Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Белгородский государственный национальный
исследовательский университет»

На правах рукописи

Чан Куанг Выонг

Краевые задачи для полианалитических функций

01.01.02 дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Солдатов А.П.

Белгород 2016

Оглавление

Введение

В современном комплексном анализе важную роль играют краевые задачи теории аналитических функций и различные их обобщения – задачи нахождения аналитической в некоторой области функции по заданному соотношению между граничными значениями ее действительной и мнимой частей. Более точно, требуется найти аналитическую в области D функцию ϕ по краевому условию

$$\operatorname{Re} G\phi^{+} = f,$$

где ϕ^{+} означает граничное значение ϕ и заданная функция G всюду отлична от нуля.

Эта задача была поставлена Б. Риманом [1] в 1857 г., однако он не указал каких- либо способов ее решения. Впервые ее исследование было дано Д. Гильбертом [36], который свел эту задачу к решению двух задач Дирихле для гармонических функций. По этой причине данную задачу называют задачей Римана – Гильберта (иногда просто задачей Гильберта).

Задача Римана – Гильберта тесно связана с так называемой задачей линейного сопряжения, постановка которой также восходит к Б. Риману. Пусть гладкий контур Γ ограничивает область D и D' есть дополнение к D на комплексной плоскости. Пусть функция ϕ аналитична на $D \cup D'$ и непрерывно продолжима на Γ со стороны D и D', соответствующие граничные значения обозначаем ϕ^{+} и ϕ^{-}. В этом случае ϕ также называют кусочно аналитической функцией с линией скачков Γ. Задача линейного сопряжения состоит в определении такой функции с конечным порядком на бесконечности по граничному условию

$$\phi^{+}(t) = G(t)\phi^{-}(t) + g(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $G(t)$ и $g(t)$ - заданные функции.

С помощью аппарата интегралов типа Коши эта задача допускает эффективное решение, что используется для исследования сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши на контуре Г. Задачи Римана – Гильберта и линейного сопряжения рассматриваются и в векторном случае, когда $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ является вектор- функцией и, соответственно, G представляет собой $n \times n-$ матрицу- функцию, удовлетворяющую условию $\det G(t) \neq 0, \ t \in \Gamma$. Теория этих задач, как и сингулярных интегральных уравнений к середине прошлого столетия приобрела практически законченный вид, итог подведен в известных монографиях Ф.Д. Гахова [3] и Н.И. Мусхелишвили [4], где приведена также подробная библиография.

Одним из естественных обобщений аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$ являются полианалитические (или $n-$ аналитические) функции $u(z)$, которые в области D комплексной плоскости удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n} = 0. \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

с некоторым натуральным $n \geq 2$. Структурные и качественные свойства полианалитических функций хорошо изучены, см., например, монографию Балк М.Б. [5], где имеется также подробная библиография. В частности, $n-$ аналитическая в области D функция $u(z)$ единственным образом представима в виде

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \phi_k(z) \tag{2}$$

где функции $\phi_k(z), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, аналитичны в области D. Они называются аналитическими компонентами полианалитической функции $u(z)$ - соответственно нулевой,первой,..., $(n-1)$-й.

Отметим, уравнение (1) при $n = 2$ называется также уравнением Бицадзе. При разделении реальной и мнимой частей этого уравнения получается эллиптическая система второго порядка, рассмотренная в известной работе А. В. Бицадзе [6]. Эта система знаменита тем, что задача Дирихле для нее в единичном круге нефредгольмова – однородная задача имеет бесконечное число линейно независимых решений.

Краевым задачам для полианалитических функций и их обобщений посвящены многочисленные исследования. Интерес к этим задачам объясняется связями с другими математическими областями (например, теорией дифференциальных уравнений с частными производными, теорией приближения функций), а также многообразными приложениями в математической физике и механике (см., например, Т. Рева [7], А. Юденков [8, 9]). Систематическое исследование краевых задач для полианалитических функций началось с работ В.С. Рогожина и М.П. Ганина, в которых рассматривалась задача нахождения 3-аналитической функции по трем краевым условиям. В дальнейшем эта теория развивалась многими авторами, большой вклад в нее внесли Ф.Д Гахов[3], И.А. Бикчантаев[12], В.А. Габринович[13], В.И. Жегалов[14], С.В. Левинский [15], В.И. Показеев [16], И.А. Соколов[17], К.М. Расулов [19, 20] и др.

Пусть гладкий контур Γ делит расширенную комплексную плоскость на конечную область D и область D', содержащую точку $z = \infty$. Наиболее полно исследованы следующие три основных задач типа Римана - Гильберта для полианалитических функций, особенно важные для приложений:

$$\mathrm{Re}\, G_k(t)\triangle^k u(t) = f_k(t), \quad k = 0,1,...,n-1. \tag{3a}$$

$$\mathrm{Re}\left(G_k(t)\frac{\partial^{n-1}u(t)}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}}\right) = f_k(t), \quad k = 1,2,...,n. \tag{3b}$$

$$\mathrm{Re}\left(G_k(t)\frac{\partial^{k}u(t)}{\partial n^{k}}\right) = f_k(t), \quad k = 0,1,...,n-1. \tag{3c}$$

где $\triangle$ означает оператор Лапласа, $\partial/\partial n$ есть производная по внешней нормали к Г. При этом предполагается, что заданные функции $G_k(t)$, $f_k(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на Г вместе со своими производными до $(2n-k-2)$-го порядка, причем Г принадлежит классу $C^{2n-1,\mu}$ (т.е. контур задается уравнением $t = x(s)+iy(s)$,где $x(s)$ и $y(s)$- функции дуги s, удовлетворяющие условию Гельдера вместе со своими производным до порядка $2n-1$ включительно) и $G_k(t) \neq 0$.

Следует отметить , что в частном случае $G_k(t) = 1$ задачи (3a) – (3b) представляют собой основные классические задачи теории полианалитических функций, называемые соответственно задачей Рикье, первой основной задачей и второй основной задачей, им посвящены многочисленные оригинальные работы. Интерес к этим задачам в основном вызван тем, что они находят различные приложения при решении многих проблем математической физики и механики сплошной среды.

По аналогии с (3a) – (3b) рассматриваются также соответствующие задачи линейного сопряжения для полианлитической в открытом множестве $D \cup D'$ функции u, граничные значения которых $u^+(z)$ и $u^-(z)$ удовлетворяют на Г краевым условиям

$$\triangle^k u^+(t) = G_k(t)\triangle^k u^-(t) + g_k(t), \quad k = 0,1,...,n-1. \tag{4a}$$

$$\frac{\partial^{n-1}u^+(t)}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}} = G_k(t)\frac{\partial^{n-1}u^-(t)}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}} + g_k(t), \quad k = 1,2,...,n. \tag{4b}$$

$$\frac{\partial^k u^+(t)}{\partial n^k} = G_k(t)\frac{\partial^k u^-(t)}{\partial n^k} + g_k(t), \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{4c}$$

Подобные задачи ставились и изучались в работах И.А. Соколова[17, 18]. Достаточно обстоятельное изложение результатов этого и других авторов можно найти в монографии Ф.Д. Гахова[3].

Задачи (3b), (3c) и, соответственно (4b), (4c) близки как по степени их сложности, так и по методам их решения. Однако задача (3a) и (4a) существенно отличаются от задач второго и третьего типов своей простотой уже по самой постановке. Это отличие заключается в том, что согласно (2) для дифференциальных операторов

$$\Delta^k = 4^k \frac{\partial^{2k}}{\partial z^k \partial \bar{z}^k},$$

определяющих краевые условия (3a) и (4a) выполняются равенства

$$\triangle^k u(z) = 4^k \sum_{p=k}^{n-1} \frac{p!}{(p-k)!} \bar{z}^{p-k} \phi_p^{(k)}(z), \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{5}$$

где для единообразия $\triangle^0 u = u$. Отсюда следует, что краевое условие (3a) для $k = n-1, n-2, ..., 0$ можно записать в виде

$$4^{n-1}\mathrm{Re}\ (n-1)! G_{n-1}(t)\phi_{n-1}^{(n-1)}(t) = f_{n-1}(t),$$

$$4^{n-2}\mathrm{Re}\ G_{n-2}(t)[(n-2)!\phi_{n-2}^{(n-2)}(t) + (n-1)!\bar{t}\phi_{n-1}^{(n-2)}(t)] = f_{n-2}(t), \ldots \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\ G_0(t)[\phi_0(t) + \bar{t}\phi_1(t) + ... + \bar{t}^{n-1}\phi_{n-1}(t)] = f_0(t),$$

соответственно.

Очевидно, что краевые условия (6) в совокупности имеют "треугольный"вид. Поэтому решая последовательно n краевых задач Римана -Гильберта (6) относительно аналитических в D функций $\phi_k^{(k)}, (k = n-1, n-2, ..., 0)$, можно определить все функции $\phi_0(z), \phi_1(z), ..., \phi_{n-1}(z)$ а значит и искомую полианалитическую функцию $u(z)$ в представлении

(2). Таким образом, задача (3a) фактически сводится к совокупности n краевых задач Римана – Гильберта относительно аналитических функций $\varphi_k(z) = \phi_k^{(k)}(z), k = 0, 1, ..., n-1$.

С другой стороны, подстановка (2) в краевые условия (3b), (3c) приводит к дифференциальным операторам, уже не обладающим указанным треугольным свойством. Поэтому, вообще говоря, эти задачи не сводятся к совокупности n обычных краевых задач Гильберта – Римана для аналитических функций. В течение последних двух – трёх десятилетий опубликовано значительное число оригинальных работ, в которых исследуются те или иные краевые задачи для полианалитических функций и их обобщений (см. например, обзорную работу К.М. Расулова[21]. Подавляющее большинство из этих работ посвящены исследованию лишь краевых задач треугольного вида, а задачи общего вида изучались в основном только для областей типа круга или полуплоскости (см. например, работы Ю. Ванга [22, 23], Ю. Медведева [24], И. Соколов[25] и др.).

Другой подход для исследования краевых задач был предложен В.В. Показеевым [16], который основан на введенных им представлениях полианалитических функций интегралами вида

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}\left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{\bar{t}}{t}\right)^k \frac{g_k(t)}{t-z}dt, \quad z \notin \Gamma.$$

Заметим, что при $n = 1$ функция $I_1(z)$ переходит в классический интеграл типа Коши. Наряду с этим представлением В.В. Показеев рассматривал и другой полианалитический аналог интеграла типа Коши

$$I_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\frac{(\bar{z}-\bar{t})^k}{t-z} g_k(t)dt.$$

В окрестности бесконечно удаленной точки эти интегралы допускают полюс порядка $n-2$. С помощью указанных представлений В.В. Показеев исследовал краевую задачу линейного сопряжения

$$\frac{\partial^k u^+(t)}{\partial \bar{t}^k} = G(t)\frac{\partial^k u^-(t)}{\partial \bar{t}^k} + g_k(t), t \in \Gamma,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

в которых $G(t)$ есть непрерывная по Гёльдеру функция точек гладкого контура Γ, всюду отличная от нуля.

Некоторые простые краевые задачи для обобщенных полианалитических функций изучались Х. Бегером [26] в соболевских пространствах. Эти исследования были продолжены в работах А. Мшимба [27, 28] и др. авторов. Ряд работ посвящен краевым задачам для полианалитических функций в многосвязных областях [29, 30].

Диссертационная работа состоит из двух глав. Первая глава основывается на традиционном подходе, связанным с представлением Гурса полианалитических функций через аналитические. Соответственно в ней рассматриваются задачи типа Римана- Гильберта и линейного сопряжения специального типа, которые с помощью указанного представления непосредственно сводятся к соответствующим задачам теории функций. Основной упор здесь сделан на описании случаев эффективного решения этих задач.

Первая глава состоит из пяти параграфов. Первый параграф посвящен обсуждению представления Гурса

$$u(z) = \phi_1(z) + \bar{z}\phi_2(z) + \frac{\bar{z}^2}{2!}\phi_3(z) + \ldots + \frac{\bar{z}^{n-1}}{(n-1)!}\phi_n(z) \tag{7}$$

полианалитической функции u через набор $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ аналитических функций. По отношению к вектору

$$U = (U_1, \ldots, U_n), \quad U_k = \partial^{k-1}u/\partial\bar{z}^{k-1},$$

и треугольной матрицы $P = (P_{ij})_1^n$, элементы которой равны нулю при $j < i$ и

$$P_{ij}(z) = \frac{\bar{z}^{j-i}}{(j-i)!}, \quad j \geq i,$$

это представление записывается в форме $U = P\phi$.

Второй параграф посвящен задаче линейного сопряжения

$$\left(\frac{\partial^{i-1}u}{\partial\bar{z}^{i-1}}\right)^{+} - \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\left(\frac{\partial^{j-1}u}{\partial\bar{z}^{j-1}}\right)^{-} = f_i, \quad 1 \le i \le n, \tag{8}$$

на гладком контуре Γ для полианалитических функций, заданных в открытом множестве $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Решение ищется в классе Гельдера $C^{\mu}(\widehat{D})$, который определяется условием принадлежности $C^{\mu}(\overline{G})$ для любой ограниченной подобласти $G \subseteq D$. Кроме того, оно подчиняется поведению

$$U_j(z) = O(|z|^{l-j}) \text{ при } z \to \infty, \quad j = 1, \dots, n, \tag{9}$$

на бесконечности, где целое число l задано.

С помощью подстановки $U = P\phi$ эта задача непосредственно сводится к задаче линейного сопряжения

$$\phi^{+} - G\phi^{-} = g, \tag{10}$$

для аналитической в D вектор- функции $\phi \in C^{\mu}(\widehat{D})$ с матричным коэффициентом $G = P^{-1}BP$ и правой частью $g = P^{-1}f$, что приводит к следующему результату.

Теорема 2.4. *Пусть матрица – функция $B \in C^{\mu}(\Gamma)$ обратима. Тогда задача (1), (8) фредгольмова в классе (9), ее коядро содержится в $C^{\mu}(\Gamma)$ и ее индекс æ дается формулой*

$$æ = \operatorname{Ind} B + nl - n(n-1)/2.$$

Для удобства в этом параграфе приводятся хорошо известные граничные свойства интегралов типа Коши, фредгольмовых операторов и критерий фредгольмовости систем сингулярных уравнений с ядром Коши (теоремы 2.1 – 2.3).

В третьем параграфе описывается хорошо известный подход решения задачи линейного сопряжения через канонические матрицы функции. Применительно к задаче (1), (8) он приводит к следующему результату.

Теорема 3.1. *Пусть* $\widetilde{X}(z)$ *– каноническая матрица- функция, отвечающая матричному коэффициенту* $\widetilde{G} = (Q^+)^{-1}P^{-1}BPQ^-$, *и* $\widetilde{æ}_j$, $1 \le j \le n$, *есть ее частные индексы.*

Тогда для разрешимости задачи (1), (8) необходимо и достаточно, чтобы вектор- функция $\widetilde{f} = (\widetilde{X}^+)^{-1}(Q^+)^{-1}P^{-1}f$ *удовлетворяла условиям ортогональности*

$$\int_\Gamma \widetilde{f}_k(t)\widetilde{q}_k(t)dt = 0, \quad 1 \le k \le n,$$

для всех многочленов $\widetilde{q}_k$ *степени* $\deg q_k \le -(l + \widetilde{æ}_k) - 1$ *(многочлены отрицательной степени полагаются равными нулю). При выполнении этих условий общее решение этой задачи дается формулой*

$$u(z) = \sum_1^n \phi_j(z)\frac{\bar{z}^{j-1}}{(j-1)!}, \quad \phi(z) = Q(z)\widetilde{X}(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\widetilde{f}(t)dt}{t-z} + \widetilde{p}(z)\right],$$

где вектор- многочлен $\widetilde{p} = (\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n)$ *удовлетворяет условию* $\deg \widetilde{p}_k \le l + \widetilde{æ}_k - 1, \quad 1 \le k \le n.$

Каноническую матрицу X, отвечающую коэффициенту G, можно построить эффективно далеко не для всех матриц G. Исключение составляет случай, когда эта матрица треугольна. В этом случае доказывается следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть матрица* $G \in C^\mu(\Gamma)$ *верхне- треугольна, т.е.* $G_{ij} = 0$ *при* $i > j$, *и* $G_{ii}(t) \ne 0, \ t \in \Gamma, \ 1 \le i \le n$. *Тогда каноническая - матрица* X *также верхне -треугольна и ее частные индексы* $æ_i = \mathrm{Ind} G_{ii}$.

При этом построение X осуществляется с помощью простой рекуррентной процедуры.

Отдельный параграф 4 посвящен частному случаю $n = 2$ бианалитической функции. В этом случае каноническая матрица строится особенно просто.

Лемма 4.1. *Пусть в матрице $G \in C^{\mu}(\Gamma)$ вида*

$$G(t) = \begin{pmatrix} G_1(t) & G_0(t) \\ 0 & G_2(t) \end{pmatrix},$$

где $G_0(t) = B_0(t) + \bar{t}(B_1 - B_2)(t), G_1(t) = B_1(t), G_2(t) = B_2(t)$, функции G_1, G_2 обратимы и, соответственно, X_1, X_2 – отвечающие им канонические функции. Тогда отвечающая G каноническая матрица – функция дается формулой

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_1 Y \\ 0 & X_2 \end{pmatrix},$$

где по отношению к функции $\widetilde{G}_0 = (X_1^-)^{-1} X_2^- G_1^{-1} G_0$ положено

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\widetilde{G_0}(t) dt}{t - z}.$$

Соответственно этому задача (1), (8) с коэффициентом

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

допускает эффективное решение.

В еще более частном случае, когда $B_0 = 0$, это решение можно построить с помощью рекуррентной процедуры, не прибегая к канонической матрице.

Пусть $\text{æ}_k = \operatorname{Ind} B_k,\ \ k = 1, 2$, есть индекс Коши функции B_k и пусть скалярная каноническая функция X_k отвечает коэффициенту B_k. Положим

$$A(t) = \frac{\bar{t}[B_2(t) + B_1(t)]}{2B_2(t)}, \quad B(t) = \frac{\bar{t}[B_2(t) - B_1(t)]}{2B_2(t)}, \quad C(t) = \frac{B(t)X_1^+(t)}{X_0^+(t)},$$

и введем сингулярный оператор

$$(Nf_2)(t_0) = A(t_0)f_2(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{X_2^+(t_0)}{X_2^+(t)}\frac{f_2(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

Для целого n обозначим $P(n)$ класс многочленов $p(t)$ степени $\deg p \leq n-1$, полагая $P(n) = 0$ для $n \leq 0$. Таким образом, $\dim P(n) = \max(0, n)$. Удобно еще для целого m ввести подпространство $P(n, m)$ всех многочленов $p \in P(n)$, для которых

$$\langle q, Cp\rangle = 0, \quad q \in P(m),$$

где здесь и ниже для краткости

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt.$$

Теорема 4.1. *Задача (1), (8), где $B_0 = 0$, разрешима тогда и только тогда, когда ее правые части f_1, f_2 удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\langle f_2, (X_2^+)^{-1}q_2\rangle = 0, \quad q_2 \in P(-\text{æ}_2 - l + 1),$$
$$\langle f_1 - Nf_2, (X_1^+)^{-1}q_1\rangle = 0, \quad q_1 \in P(-\text{æ}_1 - l, \text{æ}_2 + l - 1).$$

При выполнении этих условий все решения задачи описываются формулой

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t) - (Nf_2)(t)}{t - z} + \frac{\bar{z}X_2(z)}{X_2^+(t)}\frac{f_2(t)}{t - z}\right]dt -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{B(t)X_2^+(t)p_2(t)}{t - z}\right]dt + X_1(z)p_1(z) + \bar{z}X_2(z)p_2(z)$$

с произвольными $p_1 \in P(\text{æ}_1 + l)$ *и* $p_2 \in P(\text{æ}_2 + l - 1)$.

Последний пятый параграф главы 1 имеет дело с односторонней задачей Римана - Гильберта для полианалитической функции u в области D, ограниченной ляпуновским контуром Γ. Эта задача определяется аналогичным (8) специальным краевым условием

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \left(\frac{\partial^{j-1} u}{\partial \bar{z}^{j-1}} \right)^{+} = f_i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{12}$$

Как обычно, решение ищется в классе $C^{\mu}(\overline{D})$, причем в случае бесконечной области D к (12) добавляется соответствующее поведение

$$U_j(z) = O(|z|^{l-j}) \text{ при } z \to \infty, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

на бесконечности.

Исследование этой задачи опирается на следующую теоремы Н.И. Мусхелишвили о представлении аналитической функции интегралом типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t) dt}{t - z}, \quad z \in D,$$

с действительной плотностью.

Пусть контур Γ состоит из простых контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, причем в случае конечной области D контур Γ_m охватывает все остальные.

Теорема 5.1. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и ограничивает конечную область* D.

Тогда любая аналитическая в D *вектор- функция* $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in C^{\mu}(\overline{D}),\ 0 < \mu < \nu$, *единственным образом представима в виде*

$$\phi = I\varphi + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

где $n-$ *вектор- функция* $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ *вещественна и удовлетворяет условиям*

$$\int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t = 0, \quad 1 \leq j \leq m - 1, \tag{15}$$

где $d_1 t$ означает элемент длины дуги.

Аналогичное предложение справедливо и для бесконечной области (теорема 5.3) для аналитической функции ϕ, исчезающей на бесконечности. Единственное отличие состоит в том, что $\xi = 0$ в (14) и условие (15) рассматривается для всех $1 \leq j \leq m$.

Кроме того, важную роль играет следующее вспомогательное предложение.

Лемма 5.1. *Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$. Тогда оператор $K = S + \overline{S}$, где $\overline{S}\varphi = \overline{S\overline{\varphi}}$ и черта справа означает комплексное сопряжение, представим в виде*

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(t_0,t)\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

с некоторой функцией $k(t_0,t) \in C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$, которая тождественно равна нулю при $t = t_0$.

При подстановке $U = P\phi$ задача (12) перейдет в классическую задачу Римана – Гильберта

$$\operatorname{Re} G\phi^+ = f,$$

для аналитической в D вектор- функции $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in C^\mu(\overline{D})$ с матричным коэффициентом $G = BP$. С помощью теоремы 5.1 эта задача редуцируется к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Re} G(\varphi + S\varphi) - 2(\operatorname{Im} G)\xi = 2f \tag{16}$$

относительно вещественной вектор- функции $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, которая вместе с дополнительными условиями (15) эквивалентна рассматриваемой задаче (12). С помощью тереме 2.1 – 2.3 отсюда получается следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$, *ограничивает конечную область* D *и составлен из* m *компонент. Пусть матрица - функция* $B(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *и* $\det B(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Тогда задача (12) фредгольмова и ее индекс æ *дается формулой*

$$æ = -2\mathrm{Ind}\, B + (2-m)n.$$

Кроме того, по отношению к билинейной форме

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Gamma} \varphi(t)\psi(t) d_1 t,$$

где $d_1 t$ *означает элемент длины дуги, коядро задачи содержится в пространстве* $C^{\mu}(\Gamma)$ *вещественных функций вектор- функций.*

Аналогичная теорема справедлива и в случае бесконечной области.

Теорема 5.4. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$, *ограничивает бесконечную область* D *и составлен из* m *компонент. Пусть матрица - функция* $B(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *и* $\det B(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Тогда задача (12), (13) фредгольмова, ее коядро содержится в $C^{\mu}(\Gamma)$ *и индекс* æ *дается формулой*

$$æ = -2\mathrm{Ind}\, B - mn - \sum_{j=1}^{n} (l - j + 1)^{-},$$

где напомним $2s^{\pm} = |s| \pm s$.

Вторая глава посвящена общим краевым задачам для полианалитических функций и основывается на подходе к эллиптической теории, описанном А.П. Солдатовым в [31]. Этот подход связан с представлением полианалитических функций через так называемые $J-$ аналитические функции – решения эллиптических систем первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

где $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ и собственные значения матрицы J лежат в верхней полуплоскости.

При $J = i$ эта система переходит в классическое уравнение Коши - Римана, описывающее аналитические функции.

Впервые с этой точки зрения обобщения теории аналитическх функций уравнение (17) было исследовано А. Дуглисом [32] в предположении, что матрица J треугольна и ее элементы зависят только от разности индексов. Функции Φ, принимающие свои значения в классе таких матриц и удовлетворяющие (матричному) уравнению (12) ,были названы А.Дуглисом гипераналитическими. В дальнейшем это направление развивалось Д.Паскали [34], Д.Хорватц [33], Б.Боярским [35], Р.Гилбертом [36], Д.Хайлом [37] и др.

Для решений уравнения (12) построен аналог теории аналитических функций [38], поэтому эти решения мы называем функциями, аналитическими по Дуглису. Этот материал кратко изложен в параграфе 7 главы 2 диссертации. Функции, аналитические по Дуглису удобны тем, что через них особенно просто выражаются решения эллиптических систем второго и более высокого порядка [39]. Применительно к полианалитическим функциям, которые представляют собой решение эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n} = 0,$$

это представление изложено в параграфе 6 главы 2.

Рассмотрим $n-$ вектор U, составленный из частных производных $(n-1)-$ го порядка решения уравнения (17), т.е.

$$U = (U_1, \ldots, U_n), \quad U_k = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{k-1} \partial x^{n-k}}. \tag{18}$$

Основной результат этого параграфа состоит в следующем. Подстановка $U = T\phi$ с треугольной матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ i^2 & 2i & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ i^{n-1} & (n-1)i^{n-2} & [(n-1)(n-2)/2]i^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

переводит вектор U в решения системы (16) с клеткой Жордана

$$J = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i \end{pmatrix}. \tag{19}$$

В параграфе 7 основной принцип распространения теории аналитических функций на функции, аналитические по Дуглису заключается в замене комплексного числа $z = x + iy$ на матрицу

$$z_J = x1 + yJ \tag{20}$$

где 1 означает здесь единичную матрицу и J- клетку Жордана (19). Роль интеграла типа Коши для J - аналитических функций играет интеграл

$$(I_J\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma dt_J(t-z)_J^{-1}\varphi(t), \quad z \in D,$$

где аналогично (20) выражение dt_J означает матричный дифференциал $d(\mathrm{Re}t)1 + d(\mathrm{Im}t)J$.

Теорема 7.1. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и* $D = \mathbb{C}\setminus\Gamma$. *Тогда если вектор- функция* $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *то* $J-$ *аналитическая в* D *функция* $\phi = I_J\varphi$ *исчезает на бесконечности, принадлежит классу* $C^\mu(\widehat{D})$ *и для ее граничных значений справедливы формулы*

Сохоцкого – Племеля

$$2\phi^{\pm} = \pm\varphi + S_J\varphi,$$

с сингулярным интегралом Коши

$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma dt_J (t - t_0)_J^{-1}\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma.$$

При этом I_J как линейный оператор ограничен $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\widehat{D})$.

Верно и обратное – любая $J-$аналитическая в D функция $\phi \in C^\mu(\widehat{D})$, имеющая поведение $\phi(z) = O(|z|^{æ-1})$ при $z \to \infty$ с некоторым целым æ, единственным образом представима в виде $\phi = I_J\varphi + p$ с плотностью $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ и $J-$ аналитическим многочленом $p(z)$ комплексной переменной z, подчиненным условиям

$$p \in \mathcal{P}_{J,æ-1}, \quad \int_\Gamma dt_J \varphi(t) q(t) = 0,\ q \in \mathcal{P}_{J,-æ-1}. \tag{21}$$

Восьмой параграф посвящен задаче линейного сопряжения для произвольных (n-1) - го порядка

$$\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{k-1}\partial x^{n-k}}\right)^+ - \sum_{j=1}^{n} B_{kj}\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{j-1}\partial x^{n-j}}\right)^- = f_k, \quad 1 \le k \le n, \tag{22}$$

на гладком контуре Γ для полианалитических функций, заданных в открытом множестве $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, (где D состоит из конечной D_1 и бесконечной D_0 областей).

Решение ищется в классе $C^{n-1,\mu}(\widehat{D})$, для которых

$$U_k = \frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{k-1}\partial x^{n-k}} \in C^\mu(\widehat{D}), U_k = O(|z|^{-n}) \text{ при } z \to \infty, 1 \le k \le n. \tag{23}$$

С помощью подстановки $U = T\phi$ задача (22) переходит в классическую задачу линейного сопряжения

$$\phi^+ - G\phi^- = g \tag{24}$$

с матричным коэффициентом $G = T^{-1}BT$ и правой частью $g = T^{-1}f$.

При указанной подстановке класс (23) переходит в класс $J-$ аналитических функций $\phi \in C^{\mu}(\widehat{D})$, подчиненных условию

$$\phi(z) = O(|z|^{-n}) \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{25}$$

Как и в параграфе 2 на основании теоремы 7.1, примененной к $\phi = I_J\varphi$, эта задача редуцируется к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений

$$\varphi + S_J\varphi + G(\varphi - S_J\varphi) = 2g,$$

где вектор- функция $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ подчинена второму условию (21) с æ $= 1 - n$ или, что равносильно, равенству нулю интегралов

$$\int_{\Gamma} t_J^k dt_J\varphi(t) = 0, \; 0 \le k \le n-2.$$

Теорема 8.1. *Пусть простой контур* $\Gamma \in C^{1,\nu}$, *матрица – функция* $B \in C^{\mu}(\Gamma)$ *обратима и* $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. *Тогда задача (22) для полианалитических функций* $u(z)$ *фредгольмова в классе* $C^{n-1,\mu}(\widehat{D})$, *определяемый условиями (23), ее коядро содержится в* $C^{\mu}(\Gamma)$ *и индекс* æ $= \operatorname{Ind} B$.

Рассмотрим далее одностороннюю задачу аналогичного типа. Пусть область D конечна и ограничена простым гладким контуром. Задача состоит в отыскании решения $u \in C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ уравнения (1) по краевому условию

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} B_{kj} \left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{j-1}\partial x^{n-j}} \right)^{+} = f_k, \quad 1 \le k \le n, \tag{26}$$

Как и выше с помощью подстановки $U = T\phi$ эта задача редуцируется к задаче Римана – Гильберта для $J-$аналитической функции ϕ

$$\operatorname{Re} G\phi^{+} = f \tag{27}$$

с матричным коэффициентом $G = BT$.

Теорема 8.2. *Пусть простой контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и ограничивает конечную область* D. *Пусть матрица - функция* $B(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *и* $\det B(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Тогда задача (26) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ *и ее индекс* æ *дается формулой*

$$æ = -2\mathrm{Ind}B + n^2. \tag{28}$$

При этом по отношению к билинейной форме в теореме 5.2 коядро задачи содержится в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$ *вещественных функций вектор-функций.*

Как и в параграфе 5, задачу (27) при дополнительном условии (25) можно рассмотреть и в бесконечной области D.

Теорема 8.3. *Пусть простой контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и ограничивает бесконечную область* D. *Пусть матрица - функция* $B(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *и* $\det B(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Тогда задача (26) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ *и ее индекс* æ *дается формулой*

$$æ = -2\mathrm{Ind}\, B - n.$$

При этом по отношению к билинейной форме в теореме 5.12 коядро задачи содержится в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$ *вещественных функций вектор- функций.*

Последний девятый параграф главы 2 посвящен общей краевой задаче. Пусть конечная область D ограничена гладким простым контуром Γ и задана последовательность натуральных чисел $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_n \leq n$. Положим для краткости

$$\partial_1^i \partial_2^j u = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j},$$

и рассмотрим для уравнения (1) в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ общую краевую задачу вида

$$\operatorname{Re} \sum\nolimits_{i+j\le l_k-1} C_{k,ij}(\partial_1^i\partial_2^j u)^+ = f_k, \quad 1\le k\le n, \tag{29}$$

с заданными непрерывными коэффициентами $C_{k,ij}$ на контуре Γ. Пусть $z=z(s)=x(s)+iy(s)$, $0\le s\le s_\Gamma$, есть естественная параметризация контура Γ. Параметр s представляет собой длину дуги, отсчитываемую от фиксированной точки $z(0)\in\Gamma$ против часовой стрелки. В частности, s_Γ есть длина всего контура. Соответственно $e(t)=z'(s)$, $t=z(s)$, является единичным касательным вектором. В дальнейшем предполагается, что Γ принадлежит классу $C^{n-1,\nu}, 0<\nu<1$, который понимается по отношению к периодической функции $z(s)$. Таким образом, касательный вектор $e=e_1+ie_2$ принадлежит классу $C^{n-2,\nu}(\Gamma)$ (по отношению к естественному параметру s на контуре), где принято соглашение $C^{0,\nu}=C^\nu$. Соответственно от коэффициентов $C_{k,ij}$ потребуем, чтобы они принадлежали классу $C^{n-l_k,\nu}(\Gamma)$, так что их можно $(n-l_k)-$ раз дифференцировать по параметру s, в частности,

$$C_{k,ij}^{(r)}[z(s)] = \frac{d^r}{ds^r}C_{k,ij}[z(s)] \in C^{n-l_k-r,\nu}(\Gamma), \quad 0\le r\le n-l_k.$$

Рассмотрим операцию дифференцирования с определенной аддитивной постоянной:

$$(T\varphi)(t)=\varphi'(t)+\frac{1}{s_\Gamma}\int_\Gamma \varphi(t)d_1t,$$

где d_1t означает элемент длины дуги. Заметим, что для любого натурального r оператор T^r действует по аналогичной формуле

$$(T^r\varphi)(t)=\varphi^{(r)}(t)+\frac{1}{s_\Gamma}\int_\Gamma \varphi(t)d_1t,$$

поскольку

$$\int_\Gamma \varphi'(t)d_1t=0.$$

Лемма 9.1. *Оператор T обратим $C^1(\Gamma) \to C(\Gamma)$.*

Если некоторая функция $\varphi \in C^1(\Gamma)$ является граничным значением функции $v \in C^1(\overline{D})$, то по правилу дифференцирования производная φ' связана с частными производными v равенством

$$\varphi' = e_1(\partial_1 v)^+ + e_2(\partial_2 v)^+.$$

Если $v \in C^{r,\nu}(\Gamma),\ 1 \leq r \leq n-1$, то пользуясь этим равенством и правилом Лейбница дифференцирования произведения функции, получим

$$\varphi^{(r)} = (e_1\partial_1 + e_2\partial_2)^r v + \sum_{i+j \leq r-1} A_{r,ij}(\partial_1^i \partial_2^j v)^+$$

с некоторыми коэффициентами $A_{r,ij} \in C^\nu(\Gamma)$. Здесь учтено, что функции e_1, e_2 принадлежат классу $C^{n-2,\nu}(\Gamma)$.

Введем функции B_{kj} с помощью тождеств

$$\sum_{i+j=l_k-1} C_{k,ij}\left[(e_1\xi_1 + e_2\xi_2)^{n-l_k}\xi_1^i\xi_2^j\right] = \sum_{j=1}^n B_{kj}\xi_1^{n-j}\xi_2^{j-1}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (30)$$

Теорема 9.1. *Пусть простой контур Γ принадлежит классу $C^{n-1,\nu}$ и ограничивает конечную область D. Пусть функции $C_{k,ij}$ в (29) принадлежат классу $C^{n-l_k-1,\mu}(\Gamma),\ 0 < \mu < \nu$, и матрица B, определяемая из равенства (30), обратима.*

Тогда задача (29) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ и ее индекс æ дается формулой (28).

Проиллюстрируем теорему на примере задачи

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial a^{k-1}}\right)^+ = f_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (31)$$

где $a = a_1 + ia_2$ представляет собой комплекснозначную функцию на Γ и положено

$$\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial a^{k-1}}\right)^+ = [(a_1\partial_1 + a_2\partial_2)^{k-1}u]^+.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $l_k = k$ и в предположении $a \in C^{n-2,\nu}(\Gamma)$ условия теоремы 9.1 выполнены.

Теорема 9.2. *Пусть конечная область D ограничена простым контуром $\Gamma \in C^{n-1,\nu}$ и и функция $a_1 + ia_2 \in C^{n-2,\nu}$, $n \geq 2$.*

Тогда в предположении

$$(e_1 a_2 - e_2 a_1)(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{32}$$

задача (31) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ и ее индекс æ дается формулой

$$æ = -n(n-1)\mathrm{Ind}\,(e_1 a_2 - e_2 a_1) + n^2. \tag{33}$$

На основании теоремы 9.2 отсюда следует заключение теоремы.

Если функции a_1, a_2 вещественны, то условие (32) равносильно тому, что вектор $a_1 + ia_2$ некасателен контуру Γ в каждой точке. В этом случае поскольку функция $e_1 a_2 - e_2 a_1$ вещественна, ее индекс Коши равен нулю, и формула (33) переходит в равенство $æ = n^2$. Например, к рассматриваемому типу относится задача

$$\mathrm{Re}\,\left(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}}\right)^+ = f_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

с нормальной производной.

Особо рассмотрим случай постоянных функций $a_1 = 1/2$, $a_2 = i/2$, когда (31) переходит в задачу

$$\mathrm{Re}\,\left(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial \bar{z}^{k-1}}\right)^+ = f_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

рассмотренную в главе 1. Более точно, она соответствует задаче (12), (13) для единичной матрицы B. Поэтому на основании теоремы 5.2 эта задача фредгольмова и ее индекс равен n, где учтено, что в рассматриваемом случае простого контура следует в формуле индекса $æ = -2\mathrm{Ind}\,B + (2-m)n$ положить $m = 1$. С другой стороны, функция $e_1 a_2 - e_2 a_1$ равна $ie/2$

и ее индекс Коши равен n, так что формула (33) дает равенство $æ = -n(n-1)+n^2 = n$. Таким образом, теорема 9.2 полностью согласуется с теоремой 5.2.

На защиту выносятся следующие результаты:

1) Дано решение задачи линейного сопряжения и найдена формула ее индекса с помощью интегралов типа Коши.

2) Получено представление решения задачи линейного сопряжения и односторонней краевой задачи Римана - Гильберта через каноническую матрицу-функцию, которая построена в явном виде.

3) Найдено представление полианалитических функций через J - аналитические функции.

4) Исследована фредгольмова разрешимость общей краевой задачи для полианалитических функций с помощью $J-$ аналитических функций и найдена формула ее индекса.

Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [46]-[47], рекомендованных ВАК для опубликования основных научных результатов. Статьи выполнены совместно с научным руководителем А. П. Солдатовым. Здесь научному руководителю принадлежит постановка задач и выбор методик исследования, а соискателю – реализация указанных методик.

Наиболее значимые результаты диссертации докладывались на Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2015); на первой междууниверситетской конференции среднего Вьетнама, (Вьетнам, 2015), на научно- исследовательском семинаре по дифференциальным уравнениям (рук. проф. А.П. Солдатов), Белгород, 2014-2016, на Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2016).

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору А. П. Солдатову за постановку задач, поддержку и внимание к работе.

ГЛАВА 1. Краевые задачи специального вида

1. Формула Гурса

Рассмотрим в области $D \subseteq \mathbb{C}$ функцию $u(z) = u(x,y) \in C^n(D)$ комплексной переменной $z = x + iy$. Эта функция называется полианалитической, если она является решением уравнения

$$\frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n} = 0, \tag{1.1}$$

где положено

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Чтобы подчеркнуть зависимость от n, эти функции называются также $n-$ аналитическими (бианалитическими при $n = 2$). Конечно, при $n = 1$ уравнение (1.1) переходит в условие Коши - Римана и его решениями являются аналитические функции.

Хорошо известно [5], что любая $n-$ аналитическая функция u представима в виде

$$u(z) = \phi_1(z) + \bar{z}\phi_2(z) + \frac{\bar{z}^2}{2!}\phi_3(z) + \ldots + \frac{\bar{z}^{n-1}}{(n-1)!}\phi_n(z) \tag{1.2}$$

с некоторыми аналитическими в области D функциями $\phi_j(z)$. При $n = 2$ эта формула носит имя Гурса, которое сохраняем и в общем случае произвольного n. Из этой формулы, в частности, следует, что полианалитические функции бесконечно дифференцируемы в области своего задания D.

Формулу (1.2) легко установить индукцией по n, если воспользоваться соотношением

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\bar{z}^k\phi(z)] = k\bar{z}^{k-1}\phi(z), \tag{1.3}$$

справедливым для любого натурального k и аналитической функции ϕ. В самом деле, пусть формула Гурса справедлива для $(n-1)-$ аналитических функций и функция $u \in C^n(D)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Тогда

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial \bar{z}^{n-1}} = \phi_n(z)$$

с некоторой аналитической функцией $\phi_n(z)$, так что на основании (1.3)

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \bar{z}^{n-1}} \left[u(z) - \frac{\bar{z}^{n-1}}{(n-1)!} \phi_n(z) \right] = 0.$$

По предположению индукции отсюда следует справедливость формулы (1.2) и для n.

Из соотношения (1.3), примененного к (1.2), следует, что

$$\frac{\partial^{k-1} u}{\partial \bar{z}^{k-1}} = \phi_k(z) + \bar{z}\phi_{k+1}(z) + \ldots + \frac{\bar{z}^{n-k}}{(n-k)!}\phi_n(z), \quad 1 \leq k \leq n. \qquad (1.4)$$

Положим

$$U = (U_1, \ldots, U_n), \;\; U_k = \partial^{k-1} u / \partial \bar{z}^{k-1},$$

$$(1.5)$$

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n), \qquad P = (P_{ij})_1^n,$$

где матрица $P(z)$ верхне - треугольна и определяется элементами

$$P_{ij}(z) = \frac{\bar{z}^{j-i}}{(j-i)!}, \quad j \geq i.$$

Тогда в этих обозначениях соотношения (1.4) можем записать в векторной форме

$$U = P\phi. \qquad (1.6)$$

Очевидно, определитель матрицы P равен единице и, следовательно, соотношение (1.6) можно обратить: $\phi = P^{-1}U$. Другими словами, в формуле Гурса (1.2) набор аналитических функций ϕ_j однозначно определяется по $n-$ аналитической функции u.

Для элементов верхне- треугольной обратной матрицы P^{-1} имеем следующее явное выражение

$$(P^{-1})_{ij}(z) = \frac{(-1)^{j-i}\bar{z}^{j-i}}{(j-i)!}, \quad j \geq i. \tag{1.7}$$

В самом деле, введем матрицу Δ с элементами

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j-i=1, \\ 0, & j-i \neq 1. \end{cases}$$

Для ее степеней имеем аналогичные выражения

$$(\Delta^k)_{ij} = \begin{cases} 1, & j-i=k, \\ 0, & j-i \neq k, \end{cases} \qquad 0 \leq k \leq n-1,$$

и, очевидно, $\Delta^n = 0$. В этих обозначениях можем записать

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{z}^k}{k!}\Delta^k.$$

Поскольку эта сумма совпадает с рядом по всем $k \geq 0$, матрица $P(z) = \exp(\bar{z}\Delta)$. Следовательно, и $P^{-1}(z) = \exp(-\bar{z}\Delta)$, т.е

$$P^{-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{z}^k}{k!}(-1)^k\Delta^k,$$

что и доказывает (1.7).

Пусть область D является окрестностью бесконечно удаленной точки ∞, т.е. содержит внешность $\{|z| \geq R\}$ некоторого круга. Предположим, что в обозначениях (1.5) полианалитическая функция $u(z)$ при $|z| \geq R$ удовлетворяет оценкам

$$|U_j(z)| \leq C|z|^{l-j}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1.8}$$

с некоторым целым l или, что равносильно, $U_j(z) = O(|z|^{l-j})$ при $z \to \infty$. В силу (1.6), (1.7) для компонент ϕ_k вектор- функции ϕ имеем выражения

$$\phi_k(z) = \sum_{j=k}^{n} \frac{(-\bar{z})^{j-k}}{(j-k)!}U_j(z),$$

которые показывают, что аналогичные (1.8) оценки справедливы и для этих компонент. Верно и обратное - наличие поведения

$$\phi_j(z) = O(|z|^{l-j}) \text{ при } z \to \infty, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.9}$$

влечет (1.8) с некоторой другой постоянной C.

Пусть некоторая аналитическая в D функция $\psi(z)$ в области $|z| \geq R$ удовлетворяет оценке $|\psi(z)| \leq C|z|^m$ с некоторым натуральным m. Эта оценка означает, что в ее разложении в ряд Лорана

$$\psi(z) = \sum\nolimits_j a_j z^j \tag{1.10}$$

по целым степеням z число коэффициентов a_j с положительными j конечно. Поэтому существует такое целое s, что $a_s \neq 0$ и суммирование в (1.10) ведется по $j \leq s$. Целое число s называем порядком ψ на бесконечности и обозначаем $s = \deg \psi$. Очевидно, при $s = 0$ функция ψ ограничена в окрестности ∞ и существует предел $\lim \psi(z) = \psi(\infty)$ при $z \to \infty$, который совпадает с a_0. При $\deg \psi < 0$ этот предел равен нулю, в этом случае говорим, что ψ исчезает на бесконечности. Заметим, что если ψ является многочленом, то $\deg \psi$ представляет собой степень этого многочлена.

В принятых обозначениях условие (1.9) можем выразить в форме $\deg \phi_j \leq l - j$.

Лемма 1.1. *Пусть вектор- функции $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ и $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ аналитичны в окрестности ∞, имеют конечный порядок и связаны соотношением $\phi = A\psi$, где аналитическая матрица -функция $A(z)$ имеет порядок нуль на ∞, причем* $\det\, A(\infty) \neq 0$. *Тогда* $\deg \phi = \deg \psi$.

Доказательство. Пусть $\deg \psi = s$, тогда функция $\psi_0(z) = z^{-s}\psi(z)$ ограничена и при $z \to \infty$ стремится к некоторому ненулевому вектору $\psi_0(\infty) \in \mathbb{C}^n$. Следовательно, функция $\phi_0(z) = z^{-s}\phi(z) = A(z)\psi_0(z)$ обладает этим же свойством, причем $\phi_0(\infty) = A(\infty)\psi_0(\infty)$. Поскольку по условию $\det A(\infty) \neq 0$, вектор $\phi_0(\infty) \neq 0$, так что $\deg \phi = s$.

2. Задача линейного сопряжения

Пусть на комплексной плоскости задан ориентируемый гладкий контур Γ, состоящий из простых контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Тогда дополнение к нему открытое множество $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ состоит из некоторого числа областей D_0, $D_1, \ldots, D_m$, из которых область D_0 бесконечна и содержит окрестность бесконечно удаленной точки ∞, а остальные области конечны. Не ограничивая общности в дальнейшем считаем, что

$$\partial D_0 = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{m_0}, \quad 1 \leq m_0 \leq m. \tag{2.1}$$

Обозначим $C(\widehat{D})$ класс функций $\varphi \in C(D)$, которые в каждой области D_j непрерывны продолжимы на ее границу. Очевидно, тогда можно ввести в точках $t \in \Gamma$ односторонние граничные значения этой функции $\varphi^{\pm}(t) = \lim \varphi(z)$, когда точка $z \to t$, оставаясь слева (справа) от Γ при верхнем (нижнем) знаке. Ясно, что как функции на Γ эти граничные значения непрерывны.

Наряду с этим классом введем также соответствующий класс Гельдера. Пусть $C^{\mu}(G)$ означает класс функций, удовлетворяющих на множестве G условию Гельдера, т.е. оценке

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq C|z_1 - z_2|^{\mu}, \quad z_j \in G,$$

с некоторым показателем $0 < \mu \leq 1$. Ясно, что условия $\varphi \in C^{\mu}(G)$ и $\varphi \in C^{\mu}(\overline{G})$ равносильны. В этих обозначениях запись $\varphi \in C^{\mu}(\widehat{D})$ по определению означает, что $\varphi \in C^{\mu}(D_0)$ для каждой ограниченной подобласти $D_0 \subseteq D$. Таким образом, $\varphi \in C^{\mu}(\overline{D}_j)$, $1 \leq j \leq m$, и $\varphi \in C^{\mu}(\overline{D}_0 \cap \{|z| \leq R\})$ для любого $R > 0$.

Пусть задана $n \times n-$ матрица- функция $B(t) = (B_{ij}(t))_1^n$ на контуре Γ из класса $C^\mu(\Gamma)$, определитель которой всюду отличен от нуля. Рассмотрим для полианалитической функции u из класса

$$U_j = \frac{\partial^{j-1} u}{\partial \bar{z}^{j-1}} \in C^\mu(\widehat{D}), \quad 1 \le j \le n,$$

$$U_j(z) = O(|z|^{l-j}) \text{ при } z \to \infty, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

задачу линейного сопряжения

$$\left(\frac{\partial^{i-1} u}{\partial \bar{z}^{i-1}}\right)^+ - \sum_{j=1}^n B_{ij} \left(\frac{\partial^{j-1} u}{\partial \bar{z}^{j-1}}\right)^- = f_i, \quad 1 \le i \le n. \tag{2.3}$$

При подстановке $U = P\phi$ эта задача перейдет в задачу линейного сопряжения

$$\phi^+ - G\phi^- = g, \tag{2.4}$$

для аналитической в D вектор- функции $\phi \in C^\mu(\widehat{D})$ с матричным коэффициентом $G = P^{-1}BP$ и правой частью $g = P^{-1}f$. При этом аналогично (2.2) вектор - функция $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ подчинена условию

$$\deg \phi_j \le l - j, \ 1 \le j \le n, \tag{2.5}$$

на бесконечности.

С помощью интеграла типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t - z} \tag{2.6}$$

эту задачу обычным образом (см., например, Н.И. Мусхелишвили [4]) можно редуцировать к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений. Напомним хорошо известные свойства [4] этого интеграла.

Теорема 2.1. *Если $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, то аналитическая в D функция $\phi = I\varphi$ исчезает на бесконечности, принадлежит классу $C^\mu(\widehat{D})$ и для* *ее граничных значений справедливы формулы Сохоцкого – Племеля*

$$2\phi^{\pm} = \pm\varphi + S\varphi, \tag{2.7}$$

с сингулярным интегралом Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{2.8}$$

При этом I *как линейный оператор ограничен* $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}(\widehat{D})$.

Верно и обратное – любая аналитическая в D *функция* $\phi \in C^{\mu}(\widehat{D})$, *удовлетворяющая условию* $\deg\phi \le æ-1$ *на бесконечности с некоторым целым* $æ$, *единственным образом представима в виде* $\phi = I\varphi + p$ *с плотностью* $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ *и многочленом* $p(z)$ *комплексной переменной* z, *подчиненным условиям*

$$\deg p \le æ - 1, \quad \int_{\Gamma}\varphi(t)q(t)dt = 0, \ \deg q \le -æ - 1,$$

где последнее условие ортогональности понимается по отношению к многочленам $q(z)$. *При этом многочлены отрицательной степени полагаются равными нулю.*

Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что в окрестности ∞ функция $I\varphi$ имеет разложение в ряд Лорана

$$(I\varphi)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k-1}, \quad c_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\varphi(t)t^k dt. \tag{2.9}$$

В частности, для целого $æ \le -1$ условие $\deg I\varphi \le æ-1$ можно выразить в форме равенства нулю

$$\int_{\Gamma}\varphi(t)q(t)dt = 0$$

для всех многочленов q степени $\deg q \le -æ - 1$.

Из теоремы, в частности, следует, что сингулярный оператор Коши S ограничен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$.

Напомним некоторые понятия фредгольмовых операторов в банаховом пространстве X. Пусть линейный оператор N ограничен в $X_1 \to X_2$ и подпространство $\ker N = \{x \in X_1,\ \ Nx = 0\}$ означает его ядро. Тогда сопряженный оператор N^* ограничен в сопряженных пространствах $X_2^* \to X_1^*$ и его ядро $\ker N^* \subseteq X_2^*$ по отношению к N обозначается $\mathrm{coker} N$. Известная теорема Банаха [40] утверждает, что если образ $\mathrm{im}\, N = N(X_1)$ оператора замкнут, то он состоит из всех элементов $y \in X$, ортогональных $\mathrm{coker} N$ в том смысле, что $y^*(y) = 0$ для всех $y^* \in \mathrm{coker} N$.

Применительно $X = C^\mu(\Gamma)$ существует естественное вложение $C^\mu(\Gamma) \subseteq X^*$ по отношению к билинейной формы

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt. \tag{2.10}$$

Именно, каждая функция $\psi \in C^\mu(\Gamma)$ определяет линейный функционал $\widetilde{\psi}(\varphi) = \langle \varphi, \psi \rangle$, который и можно отождествить с ψ. Может случиться, что и таких функционалов состоит все коядро оператора N, ограниченного в $C^\mu(\Gamma)$, в этом случае пишем $\mathrm{coker} N \subseteq C^\mu(\Gamma)$. Заметим, что эта билинейная форма имеет смысл и для $n-$вектор- функций, понимая под $\varphi(t)\psi(t)$ скалярное произведение $\sum_i \varphi_i \psi_i$.

По определению ограниченный в $C^\mu(\Gamma)$ оператор N фредгольмов, если его ядро $\ker N = \{\varphi \in C^\mu(\Gamma),\ \ N\varphi = 0\}$ и коядро $\mathrm{coker} N$ конечномерны, а образ $\mathrm{im}\, N = N(X)$ замкнут. Разность $\mathrm{ind} N = \dim \ker N - \dim \mathrm{coker}\, N$ называется индексом фредгольмового оператора N. Таким образом, для этого оператора имеют место следующие три альтернативы Фредгольма:

1) однородное уравнение $Nx = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений $x_1, \ldots, x_n$;

2) однородное сопряженное уравнение $N^* y^* = 0$ имеет конечное

число линейно независимых решений $y_1^*, \ldots, y_m^*$;

3) неоднородное уравнение $Nx = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда $y_j^*(y) = 0,\ 1 \le j \le m$.

Рассмотрим ситуацию, когда роль X_j играют банаховы пространства $\widetilde{X}_j = X \times Y_j,\ \ j = 1, 2$, с некоторыми конечномерными пространствами Y_j. В этом случае оператор $\widetilde{N} : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ можно естественным образом представить в виде операторной матрицы

$$\widetilde{N} = \begin{pmatrix} N & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где оператор N ограничен в X, а N_{ij} ограничены $Y_j \to Y_i$.

Следующая теорема объединяет основные свойства фредгольмовых операторов, их доказательство можно найти в [41].

Теорема 2.2. (a) *Композиция $N_1 N_2$ фредгольмовых операторов есть фредгольмовый оператор индекса* $\operatorname{ind}(N_1 N_2) = \operatorname{ind} N_1 + \operatorname{ind} N_2$.

(b) *Если оператор $N : X_1 \to X_2$ фредгольмов, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого ограниченного оператора $B : X_1 \to X_2$ нормы $|B| \le \varepsilon$ оператор $N + B$ фредгольмов и его индекс* $\operatorname{ind}(N + B) = \operatorname{ind} N$.

(c) *Если оператор $N : X_1 \to X_2$ фредгольмов, то для любого компактного оператора $B : X_1 \to X_2$ оператор $N + B$ фредгольмов и его индекс* $\operatorname{ind}(N + B) = \operatorname{ind} N$.

(d) *Пусть $\widetilde{X}_j = X \times Y_j,\ \ j = 1, 2$, с некоторыми конечномерными пространствами Y_j и оператор $\widetilde{N} : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ представим в виде (2.11). Тогда операторы $\widetilde{N}$ и N свойством фредгольмовости обладают одновременно и их индексы связаны соотношением*

$$\operatorname{ind} \widetilde{N} = \operatorname{ind} N + \dim Y_1 - \dim Y_2.$$

(e) *Пусть оператор N ограничен $X \to Y$ и банахово пространство X разложено в прямую сумму $X_0 \oplus X_1$ своих замкнутых подпространств, из которых X_1 конечномерно. Тогда операторы N и его сужение $N_0 : X_0 \to Y$ свойством фредгольмовости обладают одновременно и их индексы связаны соотношением* $\operatorname{ind} N = \operatorname{ind} N_0 + \dim X_1$.

Заметим, что примером компактного оператора служат ограниченные операторы, образ которых конечномерен. Поэтому утверждения (d) и (e) теоремы являются очевидным следствием (c).

Классическим примером фредгольмовых операторов служат сингулярные интегральные операторы. Пусть $n \times n-$ матрицы- функции

$$A(t),\, B(t) \in C^{\mu}(\Gamma), \quad C(t_0, t) \in C^{\nu}(\Gamma \times \Gamma), \mu < \nu < 1, \tag{2.12}$$

удовлетворяющие условиям

$$\det A(t) \neq 0,\ \det B(t) \neq 0,\ t \in \Gamma; \quad C(t,t) \equiv 0. \tag{2.13}$$

Рассмотрим в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$ вектор- функций $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ сингулярный интегральный оператор

$$2N = A(1+S) + B(1-S) + K, \tag{2.14}$$

где 1 означает единичный оператор и интегральный оператор K действует по формуле

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{C(t_0,t)\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma.$$

Хорошо известен следующий результат (см. Н.И. Мусхелишвили [4]) о фредгольмовости этого оператора. Предварительно введем следующее понятие. Пусть матрица - функция $G(t) \in C(\Gamma)$ обратима, т.е. $\det G(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$. Тогда с ней можно связать так называемый индекс Коши – целое число $\operatorname{Ind} G$, определяемое формулой

$$\operatorname{Ind} G = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} [\ln \det G]_{\Gamma_j}, \tag{2.15}$$

где под знаком суммы стоит приращение на простом контуре Γ_j (в соответствии с его ориентацией) непрерывной ветви логарифма функции $\det G$, рассматриваемой вне фиксированной точки t_j этого контура. Другими словами, $[\ln\det G]_{\Gamma_j}$ представляет собой разность $(\ln\det G)(t_j-0)-(\ln\det G)(t_j+0)$.

Теорема 2.3. (a) *Сингулярный (2.14), где матрицы - функции A, B, C удовлетворяют условиям (2.12), (2.13), фредгольмов, его коядро* $\operatorname{coker} N$ *содержится в* $C^\mu(\Gamma)$ *и его индекс* $\operatorname{ind} N = \operatorname{Ind}(A^{-1}B)$.

(b) *Пусть в дополнение к условиям (a) заданы конечномерные подпространства $X, Y \subseteq C^\mu(\Gamma)$, подпространство $\widetilde{C}^\mu(\Gamma)$ состоит из вектор- функций $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, для которых $\langle\varphi, q\rangle = 0,\ q \in Y$, и задана матрица- функция $D \in C^\mu(\Gamma)$.*

Тогда оператор $\widetilde{N} : \widetilde{C}^\mu(\Gamma)\times X \to C^\mu(\Gamma)$, действующий по формуле $\widetilde{N}(\varphi, p) = N\varphi + Dp$, фредгольмов, его коядро содержится в $C^\mu(\Gamma)$ и его индекс $\operatorname{ind} N = \operatorname{Ind}(A^{-1}B) + \dim X - \dim Y$.

Отметим, что утверждения этой теоремы относительно коядра устанавливаются с помощью рассмотрения так называемых союзных сингулярных операторов.

С помощью теоремы 2.1 нетрудно описать редукцию задачи (2.4), (2.5) к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений, фигурирующей в теореме 2.3. Именно, полагая $\phi_j = I\varphi_j + p_j$ и пользуясь формулами (2.7), приходим к системе сингулярных уравнений

$$\varphi + S\varphi + G(\varphi - S\varphi) + 2(p - Gp) = 2g, \qquad (2.16)$$

где многочлены p_j вектора $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и в обозначениях (2.10) скалярные функции φ_j плотности $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C^\mu(\Gamma)$ подчинены условиям

$$\deg p_j \le l - j; \quad \langle \varphi_j, q_j \rangle = 0,\ \deg q_j \le -(l-j); \quad 1 \le j \le n. \tag{2.17}$$

Таким образом, в предположении обратимости матрицы G к этой системе можно применить теорему 2.3, в которой роль конечномерных пространств X и Y играют соответствующие классы вектор- многочленов p и q. Согласно (2.17) размерности этих пространств даются равенствами

$$\dim X = \sum_j (l-j+1)^+, \quad \dim Y = \sum_j (l-j+1)^-, \tag{2.18}$$

где для целого s положено $s^{\pm} = (|s| \pm s)/2$. В частности, $s^+ - s^- = s$ и, следовательно,

$$\dim X - \dim Y = \sum_{j=1}^{n} (l-j+1) = nl - n(n-1)/2.$$

Таким образом, теорема 2.3 приводит к следующему результату о фредгольмовости исходной задачи (2.2), (2.3) для уравнения (1.1) (фредгольмовость задачи, ее коядро и индексом понимаются по отношению к оператору этой задачи).

Теорема 2.4. *Пусть матрица – функция $B \in C^{\mu}(\Gamma)$ обратима. Тогда задача (1.1), (2.3) фредгольмова в классе (2.2), ее коядро содержится в $C^{\mu}(\Gamma)$ и ее индекс æ дается формулой*

$$æ = \operatorname{Ind} B + nl - n(n-1)/2. \tag{2.19}$$

Здесь учтено, что индексы Коши матриц- функций B и $G = P^{-1}BP$ совпадают.

3. Канонические матрицы- функции

Пусть как обычно матрица – функция $G \in C^{\mu}(\Gamma)$ обратима. По определению аналитическая вне Γ матрица – функция $X(z)$ называется канонической по отношению к G, если она принадлежит классу $C^{\mu}(\widehat{D})$, имеет конечный порядок на бесконечности, удовлетворяет соотношению

$$X^{+} = GX^{-} \tag{3.1}$$

и условию

$$A = \lim_{z\to\infty} X(z)\mathrm{diag}(z^{æ_1}, \ldots, z^{æ_n}), \quad \det A \neq 0. \tag{3.2}$$

на бесконечности с некоторыми целыми $æ_j$.

С помощью теории сингулярных уравнений, описываемой теоремой 2.3, доказывается существование [4] такой матрицы, причем целые числа $æ_1, \ldots, æ_n$ с точностью до перестановки определены однозначно. Они называются частными индексами матрицы- функции G, при этом их сумма выражается через индекс Коши $\mathrm{Ind}\, G$ по формуле

$$æ_1 + \ldots + æ_n = \mathrm{Ind}\, G, \quad \mathrm{Ind}\, G = \frac{1}{2\pi i} \ln\det G(t)\big|_{\Gamma}. \tag{3.3}$$

В скалярном случае $n = 1$ условие (3.2) и равенство (3.3) переходят в

$$A = \lim_{z\to\infty} z^{æ} X(z) \neq 0, \quad æ = \mathrm{Ind}\, G. \tag{3.4}$$

В этом случае каноническая функция строится непосредственно. Предположим сначала, что $m = 1$, т.е. контур Γ простой, область D_0 (D_1) лежит внутри (вовне) этого контура и точка $z_0 \in D_0$ фиксирована. Рассмотрим функцию $G_0(t) = (t - z_0)^{\pm æ}$, $t \in \Gamma$, где выбирается верхний (нижний) знак, если контур Γ ориентирован против (по) часовой стрелки. Очевидно, индексы Коши функций G и G_0 совпадают и функция

$$X_0(z) = \begin{cases} 1, & z \in D_0, \\ (z - z_0)^{-æ}, & z \in D_1, \end{cases}$$

является G_0- канонической, т.е. удовлетворяет условиям (3.1), (3.4) по отношению к G_0.

Заметим далее, что индекс Коши функции $G_1 = G_0^{-1}G$ равен нулю. Иначе говоря, в обозначениях (2.15) приращение $[\ln G_1]_\Gamma$ равно нулю и, следовательно, функция $\ln G_1 \in C^\mu(\Gamma)$. Рассмотрим интеграл типа Коши $Y = I(\ln G_1)$, эта функция принадлежит $C^\mu(\widehat{D})$, исчезает на бесконечности и согласно (2.7) удовлетворяет условию $Y^+ - Y^- = \ln G_1$. Отсюда заключаем, что функция $X = e^Y X_0$ является $G-$ канонической.

В общем случае составного контура $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m$ пусть G_j есть сужение G на Γ_j и X_j означает G_j- каноническую функцию. Тогда произведение $X = X_1 \cdots X_m$ является $G-$канонической функцией.

С помощью канонической матрицы – функции $X(z)$, отвечающей G, решение задачи (2.4) в классе

$$\deg \phi \le l - 1 \tag{3.5}$$

можно построить в явном виде. В самом деле, согласно (3.1) вектор-функция $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) = X^{-1}\phi$ удовлетворяет краевому условию $\psi^+ - \psi^- = (X^+)^{-1}g$, при этом в силу (3.2) условие (3.5) переходит в

$$\deg \psi_j \le l + æ_j - 1, \quad 1 \le j \le m.$$

В результате к ψ можно применить теорему 2.1, согласно которой она описывается формулой

$$\psi(z) = \int_\Gamma \frac{(X^+)^{-1}(t)g(t)dt}{t - z} + p(z).$$

Как было отмечено выше, эта функция в окрестности ∞ имеет разложение в ряд Лорана вида (2.9) с коэффициентами

$$a_j = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [(X^+)^{-1}g](t)t^{-j-1}dt, \quad j \le -1,$$

и $a_0 + \ldots + a_s z^s = p(z)$. Поэтому условие $\deg \psi_k \le l + æ_k - 1$ сводится к тому, что $\deg p_k \le l + æ_k - 1$ и

$$\int_\Gamma [(X^+)^{-1} g]_k(t) q_k(t) dt = 0, \quad 1 \le k \le n,$$

для всех многочленов q_k степени $\deg q_k \le -(l + æ_k) - 1$. Очевидно, эти условия гарантируют, что порядок на бесконечности вектор- функции $\mathrm{diag}(z^{-æ_1}, \ldots, z^{-æ_n})\psi(z)$ не превосходит $l - 1$. В свою очередь с учетом (3.2) и леммы 1.1 эти условия равносильны тому, что $\deg \phi \le l - 1$.

Таким образом, все решения исходной задачи (2.4), (3.5) описываются формулой

$$\phi = X(I\widetilde{g} + p), \quad \widetilde{g} = (X^+)^{-1} g,$$

где вектор- многочлен $p = (p_1, \ldots, p_n)$ удовлетворяет условию $\deg p_k \le l + æ_k - 1$, а плотность $\widetilde{g}$ - условиям ортогональности

$$\int_\Gamma \widetilde{g}_k(t) q_k(t) dt = 0, \quad 1 \le k \le n,$$

для всех многочленов q_k степени $\deg q_k \le -(l + æ_k) - 1$

В частности, индекс этой задачи равен $æ = \mathrm{Ind}\, G + nl$.

В случае задачи (2.4), (2.5) порядки на бесконечности функций ϕ_j надо выровнять и привести к виду (3.5). Это можно осуществить с помощью диагональную матрицу функцию

$$Q(z) = \begin{cases} 1, & z \in D \setminus D_0, \\ \mathrm{diag}(1, (z - z_0)^{-1}, \ldots, (z - z_0)^{1-n}), & z \in D_0, \end{cases} \tag{3.6}$$

где точка $z_0 \in D \setminus D_0$ фиксирована. Напомним, что в соответствии с (2.1) граница бесконечной области D_0 составлена из компонент Γ_j, $1 \le j \le m_0$, контура Γ. При подстановке $\phi = Q\widetilde{\phi}$ задача (2.4) перейдет в задачу линейного сопряжения

$$\widetilde{\phi}^+ - \widetilde{G}\widetilde{\phi}^- = \widetilde{g} \tag{3.7}$$

с матричным коэффициентом $\widetilde{G} = (Q^+)^{-1}GQ^-$ и правой частью $\widetilde{g} = (Q^+)^{-1}g$. При этом условие (2.5) на бесконечности перейдет в (3.5). Как следствие с учетом (1.2) отсюда приходим к следующему результату.

Теорема 3.1. *Пусть* $\widetilde{X}(z)$ *– каноническая матрица- функция, отвечающая матричному коэффициенту* $\widetilde{G} = (Q^+)^{-1}P^{-1}BPQ^-$, *и* $\widetilde{æ}_j$, $1 \leq j \leq n$, *есть ее частные индексы.*

Тогда для разрешимости задачи (2.2), (2.3) необходимо и достаточно, чтобы вектор- функция $\widetilde{f} = (\widetilde{X}^+)^{-1}(Q^+)^{-1}P^{-1}f$ *удовлетворяла условиям ортогональности*

$$\int_\Gamma \widetilde{f}_k(t)\widetilde{q}_k(t)dt = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{3.8}$$

для всех многочленов $\widetilde{q}_k$ *степени* $\deg \widetilde{q}_k \leq -(l + \widetilde{æ}_k) - 1$ *(многочлены отрицательной степени полагаются равными нулю). При выполнении этих условий общее решение этой задачи дается формулой*

$$u(z) = \sum_1^n \phi_j(z)\frac{\bar{z}^{j-1}}{(j-1)!}, \quad \phi(z) = Q(z)\widetilde{X}(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\widetilde{f}(t)dt}{t-z} + \widetilde{p}(z)\right], \tag{3.9}$$

где вектор- многочлен $\widetilde{p} = (\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n)$ *удовлетворяет условию* $\deg \widetilde{p}_k \leq l + \widetilde{æ}_k - 1, \quad 1 \leq k \leq n$.

Из теоремы следует, что пространство решений однородной задачи имеет ту же размерность, что и класс вектор - многочленов $\widetilde{p} = (\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n)$, для которых $\deg \widetilde{p}_k \leq l + \widetilde{æ}_k - 1$. Таким образом, эта размерность равна

$$s = (l + \widetilde{æ}_1)^+ + \ldots + (l + \widetilde{æ}_n)^+.$$

Точно также число линейно независимых условий разрешимости задачи равно

$$s' = (-l - \widetilde{æ}_1)^- + \ldots + (-l - \widetilde{æ}_n)^-.$$

В частности, индекс $s-s'$ задачи равен

$$s - s' = nl + \operatorname{Ind} \widetilde{G}. \tag{3.10}$$

Убедимся, что формулы индекса (2.19) и (3.10) совпадают. Для этого достаточно показать, что индексы Коши матриц B и $\widetilde{G}$ связаны соотношением

$$\operatorname{Ind} \widetilde{G} = \frac{-n(n-1)}{2} + \operatorname{Ind} B. \tag{3.11}$$

В самом деле, поскольку

$$\det \widetilde{G} = \frac{\det Q^-(t)}{\det Q^+(t)} \det B,$$

достаточно убедиться, что

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\det Q^-(t)}{\det Q^+(t)}\bigg|_{\Gamma_j} = \frac{-n(n-1)}{2}, \tag{3.12}$$

где напомним, простые контура $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ составляют контур Γ.

Предположим сначала, что все контуры Γ_j в (2.1) ориентированы отрицательно по отношению к области D_0, т.е. против часовой стрелки. Тогда $Q^{\pm}(t) = 1,\ t \in \Gamma \setminus \partial D_0$ и

$$\det Q^+(t) = 1,\ \det Q^-(t) = (t - z_0)^{-n(n-1)/2}, \quad t \in \Gamma_j,\ 1 \le j \le m_0, \tag{3.13}$$

так что в этом случае равенство (3.12) очевидно. Если один из контуров $\Gamma_j,\ \ 1 \le j \le m_0$, ориентирован по часовой стрелке, то на этом контуре правые части двух равенств (3.13) меняются местами и меняет знак левая часть $j-$го слагаемого (3.12). Поэтому $j-$ое слагаемое в сумме (3.12) не меняется и, следовательно, формула (3.12) сохраняет свою силу для любой ориентации контура Γ.

Пусть в (2.3) матрица B верхне треугольна, т.е. $B_{ij} = 0$ при $i > j$. Поскольку матрица P в (1.5) также верхне- треугольна, этим свойством обладает и матрица $\widetilde{G} = (Q^+)^{-1} P^{-1} B P Q^-$. Для такого коэффициента

G каноническую матрицу можно построить явно по рекуррентной процедуре.

Теорема 3.2. *Пусть матрица* $G \in C^{\mu}(\Gamma)$ *верхне- треугольна, т.е.* $G_{ij} = 0$ *при* $i > j$, *и* $G_{ii}(t) \neq 0, \ \ t \in \Gamma, \ \ 1 \leq i \leq n$. *Тогда каноническая - матрица* X *также верхне -треугольна и ее частные индексы* $æ_i = \mathrm{Ind} G_{ii}$.

Доказательство. Предположим сначала, что все диагональные элементы $G_{ii} = 1$. матрицу X будем искать в виде $X = 1+Y$, где матрица функция $Y(z)$ исчезает на ∞ и ее элементы $Y_{ij} = 0$ при $i \geq j$. Тогда (3.1) переходит в $Y^+ = GY^- + G - 1$, или $Y^+ - Y^- = (G-1) + (G-1)Y^-$. Запишем это соотношение покоординатно

$$Y^+_{ij} - Y^-_{ij} = G_{ij} + \sum\nolimits_{i<l<j} G_{il} Y^-_{lj}, \quad i < j.$$

Таким образом, имеем последовательно равенства

$$Y^+_{n-1,n} - Y^-_{n-1,n} = G_{n-1,n}, \tag{3.14a}$$

$$\begin{gathered} Y^+_{n-2,n-1} - Y^-_{n-2,n-1} = G_{n-2,n-1}, \\ Y^+_{n-2,n} - Y^-_{n-2,n} = G_{n-2,n} + G_{n-2,n-1} Y^-_{n-1,n}, \end{gathered} \tag{3.14b}$$

$$\begin{gathered} Y^+_{n-3,n-2} - Y^-_{n-3,n-2} = G_{n-3,n-2}, \\ Y^+_{n-3,n-1} - Y^-_{n-3,n-1} = G_{n-3,n-1} + G_{n-3,n-2} Y^-_{n-2,n-1}, \\ Y^+_{n-3,n} - Y^-_{n-3,n} = G_{n-3,n} + G_{n-3,n-2} Y^-_{n-2,n} + G_{n-3,n-1} Y^-_{n-1,n}, \end{gathered} \tag{3.14c}$$

и т.д.

Поэтому с учетом теоремы 2.1 последовательно находим

$$Y_{n-1,n} = I G_{n-1,n}, \tag{3.15a}$$

$$\begin{gathered} Y_{n-2,n-1} = I G_{n-2,n-1}, \\ Y_{n-2,n} = I(G_{n-2,n} + G_{n-2,n-1} Y^-_{n-1,n}), \end{gathered} \tag{3.15b}$$

$$
\begin{aligned}
Y_{n-3,n-2} &= IG_{n-3,n-2}, \\
Y_{n-3,n-1} &= I(G_{n-3,n-1} + G_{n-3,n-2}Y^-_{n-2,n-1}), \\
Y_{n-3,n} &= I(G_{n-3,n} + G_{n-3,n-2}Y^-_{n-2,n} + G_{n-3,n-1}Y^-_{n-1,n}),
\end{aligned} \tag{3.15c}
$$

и т.д. В результате матрица Y полностью определится и матрица $X = 1 + Y$ является канонической с $æ_j = 0$ по отношению к треугольной матрице G с диагональными элементами $G_{ii} = 1,\ 1 \le i \le n$.

В общем случае треугольной матрицы G с произвольными диагональными элементами дело сводится к рассмотренному выше частному случаю путем ее представления в виде произведения

$$
G = G_{(1)}G_{(2)}, \quad G_{(1)} = \operatorname{diag}(G_{11}, \dots, G_{nn}), \tag{3.16}
$$

где диагональные элементы треугольной матрицы $G_{(2)}$ равны 1. Пусть $X_{(1)i}$ есть каноническая функция, отвечающая коэффициенту G_{ii}. Другими словами, в соответствии с (3.1), (3.2) она удовлетворяет соотношению $X^+_{(1)i} = G_{ii}X^-_{(1)i}$ и $X_{(1)i}(z)z^{æ_i} \to 1$ при $z \to \infty$, где $æ_i = \operatorname{Ind} G_{ii}$. Тогда диагональная матрица

$$
X_{(1)} = \operatorname{diag}(X_{(1)1}, \dots, X_{(1)n}) \tag{3.17}
$$

является $G_{(1)}$-канонической, т.е. удовлетворяет (3.1), (3.2) по отношению к $G_{(1)}$. Рассмотрим на Γ треугольную матрицу

$$
\widetilde{G}_{(2)} = (X^-_{(1)})^{-1} G_{(2)} X^-_{(1)}, \tag{3.18}
$$

диагональные элементы которой равны 1. Поэтому по доказанному выше существует каноническая матрица $X_{(2)}$, отвечающая этому коэффициенту, причем

$$
\lim_{z\to\infty} X_{(2)}(z) = 1.
$$

Утверждается, что канонической матрицей X для исходного коэффициента G является $X = X_{(1)}X_{(2)}$. В самом деле, равенство

$$X^+_{(1)}X^+_{(2)} = G_{(1)}G_{(2)}X^-_{(1)}X^-_{(2)}$$

с учетом равенства $X^+_{(1)} = G_{(1)}X^-_{(1)}$ переходит в $X^+_{(2)} = \widetilde{G}_{(2)}X^-_{(2)}$.

4. Частный случай для бианалитических функций

В качестве иллюстрации рассмотрим частный случай $n = 2$, когда матрица $B(t)$ верхне-треугольная, т.е.

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда задача линейного сопряжения (2.2), (2.3) принимает следующий вид:

$$|u(z)| = O(|z|^{l-1}), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right| = O(|z|^{l-2}) \quad \text{при} \quad z \to \infty, \tag{4.1}$$

$$u^+ - B_1 u^- - B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right)^- = f_1; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right)^+ - B_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right)^- = f_2. \tag{4.2}$$

Поскольку

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & \bar t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\bar t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при подстановке $U = P\phi$ задача (4.2) перейдет в задачу линейного сопряжения (2.4) с матричным коэффициентом

$$G(t) = \begin{pmatrix} G_1(t) & G_0(t) \\ 0 & G_2(t) \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

где $G_0(t) = B_0(t) + \bar t(B_1 - B_2)(t), G_1(t) = B_1(t), G_2(t) = B_2(t)$ и правой частью $g(t) = (f_1(t) - \bar t f_2(t), f_2(t))$. При этом условие (2.5) для аналитической в D вектор- функции $\phi = P^{-1}U \in C^\mu(\widehat{D})$ переходит в

$$\deg\phi_1 \le l - 1, \quad \deg\phi_2 \le l - 2. \tag{4.4}$$

В рассматриваемом случае диагональная матрица Q определяется равенством

$$Q = \mathrm{diag}(1, Q_0), \quad Q_0(z) = \begin{cases} 1, & z \in D \setminus D_0, \\ (z - z_0)^{-1}, & z \in D_0. \end{cases}$$

При подстановке $\phi = Q\widetilde{\phi}$ в свою очередь задача (2.4), (4.3) перейдет в задачу линейного сопряжения

$$\widetilde{\phi}^+ - \widetilde{G}\widetilde{\phi}^- = \widetilde{g}$$

с матричным коэффициентом $\widetilde{G} = (Q^+)^{-1}GQ^-$, правой частью $\widetilde{g} = (Q^+)^{-1}g$ и с условием на бесконечности $\deg\widetilde{\phi} \leq l - 1$. Матрица $\widetilde{G}$ имеет также аналогичный (4.3) треугольный вид. Как и в теореме 3.2, опуская волну в обозначениях, каноническую матрицу- функцию можем описать явно.

Лемма 4.1. *Пусть в матрице $G \in C^\mu(\Gamma)$ вида (4.3) функции G_1, G_2 обратимы и, соответственно, X_1, X_2 – отвечающие им канонические функции. Тогда отвечающая G каноническая матрица – функция дается формулой*

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_1 I\widetilde{G}_0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \quad \widetilde{G}_0 = (X_1^-)^{-1}X_2^- G_1^{-1}G_0. \tag{4.5}$$

Доказательство. В соответствии с доказательством теоремы 3.2 матрицу G представим в виде произведения $G_{(1)}G_{(2)}$ с сомножителями

$$G_{(1)} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}, \quad G_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & G_1^{-1}G_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда каноническую матрицу- функцию можно искать в виде $X = X_{(1)}X_{(2)}$, где матрица $X_{(1)}$ диагональна и составлена и из диагональных элементов

X_1, X_2, а $X_{(2)}$ представляет собой каноническую матрицу по отношению к коэффициенту (3.18), или в явном виде

$$\widetilde{G}_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{G}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{G}_0$ фигурирует в (4.5). Как видно из доказательства теоремы 3.2, отсюда

$$X_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & I\widetilde{G}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что завершает доказательство леммы.

Применяя лемму 4.1 к матрице $\widetilde{G} = (Q^+)^{-1}GQ^-$ и подставляя результат в теорему 3.1, можем вопрос разрешимости исходной задачи описать явно.

Рассмотрим еще более частный случай задачи (2.2), (2.3), когда $B_0 = 0$. Таким образом, функция $u(z) = \phi_1(z) + \bar{z}\phi_2(z)$ удовлетворяет краевому условию

$$u^+ - B_1 u^- = f_1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right)^+ - B_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right)^- = f_2, \tag{4.6}$$

Эту задачу будет решать рекуррентно, не строя каноническую матрицу -функцию. Пусть $æ_k = \operatorname{Ind} B_k,\ k = 1, 2$, есть индекс Коши функции B_k и пусть скалярная каноническая функция X_k отвечает коэффициенту B_k. Положим

$$A(t) = \frac{\bar{t}[B_2(t) + B_1(t)]}{2B_2(t)}, \quad B(t) = \frac{\bar{t}[B_2(t) - B_1(t)]}{2B_2(t)}, \quad C(t) = \frac{B(t)X_1^+(t)}{X_0^+(t)}, \tag{4.7}$$

и введем сингулярный оператор

$$(Nf_2)(t_0) = A(t_0)f_2(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{X_2^+(t_0)}{X_2^+(t)}\frac{f_2(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{4.8}$$

Для целого n обозначим $P(n)$ класс многочленов $p(t)$ степени $\deg p \leq n-1$, полагая $P(n) = 0$ для $n \leq 0$. Таким образом, $\dim P(n) = \max(0, n)$.

Удобно еще для целого m ввести подпространство $P(n,m)$ всех многочленов $p \in P(n)$, для которых

$$\langle q, Cp\rangle = 0, \quad q \in P(m), \tag{4.9}$$

где здесь и ниже для краткости

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt.$$

Это подпространство возникает в следующей ситуации.

Лемма 4.2. *Пусть функция $f \in C(\Gamma)$ удовлетворяет условию*

$$\langle f, p\rangle = \langle q, Cp\rangle, \quad p \in P(n), \tag{4.10}$$

для некоторого многочлена $q \in P(m)$. Тогда это условие равносильно

$$\langle f, p\rangle = 0, \quad p \in P(n,m).$$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что числа m, n положительны. Разложим многочлены p и q по базисным функциям $e_i(t) = t^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, в явном виде

$$p = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad q = \sum\nolimits_{j=1}^{m} y_j e_j,$$

с некоторыми $x_i, y_j \in \mathbb{C}$. Тогда (4.10) можем записать в виде тождества

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \langle f, e_i\rangle = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \sum\nolimits_{j=1}^{m} x_i y_j \langle e_j, Ce_i\rangle$$

по $x \in \mathbb{C}^n$, что равносильно разрешимости системы линейных уравнений

$$\sum\nolimits_{j=1}^{m} \langle e_j, Ce_i\rangle y_j = \langle f, e_i\rangle, \quad 1 \le i \le n.$$

Очевидно, эта система разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть удовлетворяет условию ортогональности

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \langle f, e_i\rangle \xi_i = 0 \tag{4.11}$$

всем решениям $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ союзной однородной системы

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \langle e_j, Ce_i \rangle \xi_i = 0, \quad 1 \le j \le m. \tag{4.12}$$

Полагая $p = \sum_1^n \xi_i e_i$, равенство (4.11) можем записать в форме $\langle f, p \rangle = 0$ для всех многочленов $p \in P(n)$, удовлетворяющих условию $\langle e_j, Cp \rangle = 0$, $1 \le j \le m$, или, что равносильно, условию (4.9).

Из доказательства леммы видно, что размерность пространства $P(n, m)$ совпадает с числом линейно независимых решений однородной системы (4.12). Таким образом,

$$\dim\, P(n, m) = n - \operatorname{rang} C(n, m), \tag{4.13}$$

где матрица $C(n, m) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ определяется элементами $C_{ij} = \langle e_j, Ce_i \rangle$. Очевидно, эта матрица имеет следующую структуру

$$C(n, m) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{m+n-1} \end{pmatrix}, \quad c_k = \int_\Gamma C(t) t^{k-1} dt.$$

Сформулируем основной результат о характере разрешимости рассматриваемой задачи (4.1), (4.6).

Теорема 4.1. *В классе (4.1) задача (4.6) разрешима тогда и только тогда, когда ее правые части f_1, f_2 удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\begin{gathered} \langle f_2, (X_2^+)^{-1} q_2 \rangle = 0, \quad q_2 \in P(-æ_2 - l + 1), \\ \langle f_1 - N f_2, (X_1^+)^{-1} q_1 \rangle = 0, \quad q_1 \in P(-æ_1 - l, æ_2 + l - 1). \end{gathered} \tag{4.14}$$

При выполнении этих условий все решения задачи описываются *формулой*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{f_1(t)-(Nf_2)(t)}{t-z}+\frac{\bar zX_2(z)}{X_2^+(t)}\frac{f_2(t)}{t-z}\right]dt-$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{B(t)X_2^+(t)p_2(t)}{t-z}\right]dt+X_1(z)p_1(z)+\bar zX_2(z)p_2(z) \quad (4.15)$$

с произвольными $p_1\in P(æ_1+l)$ *и* $p_2\in P(æ_2+l-1)$.

Доказательство. Задачу (4.6) можно свести к эквивалентной системе из пары задач для двух аналитических функций:

$$\phi_2^+-B_2\phi_2^-=f_2,\quad \phi_1^+-B_1\phi_1^-=f_1^*, \quad (4.16)$$

где положено $f_1^*(t)=f_1(t)-\bar t[\phi_2^+(t)-B_1(t)\phi_2(t)]$. Эти задачи рассматриваются в классе функций (4.4) с соответствующими оценками

$$|\phi_1(z)|\le C|z|^{l-1}, \quad (4.17_1)$$

$$|\phi_2(z)|\le C|z|^{l-2}, \quad (4.17_2)$$

в окрестности бесконечности.

Из общих результатов (см. п. 3) о задаче линейного сопряжения следует, что первая задача для ϕ_2 разрешима в классе (4.17_2) тогда и только тогда, когда

$$\langle f_2,(X_2^+)^{-1}q_2\rangle=0,\quad q_2\in P(-æ_2-l+1), \quad (4.18)$$

и при выполнении этих условий все решения задачи даются формулой

$$\phi_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{X_2(z)}{X_2^+(t)}\frac{f_2(t)dt}{t-z}+X_2(z)p_2(z),\quad p_2\in P(æ_2+l-1). \quad (4.19)$$

Пользуясь этой формулой, вычислим функцию f_1^*, которую можно записать в виде

$$f_1^*(t)=f_1(t)-\bar tf_2(t)-\bar t[B_2(t)-B_1(t)]\phi_2^-(t). \quad (4.20)$$

По формуле Сохоцкого – Племеля (2.7), примененной к интегралу типа Коши в (4.19), имеем:

$$2G_2(t_0)\phi_2^-(t_0) = -f_2(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{X_2^+(t_0)}{X_2^+(t)}\frac{f_2(t)dt}{t-t_0} + 2X_2^+(t_0)p_2(t_0).$$

Подставляя это выражение в (4.20), в обозначениях (4.7), (4.8) получим

$$f_1^*(t) = f_1(t) - (Nf_2)(t) - 2B(t)X_2^+(t)p_2(t). \tag{4.21}$$

Как и выше вторая задача в (4.16) разрешима в классе (4.17_1) тогда и только тогда, когда

$$\langle f_1^*, (X_1^+)^{-1}q_1\rangle = 0, \quad q_1 \in P(-æ_1 - l), \tag{4.22}$$

и при выполнении этих условий все ее решения даются формулой

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{X_1(z)}{X_1^+(t)}\frac{f_1^*(t)dt}{t-z} + X_1(z)p_1(z), \quad p_1 \in P(æ_1 + l). \tag{4.23}$$

Рассмотрим подробнее условие (4.22), которое согласно (4.7), (4.17) можно переписать в форме тождества

$$\langle f_1 - Nf_2, (X_1^+)^{-1}q_1\rangle = 2\langle p_2, Cq_1\rangle, \quad q_1 \in P(-æ_1 - l), \tag{4.24}$$

для некоторого многочлена $p_2 \in P(æ_2 + l - 1)$. На основании леммы 4.2, где роль f играет функция $(2X_1^+)^{-1}(f_1 - Nf_2)$ и буквы p, q следует переменить местами, условие (4.24) равносильно второму условию ортогональности в (4.14) и, следовательно, условия (4.18), (4.24) можно заменить на (4.14). Поскольку подстановка (4.19) и (4.21), (4.23) в выражение $u(z) = \phi_1(z) + \bar{z}\phi_2(z)$ приводит к формуле (4.15), тем самым доказательство теоремы завершено.

Из теоремы 4.1 следует, что число линейно независимых решений однородной задачи равно $\dim P(æ_1+l)+\dim P(æ_2+l-1)$, а число линейно независимых условий ее разрешимости равно $\dim P(-æ_1-l, æ_2+l-1)+$

$\dim P(-æ_2 - l + 1)$. Поэтому индекс æ задачи дается формулой

$$æ = \dim P(æ_1+l)+\dim P(æ_2+l-1)-\dim P(-æ_1-l, æ_2+l-1)-\dim P(-æ_2-l+1).$$

С учетом (4.13) отсюда

$$æ = æ_1 + æ_2 + 2l - 1 + s, \quad s = \mathrm{rang} C(-æ_1 - l, æ_2 + l - 1).$$

Конечно, в этом равенстве следует положить $s = 0$, если одно из чисел $-æ_1 - l, æ_2 + l - 1$ отрицательно.

5. Односторонние краевые задачи

В предыдущих разделах рассматривались задачи сопряжения, которые носят двусторонний характер, поскольку граничные значения берутся с обеих сторон контура. Пусть область D ограничена гладким контуром Γ, которая может быть как конечной (т.е. лежать внутри некоторого круга), так и бесконечной. Как обычно, связные компоненты Γ обозначим $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, они являются граничными для связных компонент $D'_1, \dots, D'_m$ открытого множества $D' = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, точнее $\partial D'_j = \Gamma_j$. Удобно считать, что в случае конечной области D простой контур Γ_m служит границей бесконечной компоненты D'_m.

В дальнейшем предполагается, что контур Γ ляпуновский и принадлежит классу $C^{1,\nu}$ с некоторым $0 < \nu < 1$. Последнее по определению означает, что производная естественной параметризации $z = \gamma(s)$ (параметром длины дуги) принадлежит классу C^ν. Этот контур Γ ориентируем положительно по отношению к D, т.е. обход контура в положительном направлении оставляет эту область слева. Соответственно для граничных значений функции $u \in C(\overline{D})$ используется символ $+$.

Пусть задана $n \times n-$ матрица- функция $B(t) = (B_{ij}(t))_1^n$ на контуре Γ из класса $C^\mu(\Gamma)$, определитель которой всюду отличен от нуля.

Рассмотрим для полианалитической функции u из класса

$$U_j = \frac{\partial^{j-1} u}{\partial \bar{z}^{j-1}} \in C^\mu(\overline{D}), \quad 1 \le j \le n, \tag{5.1}$$

краевую задачу типа Римана – Гильберта

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \left(\frac{\partial^{j-1} u}{\partial \bar{z}^{j-1}} \right)^+ = f_i, \quad 1 \le i \le n. \tag{5.2}$$

В случае бесконечной области D к (5.1) добавляется соответствующее поведение

$$U_j(z) = O(|z|^{l-j}) \text{ при } z \to \infty, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5.3}$$

на бесконечности.

Рассмотрим сначала случай, когда область D конечна. При подстановке $U = P\phi$ задача (5.1), (5.2) перейдет в классическую задачу Римана – Гильберта

$$\mathrm{Re}\, G\phi^+ = f, \tag{5.4}$$

для аналитической в D вектор- функции $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in C^\mu(\overline{D})$ с матричным коэффициентом $G = BP$.

Для решения этой задачи воспользуемся классическим результатом Н.И. Мусхелишвили [4] о представлении аналитической в D функции интегралом типа Коши (2.6) с действительной плотностью.

Теорема 5.1. *Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и ограничивает конечную область D.*

Тогда любая аналитическая в D вектор- функция $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$, единственным образом представима в виде

$$\phi = I\varphi + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.5}$$

где $n-$ вектор- функция $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ вещественна и удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t = 0, \quad 1 \le j \le m-1, \tag{5.6}$$

где $d_1 t$ означает элемент длины дуги.

Конечно, в случае $m = 1$ простого контура условия (5.6) в этой теореме отсутствуют.

Подставляя представление (5.5) в краевое условие (5.4) и пользуясь формулами Сохоцкого - Племеля (2.7), приходим к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Re} G(\varphi + S\varphi) - 2(\operatorname{Im} G)\xi = 2f \tag{5.7}$$

относительно вещественной вектор- функции $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$, которая вместе с дополнительными условиями (5.6) эквивалентна рассматриваемой задаче. Удобно вместе с сингулярным оператором Коши (2.8) ввести оператор $\overline{S}\varphi = \overline{S\overline{\varphi}}$, где черта справа означает комплексное сопряжение (комплекснозначных) функций. В явном виде

$$(\overline{S}\varphi)(t_0) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)\overline{dt}}{\bar{t} - \bar{t_0}}, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{5.8}$$

В этих обозначениях уравнение (5.7) можем переписать в виде

$$[G(\varphi + S\varphi) + \overline{G}(\varphi + \overline{S}\varphi)]/2 - 2(\operatorname{Im} G)\xi = 2f \tag{5.9}$$

Важно отметить, что если оператор уравнения (5.7) линеен над полем $\mathbb{R}$, то оператор уравнения (5.9) линеен над полем $\mathbb{C}$. При этом операторы свойством фредгольмовости обладают одновременно, причем их индексы, рассматриваемые, соответственно, над полем $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, совпадают.

Следующая лемма описывает связь между сингулярными операторами (2.8) и (5.8).

Лемма 5.1. *Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$. Тогда оператор $K = S + \overline{S}$ представим в виде*

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{k(t_0, t)\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{5.10}$$

с некоторой функцией $k(t_0, t) \in C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$, которая тождественно равна нулю при $t = t_0$.

Доказательство. Рассмотрим на Γ некоторую дугу Γ_0 с естественной параметризацией $\gamma(s)$, $0 \le s \le l$, где l – длина всей дуги. По условию производная $\gamma'(s) \in C^\nu[0, l]$. Поскольку

$$\gamma(s) - \gamma(s_0) = (s - s_0) \int_0^1 \gamma'[s\tau + s_0(1 - \tau)]d\tau,$$

функция

$$q(s_0, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0} \in C^\nu([0, l] \times [0, l]). \tag{5.11}$$

Подстановка параметризации $t = \gamma(s)$ в сингулярные операторы (2.8) и (5.8), где интегралы берутся по дуге Γ_0, дает выражение

$$(K_0\varphi)[\gamma(s_0)] = \frac{1}{\pi i} \int_0^l \left[\frac{\gamma'(s)}{q(s_0, s)} - \frac{\overline{\gamma'(s)}}{\overline{q(s_0, s)}} \right] \frac{\varphi[\gamma(s)]ds}{s - s_0}, \quad 0 \le s_0 \le l,$$

где K_0 получается из (5.10) заменой Γ на Γ_0. Следовательно, для функции $\widetilde{k}(s_0, s) = k[\gamma(s_0), \gamma(s)]$ имеем выражение

$$\widetilde{k}(s_0, s) = \frac{\gamma'(s)}{q(s_0, s)} - \frac{\overline{\gamma'(s)}}{\overline{q(s_0, s)}},$$

так что с учетом (5.11) эта функция принадлежит $C^\nu([0, l] \times [0, l])$ и, очевидно, обращается в нуль при $s = s_0$. Следовательно, аналогичным свойством обладает и функция $k(t_0, t)$, рассматриваемая для $t_0, t \in \Gamma_0$. Поскольку дуга $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ была выбрана произвольно, лемму можно считать доказанной.

С помощью леммы 5.1 и теоремы 2.3 нетрудно уже изучить вопрос о фредгольмовости (над полем $\mathbb{R}$) задачи (5.1), (5.2) для уравнения (1.1).

Теорема 5.2. *Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$, ограничивает конечную область D и составлен из m компонент. Пусть матрица - функция $B(t) \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, и $\det B(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.*

Тогда задача (5.1), (5.2) фредгольмова и ее индекс æ дается формулой

$$æ = -2\mathrm{Ind}\, B + (2-m)n. \tag{5.12}$$

Кроме того, по отношению к билинейной форме

$$(\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)d_1 t, \tag{5.13}$$

где $d_1 t$ означает элемент длины дуги, коядро задачи содержится в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ вещественных функций вектор- функций.

Заметим, что теорему можно переформулировать в виде трех следующих альтернатив Фредгольма:

1) Однородная задача (5.2) в классе (5.1) имеет конечное число s линейно независимых (над полем $\mathbb{R}$) решений $u_j,\ 1 \le j \le s$;

2) Неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда для некоторого числа s' линейно независимых вещественных вектор- функций $h_j \in C^\mu(\Gamma)$ выполнены условия ортогональности $(f, h_j) = 0,\ 1 \le j \le s'$;

3) Индекс задачи $æ = s - s'$ дается формулой (5.12).

Доказательство. В силу леммы 5.1 оператор

$$2N\varphi = G(\varphi + S\varphi) + \overline{G}(\varphi + \overline{S}\varphi) \tag{5.14}$$

можем записать в виде $2N = G(1+S) + \overline{G}(1-S) + \overline{G}K$. Поэтому к системе (5.9), (5.6), рассматриваемой в классе $C^\mu(\Gamma)$ комплексных вектор- функций, можно применить теорему 2.3. Нужно только учесть, что векторные соотношения (5.6) можно расписать как $n(m-1)$ скалярных соотношений. Следовательно, на основании этой теоремы оператор этой системы фредгольмов и его индекс æ дается формулой

$$æ = \mathrm{Ind}\,(G^{-1}\overline{G}) + n - (m-1)n.$$

Поскольку определители матриц $G = BP$ и B совпадают и $\operatorname{Ind}\overline{G} = -\operatorname{Ind} B$, это равенство можно записать в форме (5.12).

Таким образом, для этой системы выполнены следующие альтернативы Фредгольма.

1) Класс X пар (φ, ξ) состоящий из комплексных вектор- функций $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ и $\xi \in \mathbb{C}^n$, которые удовлетворяют однородному уравнению (5.9) (с $f = 0$) и соотношениям (5.6), конечномерен.

2) Существует такое конечномерное пространство $Y \subseteq C^\mu(\Gamma)$ комплекснозначных вектор- функций, что условия ортогональности $\langle f, \psi \rangle = 0,\ \ \psi \in X'$, необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной системы (5.9), (5.6).

3) Разность $\dim X - \dim X' = æ$.

Комплексный дифференциал dt в выражении (2.10) можно записать в виде $dt = e(t)d_1 t$, где $e(t) \in \mathbb{C}$ означает единичный касательный вектор в точке t контура Γ. Поэтому формы (2.10) и (5.13) связаны соотношением $\varphi, \psi\rangle = (\varphi, e\psi)$. Следовательно, обозначая пространство $\{e\psi,\ \psi \in X'\}$ снова X', утверждение 2) можем формулировать по отношению к форме (5.13).

Из выражения (5.14) видно, что оператор N обладает свойством

$$\overline{N\varphi} = N\overline{\varphi}. \tag{5.15}$$

Поэтому вместе с $\varphi \in X$ классу X принадлежит и комплексно сопряженная вектор- функция $\overline{\varphi}$. Аналогичным свойством обладает и коядро X'.

В самом деле, по определению коядра функция $\psi \in X'$ тогда и только тогда, когда имеет место тождество

$$(N\varphi - 2(\mathrm{Im} G)\xi, \psi) = 0,$$

справедливое для всех комплексных функций $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, удовлетворяющих (5.6), и $\xi \in \mathbb{C}^n$. Переходя к комплексно сопряженному равенству, с учетом (5.15) можем записать

$$(N\overline{\varphi} - 2(\mathrm{Im}G)\overline{\xi}, \overline{\psi}) = 0.$$

Поэтому вместе с ψ классу X' принадлежит и функция $\overline{\psi}$.

Таким образом, в классах X и X' можем выбрать базисы, состоящие из вещественных вектор- функций. Поэтому утверждения 1) – 3), в которых форма (2.10) заменена на (5.13), сохраняют свою силу и для вещественных вектор- функций, что завершает доказательство теоремы.

Случай бесконечной области с некоторыми незначительными изменениями рассматривается по той же схеме. Как и выше подстановка $U = P\phi$ переводит задачу (5.1) – (5.3) в задачу Римана – Гильберта (5.4) для аналитической в D вектор- функции $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in C^\mu(\overline{D})$ с матричным коэффициентом $G = BP$, которая на бесконечности удовлетворяет условию

$$\deg \phi_j \le l - j, \quad 1 \le j \le n. \tag{5.16}$$

С небольшой поправкой аналог теоремы Мусхелишвили 5.1 для бесконечной области также имеет место [4].

Теорема 5.3. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и ограничивает бесконечную область* D.

Тогда любая аналитическая в D *вектор- функция* $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$, *исчезающая на бесконечности, единственным образом представима в виде*

$$\phi = I\varphi, \tag{5.17}$$

где $n-$ *вектор- функция* $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ *вещественна и удовлетворяет усло-*

виям

$$\int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t = 0, \quad 1 \le j \le m. \tag{5.18}$$

Как и выше совместно с леммой 5.1 и теоремой 2.3 отсюда приходим к следующему результату.

Теорема 5.4. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$, *ограничивает бесконечную область* D *и составлен из* m *компонент. Пусть матрица - функция* $B(t) \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *и* $\det B(t) \ne 0$, $t \in \Gamma$.

Тогда задача (5.1) – (5.3) фредгольмова, ее коядро содержится в $C^\mu(\Gamma)$ *и индекс* æ *дается формулой*

$$æ = -2\mathrm{Ind}\, B - mn - \sum_{j=1}^{n} (l - j + 1)^-, \tag{5.19}$$

где напомним $2s^\pm = |s| \pm s$.

Доказательство осуществляется с помощью тех же рассуждений, нужно только в соответствии с теоремой 5.3 вместо (5.9) рассматривать уравнение

$$G(\varphi + S\varphi) + \overline{G}(\varphi + \overline{S}\varphi) = 4f$$

с дополнительными условиями (5.18), к которым нужно добавить условия (5.16) для интеграла типа Коши $\phi = I\varphi$. Согласно (2.9) их можно выразить в форме

$$\int_\Gamma \varphi_j(t) q_j(t) dt = 0, \quad \deg q_j \le -(l - j + 1) - 1, \ 1 \le j \le n.$$

Поскольку при заданном j число линейно независимых этих условий равно $(l - j + 1)^-$, как и выше отсюда приходим к формуле индекса (5.19).

Отметим, что в случае $m = 1$ простого контура задача с помощью конформного отображения сводится к единичному кругу. Продолжая функцию ϕ во внешность этого круга по формуле

$$\phi(z) = \overline{\phi(1/\bar{z})}, \quad |z| > 1,$$

далее обычным образом (см. Н.И. Мусхелишвили [4]) задачу можем редуцировать к соответствующей задаче линейного сопряжения. Согласно п. 3 с помощью канонической матрицы последняя задача допускает эффективное решение. Конечно в случае бесконечной области условия (5.3) перейдут в соответствующее поведение в центре единичного круга.

ГЛАВА 2. Краевые задачи общего вида

6. Представление решений

Запишем уравнение (1.1) в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)^n u = 0,$$

или, в развернутом виде

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} - \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^n u}{\partial y^{k-1}\partial x^{n-k+1}} = 0 \tag{6.1}$$

с коэффициентами

$$a_k = -\binom{n}{n-k+1}(-i)^{n-k+1}.$$

Рассмотрим $n-$ вектор U, составленный из частных производных $(n-1)-$ го порядка решения уравнения (6.1), т.е.

$$U = (U_1, \ldots, U_n), \quad U_k = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{k-1}\partial x^{n-k}}. \tag{6.2}$$

Очевидно, компоненты вектора U удовлетворяют очевидным соотношениям

$$\frac{\partial U_k}{\partial y} - \frac{\partial U_{k+1}}{\partial x} = 0, \quad 1 \le k \le n-1. \tag{6.3}$$

Следующее общее утверждение показывает, что верно и обратное.

Лемма 6.1. *Пусть $n-$ вектор- функция U непрерывно дифференцируема в односвязной области D на плоскости и удовлетворяет соотношениям (6.3). Тогда найдется такая скалярная функция $u \in C^n(D)$, что ее частные производные $(n-1)-$ го порядка связаны с U равенством (6.2).*

Доказательство. Пусть в области D задана пара функций $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^k(D)$, $k \ge 1$, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x},$$

и точка $z_0 \in D$ фиксирована. Тогда поскольку область D односвязна, криволинейный интеграл

$$\varphi_0(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi_1 dx + \varphi_2 dy, \quad z \in D,$$

не зависит от пути интегрирования и определяет функцию $\varphi_0 \in C^{k+1}(D)$, для которой

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = \varphi_2,$$

причем $\varphi_0(z_0) = 0$. Эту операцию обозначим $\varphi_0 = \mathcal{D}^{(-1)}(\varphi_1, \varphi_2)$.

Исходя теперь из $n-$вектора U, построим семейство функций $U_{kj} \in C^{n-k+1}(D)$, $1 \le j \le k \le n$, полагая $U_{nj} = U_j$, $1 \le j \le n$, и далее по индукции

$$U_{k,j} = \mathcal{D}^{(-1)}(U_{k+1,j}, U_{k+1,j+1}), \quad 1 \le j \le k. \tag{6.4}$$

Утверждается, что функция $u = U_{11} \in C^n(D)$ является искомой, т.е. удовлетворяет соотношениям (6.3).

В самом деле, по определению (6.4) и операции $\mathcal{D}^{(-1)}$ последовательно имеем:

$$\frac{\partial^{n-1} U_{11}}{\partial x^{n-1}} = \frac{\partial^{n-2} U_{21}}{\partial x^{n-2}} = \ldots = U_{n1},$$

$$\frac{\partial^{n-1} U_{11}}{\partial x^{n-2} \partial y} = \frac{\partial^{n-2} U_{22}}{\partial x^{n-2}} = \ldots = U_{n2},$$

$$\frac{\partial^{n-1} U_{11}}{\partial x^{n-3} \partial y^2} = \frac{\partial^{n-2} U_{22}}{\partial x^{n-3} \partial y} = \frac{\partial^{n-3} U_{33}}{\partial x^{n-3}} = \ldots = U_{n3},$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial^{n-1} U_{11}}{\partial x \partial y^{n-2}} = \frac{\partial^{n-2} U_{21}}{\partial y^{n-2}} = \ldots = U_{n,n-1},$$

$$\frac{\partial^{n-1} U_{11}}{\partial y^{n-1}} = \frac{\partial^{n-2} U_{22}}{\partial y^{n-2}} = \ldots = U_{n,n},$$

что завершает доказательство леммы.

Построенную в лемме операцию обозначим $u = \mathcal{D}^{(1-n)} U$. Очевидно, она переводит класс $C^1(D)$ вектор- функций U со свойством (6.3) на класс $C^n(D)$ скалярных функций, причем все частные производные функции u до $(n-2)-$ го порядка включительно в точке z_0 обращаются в нуль:

$$\frac{\partial^s(\mathcal{D}^{(1-n)}U)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}(z_0)=0,\quad 1\le j\le s\le n-2.$$

Таким образом, любая функция $u\in C^n(D)$ единственным образом представима в виде

$$u=\mathcal{D}^{(1-n)}U+p, \tag{6.5}$$

где $n-$ вектор- функция $U\in C^1(D)$ удовлетворяет условию (6.3), а скалярная функция $p(z)$ является многочленом двух переменных x,y степени не выше $n-2$. Класс таких многочленов обозначим $\mathcal{P}_{n-2}$, его размерность легко вычисляется по формуле

$$\dim\mathcal{P}_{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}. \tag{6.6}$$

Особо отметим случай, когда область D ограничена простым контуром и бесконечна, т.е. лежит вовне этого контура. Эта область не является односвязной, однако если в дополнение к (6.3) вектор функция U подчинена условию

$$U(z)=O(|z|^{-n})\quad \text{при}\quad z\to\infty, \tag{6.7}$$

то лемма сохраняет свою силу. В этом случае в качестве точки z_0 в определении операции $\mathcal{D}^{(-1)}$ можно взять $z_0=\infty$, понимая криволинейный интеграл как несобственный.

В обозначениях (6.2) уравнение (6.1) запишется в форме

$$\frac{\partial U_n}{\partial y}-\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{\partial U_k}{\partial x}=0.$$

Совместно с (6.3) в результате приходим к векторному равенству

$$\frac{\partial U}{\partial y}-A\frac{\partial U}{\partial x}=0 \tag{6.8}$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет так называемую фробениусовую нормальную форму (см. А.И. Мальцев [42]) и ее характеристический многочлен дается равенством

$$\det(z - A) = z^n - \sum\nolimits_{k=1}^{n} a_k z^{k-1},$$

или, с учетом выражения для a_k в (6.1), равенством $\det(z-A) = (z-i)^n$. Таким образом,

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} a_k z^{k-1} = z^n - (z-i)^n. \tag{6.9}$$

Убедимся, что жорданова форма этой матрицы состоит из одной клетки Жордана

$$J = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Другими словами, найдется обратимая матрица T, приводящая A к жордановой форме J т.е. удовлетворяющая соотношению

$$T^{-1}AT = J. \tag{6.11}$$

Условимся под $T_{(k)}$ понимать $k-$ый столбец матрицы B, он представляет собой вектор $(T_{1k}, \ldots, T_{nk})$.

Лемма 6.2. *Соотношению (6.11) удовлетворяет матрица T со столбцами*

$$T_{(1)} = h(i),\ T_{(2)} = h'(i), \ldots, T_{(n)} = \frac{1}{(n-1)!} h^{(n-1)}(i), \tag{6.12}$$

где положено $h(z) = (1, z, z^2, \ldots, z^{n-1})$, которая, очевидно, треугольна и обратима. В явном виде

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ i^2 & 2i & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ i^{n-1} & (n-1)i^{n-2} & [(n-1)(n-2)/2]i^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Согласно (6.9) можем написать

$$Ah(z) = zh(z) - g(z), \quad g(z) = (0, \ldots, 0, (z-i)^n).$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$\frac{1}{k!}[zh(z)]^{(k)} = \frac{1}{(k-1)!} h^{(k-1)}(z) + \frac{z}{k!} h^{(k)}(z), \quad k \geq 1.$$

Поскольку $g^{(k)}(i) = 0,\ 1 \leq k \leq n-1$, отсюда

$$\frac{1}{k!} A h^{(k)}(i) = \frac{1}{(k-1)!} h^{(k-1)}(i) + \frac{i}{k!} h^{(k)}(i).$$

В обозначениях (6.12) эти соотношения как раз означают матричное равенство $AT = TJ$, т.е. соотношение (6.11).

Остается заметить, что эта матрица нижне- треугольна и ее диагональные элементы равны единице, так что $\det T = 1$.

Из леммы 6.2 следует, что подстановка

$$U = T\phi \tag{6.13}$$

переводит (6.8) в систему

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{6.14}$$

для вектор- функции $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$. По причине, которые будут ясны в следующем разделе, решения этой системы называем $J-$ аналитическими функциями или функциями, аналитическими по Дуглису.

7. J- аналитические функции

Рассмотрим подробнее систему (6.14), которая эллиптична и которая в случае скалярной матрицы $J = i$ определяет обычные аналитические функции. Для ганкелевой матрицы J в рамках так называемых гиперкомплексных чисел эта система впервые была изучена в [32]. Интерес к ней вызван главным образом тем, что решения эллиптических систем второго порядка очень просто выражаются через вектор- функции ϕ.

Как показано в [38], все основные факты теории аналитических функций, основанные на интеграле Коши, распространяются и на функции, аналитические по Дуглису. Основной принцип распространения заключается в замене комплексного числа $z = x + iy$ на матрицу

$$z_J = x1 + yJ, \tag{7.1}$$

где 1 означает здесь единичную матрицу и J – клетку Жордана (6.10). В явном виде

$$z_J = \begin{pmatrix} z & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z & y & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Очевидно, матрицу z_J можно представить в виде суммы скалярной матрицы $z = z1$ и $y\Delta$, где Δ означает клетку Жордана, отвечающую нулевому собственному значению. Поэтому если скалярная функция $f(u)$ аналитична в окрестности точки z – единственного собственного числа матрицы z_J, то матрицу $f(z_J)$ – значение этой функции от матрицы z_J, можно определить по формуле (см. А.И. Мальцев [42]):

$$f(z_J) = f(z) + yf'(z)\Delta + \ldots + \frac{y^{n-1}f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}\Delta^{n-1},$$

или, в явном виде,

$$f(z_J) = \begin{pmatrix} f(z) & yf'(z) & y^2f''(z)/2 & \cdots & y^{n-1}f^{(n-1)}(z)/(n-1)! \\ 0 & f(z) & yf'(z) & \cdots & y^{n-2}f^{(n-2)}(z)/(n-2)! \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & yf'(z) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(z) \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

В частности, для $f(u) = u^{-1}$ это равенство дает выражение для обратной матрицы z_J^{-1}. Отсюда легко вывести, что для любого целого k имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} dt_J t_J^k = \begin{cases} 1, & k = -1, \\ 0, & k \neq -1. \end{cases} \quad (7.4)$$

Роль интеграла типа Коши для $J-$ аналитических функций играет интеграл

$$(I_J\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma dt_J(t-z)_J^{-1}\varphi(t), \quad z \in D, \quad (7.5)$$

где аналогично (7.1) выражение dt_J означает матричный дифференциал $d(\mathrm{Re}t)1 + d(\mathrm{Im}t)J$. Соответственно матричное выражение под интегралом, действующее на $n-$вектор $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, стоит впереди этого вектора.

Напомним [38] основные сведения, касающиеся системы Дуглиса. Для любое-го ее решения ϕ, непрерывного в замкнутой области $\overline{D}$ (и допускающее поведение $\phi(z) = o(|z|^{-1})$ при $z \to \infty$ в случае бесконечной области) справедливо равенство

$$\int_\Gamma dt_J \phi^+(t) = 0,$$

которое служит аналогом теоремы Коши для обычных аналитических функций. Отсюда обычным образом с использованием формулы (7.4) выводится, что любое решение ϕ системы (7.1), непрерывное в замкнутой области $\overline{D}$ (и исчезающее на бесконечности в случае бесконечной области) представляется обобщенной формулой Коши

$$\phi(z) = (I_J \phi^+)(z), \quad z \in D. \tag{7.6}$$

Как и для классических аналитических функций отсюда следует, что в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ функция ϕ раскладывается в равномерно сходящийся обобщенный ряд Тейлора

$$\phi(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (z - z_0)_J^k \phi^{(k)}(z_0), \quad \phi^{(k)} = \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}.$$

По этой причине решения системы (6.13) называем кратко $J-$аналитическими функциями.

Если область D бесконечна и $J-$аналитическая функция ϕ имеет поведение $O(|z|^{æ-1})$ при $z \to \infty$, то в окрестности бесконечности эта функция раскладывается в аналогичный степенной ряд

$$\phi(z) = \sum_{k \leq æ-1} z_J^k c_k, \quad c_k \in \mathbb{C}^n.$$

Конечные суммы аналогичного вида

$$p(z) = \sum_{k=0}^{æ-1} z_J^k c_k$$

естественно назвать $J-$ аналитическими многочленами степени $\deg p \le$ æ -1. Класс таких многочленов обозначим $\mathcal{P}_{J,æ-1}$, очевидно, его размерность вычисляется по формуле

$$\dim \mathcal{P}_{J,æ-1} = næ. \tag{7.7}$$

Как обычно, многочлены отрицательной степени полагаются равными нулю.

Легко убедиться, что для интеграла типа Коши (7.5) справедливо аналогичное (2.9) разложение

$$(I_J\varphi)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z_J^{-k-1} c_k, \quad c_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma t_J^k dt_J \varphi(t).$$

Граничные свойства этого интеграла в классе Гельдера C^μ подробно изучены [43, 44] и для них справедлив результат, аналогичный теореме 2.1.

Теорема 7.1. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и* $D = \mathbb{C}\setminus\Gamma$. *Тогда если вектор- функция* $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *то* $J-$ *аналитическая в* D *функция* $\phi = I_J\varphi$ *исчезает на бесконечности, принадлежит классу* $C^\mu(\widehat{D})$ *и для ее граничных значений справедливы формулы Сохоцкого – Племеля*

$$2\phi^\pm = \pm\varphi + S_J\varphi, \tag{7.8}$$

с сингулярным интегралом Коши

$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma dt_J (t-t_0)_J^{-1}\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma. \tag{7.9}$$

При этом I_J *как линейный оператор ограничен* $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\widehat{D})$.

Верно и обратное – любая $J-$*аналитическая в* D *функция* $\phi \in C^\mu(\widehat{D})$, *имеющая поведение* $\phi(z) = O(|z|^{æ-1})$ *при* $z \to \infty$ *с некоторым целым* æ, *единственным образом представима в виде* $\phi = I_J\varphi + p$ *с плотностью* $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ *и* $J-$ *аналитическим многочленом* $p(z)$ *ком-*

плексной переменной z, подчиненным условиям

$$p \in \mathcal{P}_{J,æ-1}, \quad \int_\Gamma dt_J \varphi(t) q(t) = 0, \; q \in \mathcal{P}_{J,-æ-1}. \tag{7.10}$$

Заметим, что подинтегральное выражение во втором условии (7.10) понимается как скалярное произведение двух $n-$ векторов $dt_J\varphi(t)$ и $q(t)$. При $æ \geq 0$ это условие вообще отсутствует, а при $æ < 0$ оно сводится к равенству нулю интегралов

$$\int_\Gamma t_J^k dt_J \varphi(t) = 0, \quad 0 \leq k \leq æ - 1.$$

Следующая лемма показывает, что для сингулярного оператора S_J справедлив результат, аналогичный лемме 5.1. Ее доказательство осуществляется совершенно аналогично лемме 5.1.

Лемма 7.1. *Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$. Тогда оператор $K_J = S_J - S$ представим в виде*

$$(K_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k_J(t_0,t)\varphi(t)}{t - t_0} dt, \tag{7.11}$$

где матрица- функция $k_J(t_0,t)$ принадлежит классу $C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$ и обращается в нуль при $t = t_0$.

Доказательство совершенно аналогично лемме 5.1. Рассмотрим на Γ некоторую дугу Γ_0 с естественной параметризацией $\gamma(s)$, $0 \leq s \leq l$, где l – длина всей дуги. По условию производная $\gamma'(s) \in C^\nu[0,l]$, так что имеет место (5.11). Поскольку функция $q(s_0,s)$ ограничена по модулю снизу положительной постоянной и при $s = s_0$ совпадает с $\gamma'(s)$, функция $\gamma'(s)/q(s_0,s)$ также принадлежит $C^\nu([0,l]\times[0,l])$ и равна 1 при $s = s_0$. Очевидно, аналогичным свойством обладает и матрица- функция $[\gamma'(s)]_J[q(s_0,s)]_J^{-1}$.

Подстановка параметризации $t = \gamma(s)$ в сингулярные операторы S_J и S, где интегралы берутся по дуге Γ_0, дает выражение

$$(K_0\varphi)[\gamma(s_0)] = \frac{1}{\pi i}\int_0^l \left\{[\gamma'(s)]_J[q(s_0,s)]_J^{-1} - \frac{\gamma'(s)}{q(s_0,s)}\right\}\frac{\varphi[\gamma(s)]ds}{s-s_0}, 0 \le s_0 \le l,$$

где K_0 получается из (7.11) заменой Γ на Γ_0. Следовательно, для функции $\widetilde{k}_J(s_0,s) = k_J[\gamma(s_0),\gamma(s)]$ имеем выражение

$$\widetilde{k}_J(s_0,s) = [\gamma'(s)]_J[q(s_0,s)]_J^{-1} - \frac{\gamma'(s)}{q(s_0,s)}.$$

Следовательно, эта функция принадлежит $C^\nu([0,l]\times[0,l])$ и обращается в нуль при $s = s_0$. Поскольку дуга $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ была выбрана произвольно, в результате приходим к справедливости утверждения леммы.

По отношению к рассматриваемой матрице J теоремы 5.1 и 5.3 сохраняют свою силу и для $J-$ аналитических функций [45], поэтому ниже эти теоремы используем и в данном случае.

8. Задача линейного сопряжения для производных $(n-1)-$го порядка

Пусть Γ является простым гладким контуром, для определенности ориентированным против часовой стрелки. Его дополнение состоит из конечной D_1 и бесконечной D_0 областей. Обозначим $C^{n-1,\mu}(\widehat{D})$ класс всех решений u уравнения (1.1), для которых

$$U_k = \frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{k-1}\partial x^{n-k}} \in C^\mu(\widehat{D}), \quad U_k = O(|z|^{-n}) \text{ при } z \to \infty, \quad 1 \le k \le n. \tag{8.1}$$

Рассмотрим в этом классе задачу линейного сопряжения

$$\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{k-1}\partial x^{n-k}}\right)^+ - \sum_{j=1}^n B_{kj}\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{j-1}\partial x^{n-j}}\right)^- = f_k, \quad 1 \le k \le n, \tag{8.2}$$

где матрица $B = (B_{kj})$ задана.

В каждой области D_j, $j = 0, 1$, имеем представление (6.5), где зависимость от j оператора $\mathcal{D}^{(1-n)}$ явно не указываем. В области D_1 этот оператор определяется по фиксированной точке $z_1 \in D_1$, а в области D_0 в соответствии с замечанием к лемме 6.1 роль этой точки играет $z_0 = \infty$. Рассмотрим подстановку

$$u = \mathcal{D}^{(1-n)}U + p, \quad U = T\phi, \tag{8.3}$$

где в каждой из областей D_j скалярная функция $p(z) = p_j(z)$, $z \in D_j$, является многочленом двух переменных x, y степени не выше $n-2$, т.е. принадлежит классу $\mathcal{P}_{n-2}$. Поэтому на основании (6.6) размерность класса таких функций равна $\dim \mathcal{P}_{n-2} = n(n-1)$.

При указанной подстановке класс (8.1) переходит в класс $J-$ аналитических функций $\phi \in C^{\mu}(\widehat{D})$, подчиненных условию

$$\phi(z) = O(|z|^{-n}) \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{8.4}$$

Соответственно краевая задача (8.2) переходит в классическую задачу линейного сопряжения

$$\phi^{+} - G\phi^{-} = g \tag{8.5}$$

с матричным коэффициентом $G = T^{-1}BT$ и правой частью $g = T^{-1}f$.

Как и в параграфе 2 на основании теоремы 7.1, примененной к $\phi = I_J\varphi$, эта задача редуцируется к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений

$$\varphi + S_J\varphi + G(\varphi - S_J\varphi) = 2g, \tag{8.6}$$

где вектор- функция $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ подчинена второму условию (7.10) с æ $= 1 - n$ или, что равносильно, равенству нулю интегралов

$$\int_{\Gamma} t_J^k dt_J \varphi(t) = 0, \ 0 \le k \le n-2. \tag{8.7}$$

Очевидно, число линейно независимых скалярных условий в (8.7) равно $n(n-1)$. Вспоминая, что класс функций p в разложении (8.3) также имеет размерность $n(n-1)$, на основании теоремы 2.3 приходим к следующему результату.

Теорема 8.1. *Пусть простой контур* $\Gamma \in C^{1,\nu}$, *матрица – функция* $B \in C^{\mu}(\Gamma)$ *обратима и* $D = \mathbb{C} \backslash \Gamma$. *Тогда задача (8.2) для полианалитических функций* $u(z)$ *фредгольмова в классе* $C^{n-1,\mu}(\widehat{D})$, *определяемый условиями (8.1), ее коядро содержится в* $C^{\mu}(\Gamma)$ *и индекс* $æ = \operatorname{Ind} B$.

Рассмотрим далее одностороннюю задачу аналогичного типа. Пусть область D конечна и ограничена простым гладким контуром. Задача состоит в отыскании решения $u \in C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ уравнения (1.1) по краевому условию

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} B_{kj} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{j-1} \partial x^{n-j}} \right)^{+} = f_k, \quad 1 \le k \le n, \tag{8.8}$$

Как и выше с помощью подстановки (8.3) эта задача редуцируется к задаче Римана – Гильберта для $J-$аналитической функции ϕ

$$\operatorname{Re} G\phi^{+} = f \tag{8.9}$$

с матричным коэффициентом $G = BT$. Заметим, что многочлен p, фигурирующий в подстановке (8.3), в краевом условии этой задачи явно не фигурирует. Таким образом, на основании теоремы 2.2(e) и (6.6) задачи (8.8) и (8.9) свойством фредгольмовости обладают одновременно и их индексы $æ$ и $\widetilde{æ}$ (над полем $\mathbb{R}$) соответственно связаны соотношением

$$æ = \widetilde{æ} + n(n-1). \tag{8.10}$$

Здесь учтено, что при переходе от поля $\mathbb{C}$ к $\mathbb{R}$ размерность (6.6) удваивается.

Исследование задачи (8.9) осуществляется по той же схеме, что и задача (5.4), и оно приводит к следующему результату.

Теорема 8.2. *Пусть простой контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и ограничивает конечную область* D. *Пусть матрица - функция* $B(t) \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *и* $\det B(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Тогда задача (8.8) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ *и ее индекс* æ *дается формулой*

$$æ = -2\mathrm{Ind}\, B + n^2. \qquad (8.11)$$

При этом по отношению к билинейной форме (5.13) коядро задачи содержится в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$ *вещественных функций вектор- функций.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 5.1 для $J-$ аналитических функций. Подставляя представление (5.5) в краевое условие (8.9) и пользуясь формулами Сохоцкого - Племеля (7.8), приходим к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\mathrm{Re}\, G(\varphi + S_J\varphi) - 2(\mathrm{Im}\, G)\xi = 2f$$

относительно вещественной вектор- функции $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$, которая линейна над полем $\mathbb{R}$ и эквивалентна рассматриваемой задаче. Это уравнение можем переписать в виде

$$[G(\varphi + S_J\varphi) + \overline{G}(\varphi + \overline{S_J}\varphi)]/2 - 2(\mathrm{Im}\, G)\xi = 2f \qquad (8.12)$$

Оператор этого уравнения линеен и над полем $\mathbb{C}$, причем в предположении фредгольмовости его индекс, рассматриваемый над полем $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, один и тот же. В силу лемм 5.1 и 7.1 оператор $\overline{S_J} = \overline{S} + \overline{K_J} = -S + K + \overline{K_J}$. Поэтому оператор

$$2N\varphi = G(\varphi + S_J\varphi) + \overline{G}(\varphi + \overline{S_J}\varphi)$$

можем записать в виде $2N = G(1 + S) + \overline{G}(1 - S) + \widetilde{K}$, где $\widetilde{K} = GK_J + \overline{G}(K + \overline{K_J})$ обладает теми же свойствами, что и в лемма 5.1

и 7.1. Поэтому к оператору уравнения (8.12), рассматриваемого в классе $C^\mu(\Gamma)$ комплексных вектор- функций, можно применить теорему 2.3 и на основании этой теоремы он фредгольмов и его индекс $\widetilde{\text{æ}}$ дается формулой

$$\widetilde{\text{æ}} = \operatorname{Ind}(G^{-1}\overline{G}) + n.$$

Совместно с (8.10) отсюда следует формула индекса (8.11).

Что касается последнего утверждения теоремы, то оно устанавливается совершенно аналогично теореме 5.2.

Как и в параграфе 5, задачу (8.9) при дополнительном условии (8.4) можно рассмотреть и в бесконечной области D.

Теорема 8.3. *Пусть простой контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и ограничивает бесконечную область* D. *Пусть матрица - функция* $B(t) \in C^\mu(\Gamma),\ 0 < \mu < \nu$, *и* $\det B(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$.

Тогда задача (8.8) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ *и ее индекс* æ *дается формулой*

$$\text{æ} = -2\operatorname{Ind} B - n. \qquad (8.13)$$

При этом по отношению к билинейной форме (5.13) коядро задачи содержится в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ *вещественных функций вектор- функций.*

Доказательство осуществляется по той же схеме, что и выше. Задача редуцируется к задаче Римана - Гильберта (8.9) для $J-$ аналитических функций, подчиненных условию (8.4) на бесконечности. Индексы æ и $\widetilde{\text{æ}}$, соответственно, задач (8.8), (8.9) связаны соотношением (8.10). С другой стороны, согласно теореме 5.3 для $J-$ аналитических функций, где нужно положить $m = 1$, подстановка $\phi = I_J$ редуцирует последнюю задачу к уравнению

$$[G(\varphi + S_J\varphi) + \overline{G}(\varphi + \overline{S_J}\varphi)]/2 = 2f, \tag{8.14}$$

подчиненному условию

$$\int_\Gamma \varphi(t) d_1 t = 0 \tag{8.15}$$

и дополнительному условию (8.7), в которое переходит условие (8.4). Поскольку вектор функция φ вещественна, эти условия в действительности можно записать в форме

$$\int_\Gamma [t_J^k dt_J + \overline{t_J^k dt_J}]\varphi(t) = 0, \quad 0 \le k \le n-2.$$

В соответствии с (7.1) имеем очевидные равенства $\overline{z_J} = z_{\overline{J}}$ и $dt_J = e_J(t)d_1 t$, где $e(t)$ означает единичный касательный вектор к контуру Γ в точке t. Поэтому эти равенства можно также представить в виде

$$\int_\Gamma \operatorname{Re}[t_J^k e_J(t)]\varphi(t) d_1 t = 0, \quad 0 \le k \le n-2. \tag{8.16}$$

Очевидно, число линейно независимых скалярных условий в (8.15), (8.16) равно $n + n(n-1) = n^2$. Поскольку определители матриц B и $G = BT$ совпадают, матрица G также обратима. На основании теоремы 2.3 отсюда заключаем, что оператор уравнения (8.14) – (8.16) фредгольмов и его индекс

$$\widetilde{æ} = \operatorname{Ind}(G^{-1}\overline{G}) - n^2.$$

Совместно с (8.10) отсюда следует и формула индекса (8.13) исходной задачи.

Последнее утверждение теоремы устанавливается совершенно аналогично теореме 5.2.

9. Общая краевая задача

Пусть конечная область D ограничена гладким простым контуром Γ и задана последовательность натуральных чисел $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_n \leq n$. Положим для краткости

$$\partial_1^i \partial_2^j u = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j},$$

и рассмотрим для уравнения (1.1) в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ общую краевую задачу вида

$$\mathrm{Re} \sum\nolimits_{i+j \leq l_k - 1} C_{k,ij} (\partial_1^i \partial_2^j u)^+ = f_k, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{9.1}$$

с заданными непрерывными коэффициентами $C_{k,ij}$ на контуре Γ. На гладкость этих коэффициентов, как и на сам контур Γ, наложим более жесткие требования.

Пусть $z = z(s) = x(s) + iy(s)$, $0 \leq s \leq s_\Gamma$, есть естественная параметризация контура Γ. Параметр s представляет собой длину дуги, отсчитываемую от фиксированной точки $z(0) \in \Gamma$ против часовой стрелки. В частности, s_Γ есть длина всего контура. Соответственно $e(t) = z'(s)$, $t = z(s)$, является единичным касательным вектором.

В дальнейшем предполагается, что Γ принадлежит классу $C^{n-1,\nu}$, $0 < \nu < 1$, который понимается по отношению к периодической функции $z(s)$. Таким образом, касательный вектор $e = e_1 + ie_2$ принадлежит классу $C^{n-2,\nu}(\Gamma)$ (по отношению к естественному параметру s на контуре), где принято соглашение $C^{0,\nu} = C^\nu$. Соответственно от коэффициентов $C_{k,ij}$ потребуем, чтобы они принадлежали классу $C^{n-l_k,\nu}(\Gamma)$, так что их можно $(n - l_k)-$ раз дифференцировать по параметру s, в частности,

$$C_{k,ij}^{(r)}[z(s)] = \frac{d^r}{ds^r} C_{k,ij}[z(s)] \in C^{n-l_k-r,\nu}(\Gamma), \quad 0 \leq r \leq n - l_k. \tag{9.2}$$

Рассмотрим операцию дифференцирования с определенной аддитивной постоянной:

$$(T\varphi)(t) = \varphi'(t) + \frac{1}{s_\Gamma}\int_\Gamma \varphi(t)d_1t,$$

где d_1t означает элемент длины дуги. Заметим, что для любого натурального r оператор T^r действует по аналогичной формуле

$$(T^r\varphi)(t) = \varphi^{(r)}(t) + \frac{1}{s_\Gamma}\int_\Gamma \varphi(t)d_1t, \tag{9.3}$$

поскольку

$$\int_\Gamma \varphi'(t)d_1t = 0.$$

Лемма 9.1. *Оператор T обратим $C^1(\Gamma) \to C(\Gamma)$.*

Доказательство. Условимся $\varphi(t),\ t \in \Gamma$, отождествлять с функцией $\varphi(s) = \varphi[z(s)]$ на отрезке $[0, s_\Gamma]$. Тогда дело сводится к уравнению

$$\varphi'(s) + \frac{1}{s_\Gamma}\int_0^{s_\Gamma} \varphi(\tau)d\tau = h(s), \quad 0 \le s \le s_\Gamma,$$

в классе C^1 функций, периодических с периодом s_Γ (условие периодичности последних распространяется и на их производные). В силу периодичности

$$\int_0^{s_\Gamma} \varphi'(\tau)d\tau = 0$$

и, следовательно, равенство $T\varphi = h$ влечет

$$\int_0^{s_\Gamma} \varphi(\tau)d\tau = \int_0^{s_\Gamma} h(\tau)d\tau.$$

Таким образом, дело сводится к уравнению

$$\varphi'(s) = h(s) - \frac{1}{s_\Gamma}\int_0^{s_\Gamma} h(\tau)d\tau,$$

откуда

$$\varphi(s) = \int_0^s h(\tau)d\tau - \frac{s}{s_\Gamma}\int_0^{s_\Gamma} h(\tau)d\tau + C$$

с некоторой постоянной C. Интегрируя это равенство от 0 до s_Γ, эту постоянную однозначно определяем из равенства

$$\int_0^{s_\Gamma} h(s)ds = \int_0^{s_\Gamma} ds \int_0^s h(\tau)d\tau - \frac{s_\Gamma}{2}\int_0^{s_\Gamma} h(\tau)d\tau + Cs_\Gamma,$$

или

$$C = \left(\frac{1}{s_\Gamma} + \frac{1}{2}\right)\int_0^{s_\Gamma} h(\tau)d\tau - \frac{1}{s_\Gamma}\int_0^{s_\Gamma}(s_\Gamma - \tau)h(\tau)d\tau =$$
$$= \frac{1}{s_\Gamma}\int_0^{s_\Gamma}\left(1 - \frac{s_\Gamma}{2} + \tau\right)h(\tau)d\tau.$$

В силу (9.3) и леммы 9.1 краевое условие (9.1) можем записать в следующей эквивалентной форме

$$\mathrm{Re}\sum\nolimits_{i+j\le l_k-1}\left[C_{k,ij}(\partial_1^i\partial_2^j u)^+\right]^{(n-l_k)} + \mathrm{Re}\sum_{i+j\le l_k-1}\frac{1}{s_\Gamma}\int_\Gamma C_{k,ij}(\partial_1^i\partial_2^j u)^+ d_1 t = \widetilde{f}_k \tag{9.4}$$

с правой частью

$$\widetilde{f}_k = f_k^{(n-l_k)} + \frac{1}{s_\Gamma}\int_\Gamma f_k(t)d_1 t, \quad k = 1, \dots, n.$$

Если некоторая функция $\varphi \in C^1(\Gamma)$ является граничным значением функции $v \in C^1(\overline{D})$, то по правилу дифференцирования производная φ' связана с частными производными v равенством

$$\varphi' = e_1(\partial_1 v)^+ + e_2(\partial_2 v)^+.$$

Если $v \in C^{r,\nu}(\Gamma),\ 1 \le r \le n-1$, то пользуясь этим равенством и правилом Лейбница дифференцирования произведения функции, получим

$$\varphi^{(r)} = (e_1\partial_1 + e_2\partial_2)^r v + \sum_{i+j\le r-1} A_{r,ij}(\partial_1^i\partial_2^j v)^+$$

с некоторыми коэффициентами $A_{r,ij} \in C^\nu(\Gamma)$. Здесь учтено, что функции e_1, e_2 принадлежат классу $C^{n-2,\nu}(\Gamma)$.

Таким образом, первое слагаемое в левой части (9.4) можем представить в форме

$$\operatorname{Re}\sum\nolimits_{i+j=l_k-1} C_{k,ij}\left[(e_1\partial_1+e_2\partial_2)^{n-l_k}\partial_1^i\partial_2^j u\right]^+ + \operatorname{Re}\sum\nolimits_{i+j\le n-2}\widetilde{C}_{k,ij}(\partial_1^i\partial_2^j u)^+$$

с некоторыми коэффициентами $\widetilde{C}_{k,ij}\in C^{\nu}(\Gamma)$.

Введем функции B_{kj} с помощью тождеств

$$\sum_{i+j=l_k-1} C_{k,ij}\left[(e_1\xi_1+e_2\xi_2)^{n-l_k}\xi_1^i\xi_2^j\right]=\sum_{j=1}^{n} B_{kj}\xi_1^{n-j}\xi_2^{j-1},\quad 1\le k\le n,$$

относительно вещественных переменных ξ_1,ξ_2, или, что равносильно, с помощью тождества

$$\sum_{i+j=l_k-1} C_{k,ij}\left[(e_1+e_2z)^{n-l_k}z^j\right]=\sum_{j=1}^{n} B_{kj}z^{j-1},\quad 1\le k\le n,\tag{9.5}$$

относительно комплексной переменных z.

Тогда задачу (9.4) можем записать в форме

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\sum\nolimits_{j=1}^{n} B_{kj}(\partial_1^{n-j}\partial_2^{j-1}u)^+ + \operatorname{Re}\sum\nolimits_{i+j\le n-2}\widetilde{C}_{k,ij}(\partial_1^i\partial_2^j u)^+ + \\ +\operatorname{Re}\sum\nolimits_{i+j\le l_k-1}\frac{1}{s_\Gamma}\int_\Gamma C_{k,ij}(\partial_1^i\partial_2^j u)^+ d_1t=\widetilde{f}_k,\quad 1\le k\le n.\end{gathered}\tag{9.6}$$

Воспользуемся далее подстановкой (8.3) и введем ограниченные линейные операторы $R_{k,ij}: C^{\mu}(\overline{D})\to C^{1,\mu}(\Gamma)$ и ограниченные линейные функционалы $L_{k,ij}: C^{\mu}(\overline{D})\to\mathbb{C}$ по формулам

$$R_{k,ij}\phi=(\partial_1^i\partial_2^j)(\mathcal{D}^{1-n}T\phi)_k^+,\quad i+j\le n-2,$$

$$R_{k,ij}^0\phi=\frac{1}{s_\Gamma}\int_\Gamma C_{k,ij}[(\partial_1^i\partial_2^j)(\mathcal{D}^{1-n}T\phi)_k]^+ d_1t,\quad i+j\le l_k-1.$$

Здесь под $C^{\mu}(\overline{D})$ понимается соответствующее пространство вектор- функций, $J-$аналитических в области D. В этих обозначениях задача (9.6) редуцируется к краевой задаче

$$\operatorname{Re}(B\phi^+ + R\phi + Lp)=f\tag{9.7}$$

относительно пары (ϕ, p), где линейные операторы $R\phi$ и Lp, определены на, соответственно, пространстве $C^\mu(\overline{D})$ вектор- функций, $J-$ аналитических в области D, и пространстве скалярных многочленов p переменных x, y степени не выше $n-2$, и действуют по формулам

$$(R\phi)_k = \sum\nolimits_{i+j\le n-2} \widetilde{C}_{k,ij} R_{k,ij}\phi + \sum\nolimits_{i+j\le l_k-1} R^0_{k,ij}\phi,$$

$$(Lp)_k = \sum\nolimits_{i+j\le n-2} \widetilde{C}_{k,ij}(\partial_1^i\partial_2^j p)^+ + \sum\nolimits_{i+j\le l_k-1} \int_\Gamma C_{k,ij}[(\partial_1^i\partial_2^j)p]^+ d_1 t.$$

Поскольку вложение $C^{1,\mu}(\Gamma) \subseteq C^\mu(\Gamma)$ компактно, этим свойством обладают и $R_{k,ij}$ как операторы $C^\mu(\overline{D}) \to C^\mu(\Gamma)$. Следовательно, вместе с ними компактен и оператор R в (9.7). Совместно с теоремами 2.2(c) и 8.2 отсюда приходим к следующему результату.

Теорема 9.1. *Пусть простой контур* Γ *принадлежит классу* $C^{n-1,\nu}$ *и ограничивает конечную область* D. *Пусть функции* $C_{k,ij}$ *в (9.1) принадлежат классу* $C^{n-l_k,\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *и матрица* B, *определяемая из равенства (9.5), обратима.*

Тогда задача (9.1) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ *и ее индекс* æ *дается формулой*

$$æ = -2\mathrm{Ind}\, B + n^2. \tag{9.8}$$

Проиллюстрируем теорему на примере задачи

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial a^{k-1}}\right)^+ = f_k, \quad 1 \le k \le n, \tag{9.9}$$

где $a = a_1 + ia_2$ представляет собой комплекснозначную функцию на Γ и положено

$$\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial a^{k-1}}\right)^+ = [(a_1\partial_1 + a_2\partial_2)^{k-1}u]^+.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $l_k = k$ и в предположении $a \in C^{n-2,\nu}(\Gamma)$ условия теоремы 9.1 выполнены.

Теорема 9.2. *Пусть конечная область D ограничена простым контуром $\Gamma \in C^{n-1,\nu}$ и и функция $a_1 + ia_2 \in C^{n-2,\nu}$, $n \geq 2$.*

Тогда в предположении

$$(e_1 a_2 - e_2 a_1)(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{9.10}$$

задача (9.9) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ и ее индекс æ дается формулой

$$æ = -n(n-1)\mathrm{Ind}\,(e_1 a_2 - e_2 a_1) + n^2. \tag{9.11}$$

Доказательство. По отношению к задаче (9.9) выражение (9.5) переходит в тождество

$$\sum_{j=1}^{n} B_{kj} z^{j-1} = (e_1 + z e_2)^{n-k}(a_1 + z a_2)^{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

которое можно записать в форме действия $n \times n-$матрицы B на вектор $h(z) = (1, z, \ldots, z^{n-1})$, т.е. в виде векторного равенства

$$Bh(z) = (e_1 + z e_2)^{n-1} h(w), \quad w = \frac{a_1 + z a_2}{e_1 + z e_2}. \tag{9.12}$$

Зафиксируем n различных точек $z_1, \ldots, z_n$ в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$ и введем так называемую матрицу Вандермонда

$$W(z_1, \ldots, z_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ . & . & \cdots & . \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & . & z_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

столбцы которой составлены из векторов $h(z_1), \ldots, h(z_n)$. Хорошо известно [42], что определитель этой матрицы вычисляется по формуле

$$\det W(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{i>j} (z_i - z_j). \tag{9.13}$$

Полагая в (9.12) переменную $z = z_j,\ j = 1, \dots, n$, в принятых обозначениях получим матричное соотношение

$$BW(z_1, \dots, z_n) = W(w_1, \dots, w_n)\mathrm{diag}[(e_1 + z_1 e_2)^{n-1}, \dots, (e_1 + z_n e_2)^{n-1}].$$

С учетом (9.13) отсюда

$$\det B = \prod_{i>j} [(z_i - z_j)^{-1}(w_i - w_j)] \prod_{k=1}^{n} (e_1 + z_k e_2)^{n-1}.$$

Как легко видеть,

$$w_i - w_j = \frac{(z_i - z_j)(e_1 a_2 - e_2 a_1)}{(e_1 + z_i e_2)(e_1 + z_j e_2)},$$

так что

$$\det B = (e_1 a_2 - e_2 a_1)^{n(n-1)/2} \prod_{i>j} [(e_1 + z_i e_2)(e_1 + z_j e_2)]^{-1} \prod_{k=1}^{n} (e_1 + z_k e_2)^{n-1}.$$

Полагая $e_1 + z_k e_2 = \zeta_k$, имеем очевидное равенство

$$\prod_{i>j} \zeta_i \zeta_j = \prod_{k=1}^{n} \zeta_k^{n-k} \prod_{s=k+1}^{n} \zeta_s = \prod_{k=1}^{n} \zeta_k^{n-1},$$

откуда окончательно

$$\det B = (e_1 a_2 - e_2 a_1)^{n(n-1)/2}.$$

На основании теоремы 9.2 отсюда следует заключение теоремы.

Если функции a_1, a_2 вещественны, то условие (9.10) равносильно тому, что вектор $a_1 + i a_2$ некасателен контуру Γ в каждой точке. В этом случае поскольку функция $e_1 a_2 - e_2 a_1$ вещественна, ее индекс Коши равен нулю, и формула (9.11) переходит в равенство $æ = n^2$. Например, к рассматриваемому типу относится задача

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}}\right)^{+} = f_k, \quad 1 \le k \le n,$$

с нормальной производной.

Особо рассмотрим случай постоянных функций $a_1 = 1/2,\ a_2 = i/2$, когда (9.9) переходит в задачу

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^{k-1} u}{\partial \bar{z}^{k-1}}\right)^+ = f_k, \quad 1 \le k \le n,$$

рассмотренную в главе 1. Более точно, она соответствует задаче (5.1), (5.2) для единичной матрицы B. Поэтому на основании теоремы 5.2 эта задача фредгольмова и ее индекс равен n, где учтено, что в рассматриваемом случае простого контура следует в формуле индекса (5.12) положить $m = 1$. С другой стороны, функция $e_1 a_2 - e_2 a_1$ равна $ie/2$ и ее индекс Коши равен n, так что формула (9.11) дает равенство $æ = -n(n-1) + n^2 = n$. Таким образом, теорема 9.2 полностью согласуется с теоремой 5.2.

Литература

[1] В. Риман. Сочинения, пер. с нем., М-Л.,1948.

[2] D. Hibert. Grundzuge einer all gemeinen Theorie der linearen integral gleichungen, Lpz/-B.,1912.

[3] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. - М. : Наука, 1977.

[4] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М. : Наука, 1968.

[5] Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНИТИ / Сер. Совр. Пробл. Матем. Фунд. Напр.- Т.85.- М.: ВИНИТИ. 1991.- С. 187-246.

[6] Бицадзе А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными. Успехи матем. наук, 1948, 3, № 6.- С. 153-154.

[7] Рева Т.Л. Задачи сопряжения для бианалитических функций и ее связь с упруго-пластической задачей '// Прикладная механика (Киев).- 1972.- 8, № 10.

[8] Юденков А.В. Редкозубов С.А. Задача Карлемана для полианалитических функций в теории упругости для областей сложной формы // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Сб. статей

под ред. академика РАН А.Ю. Ишлинского. - М.: Из-во МГГУ,2001.- С. 263-270.

[9] Юденков А.В. Редкозубов С.А. Задача типа Карлемана для бианалитиче-ских функций в теории изгиба тонкой пластинки // Сборник трудов ин-та Теор. механики РАН и МГГУ, посвященной 70-летию Л.В.Ершова, Москва. 2001.- С. 270-277.

[10] Ганин М.П. Краевые задачи для полианалитических функций / / Докл.АН СССР.- 1951.- 80, № 3.- С. 313-316.

[11] Рогожин В.С. Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения, Уч. записки Казанского ун-та, 1950, 110, кн. № 3.- С. 71-93.

[12] Бикчантаев И.А. Полианалитические функции на римановых поверхностях, Тр. семинара по краевым задачам / Казанский гос. ун-та, 1979.- № 16.- С. 29-35.

[13] Габринович В.А. Краевая задача типа Гильберта для р - полианалитических функций, Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. наук. 1987. - № 2.- С. 33-38.

[14] Жегалов В.И. Некоторые краевые задачи для полианалитических функций / В. И. Жегалов // Тр. Семинара по краевым задачам. Казанск. унт.- 1976. -Вып. № 13.- С. 80-85.

[15] Левинский С.В. Теория Нётера первой краевой задачи для полианалитических функций, Изв. вузов. Матем., 1989, № 3.- С. 35-39.

[16] Показеев В.В. Интегралы типа Коши для полианалитических функций // Тр. Семинара по краевым задачам. Казанск. гос. ун-т.1980.- Вып. № 17.- С. 133-139.

[17] Соколов И.А. Первая краевая задача типа Римана для полианалитических функций в случае произвольного контура // Вестник Белорусского ун-та. Серии 1. -1970. -№ 2.- С. 20-23.

[18] Соколов И.А. Об исследованиях по краевым задачам для полианалитических функций / / Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 65-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова.– Минск: Изд-во "Университетское 1985.- С. 43-47.

[19] Расулов К.М. О решении основных краевых задач типа Гильберта для бианалитических функций // Докл. АН СССР. 1991. - Т.320, № 2.- С. 284-288.

[20] Расулов К.М. Об одном общем подходе к решению классических краевых задач для полианалитических функций и их обобщений // Дифференц. уравнения.1993.-Т.29, № 2.- С. 320-327.

[21] Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения // Смоленск: Изд-во СГТТУ. - 1998. - 344с.

[22] Wang Yufeng, Du Jinyuan, On Riemann boundary value problem of polyanalytic function on the real axis. Acta Mathematica Scientia, 2004, 24B(4).- С. 663-671.

[23] Wang Yufeng, Du Jinyuan, On boundary value problem of polyanalytic function on the real axis, Complex Variables. Theory and Applications, 2003, 48(6).- С. 527-542.

[24] Медведев Ю.А. О решении второй четырехэлементной краевой задачи типа Римана для бианалитических функций в круге / Ю. А.

Медведев, К. М. Расулов // Литовский математический журнал. Вильнюс, 2006. - Т. 46, № 3.- С. 377-385.

[25] Соколов И.А. О краевой задаче типа Римана для полианалитических функций на окружности // Изв. АН БССР. Сер.физ. мат.наук. -1969. № 5.- С. 64-71.

[26] Begehr, H. and Hile, G.N. A hierarchy of integral operators. Rocky Mountain Journal of Mathematics,1997, № 27.- С. 669–706.

[27] Mshimba A.S. A mixed boundary value problem for polyanalytic function of order n in the Sobolev space . Complex Variables. Theory and Applications, 2002, 47(12).- С. 1107-1114.

[28] Mshimba A.S. A mixed boundary value problem for polyanalytic function of order n in the Sobolev space $W^{n,p}(D)$. Complex Variables. Theory and Applications, 2002, 47(12).- С. 1107–1114.

[29] Damjanovic B. The boundary value problem for polyanalytic function in multiply-connected region / B. Damjanovic // Матем. вестник (Yugoslavia). -1986.-Vol. 38.-P. 411-415.

[30] Damianovic B. Boundary Value Problem for polyanalytic functions and integral equations. Международная конференция "Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление". Минск. 1996.

[31] Солдатов А.П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай, Изв. АН СССР"(сер.матем.) 1991. Т.55, № 5.- С. 1070-1100.

[32] Douglis A. A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. Comm. Pure Appl. Math. 1953, № 6.- С. 259-289.

[33] Horvath J. A generalization of the Cauchy-Riemann equations Contrib. Diff. Equations, 1961, № 1.- C. 39-57.

[34] Paskali D. Vecturs analytiques generelises. Rev. Roumeine Math. Pure Appl., 1965, № 10.- C. 779-808.

[35] Боярский Б.В. Теория обобщенного аналитического вектора. Annales Polon. Mathem., v.17, № 3.- С. 281-320.

[36] Gilbert R.P. Buchanan J. L. First order elliptic systems, N.-Y., Ac.Pr., 1983.

[37] Hile G.N. Elliptic systems in the plane with order term and constant coefficients. Comm. Pure Appl. Math. 1978, 3(10).- C. 949-977.

[38] Солдатов А.П. Гипераналитические функции и их приложения, Современная математика и ее приложения, Тбилиси, Институт кибернетики Академии наук Грузии (ISSN 1512- 1712), 2004, Т. 15.- С. 142-199.

[39] Солдатов А.П. Эллиптические системы высокого порядка. Дифференц.ур-ния 1989, т.25, № 1.- С. 136-142.

[40] Рудин У. Функциональный анализ. М., Мир, 1975.

[41] Пале Р. Семинар по теореме Атья – Зингера об индексе. М., Мир, 1970.

[42] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры, (3 издание) М. Наука, 1976.

[43] Солдатов А.П. Граничные свойства интегралов типа Коши, Дифференц. уравн. 1990. Т.26, № 1.- С. 131-136.

[44] Солдатов А.П. Обобщенный интеграл типа Коши и сингулярный интеграл в пространстве Гельдера с весом, Докл. РАН, 330 (1993).- С. 164-166.

[45] Солдатов А.П. Интегральное представление функций, аналитических по Дуглису, Вестник СамГУ- Естественнонаучная серия, 2008, №8/1(67).- С. 225-234.

[46] Чан К.В. Обобщенные степенные ряды. // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. - 2012. - №11(130). - Выпуск 27. - С. 24-28.

[47] Солдатов А.П.,Чан К.В. Задача Римана-Гильберта для бианалитических функций. // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. - 2015. - №5(202). - Выпуск 38. - С. 83-88.