(\mu)$ ,  $x_{11}^s < x_{12}^s$ , — точки перехода одной из этих ветвей, а  $x_{11}^u = x_{11}^u(\mu)$ ,  $x_{12}^u = x_{12}^u(\mu)$ ,  $x_{11}^u < x_{12}^u$ , — точки перехода второй ветви. При соответствующем выборе ветвей имеют место



следующие случаи:

$$i) x_{11}^u < x_{11}^s < \pi/4, \quad x_{12}^u < x_{12}^s < 3\pi/4;$$

$$ii) x_{11}^u < x_{11}^s < \pi/4, \quad 3\pi/4 < x_{12}^s < x_{12}^u;$$

$$iii) \pi/4 < x_{11}^s < x_{11}^u, \quad x_{12}^u < x_{12}^s < 3\pi/4.$$

Рассмотрим  $k$  — седло-узловую бифуркацию каскада,  $k = 2, \dots, 6$ . Обозначим в соответствии с принятыми выше обозначениями точки перехода  $x_{k1}^s, x_{k2}^s, x_{k1}^s < x_{k2}^s, x_{k1}^u, x_{k2}^u, x_{k1}^u < x_{k2}^u$  двух непрерывных ветвей приближенных решений задачи (1.4) типа внутреннего переходного слоя, порожденную указанной седло-узловой бифуркацией. Тогда имеют место следующие случаи:

$$i) x_{61}^u < x_{61}^s < \dots < x_{11}^u < x_{11}^s < \pi/4, \quad x_{62}^u < x_{62}^s < \dots < x_{12}^u < x_{12}^s < 3\pi/4;$$

$$ii) x_{61}^u < x_{61}^s < \dots < x_{11}^u < x_{11}^s < \pi/4, \quad 3\pi/4 < x_{12}^s < x_{12}^u < \dots < x_{62}^s < x_{62}^u;$$

$$iii) \pi/4 < x_{11}^s < x_{11}^u < \dots < x_{62}^s < x_{62}^u, \quad x_{62}^u < x_{62}^s < \dots < x_{12}^u < x_{12}^s < 3\pi/4.$$

Перейдем к иллюстрации каскадов седло-узловых бифуркаций в (1.24), где  $N = 22$ , и приближенных решений краевой задачи (1.4), отвечающих этим каскадам. Далее приводятся 6 приближённых бифуркационных значения параметра  $\mu$  каскада. Каждому значению  $\mu$  отвечают две близкие неподвижные точки (1.24). Мы приводим их 3 наибольшие точки спектров:

$$\mu = 0.0220, \quad \{-1.493, -0.0003, -0.0001\}, \quad \{-1.493, -0.0003, 0.0001\};$$

$$\mu = 0.0198, \quad \{-1.489, -0.0005, -0.0001\}, \quad \{-1.489, -0.0005, 0.0001\};$$

$$\mu = 0.0155, \quad \{-1.480, -0.0015, -0.0002\}, \quad \{-1.481, -0.0015, 0.0002\};$$

$$\mu = 0.0111, \quad \{-1.458, -0.0045, -0.0007\}, \quad \{-1.458, -0.0046, 0.0007\};$$

$$\mu = 0.0066, \quad \{-1.415, -0.0145, -0.0048\}, \quad \{-1.408, -0.0147, 0.0050\};$$

$$\mu = 0.0021, \{-1.399, -0.1112, -0.0449\}, \{-1.393, -0.0481, 0.1237\}.$$

Подчеркнем, что бифуркационные значения параметра  $\mu$  зависят от порядка  $N$  системы (1.24). С увеличением  $N$  бифуркационные значения параметра  $\mu$  соответствующих седло-узловых бифуркаций убывают. Так приближенному бифуркационному значению параметра  $\mu = 0.022$  системы (1.5) порядка  $N = 22$  отвечает приближенное значение  $\mu = 0.020$  системы (1.24) порядка  $N = 24$ . Приведём координаты и соответствующие спектры этих точек:

$$(-0.088, 0., 1.181, 0., 0.136, 0., -0.227, 0., -0.069, 0., 0.053, \dots),$$

$$\{-1.494, -0.0001, -0.0001\};$$

$$(-0.132, 0., 1.167, 0., 0.199, 0., -0.202, 0., -0.096, 0., 0.035, \dots)$$

$$\{-1.492, -0.0001, 0.0001\}.$$

Неподвижным первым 4 парам точек (1.24), порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (1.4), представленные на рис. 1.9. Здесь реализуется случай i).

Перейдем к иллюстрации случая ii). Как и выше, приводятся 6 приближенных бифуркационных значения параметра  $\mu$  каскада и для соответствующих пар неподвижных точек (1.24) приводятся их 3 наибольшие точки спектров:

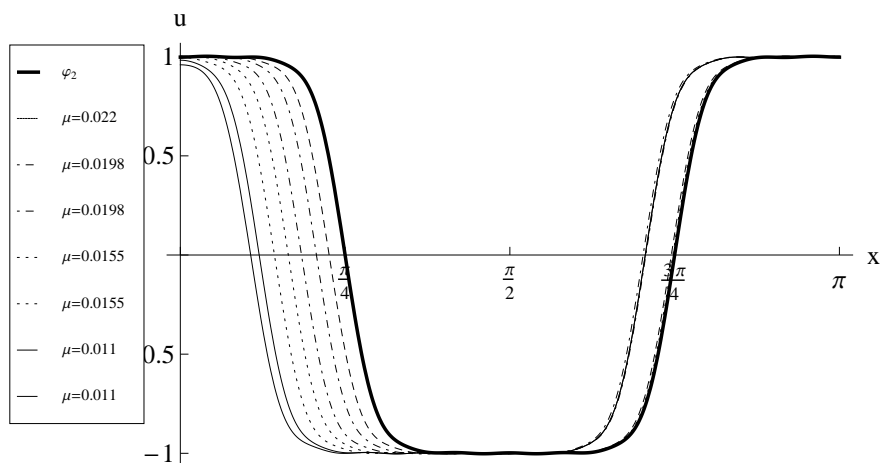


Рис. 1.9: Приближённые решения (1.4),  $\mu = 0.01$

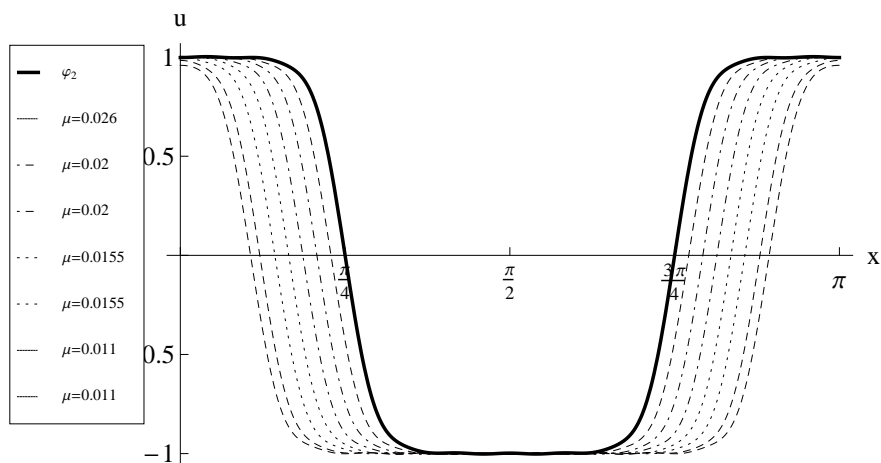


Рис. 1.10: Приближённые решения (1.4),  $\mu = 0.01$

$$\mu = 0.02600000,$$

$$\{-1.487, -0.0000200, 0.000008000\}, \{-1.487, 0.00001, 0.0000004\};$$

$$\mu = 0.02004400,$$

$$\{-1.488, -0.0000070, 0.000050000\}, \{-1.488, 0.00006, 0.0000030\};$$

$$\mu = 0.01559020,$$

$$\{-1.478, -0.0000100, 0.000050000\}, \{-1.478, 0.00008, 0.0000100\};$$

$$\mu = 0.01114786,$$

$$\{-1.455, -0.0000001, 0.000100000\}, \{-1.455, 0.00018, 0.0000017\};$$

$$\mu = 0.00668360,$$

$$\{-1.401, -0.0023700, 0.000000000\}, \{-1.399, 0.00200, 0.0000020\};$$

$$\mu = 0.00222806$$

Неподвижным первым 4 парам точек (1.24), где  $\mu = 0.01$ , порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (1.4), представленные на рис. 1.10. Здесь реализуется случай ii).

Проиллюстрируем случай iii). Ниже приводятся 6 приближенных бифуркационных значения параметра  $\mu$  каскада и 3 наибольшие точки спектров соответствующих пар неподвижных точек (1.24):

$$\mu = 0.0250, \{-1.489, -0.00016, -0.00006\}, \{-1.482, -0.00018, 0.00009\};$$

$$\mu = 0.0200, \{-1.488, -0.00063, -0.00009\}, \{-1.488, -0.00064, 0.00010\};$$

$$\mu = 0.0155, \{-1.480, -0.00167, -0.00049\}, \{-1.477, -0.00183, 0.00055\};$$

$$\mu = 0.0110, \{-1.462, -0.00445, -0.00268\}, \{-1.452, -0.00553, 0.00317\};$$

$$\mu = 0.0066, \{-1.414, -0.01220, -0.01122\}, \{-1.393, -0.01607, 0.01324\};$$

$$\mu = 0.0022, \{-1.348, -0.06921, -0.02677\}, \{-1.336, -0.03612, 0.07803\}.$$

Неподвижным первым 4 парам точек (1.24), где  $\mu = 0.01$ , отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (1.4) на рис. 1.11:

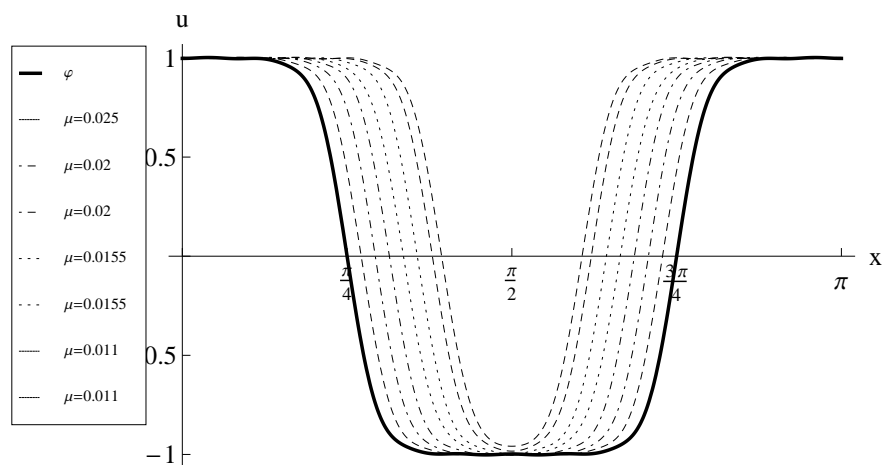


Рис. 1.11: Приближённые решения (1.4),  $\mu = 0.01$

Приближенные решения (1.4) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода, принятые в качестве начальных функций уравнения (1.1), приводят к метастабильным структурам. Иллюстрацией этого предложения является рис. 1.12, где представлено решение (1.1) с  $\mu^2 = 0.01$ .

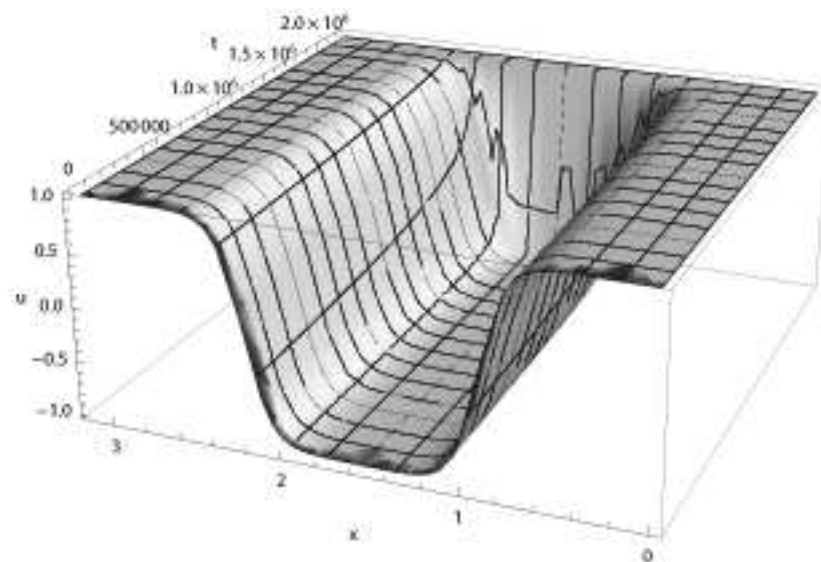


Рис. 1.12: Приближённые решения (1.4),  $\mu = 0.01$

Здесь начальной функцией является приближённое решение (1.4), представленное функцией, которая на рис. 1.11 имеет третью от  $\frac{\pi}{2}$  точку перехода среди остальных точек перехода. Согласно рис. 1.12 решение медленно меняется в течение времени  $\approx 2 \times 10^6$ . Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени оказывается вблизи устойчивого стационарного решения 1.

Сечения решения (1.1), проиллюстрированного на рис. 1.12, представлены на рис. 1.13 при различных  $t$ .

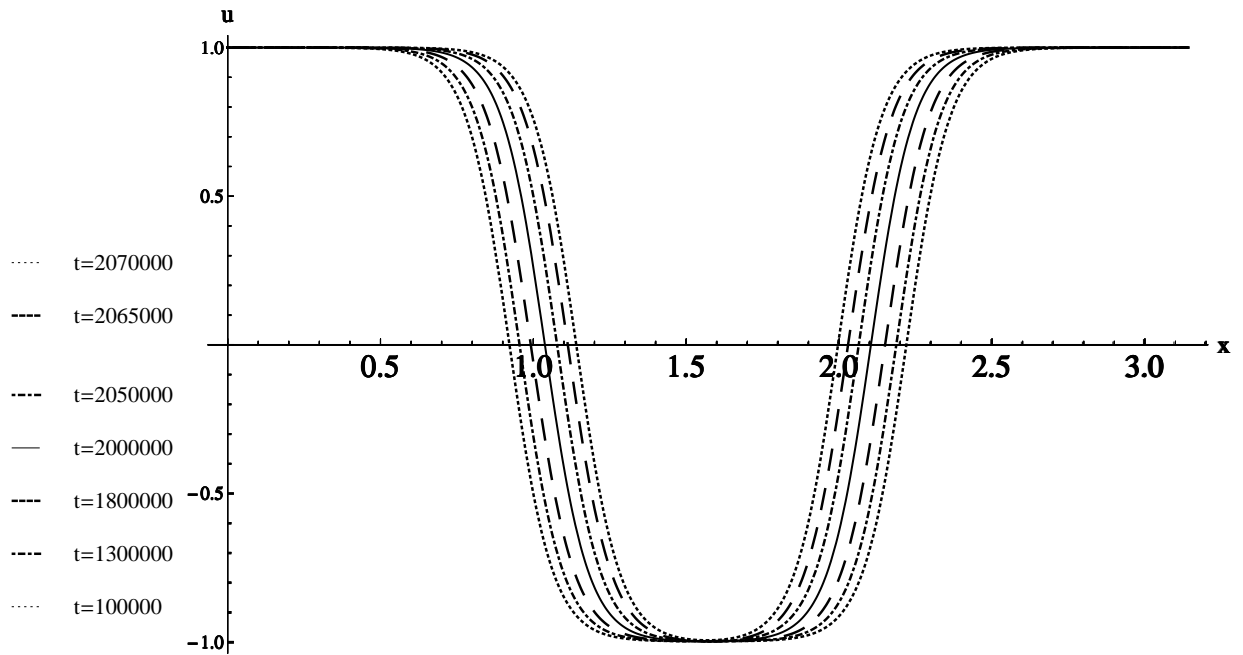


Рис. 1.13: Решение (1.1) для различных  $t$ ,  $\mu = 0.01$

## 1.7 Структуры параболической задачи с квадратичным сла- гаемым

На отрезке  $0 \leq x \leq \pi$  рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + \Lambda u^2 - u^3, \quad t > 0 \quad (1.27)$$

с краевыми условиями второго рода:

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 \quad (1.28)$$

и начальными условиями:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (1.29)$$

где  $\mu > 0$  и  $\Lambda$  - параметры.

Множество стационарных решений  $E_\mu$  уравнения (1.27), т.е. решений краевой задачи

$$\mu u_{xx} + u + \Lambda u^2 - u^3 = 0, \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad (1.30)$$

зависит от параметров  $\mu$  и  $\Lambda$ .

Уравнение (1.27) с краевыми условиями (1.28) при  $\Lambda = 0$  рассматривалось в п. (1.1)–(1.6).

В данном разделе исследуется общий случай уравнения (1.27) ( $\Lambda \neq 0$ ), т.е. выясняется влияние квадратичного слагаемого на форму и устойчивость возникающих пространственно неоднородных стационарных решений.

Задачу (1.27)–(1.28) в соболевском пространстве  $H^1_0(0, \pi)$  представим в виде:

$$\dot{u} + Bu = g(u), \quad (1.31)$$

где

$$B = B(\mu) = \mu A - I, \quad Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$g(u) = \Lambda u^2 - u^3. \quad (1.32)$$

Оператор  $B$ , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве  $L_2[0, \pi]$ , имеет полную ортогональную систему собственных функций

$$\cos kx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

соответствующих собственным значениям

$$-\lambda_k = -1 + k^2\mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.2.** (см. [37]) *Существует  $\delta > 0$  такое, что при  $0 < 1 - \mu < \delta$  уравнение (1.31) имеет по крайней мере два стационарных решения*

$$u_1 = \varphi_1(x, \mu), \quad u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu), \quad (1.34)$$

где функция  $\varphi_1(x, \mu)$  удовлетворяет равенству

$$\varphi_1(x, \mu) = (z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) + z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu) + r(z, x, \mu)) |_{z=z(\mu)},$$

$r(z, x, \mu) = O(|z|^6)$ , а  $z(\mu) > 0$  - непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + \left( -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right) z^3 + c_5 z^5 + \dots, \quad (1.35)$$

где

$$p_2 = \frac{\Lambda}{2(-1 + 2\lambda_1)} + \frac{\Lambda}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \cos 2x, \quad (1.36)$$

$$p_3 = \frac{2\Lambda^2 - 2\lambda_1 + \lambda_2}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x, \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} p_4 = & -\frac{3\Lambda^3}{4(-1 + 2\lambda_1)^2(-1 + 4\lambda_1)} - \frac{\Lambda^3}{2(-1 + 2\lambda_1)(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \\ & - \frac{3\Lambda}{8(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\Lambda^3}{8(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \\ & - \frac{3\Lambda}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} \cos 2x - \frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_2)} \cos 2x - \\ & - \frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(-1 + 2\lambda_1)} \cos 2x + \\ & + \frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 2x - \frac{\Lambda}{4(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 2x + \\ & + \frac{\Lambda^3}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 4x - \frac{3\Lambda}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 4x + \\ & + \frac{\Lambda^3}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 4x - \frac{\Lambda}{4(4\lambda_1 - \lambda_4)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 4x, \end{aligned} \quad (1.38)$$



$$\begin{aligned}
p_5 = & \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left( -\frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_3} \cos 3x + \frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_5} \cos 5x \right) - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{\Lambda^2}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \\
& + \frac{\Lambda^2}{2(-1 + 2\lambda_1)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \\
& + \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{\Lambda^2}{4(4\lambda_1 - \lambda_4)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{16(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \frac{\Lambda^4}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \\
& + \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{\Lambda^4}{(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \\
& + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{3\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \\
& - \frac{\Lambda^4}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(4\lambda_1 - \lambda_4)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)(5\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x + \\
& + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)(5\lambda_1 - \lambda_3)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{16(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_5)} \cos 5x - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_5)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 5x + \\
& + \frac{\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_5)(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 5x + \\
& + \frac{\Lambda^4}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x +
\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x - \\
& - \frac{\Lambda^2}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_5)(4\lambda_1 - \lambda_4)} \cos 5x - \frac{\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_5)} \cos 5x, \\
c_5 = & \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{4(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)^2} - \frac{3\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)^2(-1 + 4\lambda_1)} - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{\Lambda^4}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \\
& - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{3\Lambda^2}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \\
& - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 2\lambda_1)(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \\
& + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Стационарные точки  $u_1 = \varphi_1(x, \mu)$ ,  $u_2 = \varphi_1(\pi - x, \mu)$  неустойчивы с индексом неустойчивости 1.

*Доказательство.* В окрестности  $u = 0$ ,  $\mu = 1$  существует центральное многообразие [63] надстроенной системы

$$\dot{u} + B(\mu)u = g(u), \quad \dot{\mu} = 0, \tag{1.41}$$

представимое в виде:

$$u = z \cos x + p_2(x, \mu)z^2 + p_3(x, \mu)z^3 + p_4(x, \mu)z^4 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots, \tag{1.42}$$

где  $p_2(x, \mu)$ ,  $p_3(x, \mu)$ ,  $p_4(x, \mu)$ ,  $p_5(x, \mu)$ , ... функции из пространства  $\overset{0}{H^1}[0, \pi]$ .

На многообразии (1.42) уравнение (1.41) принимает вид:

$$\dot{z} = \lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots \tag{1.43}$$

Найдем коэффициенты разложений (1.42), (1.43). С этой целью подставим (1.42), (1.43) в уравнение (1.41):

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots) \cos x + 2z(\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \\
 & + c_5 z^5 + \dots)p_2 + 3z^2(\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots)p_3 + 4z^3(\lambda_1 z + c_2 z^2 + \\
 & + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots)p_4 + 5z^4(\lambda_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + \dots)p_5 + \\
 & + \dots + B(z \cos x + p_2(x, \mu)z^2 + p_3(x, \mu)z^3 + p_4(x, \mu)z^4 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots) = \\
 & = g(z \cos x + p_2(x, \mu)z^2 + p_3(x, \mu)z^3 + p_4(x, \mu)z^4 + p_5(x, \mu)z^5 + \dots).
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Отметим, что коэффициент при  $z$  в левой и правой частях этого равенства совпадают. Приравняв коэффициент при  $z^2$ , получим уравнение:

$$c_2 \cos x + (B + 2\lambda_1)p_2 = \frac{\Lambda}{2}(1 + \cos 2x). \tag{1.45}$$

Из условия его разрешимости в пространстве  $\overset{0}{H^1}[0, \pi]$  в классе гладких по параметру  $\mu$  функций следует, что  $c_2 = 0$ . При этом его решением в указанном классе является определенная в (1.36) функция.

Приравняв теперь в равенстве (1.44) коэффициент при  $z^3$  и используя (1.32), получим уравнение:

$$c_3 \cos x + (B + 3\lambda_1)p_3 = -\frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x + (2\Lambda \cos x - 2c_2)p_2. \tag{1.46}$$

Из его условия разрешимости находим

$$c_3 = -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

При этом его решением в указанном классе является определенная в (1.37) функция.

Приравняв теперь в равенстве (1.44) коэффициент при  $z^4$  и используя (1.32), приходим к уравнению:

$$c_4 \cos x + (B + 4\lambda_1)p_4 = -\frac{3}{2}(1 + \cos 2x + 2c_3)p_2 + \Lambda p_2^2 + (2\Lambda \cos x - 3c_2)p_3. \quad (1.47)$$

Из его условия разрешимости находим  $c_4 = 0$ . При этом его решением в указанном классе является определенная в (1.38) функция.

Приравняв теперь в равенстве (1.44) коэффициент при  $z^5$  и используя (1.32), приходим к уравнению:

$$c_5 \cos x + (B + 5\lambda_1)p_5 = -2c_4p_2 - 3 \cos x p_2^2 - \frac{3}{2}(1 + \cos 2x + 3c_3)p_3 + 2\Lambda p_2 p_3 + (2\Lambda \cos x - 4c_2)p_4.$$

Из его условия разрешимости находим

$$\begin{aligned} c_5 = & \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\Lambda^2}{4(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} - \\ & - \frac{\Lambda^2}{3\Lambda^2} - \frac{\Lambda^4}{3\Lambda^4} - \frac{\Lambda^2}{3\Lambda^2} - \\ & - \frac{\Lambda^2}{4(-1 + 2\lambda_1)^2} - \frac{\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)^2(-1 + 4\lambda_1)} - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)} - \\ & - \frac{\Lambda^2}{8(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} + \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \frac{\Lambda^4}{2(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} - \\ & - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 2\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \\ & - \frac{\Lambda^4}{4(-1 + 2\lambda_1)(-1 + 4\lambda_1)(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\Lambda^4}{2(-1 + 2\lambda_1)(4\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)} + \\ & + \frac{\Lambda^4}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Lambda^4}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)}. \end{aligned}$$

Затем, как и выше, убеждаемся, что этому уравнению удовлетворяет функция, удовлетворяющая равенству (1.39).

Процесс последовательного построения коэффициентов разложений (1.42), (1.43) неограниченно продолжим. Получающийся в результате ряд (1.42) допускает представление в виде степенного ряда по степеням  $z, 1 - \mu$ . Указан-

ный ряд, как известно [63], является асимптотически сходящимся в окрестности  $z = 0$ ,  $\mu = 1$ .

Переходим теперь к анализу уравнения (1.35). Его нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при  $\mu > 1$ . При уменьшении параметра  $\mu$  и его прохождении через 1 от нуля ответвляются две непрерывные ветви неустойчивых стационарных точек. Отсюда в силу принципа сведения [63] следует справедливость теоремы.

Подчеркнём, что утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости носят локальный по параметру  $\mu$  характер. Отметим, что в разложениях (1.35), (1.36), (1.38), (1.39), (1.40) знаменатели обращаются в нуль при  $\mu = \frac{3}{4}$  и  $\mu = \frac{1}{2}$ . Поэтому анализ построения инвариантного многообразия (1.42) даёт основания для следующего утверждения: на интервале  $(\frac{3}{4}, 1)$  изменения параметра  $\mu$  справедливо следующее приближенное равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx (z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) + z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) + z^5 p_5(x, \mu)) \Big|_{z=z(\mu)}. \quad (1.48)$$

Очевидно, для  $\varphi_1(\pi - x, \mu)$  справедливо аналогичное приближённое равенство:

$$\varphi_1(\pi - x, \mu) \approx (-z \cos x + z^2 p_2(x, \mu) - z^3 p_3(x, \mu) + z^4 p_4(x, \mu) - z^5 p_5(x, \mu)) \Big|_{z=z(\mu)}. \quad (1.49)$$

В равенстве (1.48)  $z(\mu) > 0$  — непрерывная ветвь неподвижных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + \left( -\frac{3}{4} + \frac{\Lambda^2}{-1 + 2\lambda_1} + \frac{\Lambda^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} \right) z^3 + c_5 z^5,$$

где  $c_5$  удовлетворяет равенству (1.40). □

На рис. 1.14 изображены графики функции  $\varphi_1(x, \mu)$ , определяемые правой частью (1.48), при  $\Lambda = 0.001$  и различных значениях параметра  $\mu$ .

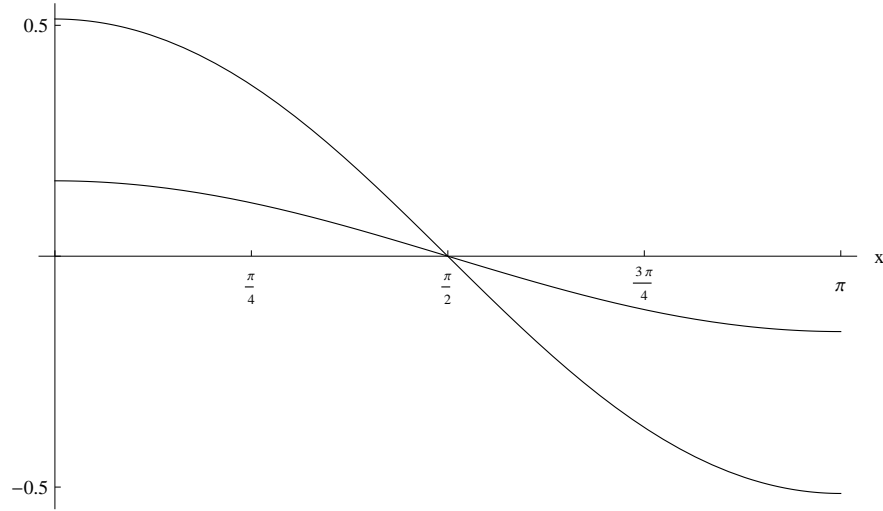


Рис. 1.14: Функция  $\varphi_1(x, \mu)$  при  $\Lambda = 0.001$ ,  $\mu = 0.98$ ,  $\mu = 0.8$

В п. (3.2.3) строился и проводился анализ иерархии упрощенных моделей [61] задачи (1.1)–(1.2) — галеркинских аппроксимаций (1.1)–(1.2) средних размерностей при  $\Lambda = 0$ .

Переходим к построению и анализу галеркинских аппроксимаций (1.31).

Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (1.27) в виде:

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \cos kx. \quad (1.50)$$

Подставим (1.50) в (1.27) и приравняем затем коэффициенты при  $\cos kx$ ,  $k = 0, \dots, N$ . В результате приходим к системам уравнений, правые части которых представляют собой полиномы степени 3.

Например, при  $N = 2$  система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= z_0 + \Lambda z_0^2 + \frac{1}{2}\Lambda z_1^2 + \frac{1}{2}\Lambda z_2^2 - \frac{3}{2}z_0 z_1^2 - \frac{3}{4}z_1^2 z_2 - \frac{3}{2}z_0 z_2^2 - z_0^3, \\ \dot{z}_1 &= (1 - \mu)z_1 + 2\Lambda z_0 z_1 + \Lambda z_1 z_2 - 3z_0^2 z_1 - 3z_0 z_1 z_2 - \frac{3}{2}z_1 z_2^2 - \frac{3}{4}z_1^3, \\ \dot{z}_2 &= (1 - 4\mu)z_2 + \frac{1}{2}\Lambda z_1^2 + 2\Lambda z_0 z_2 - \frac{3}{2}z_0 z_1^2 - 3z_0^2 z_2 - \frac{3}{2}z_1^2 z_2 - \frac{3}{4}z_2^3. \end{aligned} \quad (1.51)$$

В системе (1.51), как и в системах порядка  $N + 1$ , нулевое решение неустойчиво с индексом неустойчивости 1 при  $\mu > 1$ , а решения

$(\frac{\Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 + 4}}{2}, 0, 0)$  устойчивы для  $\mu > 0$ . При переходе параметра  $\mu$  через 1 индекс неустойчивости (размерность неустойчивого многообразия) нуля увеличивается на порядок. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две ветви неподвижных точек  $z^{1,1}(\mu, N)$  и  $z^{1,2}(\mu, N)$ , определённые на  $[0, 1)$ . Все компоненты  $z_k^{1,1}(\mu, N)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , отличны от 0. Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_1(x, \mu) \approx z_0^{1,1} + \sum_{k=1}^N z_k^{1,1}(\mu, N) \cos kx. \quad (1.52)$$

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости  $\varphi_1$  и  $\varphi_1(\pi - x, \mu)$ . Эта пара решений (1.27) рождается неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1. Характер устойчивости  $\varphi_1$  сохраняется на промежутке  $(0, 1)$  изменения параметра  $\mu$ .

Рассмотрим здесь задачу о поведении максимального собственного значения решения  $\varphi_1(x, \mu)$  при средних значениях параметра  $\mu$ . Обратимся в этой связи к вопросу о динамике по параметру  $\mu$  максимального собственного значения  $\lambda_1(\mu, N, 1)$  неподвижных точек  $z^{1,1}(\mu, N)$  системы (1.51). Спектр устойчивости  $z^{1,1}(\mu, N)$  лежит на вещественной оси, а его максимальная точка  $\lambda_1 = \lambda_1(\mu, N, 1)$  при малых  $1 - \mu > 0$  принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра неподвижной точки  $z^{1,1}(\mu, N)$  для всех  $0 < \mu < 1$  лежат на отрицательной полуоси и при убывании  $\mu$  сближаются: максимальная точка убывает, минимальная возрастает. Согласно численному анализу  $\lambda_1$  убывает при убывании  $\mu$  для любого  $30 < N < 40$ . При приближении  $\lambda_1$  к нулю скорость изменения  $\lambda_1$  уменьшается. При этом выделяется интервал  $(\mu_1(N), \mu_2(N))$  изменения  $\mu$ , на которых  $\lambda_1(\mu, N, 1)$  медленно меняется вблизи нуля. Процесс медленной эволюции  $\lambda_1$  на интервале  $(\mu_1(N), \mu_2(N))$ , на котором  $\lambda_1$  принимает малые положительные значе-

ния, переходит в стадию медленного монотонного возрастания при уменьшении  $\mu$  от  $\mu_1(N)$ . Отметим, что возрастание  $N$  приводит к возрастанию  $(\mu_2(N) - \mu_1(N))$  и убыванию  $\mu_1(N)$ . Есть основание полагать, что указанное здесь поведение  $\lambda_1$  имеет место для любого фиксированного  $N > 40$ .

Приведём иллюстрирующие примеры при  $\Lambda = 0.001$ :

$$\mu_1(32) \approx 0.011, \quad \mu_2(32) \approx 0.2;$$

$$\lambda_1(0.2, 32, 1) = 0.005, \quad \lambda_1(0.011, 32, 1) = 0.0021, \quad \lambda_1(0.01, 32, 1) = 0.0029;$$

$$\mu_1(34) \approx 0.01, \quad \mu_2(34) \approx 0.2;$$

$$\lambda_1(0.2, 34, 1) = 0.005, \quad \lambda_1(0.01, 34, 1) = 0.0017, \quad \lambda_1(0.009, 34, 1) = 0.0023.$$

На рис. 1.15 представлены графики функции  $\varphi_1(x, \mu)$  при различных значениях параметра  $\mu$ .

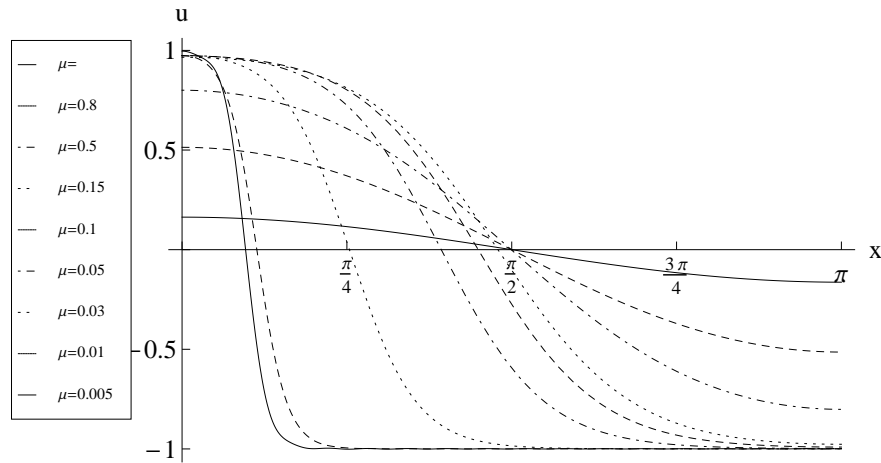


Рис. 1.15: Графики решений  $\varphi_1(x, \mu)$  при  $\mu = 0.98, 0.8, 0.5, 0.15, 0.1, 0.05, 0.03, 0.01, 0.005, \Lambda = 0.001, N = 33$

Построим численно решение задачи (1.27)–(1.29) при  $\mu = 0.01, \Lambda = 0.001$ . В качестве начальной функции (1.29) возьмём функцию  $\varphi_1(x, \mu)$ , удовлетворяющую приближенному равенству (1.52) ( $N = 33$ ).



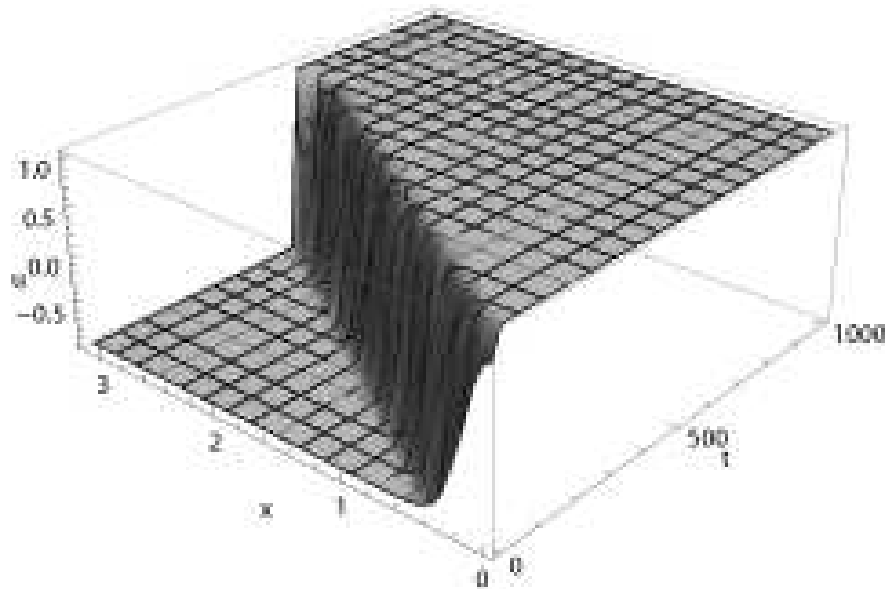


Рис. 1.16: Решение задачи (1.27)–(1.29),  $\varphi(x) = \varphi_1(x, \mu)$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\Lambda = 0.001$

Для построения решения воспользуемся пакетом "Mathematica". В пункте (1.2) при  $\Lambda = 0$  решение задачи (1.27)–(1.29) не меняется в течение достаточно долгого времени  $\approx 10^{19}$ , то есть порождает метаустойчивые структуры. При  $\Lambda = 0.001$  решение не меняется в течение времени  $\approx 10^5$ .

## 1.8 Неустойчивые стационарные решения

Следуя [33], с помощью принципа подобия можно построить, опираясь на  $\varphi_1(x, \mu)$ , решения  $\varphi_k(x, \mu)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , краевой задачи (1.30). Пусть  $\varphi(x, \mu)$ —отличное от нуля решение (1.30), определенное для всех  $0 < \mu < a$ . Продолжим функцию  $\varphi(x, \mu)$  на промежуток  $[-\pi, 0)$  чётным образом, а затем на всю ось  $x$  по периодичности с периодом  $2\pi$ . Тогда при любом натуральном  $k$  функция  $\varphi(kx, k^2\mu)$  будет удовлетворять краевой задаче (1.30) для всех  $0 < \mu < \frac{a}{k^2}$ . Отсюда вытекает, что на промежутке  $0 < \mu < \frac{1}{k^2}$  справедливо равенство:

$$\varphi_k(x, \mu) = \varphi_1(kx, k^2\mu), \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.53)$$

Переход параметра  $\mu$  через  $4^{-1}$  приводит к увеличению на порядок индекса неустойчивости тривиального решения. В результате от нуля ответвляются две непрерывные по  $\mu$  ветви пространственно-неоднородных  $\varphi_2(x, \mu)$  и  $\varphi_2(\pi - x, \mu)$  стационарных точек с индексом неустойчивости 2.

Динамика  $\varphi_2(x, \mu)$  при уменьшении  $\mu$  от критического значения  $4^{-1}$  следует из равенств (1.53) и (1.48). На рис. 1.17 представлены графики функции  $\varphi_2(x, \mu)$  при различных значениях параметра  $\mu$ .

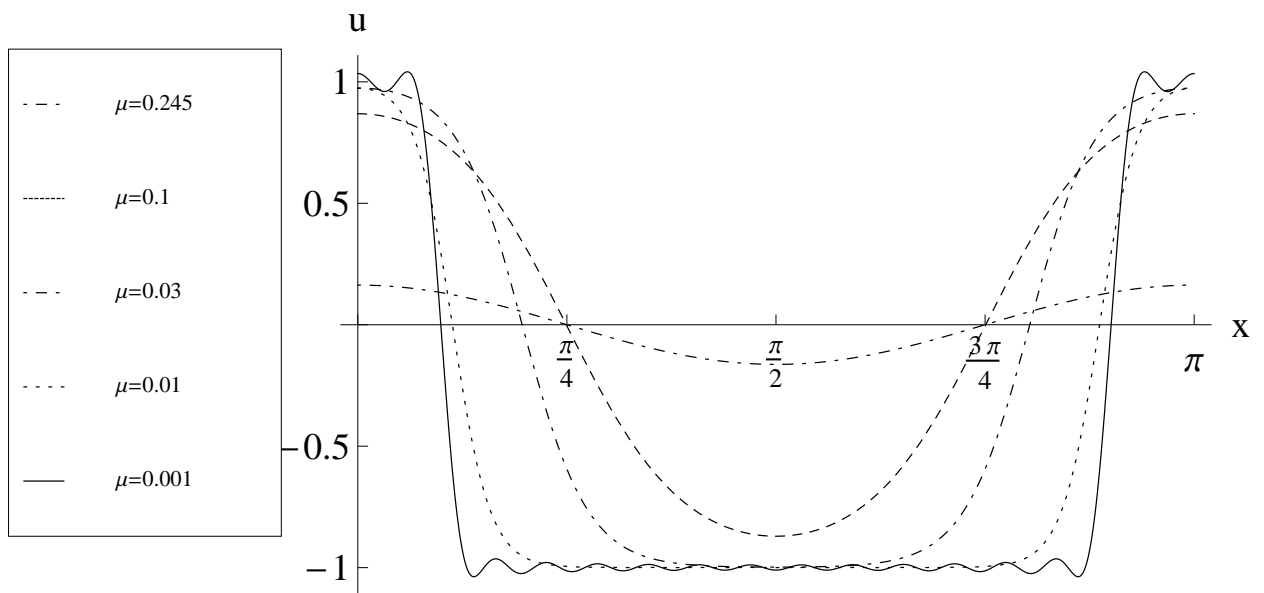


Рис. 1.17: Графики решений  $\varphi_2(x, \mu)$  при  $\Lambda = 0.001$ ,  $\mu = 0.245, 0.1, 0.03, 0.01, 0.001$ ;  $N = 33$

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости стационарных решений  $\varphi_2(x, \mu)$  и  $\varphi_2(\pi - x, \mu)$ . Эта пара решений (1.27) рождается при  $\mu = 4^{-1}$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2.

Для анализа поведения спектра решения (1.27)  $\varphi_2(x, \mu)$  при средних значениях параметра  $\mu$  обратимся вновь к системе (1.51). Для каждого  $N$  в системе (1.51) при уменьшении параметра  $\mu$  и его переходе через значение  $4^{-1}$  индекс неустойчивости нуля увеличивается на 1. В результате этой бифуркации от нулевого решения ответвляются две непрерывные вет-

ви неподвижных точек  $z^{2,1}(\mu, N)$  и  $z^{2,2}(\mu, N)$ , определённые на  $[0, 2^{-2})$ .

Все нечётные компоненты  $z_{2k+1}^{2,1}(\mu, N)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , равны 0. Нулевая и чётные компоненты  $z_{2k}^{2,1}(\mu, N)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , отличны от нуля. Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_2(x, \mu) \approx z_0^{2,1} + \sum_{k=1}^m z_{2k}^{2,1}(\mu, N) \cos(2k)x, \quad (1.54)$$

$m + 1 = N$ , если  $N$  — нечётно,  $m = N$ , если  $N$  — чётно.

Переходим к анализу спектра неподвижных точек  $z^{2,1}(\mu, N)$ . Точки  $z^{2,1}(\mu, N)$  рождаются неустойчивыми с индексом неустойчивости 2: две точки спектра  $\lambda_1(\mu, N, 2) > \lambda_2(\mu, N, 2) > 0$ , а остальные точки принадлежат отрицательной полуоси. При уменьшении параметра  $\mu$  отрицательные точки спектра сближаются: максимальная точка убывает, а минимальная возрастает. Значительный интерес представляет вопрос о поведении  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ . Приведем здесь результаты анализа о поведении  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$  для  $30 < N < 40$ . При уменьшении параметра  $\mu$  функции  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают и приближаются к нулю. При подходе этих функций к нулю скорость их изменения становится малой. При этом наблюдались интервалы изменения  $\mu$ , на которых  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ , медленно меняются вблизи нуля. Указанные интервалы зависят от  $N$ . При условии уменьшения  $\mu$  и выхода из соответствующего интервала медленной эволюции имеет место монотонное возрастание  $\lambda_k(\mu, N, 2)$ ,  $k = 1, 2$ .

В качестве иллюстрации указанного поведения спектра приведём четыре наибольшие точки спектра при  $N = 34$ :

$$\mu = 0.050, \quad \{-1.465, -1.414, 0.0050, 0.0035\};$$

$$\mu = 0.030, \quad \{-1.459, -1.455, 0.0020, 0.0020\};$$

$$\mu = 0.010, \quad \{-1.457, -1.457, 0.0018, 0.0017\};$$

$$\mu = 0.009, \quad \{-1.456, -1.455, 0.0025, 0.0025\};$$

$$\mu = 0.005, \quad \{-1.504, -1.501, 0.0075, 0.0061\}.$$

## 1.9 Выводы

Для параболического уравнения на отрезке рассмотрены вопросы о существовании, форме и неустойчивости пространственно неоднородных стационарных решений:

1. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании и неустойчивости пространственно-неоднородных стационарных решений.
2. Исследована задача о приближенных стационарных решениях типа переходного слоя с одной и двумя точками перехода. Рассмотрены сценарии возникновения и динамика по параметру  $\mu$  метаустойчивых структур. Множество приближенных стационарных решений указанного выше типа правильно отражает характер эволюции метаустойчивых структур с одной и двумя точками перехода при увеличении  $t$  и при средних значениях параметра  $\mu$ . Последнее, в частности, означает, что каждая метаустойчивая структура уравнения с одной точкой перехода при увеличении  $t$  проходит вблизи приближенных стационарных решений с одной точкой перехода. При этом речь идет о динамике метаустойчивых структур не только на стадии медленной эволюции, но и в переходной зоне.
3. Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

## ГЛАВА 2. МЕТАУСТОЙЧИВЫЕ СТРУКТУРЫ

### УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛАРДА

#### 2.1 Постановка задачи

На отрезке рассматривается уравнение Кана-Хилларда с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + u^3 \right], \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad u_{xxx}(0, t) = 0, \quad u_{xxx}(\pi, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\varepsilon^2 > 0$  - постоянная.

Параметр  $\varepsilon^2$  является коэффициентом при градиентной энергии в функционале Гинзбурга-Ландау и пропорционален величине поверхностной энергии на межфазной границе, возникающей при расслоении концентрации при  $T \rightarrow T_c$ , где  $T_c$  - критическая температура. Поскольку единственным механизмом переноса атомов является диффузионный механизм (см., например, [90]), то  $\varepsilon^2 \propto D$ , где  $D$  - коэффициент диффузии [30].

Краевая задача (2.1) допускает существование аттрактора: т.е. при  $t \rightarrow \infty$  её решения сходятся к решениям стационарной задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + u^3 \right] = 0, \quad u_x(0) = u_x(\pi) = 0, \quad u_{xxx}(0) = u_{xxx}(\pi) = 0. \quad (2.2)$$

Это утверждение доказано в [76].

Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях с заданной концентрацией компонентов является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния [30].

Уравнение Кана-Хилларда (2.1) - это одна из самых знаменитых моделей, которая описывает процесс изотермического разделения фаз концен-

трации [70], где неизвестная функция является концентрацией одной из компонент бинарной смеси.

Уравнение Кана-Хилларда (2.1) рассматривалось в работах многих авторов. В частности, в [30] рассматривается бинарная смесь, которая граничит с подложкой и вакуумом и образует плёнку. Распределение одной из компонент смеси описывается уравнением Кана-Хилларда с несимметричными граничными условиями, учитывающим процессы (смачивания), происходящие на границе и приповерхностных слоях плёнки и, возможно, влияние внешнего постоянного магнитного поля.

При спинодальном распаде можно наблюдать спонтанные коррелированные поверхностные и(или) объемные структуры, состоящие из кластеров повышенной (пониженной) концентрации. В работах [86, 90] уравнение Кана-Хилларда моделирует распределение концентрации.

В работе [70] N. Alikakos, P. W. Bates, G. Fusco (1991) доказано существование метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений) уравнения (2.1) при малых значениях параметра  $\varepsilon^2$ .

Задачу (2.1) представим в виде:

$$\dot{u} = Bu + g(u),$$

где

$$Bu = -\varepsilon^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad g(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[u^3].$$

Оператор  $B$ , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве  $L_2[0, \pi]$  с областью определения  $H^2_0[0, \pi]$ , имеет полную ортогональную систему собственных функций

$$\cos kx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

соответствующих собственным значениям

$$\lambda_k(\varepsilon) = k^2 - k^4 \varepsilon^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Пусть вещественное  $z_0$  удовлетворяет условию:  $|z_0| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Существует  $\delta > 0$  такое, что если  $\varepsilon^2$  удовлетворяет неравенству:  $1 - 3z_0^2 - \delta < \varepsilon^2 < 1 - 3z_0^2$ , тогда уравнение (2.1) имеет по крайней мере два семейства стационарных решений  $\varphi_1^\pm(x, \varepsilon, z_0)$ . Справедливо равенство:

$$\varphi_1^\pm(x, \varepsilon, z_0) = z_0 + z_1 \cos x + p_3(z_0, z_1, x, \varepsilon) + p_5(z_0, z_1, x, \varepsilon) + O(|z_1|^7) \Big|_{z_1 = \pm u_1(\varepsilon, z_0)},$$

где  $(z_0, \pm u_1(\varepsilon, z_0))$  — две непрерывные по  $(\varepsilon, z_0)$  ветви стационарных точек системы уравнений:

$$\dot{z}_0 = 0, \quad \dot{z}_1 = \lambda_1(\varepsilon)z_1 - 3z_0^2 z_1 - \frac{3}{4}z_1^3 + \frac{18z_0^2 z_1^3}{2\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{27z_1^5}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \dots, \quad (2.4)$$

бифурцирующие из семейства  $(z_0, 0)$  при  $\varepsilon^2 = 1 - 3z_0^2$ . Здесь

$$p_3 = -\frac{9z_1^3}{4(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3x - \frac{6z_0 z_1^2}{2\lambda_1 - \lambda_2} \cos 2x, \quad (2.5)$$

$$p_5 = \frac{9}{(3\lambda_1 - \lambda_3)(2\lambda_1 - \lambda_2)} \times$$

$$\times \left( \frac{4(12\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3)}{4\lambda_1 - \lambda_4} \cos 4x + \frac{3(5\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)}{4\lambda_1 - \lambda_2} \cos 2x \right) z_0 z_1^4 +$$

$$+ \frac{135}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left( \frac{5}{5\lambda_1 - \lambda_5} \cos 5x + \frac{3}{5\lambda_1 - \lambda_3} \cos 3x \right) z_1^5 + \quad (2.6)$$

$$+ \frac{81(14\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3)z_1^3 z_0^2}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)^2} \cos 3x + \frac{36z_1^2 z_0^3}{(2\lambda_1 - \lambda_2)^2} \cos 2x.$$

Семейства решений  $(z_0, \varphi_1^+(x, \varepsilon, z_0))$ ,  $(z_0, \varphi_1^-(x, \varepsilon, z_0))$  орбитально экспоненциально устойчивы.

*Доказательство.* При  $\varepsilon = 1$  спектр оператора  $B$  имеет одно нулевое собственное значение геометрической кратности 2, которому отвечают собственные функции  $1, \cos x$ . Остальные собственные значения оператора  $B$  вещественны, отрицательны и отделены от нуля.

Уравнение (2.1) согласно [63, с. 160, 186] в окрестности  $u = 0, \varepsilon = 1$  имеет двумерное семейство центральных многообразий, представимое в виде:

$$u = z_0 + z_1 \cos x + p_3(z_0, z_1, x, \varepsilon) + p_5(z_0, z_1, x, \varepsilon) + \dots, \quad (2.7)$$

где  $p_3(z_0, z_1, x, \varepsilon), p_5(z_0, z_1, x, \varepsilon), \dots$  — формы степени 3, 5, ... относительно  $(z_0, z_1)$ , принимающие значения в пространстве  $H^4(0, \pi)$ .

На многообразии (2.7) уравнение (2.1) принимает вид:

$$\dot{z}_0 = 0, \quad \dot{z}_1 = \lambda_1(\varepsilon)z_1 + c_3(z_0, z_1, \varepsilon) + c_5(z_0, z_1, \varepsilon) + \dots, \quad (2.8)$$

где  $c_3(z_0, z_1, \varepsilon), c_5(z_0, z_1, \varepsilon), \dots$  — формы степени 3, 5, ... относительно  $(z_0, z_1)$  с аналитическими в окрестности  $\varepsilon = 1$  коэффициентами.

Найдем коэффициенты разложений (2.7), (2.8). С этой целью, подставив (2.7), (2.8) в уравнение (2.1), получим:

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 z_1 + c_3 + c_5 + \dots) \cos x + \frac{\partial p_3}{\partial z_1} (\lambda_1 z_1 + c_3 + c_5 + \dots) + \\ & + \frac{\partial p_5}{\partial z_1} (\lambda_1 z_1 + c_3 + c_5 + \dots) = B(z_1 \cos x + p_3 + p_5 + \dots) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z_0 + z_1 \cos x + p_3 + p_5 + \dots)^3. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Приравняв теперь в (2.9) формы третьей степени, получим:

$$c_3 \cos x + \frac{\partial p_3}{\partial z_1} \lambda_1 z_1 = B p_3 - 3z_0^2 z_1 \cos x - \frac{3}{4} z_1^3 \cos x - 6z_0 z_1^2 \cos 2x - \frac{9}{4} z_1^3 \cos 3x. \quad (2.10)$$

Из условия его разрешимости в классе гладких по параметру  $\varepsilon^2$  функций из



$H^4(0, \pi)$  следует, что

$$c_3 = -3z_0^2 z_1 - \frac{3}{4} z_1^3. \quad (2.11)$$

При этом решением уравнения (2.10) является определенная в (2.5) функция.

Как и выше, приравняв в (2.9) формы пятой степени, приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} c_5 \cos x + \frac{\partial p_5}{\partial z_1} \lambda_1 z_1 = B p_5 - \frac{\partial p_3}{\partial z_1} c_3 - 12 \frac{\partial p_3}{\partial x} z_0 z_1 \sin x - 6 p_3 z_0 z_1 \cos x + \\ + 6 \frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} z_0 z_1 \cos x - 6 p_3 z_1^2 \cos 2x - 6 \frac{\partial p_3}{\partial x} z_1^2 \sin 2x + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} z_1^2 \cos 2x + \\ + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} z_1^2 + 3 \frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} z_0^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из его условия разрешимости находим:

$$c_5 = \frac{18 z_0^2 z_1^3}{2 \lambda_1 - \lambda_2} + \frac{27 z_1^5}{16(3 \lambda_1 - \lambda_3)}. \quad (2.13)$$

Затем, как и выше, убеждаемся, что этому уравнению удовлетворяет функция, удовлетворяющая равенству (2.6).

Процесс последовательного построения коэффициентов разложений (2.7), (2.8) неограниченно продолжим.

Переходим теперь к анализу системы уравнений (2.4). Семейство решений  $(z_0, 0)$  орбитально асимптотически устойчиво при  $1 - \varepsilon^2 - 3z_0^2 < 0$ . При уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  и его прохождении через  $1 - 3z_0^2$  от семейства решений  $(z_0, 0)$  ответвляются две непрерывные ветви устойчивых стационарных точек. Отсюда в силу принципа сведения следует справедливость теоремы. Теорема доказана.

Подчеркнём, что утверждения теоремы о существовании, форме и устойчивости двух семейств стационарных решений  $\varphi_1^\pm(x, \varepsilon, z_0)$  носят локальный

по параметру  $\varepsilon^2$  характер. Однако анализ построения инвариантного многообразия (2.7) даёт основания для следующего утверждения. В достаточно широком диапазоне изменения параметра  $\varepsilon^2$  справедливо приближенное равенство:

$$\varphi_1(x, \varepsilon, z_0) \approx z_0 + z_1 \cos x + p_3(z_0, z_1, x) + p_5(z_0, z_1, x) \Big|_{z_1=z_1(\varepsilon, z_0)}, \quad (2.14)$$

где  $z_1 = z_1(\varepsilon, z_0)$  — ветвь стационарных точек уравнения:

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 - 3z_0^2 z_1 - \frac{3}{4} z_1^3 + \frac{18z_0^2 z_1^3}{2\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{27z_1^5}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)}, \quad (2.15)$$

бифурцирующая при  $\varepsilon^2 = 1 - 3z_0^2 > 0$  из нуля.

□

Заметим, что при  $z_0 = 0$  поведение  $\varphi_1(x, \varepsilon, 0)$  при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  рассматривалась в работах многих авторов. В частности, метод центральных многообразий использовался в работе [70].

## 2.2 Структуры уравнения Кана-Хилларда

Проведем анализ иерархии упрощенных моделей уравнения Кана-Хилларда — галеркинских аппроксимаций.

Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (2.1) в виде

$$u = z_0 + \sum_{k=1}^N z_k \cos kx. \quad (2.16)$$

Подставим (2.16) в (2.1) и приравняем затем коэффициенты при  $\cos kx$ ,  $k = 0, \dots, N$ . В результате приходим к градиентной системе уравнений:

$$\dot{z}_0 = 0, \quad \dot{z}_k = -\frac{\partial G_N(z, \varepsilon)}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.17)$$

где  $z = (z_0, \dots, z_N)$ , а  $G_N(z, \varepsilon)$  – потенциальная функция, представление которой опустим.

Из первого уравнения системы следует, что  $z_0 = \text{const} = a$  является постоянным параметром.

В системе (2.17) семейство решений  $\pm(a, 0, \dots, 0)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , устойчиво при  $\varepsilon^2 > 0$ , если  $|a| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Если  $|a| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ , то семейство решений устойчиво при  $\varepsilon^2 > 1 - 3a^2$ . Решения  $\pm(1, 0, \dots, 0)$  устойчивы для  $\varepsilon^2 > 0$ . При переходе параметра  $\varepsilon^2$  через значение  $\varepsilon^2 = 1 - 3a^2$  семейство решений  $\pm(a, 0, \dots, 0)$  становится неустойчивым с индексом неустойчивости 1. В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две ветви неподвижных точек  $\pm z^1(\varepsilon, N, a)$ , определённые по  $\varepsilon$  на  $[0, 1 - 3a^2)$ . Все компоненты  $z_{2k}^1(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , находятся вблизи 0, причём  $z_1^1 > -z_3^1 > z_5^1 > \dots$ . Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_1(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^N z_k^1(\varepsilon, N, a) \cos kx. \quad (2.18)$$

Согласно [70] при достаточно малых  $\varepsilon^2$  и фиксированном  $a$  функции  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  близки к ступенчатым функциям со значениями 1,  $-1$  и одной точкой перехода.

Анализ непрерывной ветви  $z^1(\varepsilon, N, a)$  неподвижных точек (2.17), выполненный для  $N$  от 25 до 40, и равенство (2.18) даёт основание для следующих заключений. Если  $1 - 3a^2 - \varepsilon^2 > 0$  мало, то функция  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  имеет квазигармоническую форму с малой амплитудой. Решение  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  монотонно убывает на промежутке  $[0, \pi]$ , причем при  $a = 0$   $\varphi_1(\frac{\pi}{2}, \varepsilon, a) = 0$ ,  $\varphi_1(\pi - x, \varepsilon, a) = -\varphi_1(x, \varepsilon, a)$ . Для каждого фиксированного  $x$ , например, при  $a = 0$   $x \in [0, \pi/2)$ ,  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  монотонно возрастает при умень-

шении параметра  $\varepsilon$ ,  $\varphi_1(x, \varepsilon, a) \rightarrow 1$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Причём с увеличением  $a$  промежутков, на котором функция  $\varphi_1(x, \varepsilon, a) \rightarrow 1$  возрастает. Следует отметить, что правая часть равенства (2.18) при малых  $\varepsilon^2$  в силу явления Гиббса колеблется. Таким образом, указанное выше поведение функции  $\varphi_1(\cdot, \varepsilon, a)$  согласно (2.18) при малых  $\varepsilon^2$  справедливо по модулю явления Гиббса.

На рис. 2.1 изображены графики функции  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$  при различных значениях параметра  $\varepsilon^2$ ,  $N = 29$ ,  $a = 0.1$ .

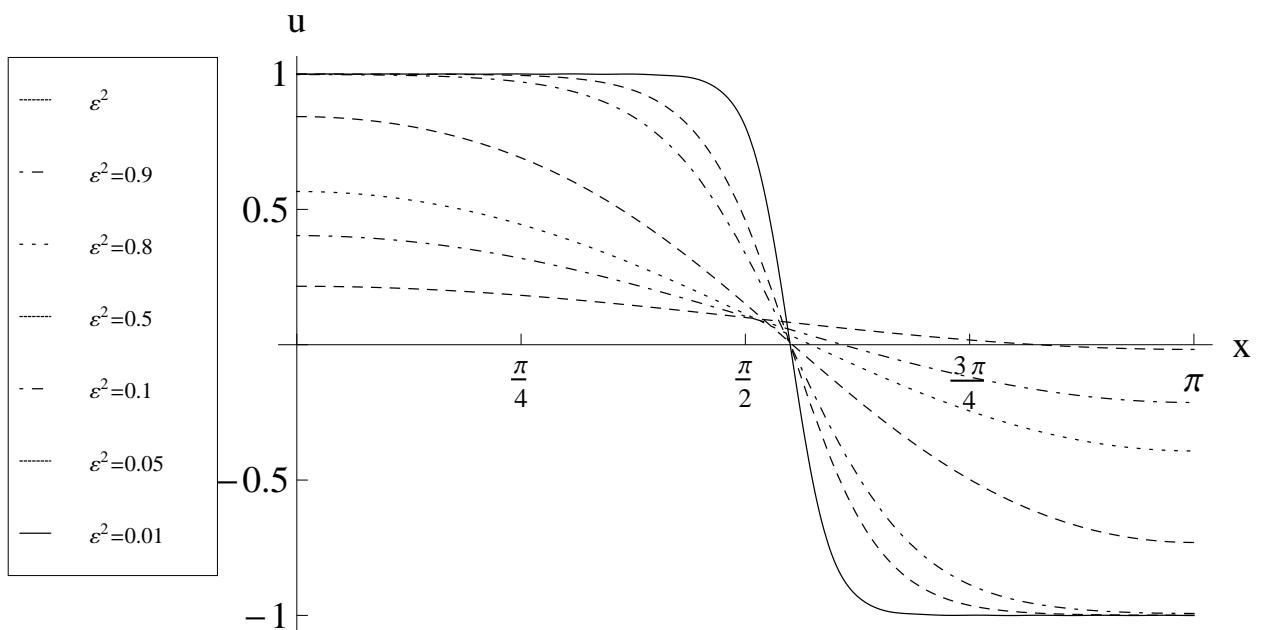


Рис. 2.1: Функция  $\varphi_1(x, \mu)$  при  $\varepsilon^2 = 0.96, 0.9, 0.8, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ ,  $N = 29$ ,  $a = 0.1$

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости  $\pm\varphi_1$ . С этой целью обратимся к динамике спектра  $\sigma(z^1(\varepsilon, N, a))$  ветви неподвижных точек  $z^1(\varepsilon, N, a)$  системы (2.17). Точки спектра неподвижной точки  $z^1(\varepsilon, N, a)$  для всех  $0 < \varepsilon^2 < 1 - 3a^2$  лежат на отрицательной полуоси и при убывании  $\varepsilon^2$  сближаются: максимальная точка убывает, минимальная возрастает. В качестве примера приведем 4 максимальные точки спектра, когда  $N = 30$ ,  $a = 0.1$ .

$$\sigma(z^1(0.5, 30)) = \{\dots, -128.30, -40.612, -7.848, -0.927\},$$

$$\sigma(z^1(0.10, 30)) = \{\dots, -42.41, -17.815, -4.062, -1.710\},$$

$$\sigma(z^1(0.05, 30)) = \{\dots, -32.59, -16.297, -3.436, -1.791\},$$

$$\sigma(z^1(0.01, 30)) = \{\dots, -25.39, -16.042, -2.803, -1.811\}.$$

Проведенный анализ для  $N$  от 25 до 40 дает основание предполагать, что пара решений (2.1)  $\pm\varphi_1$  устойчива и характер устойчивости  $\pm\varphi_1$  сохраняется на промежутке  $[0, 1 - 3a^2)$  изменения параметра  $\varepsilon^2$ .

### 2.3 Неустойчивые решения с индексом неустойчивости равным 1 уравнения Кана-Хилларда.

Перейдем теперь к анализу формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  уравнения (2.1).

Следуя [33], с помощью принципа подобия можно построить, опираясь на  $\varphi_1(x, \varepsilon, a)$ , решения  $\varphi_k(x, \varepsilon, a)$ ,  $k = 2, 3, \dots$ , краевой задачи (2.2). Пусть  $\varphi(x, \varepsilon, a)$  - отличное от нуля решение (2.2), определенное для всех  $0 < \varepsilon < a$ . Продолжим функцию  $\varphi(x, \varepsilon, a)$  на промежуток  $[-\pi, 0)$  чётным образом, а затем на всю ось  $x$  по периодичности с периодом  $2\pi$ . Тогда при любом натуральном  $k$  функция  $\varphi(kx, k\varepsilon, a)$  будет удовлетворять краевой задаче (2.2) для всех  $0 < \varepsilon^2 < \frac{a}{k}$ . Отсюда вытекает, что на промежутке  $0 < \varepsilon^2 < \frac{1}{k}$  справедливо равенство:

$$\varphi_k(x, \varepsilon, a) = \varphi_1(kx, k\varepsilon, a), \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.19)$$

Динамика  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при уменьшении  $\varepsilon^2$  от критического значения  $\frac{1}{4} - 3a^2$  следует из равенства (2.19). Подчеркнём, что при малых  $\varepsilon^2$   $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  является решением (2.1) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода.

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости стационарных решений  $\pm\varphi_2(x, \varepsilon, a)$ . Эта пара решений (2.1) рождается при  $\varepsilon^2 = \frac{1}{4} - 3a^2$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 1. Характер устойчивости решений  $\pm\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  сохраняется, а единственное положительное собственное значение спектра экспоненциально мало,  $O(e^{-\frac{c}{\varepsilon}})$ .

Для анализа поведения спектра решения (2.1)  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при средних значениях параметра  $\varepsilon^2$  обратимся вновь к системе (2.17). Для каждого  $N$  в системе (2.17) при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  и его переходе через значение  $\frac{1}{4} - 3a^2$  индекс неустойчивости семейства решений увеличивается на 1. В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^2(\varepsilon, N, a)$ , определённые на  $[0, 2^{-2} - 3a^2)$ . Все нечётные компоненты  $z^2(\varepsilon, N, a)$  равны 0. Чётные компоненты  $z_{2k}^2(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , отличны от нуля, причём  $z_{6k+2}^2 > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_2(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^m z_{2k}^2(\varepsilon, N, a) \cos 2kx, \quad (2.20)$$

$m + 1 = N$ , если  $N$  — нечётно,  $m = N$ , если  $N$  — чётно.

На рис. 2.2 представлены согласно (2.21) приближённые решения  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$ , где  $N = 29$ ,  $a = 0.1$  и различных значениях параметра  $\varepsilon^2$ .

Рассмотрим теперь задачу о поведении максимального собственного значения решения  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при средних значениях параметра  $\varepsilon^2$ . Обратимся в этой связи к вопросу о динамике по параметру  $\varepsilon^2$  максимального собственного значения  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  неподвижных точек  $z^2(\varepsilon, N, a)$  системы (2.17). Спектр устойчивости  $z^2(\varepsilon, N, a)$  лежит на вещественной оси, а его максимальная точка  $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon, N, a)$  при малых  $\frac{1}{4} - 3a^2 - \varepsilon^2 > 0$  принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра неподвижной

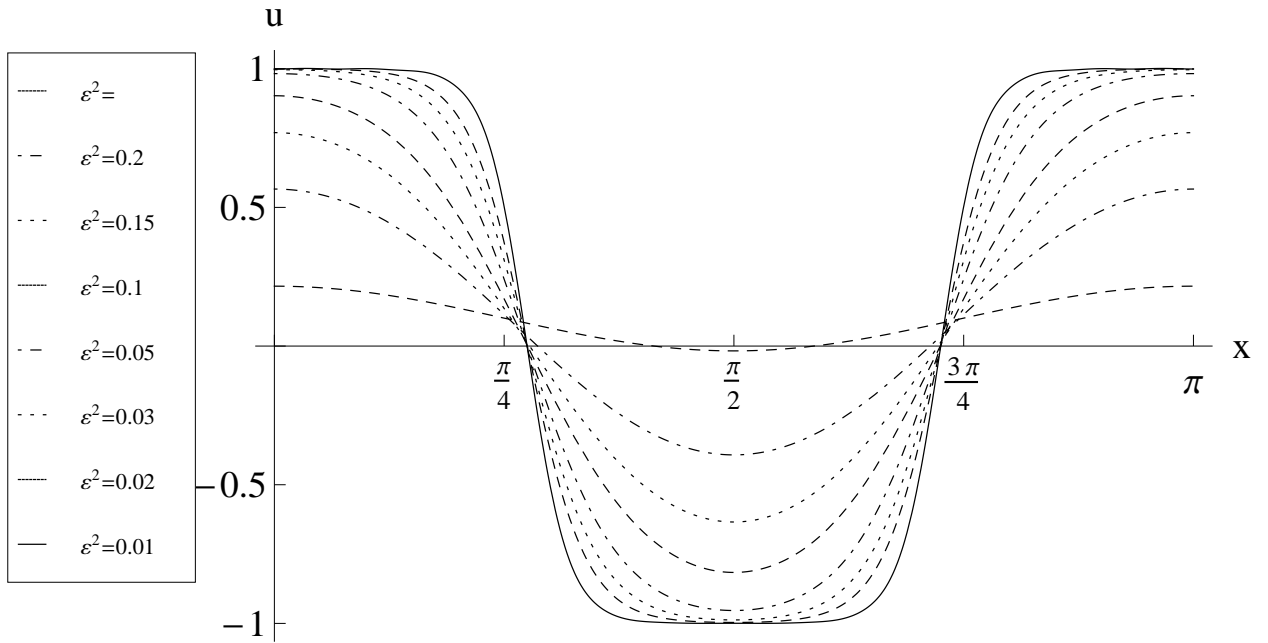


Рис. 2.2: Решения  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  при  $\varepsilon^2 = 0.24, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.03, 0.02, 0.01$ ,  $N = 29$ ,  $a = 0.1$

точки  $z^2(\varepsilon, N, a)$  для всех  $0 < \varepsilon^2 < \frac{1}{4} - 3a^2$  лежат на отрицательной полуоси и при убывании  $\varepsilon^2$  сближаются: максимальная точка убывает, минимальная возрастает. Согласно численному анализу для  $30 < N < 40$  поведение  $\lambda_1$  зависит от  $N$ . Если  $N$  — чётно, то  $\lambda_1$  убывает при убывании  $\varepsilon^2$ . При приближении  $\lambda_1$  к нулю скорость изменения  $\lambda_1$  уменьшается. При этом выделяется интервал  $(\varepsilon_1^2(N), \varepsilon_2^2(N))$  изменения  $\varepsilon^2$ , на которых  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  медленно меняется вблизи нуля. При убывании  $\varepsilon^2$  от значения  $\varepsilon_1^2(N)$   $\lambda_1$  принимает отрицательные значения и медленно, монотонно убывает. Приведем иллюстрирующий пример:  $\lambda_1(0.05, 30, 0.1) = 0.00166803$ ,  $\lambda_1(0.03, 30, 0.1) = 0.0000835165$ ,  $\lambda_1(0.02, 30, 0.1) = 0.0000044334$ ,  $\lambda_1(0.01, 30, 0.1) = -0.0000383991$ .

Пусть  $N$  — нечётно. Тогда  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  не принимает отрицательных значений. Процесс медленной эволюции  $\lambda_1$  на интервале  $(\varepsilon_1^2(N), \varepsilon_2^2(N))$ , на котором  $\lambda_1$  принимает малые положительные значения, переходит в ста-

дию медленного монотонного возрастания при уменьшении  $\varepsilon^2$  от  $\varepsilon_1^2(N)$ . Отметим, что возрастание  $N$  приводит к возрастанию  $\varepsilon_2^2(N) - \varepsilon_1^2(N)$  и убыванию  $\varepsilon_2^2(N)$ . Приведем иллюстрирующий пример:  $\lambda_1(0.05, 29, 0.1) = 0.00166803$ ,  $\lambda_1(0.03, 29, 0.1) = 0.0000850338$ ,  $\lambda_1(0.02, 29, 0.1) = 0.000050202$ ,  $\lambda_1(0.01, 29, 0.1) = 0.00281155$ .

Проведенный анализ не позволяет сделать строгих заключений о характере устойчивости решений  $\pm\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  на всем интервале  $[0, 2^{-2} - 3a^2)$  изменения  $\varepsilon^2$ . Однако есть основания полагать, что  $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$  на интервале  $[0, 2^{-2} - 3a^2)$  сохраняет индекс неустойчивости.

## 2.4 Неустойчивые решения с индексом неустойчивости равным 2 уравнения Кана-Хилларда

Перейдем теперь к анализу формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  уравнения (2.1).

Динамика  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  при уменьшении  $\varepsilon^2$  от критического значения  $\frac{1}{9} - 3a^2$  следует из равенства (2.19). Подчеркнём, что при малых  $\varepsilon$   $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  является решением (2.1) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Перейдём теперь к вопросу об устойчивости стационарных решений  $\pm\varphi_3(x, \varepsilon, a)$ . Эта пара решений (2.1) рождается при  $\varepsilon^2 = \frac{1}{9} - 3a^2$  неустойчивой с индексом неустойчивости равным 2.

Для анализа поведения спектра решения (2.1)  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  при средних значениях параметра  $\varepsilon^2$  обратимся вновь к системе (2.17). Для каждого  $N$  в системе (2.17) при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  и его переходе через значение  $\frac{1}{9} - 3a^2$  индекс неустойчивости семейства решений увеличивается на 1.



В результате этой бифуркации от семейства решений ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$ , определённые на  $[0, 3^{-2} - 3a^2)$ . Компоненты  $z_{3k}^3(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , отличны от нуля. Следовательно, справедливо следующее приближённое равенство:

$$\varphi_3(x, \varepsilon, a) \approx a + \sum_{k=1}^m z_{3k}^3(\varepsilon, N, a) \cos 3kx, \quad (2.21)$$

$m = N$ , если  $N = 3l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ;  $m = N - 2$ , если  $N = 3l + 2$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ;  $m = N - 1$ , если  $N = 3l - 2$ ,  $l = 2, 3, \dots$ .

На рис. 2.3 представлены согласно (2.21) приближённые решения  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$ , где  $N = 30$ ,  $a = 0.1$  и различных значениях параметра  $\varepsilon^2$ . При  $\varepsilon^2 = 0.001$  график начинает колебаться.

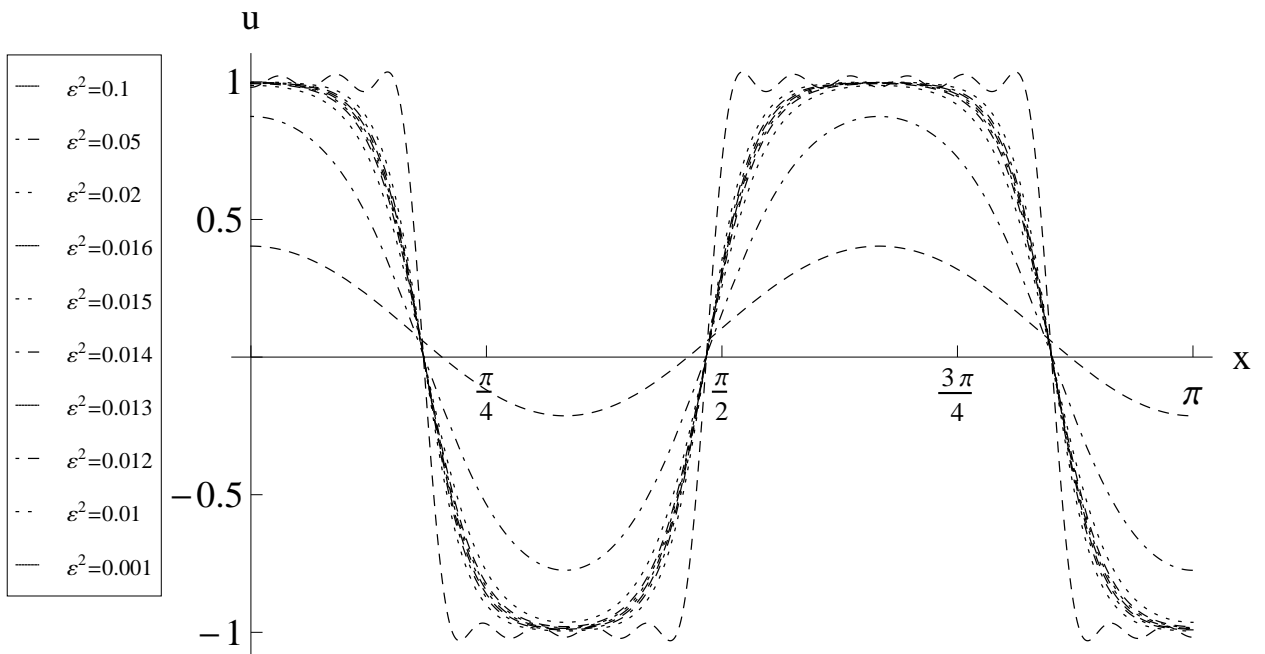


Рис. 2.3: Решения  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$ ,  $N = 30$ ,  $a = 0.1$

Переходим к анализу спектра неподвижных точек  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$ . Точки  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$  рождаются неустойчивыми с индексом неустойчивости 2: две точки спектра  $\lambda_1(\varepsilon, N, a) > \lambda_2(\varepsilon, N, a) > 0$ , а остальные точки принадлежат отрицательной полуоси. При уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  отрица-

тельные точки спектра сближаются: максимальная точка убывает, а минимальная возрастает. Значительный интерес представляет вопрос о поведении  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ . Приведем здесь результаты анализа о поведении  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$  для  $30 < N < 40$ . При уменьшении параметра  $\varepsilon^2$  функции  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают и приближаются к нулю. При подходе этих функций к нулю скорость их изменения становится малой. При этом наблюдались интервалы изменения  $\varepsilon^2$ , на которых  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , медленно меняются вблизи нуля. Указанные интервалы зависят от  $N$ . При условии уменьшения  $\varepsilon^2$  и выхода из соответствующего интервала медленной эволюции имеет место монотонное убывание или возрастание  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ . Функции  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают, если  $N = 6l + 6$ ,  $N = 6l + 7$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , и переходят с положительной на отрицательную полуоси. Подчеркнём, что значения параметра  $\varepsilon^2$ , при которых реализуется этот переход, являются достаточно близкими. Для  $N = 30$ ,  $a = 0.1$  в качестве иллюстрации указанного поведения спектра  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$  приводятся его четыре наибольшие точки :

$$\varepsilon^2 = 0.016, \quad \{-17.497, -14.593, 0.00011, 0.00344\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.015, \quad \{-17.541, -14.758, -0.0002, 0.00230\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.014, \quad \{-17.579, -14.923, -0.0006, 0.00135\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.013, \quad \{-17.610, -15.088, -0.0013, 0.00057\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.012, \quad \{-17.633, -15.251, -0.0025, -0.00005\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.010, \quad \{-17.648, -15.567, -0.0072, -0.00144\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.001, \quad \{-17.487, -16.568, -1.2095, -0.34948\}.$$

Пусть теперь  $N = 6l - 1$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Тогда имеет место медленное увеличение  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$ . Переход этих функций через 0 не наблюдается. В качестве иллюстрации указанного поведения спектра приведём примеры для  $N = 35$ ,  $a = 0.1$ . При этом, как и выше, укажем четыре наибольшие точки спектра:

$$\varepsilon^2 = 0.014, \quad \{-17.576, -14.923, 0.0020, 0.00029\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.013, \quad \{-17.606, -15.088, 0.0015, 0.00028\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.012, \quad \{-17.627, -15.250, 0.0012, 0.00032\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.011, \quad \{-17.637, -15.411, 0.0012, 0.00042\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.010, \quad \{-17.634, -15.566, 0.0017, 0.00058\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.001, \quad \{-15.440, -15.149, 0.9990, 0.30013\}.$$

Пусть теперь  $N = 6l + 2$ ,  $N = 6l + 3$ ,  $N = 6l + 4$ ,  $l = 1, 2, \dots$ . Функции  $\lambda_k(\varepsilon, N, a)$ ,  $k = 1, 2$ , монотонно убывают и  $\lambda_2(\varepsilon, N, a)$  переходит с положительной на отрицательную полуоси. Тогда как  $\lambda_1(\varepsilon, N, a)$  не принимает отрицательных значений. Процесс медленной эволюции  $\lambda_1$  на интервале, на котором  $\lambda_1$  принимает малые положительные значения, переходит в стадию медленного монотонного возрастания при уменьшении  $\varepsilon^2$ . Для  $N = 34$ ,  $a = 0.1$  в качестве иллюстрации указанного поведения спектра  $\pm z^3(\varepsilon, N, a)$  приводятся его четыре наибольшие точки:

$$\varepsilon^2 = 0.012, \quad \{-17.627, -15.250, 0.00013, 0.0008\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.011, \quad \{-17.637, -15.411, 0.00009, 0.0005\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.010, \quad \{-17.634, -15.566, -0.00002, 0.0006\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.001, \quad \{-15.473, -15.149, -0.00983, 0.3107\}.$$

Проведенный анализ не позволяет сделать строгих заключений о характере устойчивости решений  $\pm\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  на всем интервале  $[0, 3^{-2} - 3a^2)$  изменения  $\varepsilon^2$ . Однако есть основания полагать, что  $\varphi_3(x, \varepsilon, a)$  на интервале  $[0, 3^{-2} - 3a^2)$  сохраняет индекс неустойчивости.

## **2.5 Метаустойчивые структуры с двумя точками перехода уравнения Кана-Хилларда**

В градиентных системах (2.17) размерности  $N$  согласно проведенному бифуркационному анализу для значений  $N$  от 30 до 40 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при малых значениях параметра  $\varepsilon^2$ . В результате бифуркации седло-узел в двухпараметрической системе (2.17) появляются две непрерывные по  $\varepsilon^2$  ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра  $\varepsilon^2$ , которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (2.17) отвечают в силу (2.16) две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (2.2) типа внутреннего переходного слоя. Будем говорить, что приближенные решения (2.2) указанного типа порождаются седло-узловыми бифуркациями в системе (2.17). Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (2.17) порождают непрерывные по  $\varepsilon^2$  ветви приближенных решений краевой задачи (2.2) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода. Седло-узловые бифуркации в этом случае обладают следующими свойствами. Характер устойчивости соответствующих ветвей стационарных точек (2.17) не меняется, а максимальные точки их спектров медленно отходят от нуля с уменьшением параметра  $\varepsilon^2$ . Этими

свойствами бифуркации седло-узел указанного выше типа вполне определяются.

Рассмотрим один из сценариев эволюции метастойчивых структур с двумя точками перехода. Он характеризуется переходом метастойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метастойчивых структур с одной точкой перехода.

Этот вариант эволюции характерен медленным движением при увеличении  $t$  правой точки перехода рассматриваемой структуры к  $\pi$  и медленным же движением левой точки перехода к одной из точек промежутка  $(0, \pi)$ . Ввиду инвариантности (2.1) относительно преобразований  $x \mapsto \pi - x$  уравнение (2.1) имеет сопряженную структуру с очевидной эволюцией точек перехода.

Как выше отмечалось, в градиентных системах (2.17) размерности  $N$  реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Рассмотрим порожденные седло-узловыми бифуркациями непрерывные ветви неподвижных точек (2.17), которым в силу (2.16) отвечают две непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (2.2) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода. Каждая пара непрерывных ветвей неподвижных точек (2.17) указанного выше типа медленно меняется при уменьшении параметра  $\varepsilon^2$ . Следовательно, медленно меняются при этом и соответствующие им ветви приближенных решений (2.2). Отметим, что найти бифуркационные значения параметра  $\varepsilon^2$ , как правило, не удаётся. В этой связи далее приводятся их приближенные значения  $\varepsilon^2$  и для каждого из них соответствующие стационарные точки (2.17), индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Реализуются следующие два случая:

1) одна из неподвижных точек — устойчива, две ее близкие нулю точки спектра принадлежат отрицательной полуоси, у второй же две близкие нулю точки спектра лежат по разные стороны от нуля;

2) две близкие нулю точки спектра одной из неподвижных точек лежат по разные стороны от нуля, у второй же две ее близкие нулю точки спектра принадлежат положительной полуоси. Подчеркнем, что индекс неустойчивости неподвижных точек на каждой ее непрерывной ветви сохраняется. При этом с уменьшением параметра  $\varepsilon^2$  две максимальные точки спектра неподвижных точек медленно отходят от нуля. Остальные точки спектра принадлежат отрицательной полуоси.

Перейдем к иллюстрации каскадов седло-узловых бифуркаций в (2.17), где  $N = 30$ ,  $a = 0.1$ , и приближенных решений краевой задачи (2.2), отвечающих этим каскадам. Далее приводятся 8 приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$  каскада. Каждому значению  $\varepsilon^2$  отвечают две близкие неподвижные точки (2.17). Мы приводим их 3 наибольшие точки спектров:

$$\varepsilon^2 = 0.0149, \{-8.101, -7.099, -0.0000002\}, \{-8.345, -6.111, 0.0000002\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0141, \{-8.9560, -6.377, -0.000007\}, \{-9.6120, -5.881, 0.000011\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0137, \{-10.538, -5.149, -0.000012\}, \{-10.724, -4.977, 0.000014\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0114, \{-11.285, -4.273, -0.000089\}, \{-11.399, -4.043, 0.000121\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0098, \{-11.528, -3.535, -0.000219\}, \{-11.550, -3.427, 0.000273\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0078, \{-11.521, -2.969, -0.000756\}, \{-11.518, -2.907, 0.000909\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0057, \{-11.393, -2.519, -0.002546\}, \{-11.371, -2.489, 0.002904\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.0034, \{-11.279, -2.167, -0.031504\}, \{-11.038, -2.123, 0.042570\}.$$

Изменение первых пяти координат  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  первой устойчивой ветви при уменьшении бифуркационного значения параметра  $\varepsilon^2$  от 0.0149, где  $N = 30, z_0 = a = 0.1$ , показано на рис. 2.4.

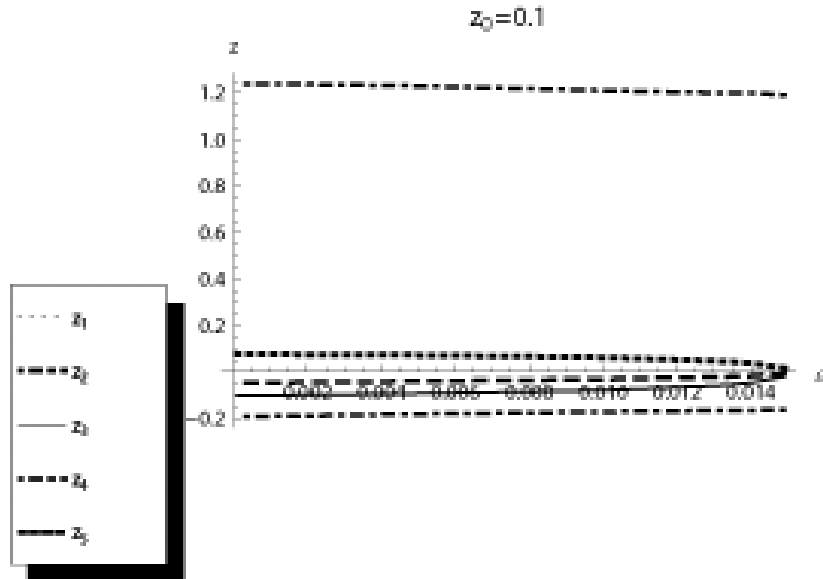


Рис. 2.4: Изменение первых пяти координат  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  первой устойчивой ветви при уменьшении бифуркационного значения параметра  $\varepsilon^2$  от 0.0149

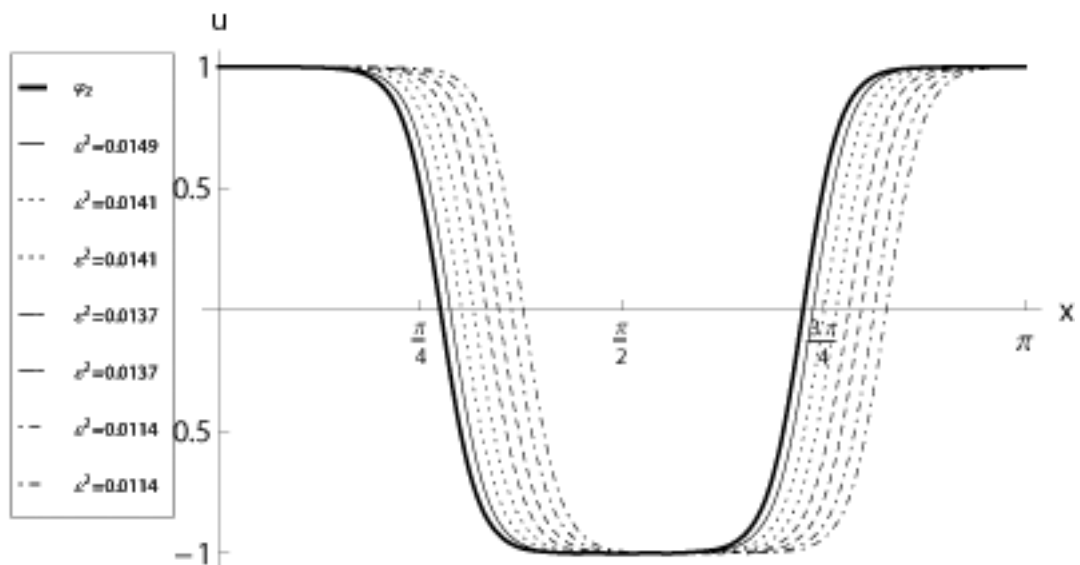


Рис. 2.5: Приближённые решения (2.2),  $\varepsilon^2 = 0.01, a = 0.1$

Подчеркнем, что бифуркационные значения параметра  $\varepsilon^2$  зависят от

порядка  $N$  системы (2.17). С увеличением  $N$  бифуркационные значения параметра  $\varepsilon^2$  соответствующих седло-узловых бифуркаций убывают. Так приближенному бифуркационному значению параметра  $\varepsilon^2 = 0.0149$  системы (2.17) порядка  $N = 30$  отвечает приближенное значение  $\varepsilon^2 = 0.0147$  системы (2.17) порядка  $N = 31$ . С увеличением же  $a$  увеличивается число приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$ . Так при  $N = 30$ ,  $a = 0.3$  это число равно 10. Неподвижным первым 4 парам точек (2.17), где  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$ , порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (2.2) на рис. 2.5.

Приближенные решения (2.2) типа внутреннего переходного слоя с двумя точками перехода, принятые в качестве начальных функций уравнения (2.1), приводят к метастабильным структурам. Иллюстрацией этого предложения является рис. 2.6, где представлено решение (2.1) с  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$ . Здесь в качестве начальной функции принято приближённое

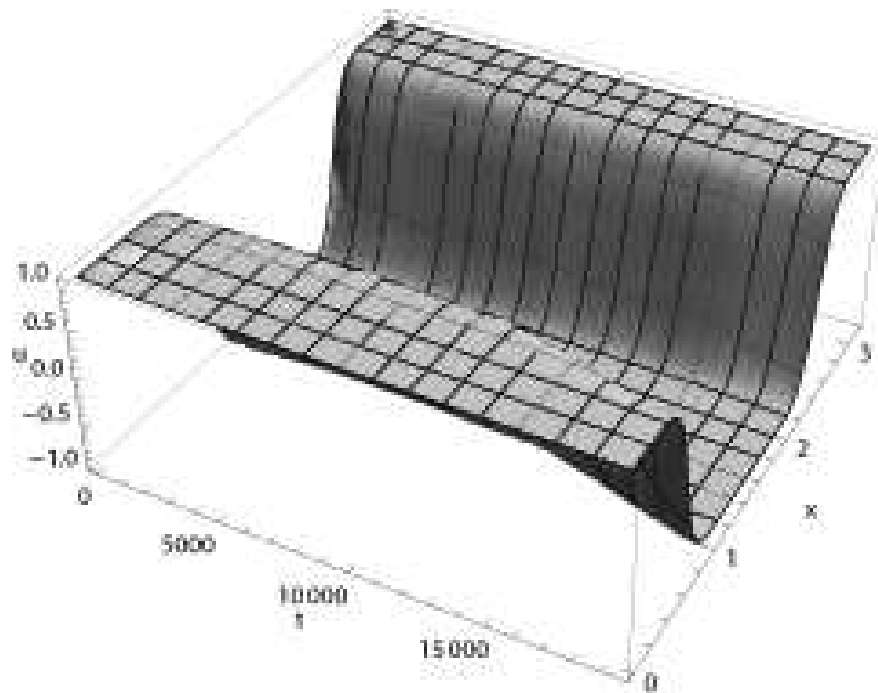


Рис. 2.6: Решение (2.1),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$



решение (2.2), представленное функцией, которая на рис. 2.5 имеет четвёртую точку перехода. График этого решения, полученный применением пакета "Mathematica", представлен на рис. 2.6. Как видно, решение медленно меняется в течение времени  $\approx 19500$ . Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени оказывается вблизи метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

Профили решения (2.1), проиллюстрированного на рис. 2.6, представлены на рис. 2.7 при различных  $t$ .

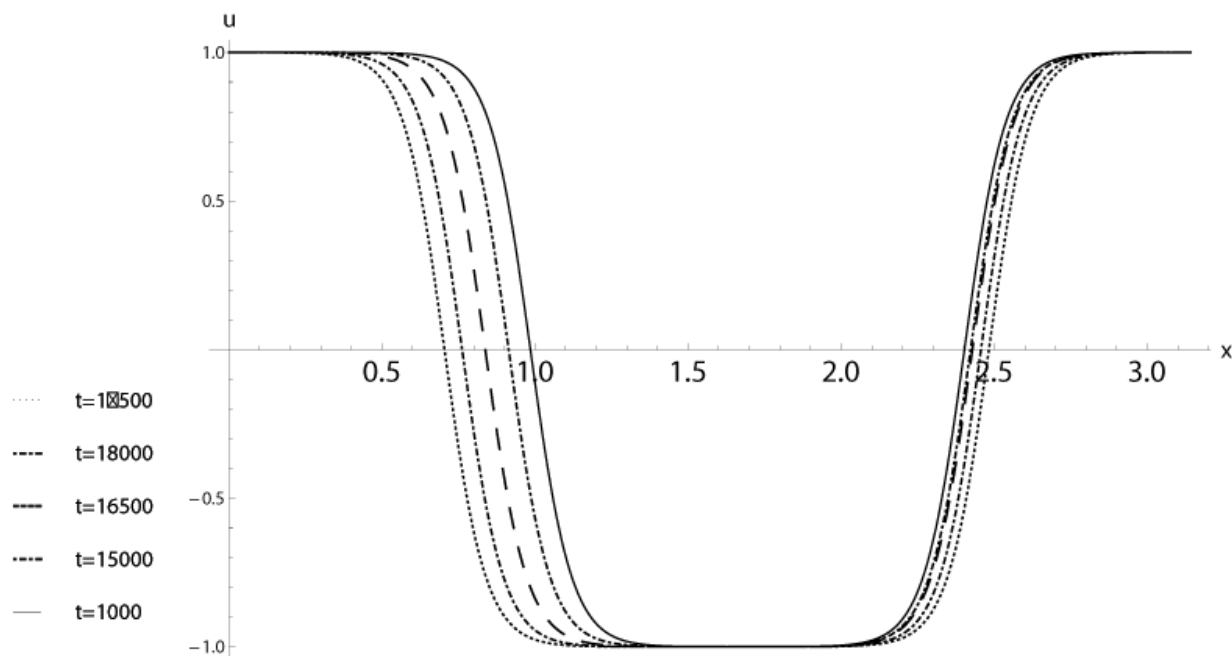


Рис. 2.7: Профили решения (2.1),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0.1$

## 2.6 Метаустойчивые структуры с тремя точками перехода уравнения Кана-Хилларда

Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (2.17) порождают непрерывные по  $\varepsilon^2$  ветви приближенных решений краевой задачи (2.2) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода.

Задача исследования метаустойчивых структур (2.1) с тремя точками

перехода, разумеется, сложнее, чем соответствующая задача для метаустойчивых структур с двумя точками перехода.

Рассмотрим сценарий эволюции метаустойчивых структур с тремя точками перехода. Он характеризуется переходом метаустойчивой структуры после сравнительно малого по сравнению с этапом медленного изменения переходного процесса в класс метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

Сразу перейдем к иллюстрации каскадов седло-узловых бифуркаций в (2.17), где  $N = 30$ ,  $a = 0.1$ , и приближенных решений краевой задачи (2.2), отвечающих этим каскадам. Далее приводятся 4 приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$  каскада. Каждому значению  $\varepsilon^2$  отвечают две близкие неподвижные точки (2.17). Мы приводим их 3 наибольшие точки спектров:

$$\varepsilon^2 = 0.00394, \{-9.103, -0.084, -0.0011\}, \{-9.148, -0.077, 0.0011\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.00374, \{-5.700, -0.120, -0.0019\}, \{-5.753, -0.096, 0.0022\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.00354, \{-3.895, -0.130, -0.0029\}, \{-3.917, -0.104, 0.0040\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.00325, \{-2.694, -0.736, -0.0040\}, \{-2.674, -0.952, 0.0046\}.$$

Изменение первых пяти координат  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  первой устойчивой ветви при уменьшении бифуркационного значения параметра  $\varepsilon^2$  от 0.00394, где  $N = 30$ ,  $z_0 = a = 0.1$ , показано на рис. 2.8.

Неподвижным 4 парам точек (2.17), где  $\varepsilon^2 = 0.001$ ,  $a = 0.1$ , порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (2.2) на рис. 2.9.

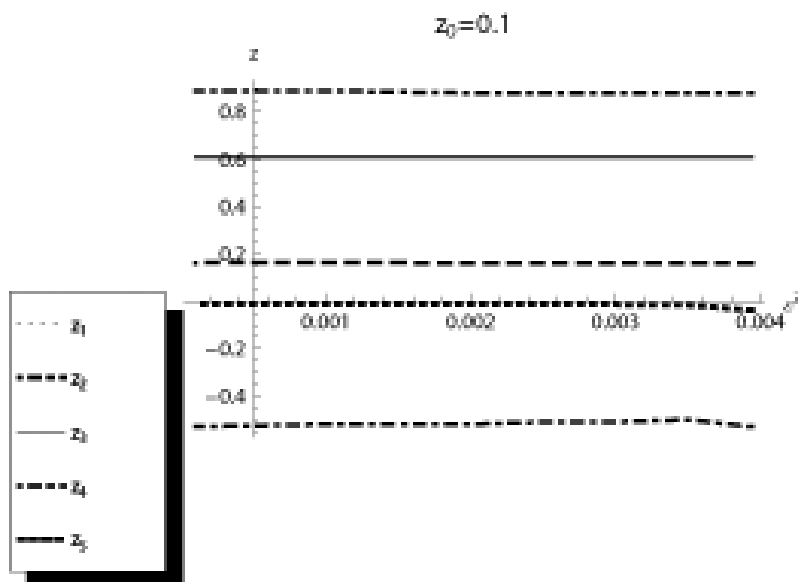


Рис. 2.8: Изменение первых пяти координат  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  первой устойчивой ветви при уменьшении бифуркационного значения параметра  $\varepsilon^2$  от 0.00394

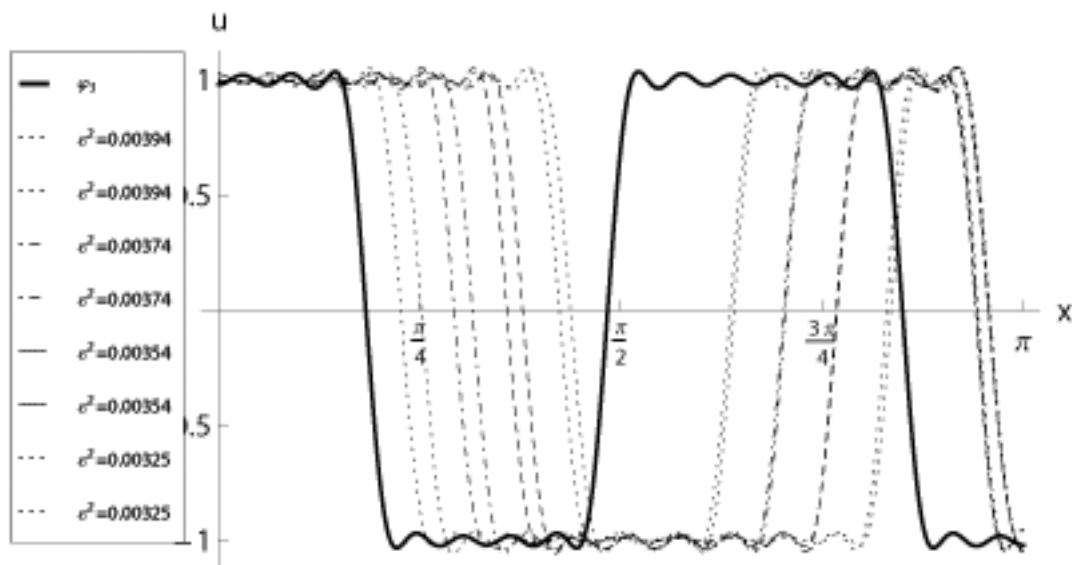


Рис. 2.9: Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.001$ ,  $a = 0.1$

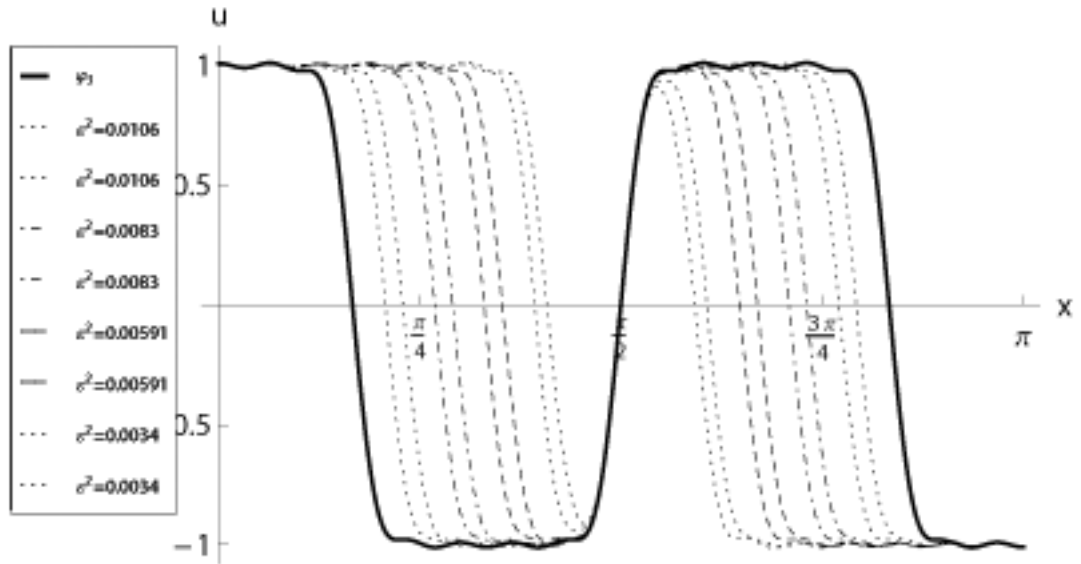


Рис. 2.10: Приближённые решения (1.2),  $\varepsilon^2 = 0.003$ ,  $a = 0$

Перейдем к иллюстрации каскадов седло-узловых бифуркаций в (2.17), где  $N = 31$ ,  $a = 0$ , и приближенных решений краевой задачи (2.2), отвечающих этим каскадам. Далее приводятся 4 приближённых бифуркационных значения параметра  $\varepsilon^2$  каскада. Каждому значению  $\varepsilon^2$  отвечают две близкие неподвижные точки (2.17). Мы приводим их 3 наибольшие точки спектров:

$$\varepsilon^2 = 0.010600, \{-12.74, -0.005, -0.0005\}, \{-12.17, -0.004, 0.0006\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.008300, \{-7.578, -0.019, -0.0004\}, \{-7.520, -0.019, 0.0004\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.005910, \{-4.915, -0.096, -0.0062\}, \{-4.837, -0.095, 0.0068\};$$

$$\varepsilon^2 = 0.003497, \{-3.386, -0.481, -0.0164\}, \{-3.357, -0.468, 0.0170\}.$$

Неподвижным 4 парам точек (2.17), где  $\varepsilon^2 = 0.003$ ,  $a = 0$ , порождённым указанными выше седло-узловыми бифуркациями, отвечают 4 пары приближенных решений краевой задачи (2.2) на рис. 2.10.

Приближенные решения (2.2) типа внутреннего переходного слоя с тремя точками перехода, принятые в качестве начальных функций уравнения (2.1), приводят к метастабильным структурам. Иллюстрацией это-

го предложения является рис. 2.11, где представлено решение (1.1) с  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0$ .

Здесь начальной функцией является приближённое решение (2.2), представленное функцией, которая на рис. 2.10 имеет вторую точку перехода. Согласно рис. 2.11 решение медленно меняется в течение времени  $\approx 6550$ . Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени оказывается вблизи метаустойчивых структур с одной точкой перехода.

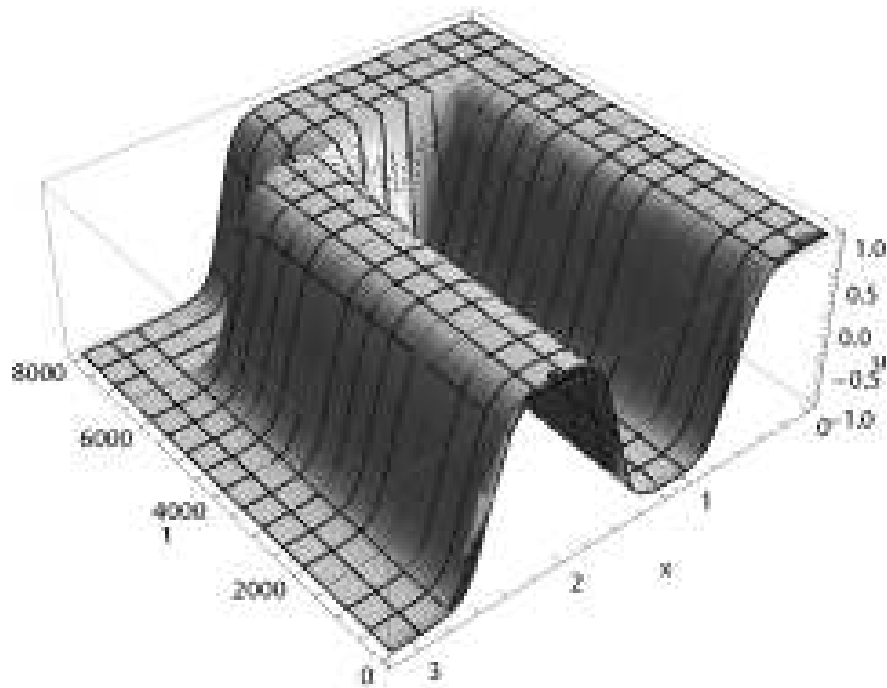


Рис. 2.11: Решение (2.1),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0$

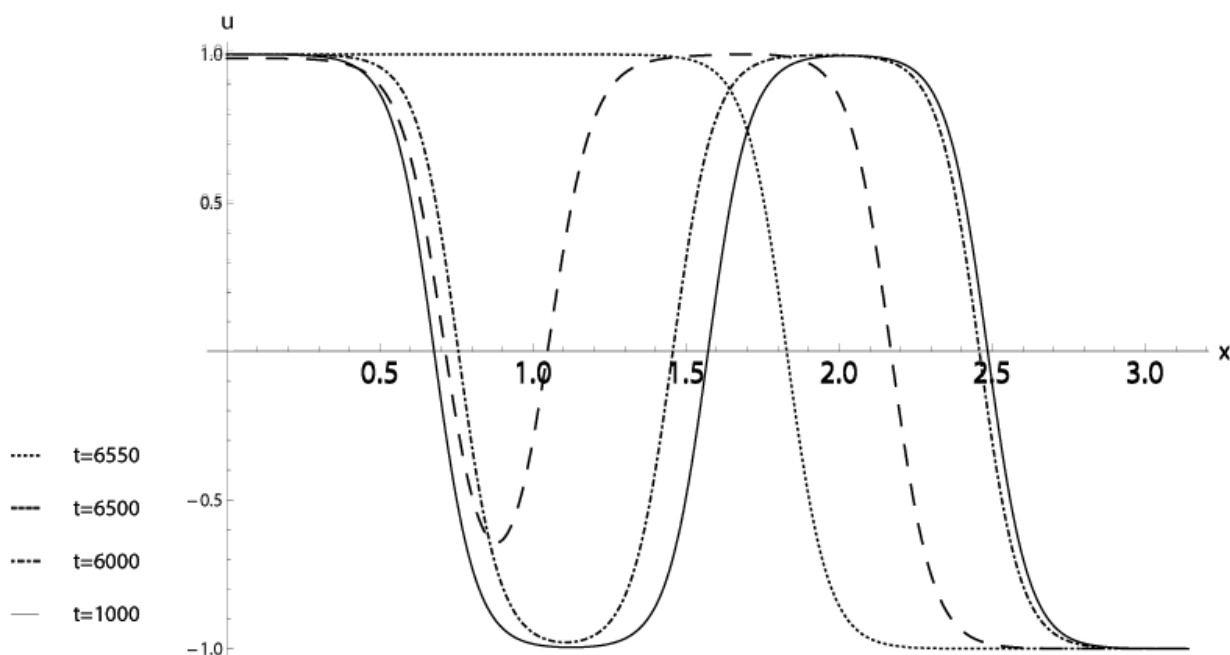


Рис. 2.12: Профили решения (2.1),  $\varepsilon^2 = 0.01$ ,  $a = 0$

Профили решения (2.1), проиллюстрированного на рис. 2.11, представлены на рис. 2.12 при различных  $t$ .

## 2.7 Выводы

Для уравнения Кана-Хилларда на отрезке рассмотрены вопросы о существовании, форме и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений:

1. Опираясь на метод центральных многообразий доказана теорема о существовании и устойчивости пространственно неоднородного стационарного решения.
2. Решена задача о приближенных стационарных решениях уравнения типа переходного слоя с 2 и 3 точками перехода. Показано, что множество приближенных стационарных решений указанного выше типа правильно отражает характер эволюции метастабильных структур с 2

и 3 точками перехода при увеличении  $t$  и при средних значениях параметра  $\varepsilon^2$ . Используемый метод позволяет исследовать приближенные стационарные решения типа переходного слоя с большим количеством точек перехода.

3. Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.
4. При исследовании метаустойчивых структур выявлено, что задача о приближенных стационарных решениях является ключевой. Рассмотрены сценарии возникновения и динамика по параметру  $\varepsilon^2$  метаустойчивых структур с 2 и 3 точками перехода.

# ГЛАВА 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ СЕМЕЙСТВ УРАВНЕНИЙ КАНА — ХИЛЛАРДА

## 3.1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение, которое является модификацией (расширением) широко известной модели Кана — Хилларда,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 u + a_3 u^2 + a_4 u^3 \right]. \quad (3.1)$$

Как правило вместе с (3.1) рассматривают либо краевые условия типа Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad (3.2)$$

либо периодические краевые условия

$$u(t, x + 1) \equiv u(t, x). \quad (3.3)$$

Для коэффициентов  $a_j$  выполнены неравенства

$$a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad a_4 > 0. \quad (3.4)$$

Такого вида краевые задачи изучались в [24].

Особо особо отметим то обстоятельство, что для произвольного значения вещественной постоянной  $c$  решение  $u_0(t, x) \equiv c$  является однородным состоянием равновесия рассматриваемых краевых задач.

## 3.2 Динамика краевых задач (3.1), (3.2) и (3.1), (3.3)

Исследуем вопрос о поведении всех решений краевых задач (3.1), (3.2) и (3.1), (3.3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрест-



ности каждого состояния равновесия  $u_0(t, x) \equiv c$ .

Отметим, что количество параметров в (3.1) можно уменьшить, произведя нормировку «времени»  $t \rightarrow (-a_2)t$  и нормировку функции  $u \rightarrow (a_4 a_2^{-1})^{\frac{1}{2}} u$ . В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + bu^2 + u^3 \right], \quad (3.5)$$

где  $\alpha = -a_1 a_2^{-2}$  ( $\alpha > 0$ ),  $b = a_3 a_2^{-\frac{3}{2}} a_4^{\frac{1}{2}}$ .

Для изучения решений из малой окрестности состояния равновесия  $u_0(t, x) \equiv c$  в (3.5) произведём замену

$$u = c + v. \quad (3.6)$$

В итоге получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta v + \gamma v^2 + v^3 \right] \quad (3.7)$$

с краевыми условиями либо

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad (3.8)$$

либо

$$v(t, x+1) \equiv v(t, x). \quad (3.9)$$

В (3.7) приняты обозначения

$$\beta = 1 - 2bc - 3c^2, \quad \gamma = b + 3c.$$

Ниже через  $M(\varphi)$  будем обозначать среднее на отрезке  $[0, 1]$  значение функции  $\varphi(x)$ :

$$M(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Через  $\overset{0}{W}$  обозначим множество всех функций  $\varphi(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ), для которых  $\varphi(x) \in W_2^4([0, 1])$ , и для  $\varphi(x)$  выполнены краевые условия (3.8) или (3.9) и  $M(\varphi) = 0$ .

Важную роль играет следующее простое утверждение.

**Теорема 3.1.** *Для каждого  $c \in (-\infty, \infty)$  множество всех таких решений  $u(t, x)$  краевой задачи (3.5), (3.2) и краевой задачи (3.5), (3.3), определённых при  $t > t_0$ , для которых выполнены условия  $u(t, x) = c + v(t, x)$  и*

$$M(v) = 0, \quad (3.10)$$

*является инвариантным интегральным многообразием.*

Это означает, что из условий  $v(t, x) \in \overset{0}{W}$  и  $M(v(t_0, x)) = 0$  следует равенство  $M(v(t, x)) \equiv 0$  для  $t > t_0$ .

Отсюда естественным образом возникает задача исследования локальной — в окрестности нулевого состояния равновесия — динамики краевых задач (3.7), (3.8) и (3.7), (3.9), зависящих от непрерывного параметра  $c \in (-\infty, \infty)$ .

Характеристическое уравнение для линеаризованных в нуле соответствующих краевых задач (3.7), (3.8), (3.10) и (3.7), (3.9), (3.10) имеет вид

$$\lambda_k = \pi^2 k^2 [-\alpha \pi^2 k^2 + 1 - 2bc - 3c^2], \quad (3.11)$$

где  $k = 1, 2, \dots$  в случае условий (3.8), (3.10) и  $k = \pm 2, \pm 4, \dots$  в случае (3.9), (3.10).

Базовыми являются следующие хорошо известные утверждения.

**Утверждение 3.1.** *Пусть выполнено неравенство*

$$\pi^2 \alpha > 1 - 2bc - 3c^2. \quad (3.12)$$

Тогда нулевое решение краевой задачи (3.7), (3.8), (3.10) асимптотически устойчиво. Если выполнено неравенство

$$4\pi^2\alpha > 1 - 2bc - 3c^2, \quad (3.13)$$

то нулевое решение краевой задачи (3.7), (3.9), (3.10) тоже асимптотически устойчиво.

В этих случаях все решения из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия рассматриваемых краевых задач соответственно стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Тем самым решения  $u(t, x)$  краевых задач (3.5), (3.2) и (3.5), (3.3) с близкими к постоянной  $c$  начальными условиями, удовлетворяющими равенству  $M(u(t_0, x)) = c$ , стремятся к постоянной  $c$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Утверждение 3.2.** Пусть при  $\alpha > 0$  выполнено неравенство

$$\pi^2\alpha < 1 - 2bc - 3c^2. \quad (3.14)$$

Тогда нулевое решение краевой задачи (3.7), (3.8), (3.10) неустойчиво. Если же выполнено неравенство

$$4\pi^2\alpha < 1 - 2bc - 3c^2, \quad (3.15)$$

то нулевое решение краевой задачи (3.7), (3.9), (3.10) тоже неустойчиво.

При условии (3.14) или (3.15) в достаточно малой окрестности нуля не может быть аттрактора у рассматриваемых задач соответственно. Тем самым задача о динамике этих краевых задач становится нелокальной. Поэтому динамика краевых задач (3.5), (3.2) и (3.5), (3.3) в окрестности состояния равновесия  $u_0(t, x) \equiv c$  тоже является нелокальной.

При условии, когда для некоторого  $c_0$  в (3.12), (3.14) вместо неравен-

ства стоит строгое равенство

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + \pi^2\alpha = 0, \quad (3.16)$$

в задаче об устойчивости краевой задачи (3.7), (3.8), (3.10) возникает критический случай. Этот критический случай имеет единичную размерность. Для краевой задачи (3.7), (3.9), (3.10) критический случай выделяется равенством

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + 4\pi^2\alpha = 0. \quad (3.17)$$

Размерность этого критического случая равна двум (с двумя группами решений).

### 3.2.1 Критический случай в краевой задаче (3.7), (3.8), (3.10)

Рассмотрим вопрос о локальной динамике краевой задачи (3.7), (3.8), (3.10) при условии

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad (3.18)$$

где  $c_0$  является корнем уравнения (3.16),  $c_1 \neq 0$  — как-то фиксировано, а  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.19)$$

Из условий (3.16), (3.18), (3.19) вытекает [32], что в некоторой достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия рассматриваемой краевой задачи существует одномерное устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие, на котором эту краевую задачу можно записать в виде нормальной формы, т. е. в виде скалярного нелинейного уравнения первого порядка [9]. Для определения элемен-

тов этого уравнения воспользуемся стандартной процедурой (см., например, [25]). Введём в рассмотрение формальный ряд

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \xi(\tau) \cos(\pi x) + \varepsilon v_2(\tau, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_3(\tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (3.20)$$

Подставим (3.20) в (3.7), (3.8), (3.10) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На первом шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{1/2}$ , получаем верное тождество, а на втором — для определения  $v_2(\tau, x)$  приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \beta v_2 \right] &= -\xi^2 \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\cos^2 \pi x), \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad M(v_2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$v_2(\tau, x) = A \xi^2 \cos 2\pi x, \quad A = \gamma(2\beta_0 - 8\alpha\pi^2)^{-1}.$$

На следующем шаге для нахождения  $v_3(\tau, x)$  получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} - \beta v_3 \right] &= \dot{\xi} \cos(\pi x) + \pi^2(2b + 6c_0)\xi c_1 \cos(\pi x) - \\ &\quad - \xi^3 \frac{d^2}{dx^2} (\cos^3 \pi x) - 2\gamma \xi^3 A \frac{d^2}{dx^2} (\cos(2\pi x) \cos(\pi x)), \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= \frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad M(v_3) = 0. \end{aligned}$$

Условие разрешимости этой краевой задачи состоит в вычислении равенства

$$\dot{\xi} = \delta \xi + \sigma \xi^3, \quad (3.21)$$

где

$$\delta = 2\pi^2(b + 3c_0)c_1, \quad \sigma = -\frac{3}{4}\pi^2 - \gamma\pi^2 A.$$

Таким образом, уравнение (3.21) с точностью до слагаемых порядка  $O(\varepsilon^{1/2})$  является нормальной формой для краевой задачи (3.7), (3.8), (3.10).

Оно описывает, в главном, поведение всех решений (3.7), (3.8), (3.10) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. Уравнение (3.21) интегрируется в явном виде. При  $\delta\sigma < 0$  у (3.21) имеется два ненулевых состояния равновесия  $\xi_{\pm} = \pm(-\frac{\delta}{\sigma})^{\frac{1}{2}}$ . Согласно асимптотической формуле (3.20) им отвечают два ненулевых неоднородных состояния равновесия  $v_{\pm}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi_{\pm} \cos(\pi x) + O(\varepsilon)$ .

Сформулируем итоговое утверждение.

**Теорема 3.2.** *При условиях  $\delta \neq 0$ ,  $\sigma \neq 0$  и при всех достаточно малых  $\varepsilon$  поведение решений (3.7), (3.8), (3.10) из некоторой достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия определяется уравнением (3.21):*

1<sup>0</sup>. *При  $\delta > 0$ ,  $\sigma > 0$  в этой окрестности не существует аттрактора;*

2<sup>0</sup>. *При  $\delta > 0$ ,  $\sigma < 0$  нулевое решение неустойчиво и существует два устойчивых состояния равновесия  $v_{\pm}(x, \varepsilon)$ ;*

3<sup>0</sup>. *При  $\delta < 0$ ,  $\sigma > 0$  нулевое решение устойчиво, а  $v_{\pm}(x, \varepsilon)$  — неустойчивы;*

4<sup>0</sup>. *При  $\delta < 0$ ,  $\sigma < 0$  все решения из рассматриваемой окрестности стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .*

### 3.2.2 Критический случай в краевой задаче (3.7), (3.9), (3.10)

Здесь предполагаем, что выполнено условие (3.17). При этом два корня характеристического уравнения (3.11) при  $k = \pm 2$  являются нулевыми, а все остальные отрицательные. Положим, как и выше,

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  в некоторой достаточно малой и

не зависящей от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (3.7), (3.9), (3.10) имеется устойчивое двумерное локальное инвариантное интегральное многообразие [32]. На нём исходную краевую задачу можно записать в виде специального скалярного нелинейного комплексного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Именно это уравнение и определяет (при выполнении некоторых условий типа общности положения) локальное поведение решений задачи (3.7), (3.9), (3.10) в указанной малой окрестности. Для построения нужного уравнения воспользуемся стандартным алгоритмом (см., например, [25]).

Введём в рассмотрение формальный ряд

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\xi(\tau) \exp(2\pi i x) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-2\pi i x)) + \varepsilon v_2(\tau, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_3(\tau, x) + \dots, \quad (3.22)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ , а  $v_j(\tau, x)$  —  $2\pi$ -периодичны по  $x$ .

Подставим (3.22) в (3.7), (3.9), (3.10) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ .

На первом шаге приходим к верному тождеству, а на втором — получаем уравнение для  $v_2(\tau, x)$ . Интегрируя его, находим, что

$$v_2(\tau, x) = -\gamma_0(16\pi^2\alpha - \beta_0)^{-1}\xi^2 \exp(4\pi i x) - \gamma_0(16\pi^2\alpha - \beta_0)^{-1}\bar{\xi}^2 \exp(-4\pi i x).$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ , получим уравнение для  $v_3(\tau, x)$ . Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем равенство

$$(2\pi)^{-2} \cdot \frac{d\xi}{d\tau} = \beta_1 \cdot \xi + d \cdot \xi|\xi|^2, \quad (3.23)$$

в котором  $\beta_1 = -2\gamma_0 c_1$ ,  $d = -3 + 2\gamma_0^2(16\pi^2\alpha - \beta_0)^{-1}$ . Отметим, что при  $\beta_1 d < 0$  уравнение (3.23) имеет множество состояний равновесия вида  $\xi_0 \exp(i\varphi)$  ( $\varphi \in [0, 2\pi)$ ), где  $\xi_0 = (-\frac{\beta_1}{d})^{\frac{1}{2}}$ .

**Теорема 3.3.** При условиях  $\beta_1 \neq 0$ ,  $d \neq 0$  и при всех достаточно малых  $\varepsilon$  динамика уравнения (3.23) определяет поведение решений краевой задачи (3.7), (3.9), (3.10) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Более подробно: при  $\beta_1 d < 0$  краевая задача (3.7), (3.9), (3.10) имеет неоднородное состояние равновесия  $v_0(x, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \xi_0 \cos(2\pi x) + O(\varepsilon)$ . Оно устойчиво при  $\beta_1 > 0$  и неустойчиво при  $\beta_1 < 0$ . При  $\beta_1 < 0$ ,  $d < 0$  все решения из малой окрестности нуля стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Если же  $\beta_1 > 0$ ,  $d > 0$ , то задача о динамике становится нелокальной.

### 3.2.3 О неоднородных состояниях равновесия краевой задачи (3.5), (3.3)

Сначала отметим, что эти состояния равновесия являются  $2\pi$ -периодическими решениями уравнения

$$\alpha \frac{d^2 \omega}{dx^2} + f(\omega) = h, \quad (3.24)$$

где  $h \in (-\infty, \infty)$ , а  $f(\omega) = \omega + b\omega^2 - \omega^3$ . Функция  $f(\omega)$  имеет локальный минимум  $f_-$  и локальный максимум  $f_+$ , причём

$$f_{\pm} = f(\omega_{\pm}), \quad \omega_{\pm} = \frac{1}{3}b \pm \sqrt{\frac{b^2}{9} + \frac{1}{3}}.$$

При  $h < f_-$  и  $h > f_+$  уравнение (3.24) не может иметь неоднородных периодических решений. Ниже предполагаем, что

$$f_- < h < f_+.$$

При этих условиях через  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$  обозначим корни уравнения

$$f(\omega) = h.$$

Через  $\omega_c(x)$  обозначим решение (3.24) с начальными условиями

$$\omega_c(0) = c, \quad \omega'_c(0) = 0.$$



Это решение заведомо периодическое либо при  $c \in (\omega_1, \omega_2)$ , либо при  $c \in (\omega_2, \omega_3)$ . Его период обозначим через  $T_h(c)$ . Заметим, что

$$\lim_{c \rightarrow \omega_2} T_h(c) = 2\pi(\alpha f'(\omega_2))^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.25)$$

Если  $T_h(c)$  определено при  $c \in (\omega_1, \omega_2)$ , то  $\lim_{c \rightarrow \omega_1+0} T_h(c) = \infty$ .

Если  $T_h(c)$  определено при  $c \in (\omega_2, \omega_3)$ , то  $\lim_{c \rightarrow \omega_3-0} T_h(c) = \infty$ .

Отметим ещё, что  $\lim_{h \rightarrow f_1+0} T_h(c) = \infty$ ,  $\lim_{h \rightarrow f_2-0} T_h(c) = \infty$ .

Из приведённых соотношений уже легко сделать вывод о существовании  $2\pi$ -периодического решения (3.24). Этот вывод связан с разрешимостью уравнения

$$T_h(c) = 2\pi n^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.26)$$

Учитывая (3.25), заключаем, что уравнение (3.26) разрешимо при

$$\alpha f'(\omega_2) < h^2.$$

Осталось заметить, что соответствующее состояние равновесия устойчиво при условии  $n = 1$  в (3.26), а при  $n > 1$  — неустойчиво.

Асимптотика при  $\alpha \rightarrow 0$  периодических решений исследована в [10, 11].

### 3.3 Бифуркации в обобщенном уравнении Кана — Хилларда

#### 3.3.1 Постановка задачи

Исследуем обобщенное уравнение Кана — Хилларда, которое отличается от (3.1) наличием ещё одного слагаемого  $\lambda \partial u / \partial x$ , стоящего в скобках:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + u + bu^2 - u^3 \right]. \quad (3.27)$$

Вместе с (3.27) будем рассматривать периодические краевые условия

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (3.28)$$

В отличие от (3.1), (3.2) у краевой задачи (3.27), (3.28) могут быть только однородные состояния равновесия  $u(t, x) \equiv c$  ( $c \in (-\infty, \infty)$ ).

В (3.27) произведем замену

$$u(t, x) = v(t, x) + c.$$

В результате получим краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} + \beta v + \gamma v^2 - v^3 \right], \quad (3.29)$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad (3.30)$$

где  $\beta = 1 + 2bc - 3c^2$ ,  $\gamma = b - 3c$ . Важно отметить, что из условия

$$M(v(t_0, x)) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t_0, x) dx = 0$$

следует выполнение при всех  $t > t_0$  условия

$$M(v(t, x)) = 0. \quad (3.31)$$

Таким образом, множество всех решений (3.27), (3.28), для которых  $M(u(t, x)) = c$ , является инвариантным интегральным многообразием. Отсюда вытекает корректность постановки следующей задачи: исследование локальной — в окрестности нулевого состояния равновесия — динамики всего семейства, зависящего от параметра  $c$ , краевых задач (3.29), (3.30) при дополнительном условии (1.40). Отметим, что краевые задачи (3.27) и (3.28) изучались в [24].

### 3.3.2 Бифуркация Андронова – Хопфа

При исследовании локальной динамики краевой задачи (3.29)–(3.31) важную роль играет расположение корней  $\lambda_k$  характеристического уравнения для линеаризованной в нуле краевой задачи:

$$\lambda_k = -\alpha k^4 + ik^3 \lambda + \beta k^2, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.32)$$

В случае, когда  $\alpha > \beta$ , все корни (3.32) имеют отрицательные вещественные части. Отсюда следует, что все решения (3.29)–(3.31) из некоторой достаточно малой окрестности нуля стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Если же  $\alpha < \beta$ , то среди корней (3.32) есть корни с положительной вещественной частью, а, значит, поставленная задача о динамике становится нелокальной.

Ниже будем предполагать, что имеет место критический случай. Пусть значение  $c = c_0$  такое, что

$$\alpha = \beta = 1 + 2bc_0 - 3c_0^2. \quad (3.33)$$

При этом, конечно, выполнено неравенство  $\alpha > 0$ , т. е.

$$1 + 2bc_0 - 3c_0^2 > 0.$$

Фиксируем произвольно значение  $c_1$  и положим в (3.29)

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad (3.34)$$

где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр, т. е.

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.35)$$

Исследуем поведение всех решений краевой задачи (3.29)–(3.31) из некоторой достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия при условиях (3.33)–(3.35).

В этом случае характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней  $\lambda_{\pm 1} = \pm i\lambda + O(\varepsilon)$ , а все остальные его корни имеют отрицательные (и отделенные от мнимой оси) вещественные части. Тем самым выполнены условия бифуркации Андронова — Хопфа.

Воспользуемся известными результатами (см., например, [32, 9]). В малой окрестности нулевого состояния равновесия (3.29)—(3.31) существует локальное устойчивое двумерное инвариантное интегральное многообразие, на котором эта краевая задача может бы записана в виде скалярного специального комплексного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Для того, чтобы выписать это уравнение — его называют нормальной формой — применим следующий формализм.

Введём в рассмотрение формальный ряд

$$v = \varepsilon^{\frac{1}{2}} [\xi(\tau) \exp(ix + i\lambda t) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-ix - i\lambda t)] + \varepsilon v_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_3(t, \tau, x) + \dots \quad (3.36)$$

Здесь  $\tau = \varepsilon t$  — медленное «время»; функции  $v_j(t, \tau, x)$  —  $2\pi/\lambda$ -периодичны по  $t$  и  $2\pi$ -периодичны по  $x$ .

Подставим (3.36) в (3.29)—(3.31) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На первом шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ , получим верное тождество, а на втором — уравнение для определения  $v_2(t, \tau, x)$ :

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial v_2}{\partial x} + \beta_0 v_2 \right) + 4\gamma [\xi^2 \exp(2ix + 2i\lambda t) + \bar{\xi}^2 \exp(-2ix - 2i\lambda t)],$$

где  $\beta_0 = 1 + 2bc_0 - 3c_0^2$ .

Отсюда приходим к выводу, что

$$v_2 = A\xi^2 \exp(2ix + 2i\lambda t) + \bar{A}\bar{\xi}^2 \exp(-2ix - 2i\lambda t),$$

где  $A = 2\gamma[8\alpha - 2\beta_0 + 3i\lambda]^{-1}$ .

На третьем шаге для нахождения  $v_3(t, \tau, x)$  приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial v_3}{\partial x} + \beta_0 v_3 \right) = \\ = \left( -\frac{d\xi}{d\tau} + \beta(2b+6c_0)c_1\xi + (2A\gamma+3)\xi|\xi|^2 \right) \exp(ix+i\lambda t) + \\ + \left( -\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} + \beta(2b+6c_0)c_1\bar{\xi} + (2\bar{A}\gamma+3)\bar{\xi}|\xi|^2 \right) \exp(-ix-i\lambda t) + \\ + 9(2A\gamma+1)\xi^3 \exp(3ix+3it) + 9(2\bar{A}\gamma+1)\bar{\xi}^3 \exp(-3ix-3it), \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$v_3(t, \tau, x + 2\pi) \equiv v_3(t, \tau, x), \quad M(v_3) = 0. \quad (3.38)$$

Условие разрешимости краевой задачи (3.37), (3.38) в указанном классе функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \quad (3.39)$$

в котором

$$\delta = 2\gamma c_1, \quad \sigma = 2A\gamma - 3.$$

Отсюда и из общих утверждений (см., например, [32]) вытекает следующий результат.

**Теорема 3.4.** Пусть  $\delta \neq 0$  и  $Re\sigma \neq 0$ . Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  динамика уравнения (3.39) определяет локальную динамику краевой задачи (3.29)–(3.31).

Поясним это утверждение. Пусть  $\delta > 0$  и  $Re\sigma > 0$ . Тогда в окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (3.29)–(3.31) не может существовать аттрактора, т. е. задача о динамике становится нелокальной.

Пусть  $\delta > 0$  и  $Re\sigma < 0$ . Тогда уравнение (3.39) имеет устойчивый цикл  $\xi_0(\tau) = \xi_0 \exp(i\omega_0\tau)$ , где  $\xi_0 = (-\delta(Re\sigma)^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ,  $\omega_0 = (Im\sigma)\xi_0^2$ , а краевая

задача (3.29)—(3.31) тоже имеет устойчивый цикл

$$v_0(t, \tau, x) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[ \xi_0 \exp(ix + i(\lambda + \varepsilon\omega_0 + o(\varepsilon))t) + \bar{\xi}_0 \exp(-ix - i(\lambda + \varepsilon\omega_0 + o(\varepsilon))t) \right] + \quad (3.40)$$

$+O(\varepsilon)$ .

При условии  $\delta < 0$  и  $Re\sigma > 0$  уравнение (3.39) имеет устойчивое состояние равновесия и неустойчивый цикл. Краевая задача (3.29)—(3.31) тоже имеет при малых  $\varepsilon$  устойчивое нулевое состояние равновесия и неустойчивый цикл (3.40).

При условии  $\delta < 0$  и  $Re\sigma < 0$  в (3.39) все решения стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , и в краевой задаче (3.29)—(3.31) тоже все решения из малой (не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нуля при всех достаточно малых  $\varepsilon$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.3.3 Исследование решений краевой задачи (3.29)—(3.31) при достаточно больших значениях параметра $|\lambda|$

Без потери общности можно считать, что параметр  $\lambda$  отрицателен. В противном случае, это достигается заменой  $x \rightarrow -x$ .

Основное предположение этого раздела состоит в том, что выполнено неравенство

$$-\lambda \gg 1.$$

В (3.29) поделим левую и правую части на  $(-\lambda)$ . Произведём замену  $t \rightarrow (-\lambda)^{-1}t$  и положим  $\varepsilon = (-\lambda)^{-1}$ , т. е.  $0 < \varepsilon \ll 1$ . В результате приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v + \gamma v^2 - v^3 \right), \quad (3.41)$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad M(v) = 0. \quad (3.42)$$

Исследуем поведение решений этой краевой задачи при малых  $\varepsilon$  и при  $t \rightarrow \infty$ .

В случае  $\varepsilon = 0$  получаем краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \quad v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad M(v) = 0. \quad (3.43)$$

Все корни  $\lambda_k$  характеристического уравнения для (3.43) являются чисто мнимыми:  $\lambda_k = -ik^3$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Тем самым в (3.41), (3.42) реализуется критический в задаче об устойчивости случай бесконечной размерности. Методика изучения такого типа критических случаев разработана в [24, 25, 10, 11]. Применим её для рассматриваемой задачи.

Положим в (3.41), (3.42)

$$v = v_0(t, \tau, x) + \varepsilon v_1(t, \tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (3.44)$$

$$v_0(t, \tau, x) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx - ik^3 t). \quad (3.45)$$

Зависимость от  $t$  и  $x$  в (3.44) предполагается  $2\pi$ -периодической и  $M(v_0(t, \tau, x)) = 0$ . Подставим (3.44) в (3.41). Тогда для определения  $v_1(t, \tau, x)$  получаем краевую задачу

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial v_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \beta v_0 + \gamma v_0^2 - v_0^3 \right). \quad (3.46)$$

Из условия разрешимости (3.46) в указанном классе функций для определения элементов  $\xi_k(\tau)$  формального ряда (3.45) приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = -\alpha k^4 \xi_k + k^2 \beta \xi_k - 3k^2 \xi_k \left( 2 \sum_{j=-\infty, j \neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 - |\xi_k|^2 \right), \quad (3.47)$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Система (3.47) играет роль нормальной формы. Её нелокальная динамика определяет, на основе соотношения (3.45), поведение решений исходной краевой задачи (3.30), (3.31) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Систему (3.47) можно записать в компактной форме. Для этого введём несколько обозначений. Во-первых, отметим, что

$$\sum_{j=-\infty, j \neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 = M(v_0^2(t, \tau, x)). \quad (3.48)$$

Через  $\omega(\tau, x)$  обозначим функцию

$$\omega(\tau, x) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx), \quad (3.49)$$

где коэффициенты Фурье  $\xi_k$  те же, что и в формуле (3.45). Поэтому

$$\sum_{j=-\infty, j \neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 = M([\omega(\tau, x)]^2). \quad (3.50)$$

Обозначим через  $N(\omega)$  бесконечномерный вектор

$$N(\omega) = (\dots, \xi_{-2} \exp(-2ikx), \xi_{-1} \exp(-ikx), \xi_1 \exp(ikx), \xi_2 \exp(2ikx), \dots).$$

Тогда

$$\bar{N}(\omega) = (\dots, \xi_2 \exp(2ikx), \xi_1 \exp(ikx), \xi_{-1} \exp(-ikx), \xi_{-2} \exp(-2ikx), \dots).$$

Умножение векторов считаем ниже покоординатным. Поэтому

$$N(\omega)\bar{N}(\omega) = (\dots, |\xi_2|^2, |\xi_1|^2, |\xi_1|^2, |\xi_2|^2, \dots).$$

Для скалярного произведения  $(N(\omega)\bar{N}(\omega), N(\omega))$  в итоге приходим к формуле

$$(N(\omega)\bar{N}(\omega), N(\omega)) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k |\xi_k|^2 \exp(ikx).$$



После этого систему (3.46) можно представить в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = -\alpha \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 3 \left[ 2M(\omega^2) - 3 \left( N(\omega) \bar{N}(\omega), N \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \right) \right]. \quad (3.51)$$

Это уравнение следует дополнить периодическими краевыми условиями

$$\omega(\tau, x + 2\pi) \equiv \omega(\tau, x). \quad (3.52)$$

В том случае, если найдено какое-то решение краевой задачи (3.51), (3.52), то найдены для него и, соответственно, коэффициенты Фурье  $\xi_k(\tau)$  согласно (3.49). Затем с помощью соотношения (3.45) определяем функцию  $v_0(t, \tau, x)$ . Так построенную функцию  $v_0(t, \tau, x)$  будем называть соответствующей решению  $\omega(\tau, x)$ . Тем самым находим главную часть аналитического представления для  $v(t, x, \varepsilon)$  согласно (3.44).

Таким образом, приходим к обоснованию следующего утверждения.

**Теорема 3.4.** Пусть краевая задача (3.51), (3.52) имеет решение  $\omega(\tau, x)$ , которое ограничено при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  вместе с  $\frac{\partial^2 \omega(\tau, x)}{\partial x^2}$ . Тогда краевая задача (3.29)–(3.31) при всех достаточно малых  $\varepsilon$  имеет асимптотическое по невязке с точностью до  $O(\varepsilon)$  решение  $u(t, x, \varepsilon) = v_0(t, \tau, x) + O(\varepsilon)$ , где  $v_0(t, \tau, x)$  является соответствующей для  $\omega(\tau, x)$ .

### 3.4 Выводы

1. Исследовано поведение решений уравнения Кана — Хилларда в окрестностях всего континуального множества его состояний равновесия. Выделены критические случаи, приведён бифуркационный анализ. Построены асимптотики неоднородных состояний равновесия, и изучена их устойчивость.

2. Для обобщенного уравнения Кана — Хилларда показано, что в некоторой области фазового пространства его локальная динамика описывается с помощью бифуркации Андронова — Хопфа. Приведена соответствующая нормальная форма, которая определяет поведение решений в этой области фазового пространства.
3. Рассмотрена задача с большим коэффициентом адвекции, который приводит к бесконечномерному критическому случаю в задаче об устойчивости стационара. Показано, что локальная динамика исходной краевой задачи определяется нелокальным поведением решений специально построенной более простой нелинейной краевой задачи.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе представлены исследования соискателя, направленные на выявление характерных особенностей структур параболической задач, основанных на методе центральных многообразий в сочетании с асимптотическим методом Галеркина. Были выделены три характерные задачи. А именно, параболическое уравнение Гинзбурга-Ландау с условиями Неймана на отрезке, параболическое уравнение Кана-Хилларда с условиями типа Неймана на отрезке, обобщенное уравнение Кана-Хилларда с периодическими краевыми условиями.

Основные итоги представленной работы можно сформулировать в виде следующих положений

1. На основе метода центральных многообразий доказаны теоремы о существовании пространственно неоднородных стационарных решений параболического уравнения Гинзбурга-Ландау с краевыми условиями Неймана и параболического уравнения Кана-Хилларда с краевыми условиями типа Неймана на отрезке.
2. Получены эффекты при изменении (уменьшении) бифуркационного параметра и его прохождении через найденные критические значения. Рождаются пространственно неоднородные стационарные решения. На основе метода Галеркина, согласованного с методом центральных многообразий, определены форма и характер устойчивости рождающихся решений.
3. Выявлены и описаны изменения формы и характера устойчивости неоднородных стационарных решений при изменении бифуркацион-

ного параметра от критического до значений, попадающих в область надкритичности. Исследована динамика изменения спектров соответствующих пространственно неоднородных стационарных решений.

4. Показаны условия и сценарии возникновения метаустойчивых структур в результате седло-узловых бифуркаций в параболических задачах Гинзбурга-Ландау и Кана-Хилларда на отрезке. Исследовано поведение метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений) с течением времени и их выход на устойчивые режимы.
5. Исследовано поведение решений уравнения, которое является модификацией (расширением) уравнения Кана — Хилларда в окрестностях всего континуального множества его состояний равновесия. Выделены критические случаи, приведен бифуркационный анализ. Построены асимптотики неоднородных состояний равновесия, и изучена их устойчивость.
6. Для обобщенного уравнения Кана — Хилларда показано, что в некоторой области фазового пространства его локальная динамика описывается с помощью бифуркации Андронова — Хопфа. Приведена соответствующая нормальная форма, которая определяет поведение решений в этой области фазового пространства.
7. Рассмотрена задача с большим коэффициентом адвекции, который приводит к бесконечномерному критическому случаю в задаче об устойчивости стационара. Показано, что локальная динамика исходной краевой задачи определяется нелокальным поведением решений специально построенной более простой нелинейной краевой задачи.

8. Теоретические результаты подтверждаются численными расчетами для различных модельных уравнений с помощью метода Галеркина и возможностями пакета Wolfram Mathematica. Разработанные на базе Wolfram Mathematica программы могут быть использованы для дальнейшего изучения эффектов нелинейной динамики.

## Список иллюстраций

1.1	Функция $\varphi_1(x, \mu)$ при $\mu = 0.98, \mu = 0.8, \mu = 0.5, \mu = 0.1, \mu = 0.01$ . . . . .	38
1.2	Решение (1.1) - (1.3), $\varphi(x) = \varphi_1(x, \mu), \mu = 0.01$ . . . . .	39
1.3	Графики решений $\varphi_1(x, \mu)$ при $\mu = 0.98; 0.8; 0.5; 0.1; 0.05, 0.01, N = 23$ . . . . .	43
1.4	Решение (1.1) - (1.3), $\varphi(x) = \varphi_1(x, \mu), \mu = 0.01$ . . . . .	44
1.5	Графики решений $\varphi_2(x, \mu)$ при $\mu = 0.245; 0.2; 0.15; 0.1; 0.05; 0.01, N = 21$ . . . . .	46
1.6	Решение (1.1) - (1.3), $\varphi(x) = \varphi_2(x, \mu), \mu = 0.01$ . . . . .	47
1.7	Приближённые решения (1.4), $\mu = 0.01$ . . . . .	52
1.8	Решение (1.1), $\mu = 0.03$ . . . . .	53
1.9	Приближённые решения (1.4), $\mu = 0.01$ . . . . .	59
1.10	Приближённые решения (1.4), $\mu = 0.01$ . . . . .	59
1.11	Приближённые решения (1.4), $\mu = 0.01$ . . . . .	60
1.12	Приближённые решения (1.4), $\mu = 0.01$ . . . . .	61
1.13	Решение (1.1) для различных $t, \mu = 0.01$ . . . . .	62
1.14	Функция $\varphi_1(x, \mu)$ при $\Lambda = 0.001, \mu = 0.98, \mu = 0.8$ . . . . .	70
1.15	Графики решений $\varphi_1(x, \mu)$ при $\mu = 0.98, 0.8, 0.5, 0.15, 0.1, 0.05, 0.03, 0.01, 0.005, \Lambda = 0.001, N = 33$ . . . . .	72
1.16	Решение задачи (1.27)–(1.29), $\varphi(x) = \varphi_1(x, \mu), \mu = 0.01, \Lambda = 0.001$ . . . . .	73
1.17	Графики решений $\varphi_2(x, \mu)$ при $\Lambda = 0.001, \mu = 0.245, 0.1, 0.03, 0.01, 0.001; N = 33$ . . . . .	74

2.1	Функция $\varphi_1(x, \mu)$ при $\varepsilon^2 = 0.96, 0.9, 0.8, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, N = 29, a = 0.1$ . . . . .	84
2.2	Решения $\varphi_2(x, \varepsilon, a)$ при $\varepsilon^2 = 0.24, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.03, 0.02, 0.01, N = 29, a = 0.1$ . . . . .	87
2.3	Решения $\varphi_3(x, \varepsilon, a), N = 30, a = 0.1$ . . . . .	89
2.4	Изменение первых пяти координат $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ первой устойчивой ветви при уменьшении бифуркационного значения параметра $\varepsilon^2$ от 0.0149 . . . . .	95
2.5	Приближённые решения (2.2), $\varepsilon^2 = 0.01, a = 0.1$ . . . . .	95
2.6	Решение (2.1), $\varepsilon^2 = 0.01, a = 0.1$ . . . . .	96
2.7	Профили решения (2.1), $\varepsilon^2 = 0.01, a = 0.1$ . . . . .	97
2.8	Изменение первых пяти координат $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ первой устойчивой ветви при уменьшении бифуркационного значения параметра $\varepsilon^2$ от 0.00394 . . . . .	99
2.9	Приближённые решения (1.2), $\varepsilon^2 = 0.001, a = 0.1$ . . . . .	99
2.10	Приближённые решения (1.2), $\varepsilon^2 = 0.003, a = 0$ . . . . .	100
2.11	Решение (2.1), $\varepsilon^2 = 0.01, a = 0$ . . . . .	101
2.12	Профили решения (2.1), $\varepsilon^2 = 0.01, a = 0$ . . . . .	102

## Список литературы

- [1] *Андронов А.А.* Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. — М.: Наука, 1981. — 568 с.
- [2] *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
- [3] Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
- [4] *Бабин А.В.* Аттракторы эволюционных уравнений / А.В. Бабин, М.И. Вишик. — М.: Наука, 1989. — 294 с.
- [5] *Белан Е.П.* Метаустойчивые структуры скалярного уравнения Гинзбурга-Ландау / Е.П. Белан, С.П. Плышевская // Динамические системы. — 2014. — Т. 4(32) — С. 27–42.
- [6] *Белан Е.П.* Метод инвариантных многообразий в теории параболических и функционально-дифференциальных уравнений и его применения: диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук / Е.П. Белан // Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского. — 2007. — 293 с.
- [7] *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. — М.: ГОНТИ, 1941. — 406 с.
- [8] *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статических методах математической физики. — Львов: Изд-во АН УССР, 1945. — 150 с.



- [9] *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А.Д. Брюно. — М.: Наука, 1979. — 252 с. URL: <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0542758> (дата обр. 14.03.2017).
- [10] *Бутузов В.Ф.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) / В.Ф. Бутузов, А.Б. Васильева, Н.Н. Нефедов // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 7. — С. 4–32. ISSN 0005-2310. URL: <http://mi.mathnet.ru/at2615> (дата обр. 24.04.2017).
- [11] *Бутузов В.Ф.* О системе типа реакция-диффузия-перенос в случае малой диффузии и быстрых реакций / В.Ф. Бутузов, Н.Т. Левашова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43. — № 7. — С. 1005–1017. ISSN 0044-4669. URL: <http://mi.mathnet.ru/zvmmf991> (дата обр. 24.04.2017).
- [12] *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений/ А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
- [13] *Васильева А.Б.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / А.Б. Васильева, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесов, Н.Х. Розов // Мат.сборник. — 1989. — Т. 130 (172). — № 4 (8). — С. 488–499.
- [14] *Гапонов-Грехов А.В.* Рождение и динамика двумерных структур в неравновесных диссипативных системах/ А.В. Гапонов-Грехов, А.С. Ломов, Г.В. Осипов, М.И. Рабинович // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. ИПФ АН СССР. — 1989. — С. 61–73.

- [15] *Глызин С.Д.* К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау / С. Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Теоретическая и математическая физика. — 2009. — Т. 158, №2. — С. 291–310.
- [16] *Глызин С.Д.* Разностные аппроксимации уравнения «реакция-диффузия» на отрезке // Моделирование и анализ информационных систем. — 2009. — Т. 16. — №3. — С. 96–116.
- [17] *Глызин С.Д.* Конечномерные модели диффузионного хаоса / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50.— № 5. — С. 860–875.
- [18] *Глызин С.Д.* Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 8. — С. 1400–1418.
- [19] *Глызин С.Д.* Размерностные характеристики диффузионного хаоса / С.Д. Глызин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2013. — Т. 20, № 1. — С. 30–51.
- [20] *Глызин С.Д.* Автоволновые процессы в континуальных цепочках однонаправленно связанных генераторов / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Избранные вопросы математической физики и анализа. Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимировича. — Тр. МИАН. — Т. 285. — МАИК. М., 2014. — С. 89–106.
- [21] *Глызин С.Д.* Явление буферности в континуальных цепочках одно-

- направленно связанных генераторов / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Теоретическая и математическая физика. — 2014. — Т. 181, №2. — С. 254–275.
- [22] *Инфельд Э.* Нелинейные волны, солитоны и хаос / Э. Инфельд, Дж. Роуландс. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 480 с.
- [23] Катастрофы и общество. — М.: Контакт-Культура, 2000. — 332 с.
- [24] *Кащенко С.А.* Бифуркации в уравнении Курамото — Сивашинского / С.А. Кащенко // Теоретическая и математическая физика. — 2017. — Т. 192. — № 1. — С. 23-40. ISSN 0564-6162. DOI: 10.4213/tmf9195. URL: <http://mi.mathnet.ru/tmf9195> (дата обр. 26.06.2017).
- [25] *Кащенко С.А.* Бифуркации в обобщенном уравнении Кортевега — де Фриза / С.А. Кащенко, М.М. Преображенская // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2018. — № 2. — С. 54-68. ISSN 0021-3446. URL: <http://mi.mathnet.ru/ivm9330> (дата обр. 20.12.2017).
- [26] *Кащенко С.А.* Нормальная форма для уравнения Кортевега — де Фриза — Бюргерса / С.А. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 468. — № 4. — С. 383-386. ISSN 0869-5652. DOI: 10.7868/S0869565216160052. URL: <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=3559770> (дата обр. 09.06.2017).
- [27] *Колесов А.Ю.* Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией / А.Ю. Колесов // Укр. мат. журнал. — 1987. — Т. 39.— №. 1. — С. 27–34.
- [28] *Крылов Н.М.* Приложение методов нелинейных механики к теории

- стационарных колебаний / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов — Киев: Изд-во Всеукр. АН, 1934.
- [29] *Коротких А.С.* Бифуркации стационарных решений уравнения "реакция-диффузия" и переход концентраций в стабильное состояние / А.С. Коротких // Вестник ВГУ. Серия: Физика, математика. — 2017. — № 1. — С. 115-127.
- [30] *Краснюк И.Б.* Колебания концентрации в ограниченных бинарных смесях с учётом поверхностных эффектов / И.Б. Краснюк, Л.И. Стефанович, В.М. Юрченко // Журнал технической физики. — 2007. — Т. 77 — № 11. — С. 55–62.
- [31] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.
- [32] *Марсден Д.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Д. Марсден, М. Мак-Кракен. — пер. с англ. Л. М. Лермана. — М.: Мир, 1980. — 368 с. URL: <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0611154> (дата обр. 15.03.2017).
- [33] *Мищенко Е.Ф.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
- [34] *Плисс В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
- [35] *Плотников П.И.* Предельный переход по малому параметру в уравнениях Кана-Хилларда / П.И. Плотников // Сиб. матем. журн. — 1997. — Т. 38. — № 3. — Стр. 638–656.

- [36] *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в канонической параболической задаче / С.П. Плышевская // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 4(29). — С. 66–76.
- [37] *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке / С.П. Плышевская // Динамические системы. — 2016. — Т. 6(34). — № 4. — С. 323–336.
- [38] *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // Динамические системы. — 2018. — Т. 8(36). — № 3. — С. 281–295.
- [39] *Плышевская С.П.* Асимптотическое исследование локальной динамики семейств уравнений Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // Известия вузов. ПНД. — 2019. — Т. 27. — № 1. — С. 63–76.
- [40] *Плышевская С.П.* Бифуркационный анализ уравнения Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // Вестник национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". — 2019. — Т. 8. — № 1. — С. 56–62.
- [41] *Плышевская С.П.* Устойчивые структуры второй краевой задачи Чэфи - Инфанте/ С.П. Плышевская // Международная конференция «Моделирование, управление, устойчивость» (MSC-2012), 10–14 сентября 2012, Севастополь, Украина. — С. 61–62.
- [42] *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в канонической параболической задаче/ С.П. Плышевская // «Боголюбовские чтения, DIF-2013», 23–30 июня 2013, Севастополь, Украина. — С. 160–161.

- [43] *Плышевская С.П.* Галёркинские аппроксимации метаустойчивых структур в канонической параболической задаче / С.П. Плышевская // Крымская международная математическая конференция «КММК-2013», 22 сентября–4 октября 2013, Судак, Украина. — С. 30–31.
- [44] *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры уравнения Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // Метод функций Ляпунова «MFL-2014», 15–20 сентября 2014, Алушта, Россия. — С. 31–32.
- [45] *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры уравнения Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // XXV Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2014», 21–30 сентября 2014, Судак, Россия. — С. 54–55.
- [46] *Плышевская С.П.* Структуры уравнения Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // XXVI Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2015», 17-29 сентября 2015, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 58–59.
- [47] *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры скалярного параболического уравнения / С.П. Плышевская // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI, ISBN: 978-5-9908135-0-2, 24–29 апреля 2016, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 118–119.
- [48] *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в сингулярно возмущённой параболической задаче / С.П. Плышевская // Метод функций Ляпунова «MFL-2016», 15–18 сентября 2016, Алушта, Россия. — С. 25.
- [49] *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в параболиче-

- ской задаче / С.П. Плышевская // / XXVII Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2016», 16–29 сентября 2016, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 57.
- [50] *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке / С.П. Плышевская // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII, ISBN: 978-5-7890-1271-0, 23–28 апреля 2017, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 106–107.
- [51] *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке / С.П. Плышевская // Всероссийская научно-практическая конференция "Математика. Информатика. Компьютерные. Образование"(МИКМО-2017), 10–14 апреля 2017, Симферополь, Россия. — С. 87–88.
- [52] *Плышевская С.П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке / С.П. Плышевская // XXVIII Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2017», 17–29 сентября 2017, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 107–109.
- [53] *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры уравнения Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VIII, 22–27 апреля 2018, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 95.
- [54] *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры уравнения Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов

- Всероссийской научно-практической конференции МИКМО-2018 и Таврической научной школы-конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В.А.Лукьяненко. — Симферополь: ИП Корниенко А.А., 2018. — Вып. 2. — С. 52–56.
- [55] *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры с двумя точками перехода уравнения Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // XXIX Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2018», 17–29 сентября 2018, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 26–27.
- [56] *Плышевская С.П.* Сценарии возникновения метаустойчивых структур уравнения Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // Динамические системы в науке и технологиях «DSST-2018», 17–21 сентября 2018, Алушта, Россия. — С. 37–38.
- [57] *Плышевская С.П.* Один из сценариев возникновения метаустойчивых структур уравнения Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // IV Научно-практическая конференция профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых "Дни науки Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского" в рамках IV Фестиваля Науки КФУ, 12–17 октября 2018, Симферополь, Россия. — С. 275–276.
- [58] *Плышевская С.П.* Метаустойчивые структуры с тремя точками перехода уравнения Кана-Хилларда / С.П. Плышевская // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – IX, 22–25 апреля 2019, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 95–96.



- [59] *Рюэль Д.* О природе турбулентности / Д. Рюэль, Ф. Такенс // Странные аттракторы: сб. ст. / Я.Г. Синай, Л.П. Шильников. — М.: Мир, 1981. — С. 117–151.
- [60] *Скрипов В.П.* Спинодальный распад (Фазовый переход с участием неустойчивых состояний) / В.П. Скрипов, А.В. Скрипов // УФН. — 1979. — Т. 123, вып. 2 — С. 193–231.
- [61] Структуры и хаос в нелинейных средах / Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. — М.: Физматлит, 2007. — 488 с.
- [62] *Стрыгин В.В.* Разделение движений методом интегральных многообразий / В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. — М.: Наука, 1988. — 256 с.
- [63] *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
- [64] Численное моделирование спинодального распада на основе вариационного подхода / А.В. Обухов, А.А. Обухов, В.Г. Лебедев, Т.А. Новикова // Вестник Удмурдского университета. Сер.: Физика, химия. — 2011. — Т. 31, вып. 1 — С. 31–40.
- [65] *Шошитайшвили А.Н.* Бифуркации топологического типа векторного поля вблизи особой точки / А.Н. Шошитайшвили // Труды семинара им. И.Г. Петровского. — 1975. — 1. — С. 279–309.
- [66] *Чанг К.* Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения / К. Чанг, Ф. Хауэс под ред. Н.Х. Розова. — М.: Мир, 1988. — 248 с.

- [67] *Aleshin S.V.* Spatially inhomogeneous structures in the solution of Fisher-Kolmogorov equation with delay / S.V. Aleshin, S.D. Glyzin and S.A. Kaschenko // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — V. 681. — 0112023.
- [68] *Aleshin S.V.* Dynamic Properties of the Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov Equation with the Deviation of the Spatial Variable / S.V. Aleshin, S.D. Glyzin and S.A. Kaschenko // Automatic Control and Computer Sciences. — 2016. — Vol. 50, No. 7. — P. 603–616.
- [69] *Aleshin S.V.* Waves Interaction in the Fisher-Kolmogorov Equation with Arguments Deviation / S.V. Aleshin, S.D. Glyzin and S.A. Kaschenko // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 38, No. 1. — P. 24–29.
- [70] *Alikakos N.* Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension / N. Alikakos, P.W. Bates, G. Fusco // Journal of Differential Equations. — 1991. — Vol. 90. — P. 81–135.
- [71] *Kashchenko S.A.* Local dynamics of Cahn-Hilliard equation / S.A. Kashchenko, S.P. Plyshevskaya // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2019. — Vol. 22, № 1. — P. 93–97.
- [72] *Cahn J.W.* Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy / J.W. Cahn, J.E. Hilliard // J. Chem. Phys. — 1958. — V. 28. — P. 258–267.
- [73] *Cahn J.W.* On spinodal decomposition. / J.W. Cahn // Acta Metall. — 1961 — V. 9 — P. 795–801.

- [74] *Cahn J.W.* The Cahn-Hilliard equation with a concentration dependent mobility: motion by minus the Laplacian of the mean curvature / J.W. Cahn, C.M. Elliott, A. Novick-Cohen // *Eur. J. Appl. Math.* — 1996. — V. 7. — P. 287–301.
- [75] *Carr J.* Metastable Patterns in Solution of  $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$  / J. Carr, R.L. Pego // *Communications on Pure and Applied Mathematics.* — 1989. — Vol. XLII. — P. 523–576.
- [76] *Chafee N.* A bifurcation problem for a nonlinear equation of parabolic type / N. Chafee, E. Infante // *Appl. Anal.* — 1974. — № 4. — P. 17–37.
- [77] *Domb C.* Phase Transitions and Critical Phenomena / Ed. by C. Domb and J.L. Lebowitz. — London: Academic, 1988. — 10 p.
- [78] *Fusco G.* Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singular Perturbations / G. Fusco, J.K. Hale // *Journal of Dynamics and Differential Equations.* — 1989. — Vol. 1. — № 1. — P. 75–94.
- [79] *Glyzin S.D.* Dimensional Characteristics of Diffusion Chaos / S.D. Glyzin // *Automatic Control and Computer Sciences.* — 2013. — Vol. 47, No. 7. — P. 452–469.
- [80] *Glyzin S.D.* and Diffusion Chaos in the Reaction–Diffusion Boundary Problem in the Dumbbell Domain / S.D Glyzin, P.L. Shokin // *Automatic Control and Computer Sciences.* — 2016. — Vol. 50, No. 7. — P. 625–535.
- [81] *Glyzin S.D.* Spatially inhomogeneous modes of logistic differential equation with delay and small diffusion in a flat area / S. Glyzin, V. Goryunov, A. Kolesov // *Lobachevskii J Math.* — 2017. — V. 38 — P.898–905.

- [82] *Henry D.* Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. IV, 1981. —348 p.
- [83] *Lin F.* / F. Lin, H. Metiu // *Phys. Rev. B.* — 1993. — Vol. 48. — № 9. — 5808 p.
- [84] *Marsden J.* The Hopf Bifurcation and Its Applications./ J. Marsden, M. McCracken // *Applied Mathematical Sciences.* — 1976. — No. 19.
- [85] *Plyshevskaya S.P.* Dynamics of structures in the canonical parabolic problem / S.P. Plyshevskaya // The 4th international conference «Nonlinear dynamics», 19–22 June, 2013, Sevastopol, Ukraine. — P. 204–209.
- [86] *Puri S.* Surface-directed spinodal decomposition in a thin-film geometry: a computer simulation / S. Puri, K. Binder // *Journal of Statistical Physics.* — 1994. — Vol. 77. — № 1,2. — P. 145–172.
- [87] *Roland C.* / C. Roland , R.C. Desai // *Phys. Rev. B.* — 1990. — Vol 42.— № 10. — 6658 p.
- [88] *Ruelle D.* Bifurcations in the presence of a symmetry group/ D. Ruelle // *Arch.Rational Mech. Anal.* — 1973. — Vol. 51. — № 2. — P. 136–152.
- [89] *Ruelle D.* On the nature of turbulence / D. Ruelle, F. Takens // *Commun. Math. Phys.* — 1971. — Vol. 20. — P. 167–192.
- [90] *Taylor J. E.* Linking anisotropic sharp and diffuse surface motion laws via gradient flows / J.E. Taylor, J.W. Cahn // *Journal of Statistical Physics.* — 1994. — Vol. 77. — № 1,2. — P. 183–197.
- [91] *Weinberger H.* On metastable patterns in parabolic systems // *Rend. Acad. Naz. Lincei.* — 1986. — 77. — P. 523–576.

## Приложение А. Некоторые определения

1. Под *критическим (бифуркационным) параметром* в работе понимается параметр, изменение которого приводит к бифуркации, а значение, при котором происходит бифуркация, называется *критическим значением*.

2. *Бифуркацией Андронова–Хопфа* будем называть локальную бифуркацию коразмерности один, в ходе которой от состояния равновесия динамической системы ответвляется периодическое решение (предельный цикл) при переходе пары комплексно-сопряженных собственных значений из спектра устойчивости этого состояния через мнимую ось.

3. *Медленно меняющиеся структуры* – это решения, которые рождаются неустойчивыми, длительный промежуток времени сохраняют свою форму, а потом за очень короткий промежуток времени переходят на устойчивый режим (см. работы [75, 78]).

Следующие определения взяты из книги Д. Хенри [63].

4. *Динамическая система* в полном метрическом пространстве  $C$  – это семейство отображений  $\{S(t) : C \rightarrow C, t \geq 0\}$ , такое что

- (i) для любого  $t \geq 0$  отображение  $S(t)$  непрерывно;
- (ii) для любого  $x \in C$  отображение  $t \mapsto S(t)x$  непрерывно;
- (iii)  $S(0)$  – тождественное отображение;
- (iv)  $S(t)(S(\tau)x) = S(t + \tau)x$  для всех  $x \in C$  и  $t, \tau \geq 0$ .

5. Пусть  $\{S(t); t \geq 0\}$  – динамическая система в  $C$ , тогда для любого  $x \in C$   $\gamma(x) = \{S(t)x, t \geq 0\}$  – *орбита точки  $x$* . Будем называть точку  $x$  *стационарной*, если  $\gamma(x) = \{x\}$ ; орбиту  $\gamma(x)$  назовем *периодической*, если существует такое  $p > 0$ , что  $\gamma(x) = \{S(t)x, 0 \leq t \leq p\} \neq \{x\}$ .

6. Орбита  $\gamma(x)$  (точка  $x$ ) называется *устойчивой*, если равномерно по

$t \geq 0$  выполняется соотношение  $S(t)y \rightarrow S(t)x$  при  $y \rightarrow x$ ,  $y \in C$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех  $t \geq 0$

$$\text{dist}(x, y) < \delta(\varepsilon), \quad y \in C \Rightarrow \text{dist}(S(t)x, S(t)y) < \varepsilon.$$

Орбита  $\gamma(x)$  *неустойчива*, если она не является устойчивой.

7. Орбита  $\gamma(x)$  называется *равномерно асимптотически устойчивой*, если она устойчива и, кроме того, существует окрестность  $V = \{y \in C : \text{dist}(x, y) < r\}$ , такая что

$$\text{dist}(S(t)y, S(t)x) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \text{ равномерно по } y \in V.$$

8. Равномерно асимптотически устойчивая орбита  $\gamma(x)$  называется *экспоненциально равномерно асимптотически устойчивой*, если найдутся такие  $c_0 > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$ , что начиная с некоторого момента времени  $T_0$  выполнено неравенство

$$\text{dist}(S(t)y, S(t)x) \leq c_0 \exp(-\lambda_0 t) \quad t \geq T_0.$$

9. Периодическое решение  $x_0(t) = x_0(t + p)$  называется *орбитально устойчивым*, если множество  $\Gamma = \{x_0(t), \quad 0 \leq t \leq p\}$  устойчиво, т.е. для любой окрестности  $U$  множества  $\Gamma$  существует такая окрестность  $V$  этого множества, что если  $x_1 \in V$ , то решение  $x(t; x_1) \in U$  при всех  $t \geq 0$ .

10. Множество  $S \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$  называется *локальным инвариантным многообразием* для дифференциального уравнения  $dx/dt + Ax = f(t, x)$ , если для любой пары  $(t_0, x_0) \in S$  существует решение  $x(\cdot)$  этого уравнения, определенное на некотором открытом интервале  $(t_1, t_2)$ , содержащем  $t_0$ , и такое, что  $x(t_0) = x_0$  и  $(t, x(t)) \in S$  при  $t_1 < t < t_2$ .

Множество  $S$  называется *инвариантным многообразием*, если всегда можно взять  $(t_1, t_2) = (-\infty, \infty)$ .

Далее приводится краткая сводка необходимых понятий для постановки задачи Коши в банаховых пространствах (см. [4, 63]).

Рассмотрим абстрактную задачу Коши для нелинейного операторного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве  $H$

$$u_t + Au = N(u), \quad u(0) = u_0.$$

Предполагается, что линейный оператор  $A$  с замкнутой в  $H$  областью определения  $D(A)$  является самосопряженным в смысле теории неограниченных операторов в  $H$ ,  $A = A^*$ , и положительно определенным, т.е. существует такое  $c > 0$ ,

$$\langle Au, u \rangle_H \geq c \|u\|_H^2, \quad \forall u \in D(A).$$

Через  $H_L^2$  обозначается линейное пространство  $D(A)$ , снабженное скалярным произведением и соответствующей евклидовой нормой

$$\langle u, v \rangle_{H_L^2} = \langle Au, Av \rangle_H, \quad \|u\|_{H_A^2} = \langle u, u \rangle_{H_A^2}^{1/2}.$$

Относительно  $N(u)$  предполагаем, что это гладкая нелинейность порядка выше, чем первого. Тогда  $H_A^2$  — гильбертово пространство,  $A \in L(H_A^2 \rightarrow H)$ , причем  $\|A\|_{L(H_A^2 \rightarrow H)} = 1$ . Тогда с помощью спектрального разложения определены степени  $A^\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ , и через  $H_A^1$  будем обозначать область определения оператора  $A^{1/2}$ ,  $H_A^1 = D(A^{1/2})$ , совпадающую с энергетическим пространством оператора  $A$ ,  $H_A^{-1} = (H_A^1)^*$  — сопряженное пространство. Из свойств спектрального разложения и теоремы Рисса в  $H$  вытекают плотность и непрерывность вложений

$$H_A^2 \hookrightarrow H_A^1 \hookrightarrow H \simeq H^* \hookrightarrow H_A^{-1}.$$

Оператор  $A$ , точнее, его энергетическое расширение на  $H_A^1$ , можно рассматривать как линейный оператор из  $H_A^1$  в  $H_A^{-1}$ , осуществляющий изомор-

физм этих пространств,

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, v \rangle_{H_A^1}, \quad \langle Au, u \rangle = \|u\|_{H_A^1}^2, \quad \|u\|_H \leq \mu^{-1/2} \|u\| + H_A^1, \quad \forall u, v \in H_A^1,$$

в то время как сам оператор  $A$  осуществляет изоморфизм  $H_A^2$  на  $H$ . Кроме того, предполагается, что вложение  $H_A^1 \hookrightarrow H$  компактно.

Будем использовать банаховы пространства функций  $W^s(a, b)$  при  $s = 1$  или  $s = 2$ . В силу теоремы о следах справедливы ограниченные вложения

$$W^1(a, b) \hookrightarrow C([a, b]; H), \quad W^2(a, b) \hookrightarrow C([a, b]; H_A^1),$$

причем

$$\max_{t \in [a, b]} \|u(t)\|_H \leq C_1 \|u\|_{W^1(a, b)}, \quad \max_{t \in [a, b]} \|u(t)\|_{H_A^1} \leq C_2 \|u\|_{W^2(a, b)}.$$

### **Теорема о центральном многообразии.**

Пусть  $\Psi$  — отображение, определенное в окрестности нуля в банаховом пространстве  $Z$ . Будем предполагать, что  $\Psi$  принадлежит классу  $C^{k+1}$ ,  $k \geq 1$  и  $\Psi(0) = 0$ . Предположим также, что  $D\Psi(0)$  имеет спектральный радиус 1 и что спектр  $D\Psi(0)$  расщепляется на две части: часть, лежащую на единичной окружности, и остаток, который находится на ненулевом расстоянии от единичной окружности. Обозначим через  $Y$  обобщенное собственное подпространство оператора  $D\Psi(0)$ , порожденное частью спектра, лежащей на единичной окружности; будем предполагать, что  $Y$  имеет размерность  $d < \infty$ .

Тогда существует окрестность нуля  $V \subset Z$  и  $C^k$ -подмногообразие  $M \subset V$  размерности  $d$ , проходящее через 0 и касающееся  $Y$  в точке 0, для которого выполнены следующие условия:

- 1) (локальная инвариантность): если  $x \in M$  и  $\Psi(x) \in V$ , то  $\Psi(x) \in M$ ;
- 2) (локальная устойчивость): если  $\Psi^n(x) \in V$  для всех  $n = 0, 1, \dots$ , то при  $n \rightarrow \infty$  расстояние между  $\Psi^n(x) \in V$  и  $M$  стремится к нулю.