Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

"ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

УДК 517.9

Шайхуллина Полина Алексеевна

АНАЛИТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЕЙШИХ РОСТКОВ ПОЛУГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, доцент С.М. Воронин

ЧЕЛЯБИНСК — 2019

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования

«6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux»

«Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa»

«Полезно решать дифференциальные уравнения» — так сформулировал одно из своих величайших открытий Ньютон, засекретив его в виде анаграммы в своём письме к Лейбницу [2], [40].

Однако уже в 19 веке выяснилось, что дифференциальные уравнения, как правило, не удаётся решить явно (в квадратурах). С целью преодоления этой трудности А. Пуанкаре в конце 19 века предложил следующую стратегию исследования дифференциальных уравнений: если уравнение не может быть решено, то нужно найти такую замену координат, чтобы уравнение имело по возможности более простой вид (нормальную форму). Тем самым он поставил два вопроса: к какому простейшему виду можно привести уравнение? как узнать, можно ли привести одно уравнение к другому заменой координат? Ответы на эти вопросы сильно зависят от классов рассматриваемых уравнений и замен. Обширная библиография по этим вопросам содержится в книгах [4]- [6], [9], [27], [61], [62], [64].

При исследовании дифференциальных уравнений, имеющих замкнутую траекторию, Пуанкаре предложил использовать так называемое «отображение первого возвращения» (first return map), часто называемое теперь отображением Пуанкаре, [43]. Это отображение тесно связано со свойствами исходного дифференциального уравнения. Подобная конструкция проходит и для монодромных особых точек векторных полей на плоскости. Более того, для аналитических векторных полей так же можно построить аналогичное отображение (комплексное преобразование монодромии, [1]).

Например, в работе [18] исследована орбитальная аналитическая классификация ростков седловых векторных полей на плоскости: преобразованию монодромии при обходе особой точки на сепаратрисе ставится в соответствие росток одномерного конформного отображения. Аналогичные связи исследовались в многочисленных работах: Брюно [8], Дюлака [17], Воронина [12]- [14], [16], [58], [59], [60], Мартине и Рамиса [39], и других.

Поэтому актуальной задачей является классификация отображений (дискретных динамических систем). Одним из методов их исследования также является метод нормальных форм.

Степень разработанности темы исследования

В работах Пуанкаре [41]- [45] поставлена задача формальной и аналитической классификации векторных полей и отображений; там же проведена формальная классификация и получены условия аналитической приводимости к линейной нормальной форме (отсутствие разонансов и малых знаменателей). В начале 20-го века Дюлак [17] описал аналитическую классификацию ростков голоморфных векторных полей типа Пуанкаре в случае наличия резонанса. В работе Зигеля [19] доказана аналитическая линеаризуемость, в случае отсутствия резонансов, ростка векторного поля с особой точкой типа «седло» (ростки типа Зигеля), если его собственные значения образуют так называемый «Диофантов набор». Результаты Зигеля уточнили Брюно [7], [8], Йоккоз [61]. Таким образом неисследованными оставались ростки голоморфных векторных полей и отображений типа Зигеля в случае наличия резонанса.

Во многих работах изучалась расходимость нормализующих рядов: [1], [2], [7]- [10], [19]- [21], [25], [26], [46]. Фундаментальный результат был получен Брюно [7]- [10]. Он указал необходимы и достаточные условия, при которых формальная нормальная форма может быть выбрана сходящейся и нормализующее отображение аналитично. Тем самым была решена задача об эквивалентности аналитической и формальной классификаций векторных полей и отображений. Однако открытым оставался вопрос: какова полная система инвариантов, совпадение которых необходимо и достаточно для аналитической эквивалентности двух ростков?

До 70-х годов двадцатого века в случае нелинейной формальной нормальной формы аналитическая теория развита не была даже в простейших случаях: в размерности 1 для отображений и 2 для векторных полей. Ответ на этот вопрос для отображений в размерности 1 был получен в 1981 году, независимо: в феврале Ворониным [11], в мае Экаллем [33], и в ноябре Мальгранжем [37]. В этих работах описана полная система функциональных инвариантов (модулей) ростков конформных параболических отображений.

Оказалось, что аналитическая классификация ростков одномерных конформных отображений $x \mapsto x + ax^2 + bx^3 + ..., a \neq 0$ имеет функциональные модули. В дальнейшем функциональные модули были обнаружены в других классификационных задачах: в задаче о классификации особых точек голоморфных слоений (седлоузлы [38] и резонансные сёдла [39]); в аналогичной задаче для векторных полей [15], [53], [54], [59]; в задаче о классификации исключительных разрешимых конечно порождённых групп ростков одномерных голоморфизмов [32], [64] и в других задачах [12], [23], [31], [47]- [50]...

В 1983 году в работе Мартине и Рамиса получена общая аналитическая классификация ростков одномерных резонансных голоморфных отображений [39]. На её основе там же была получена орбитальная классификация ростков двумерных резонансных векторных полей. Аналитическая орбитальная классификация седлоузлов была получена Мартине и Рамисом в [38]. Эта работа существенно использует результаты Хукухары, Кимуры, Матуда [35]. Позже Ворониным и Мещеряковой [15], [24] и, независимо, Тессье [55], была получена аналитическая классификация двумерных векторных полей с особой точкой типа седлоузел [15]; аналитическая классификация резонансных сёдел исследовалась в работе [59].

Двумерные ростки голоморфных полугиперболических отображений рассматривались в работах Уеда [56], [57]. Для таких ростков было построено голоморфное секториальное центральное многообразие; при условии же существования «настоящего» голоморфного центрального многообразия были получены некоторые частные результаты аналитической классификации. А именно: построены голоморфные нормализующие отображения в полуинвариантных областях (инвариантных относительно отображения или обратного к нему); построен одномерный функциональный инвариант. Отметим, что в многомерных задачах аналогичные результаты о нормализации на полуинвариантных областях для произвольных резонансных ростков типа Зигеля были получены Столовичем [51], [52].

Вопрос о существовании голоморфных инвариантных многообразий рассматривался в работах [6], [9], [38] и других.

Цели и задачи

Целью диссертации является исследование аналитической классификации простейших ростков полугиперболических отображений.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Получена аналитическая классификация ростков полугиперболических отображений в простейшем случае.

2. Разработан оригинальный метод решения простейшего функционального уравнения со специальной правой частью в области типа «криволинейная полоса», дающий асимптотическую оценку решения. Данный ме-

тод позволяет построить полную аналитическую классификацию ростков полугиперболических отображений в размерности 2.

3. Исследована связь аналитической классификации двумерных полугиперболических отображений с аналитической классификацией ростков седло-узловых голоморфных векторных полей на плоскости и ростков одномерных параболических отображений, касательных к тождественному.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты диссертации носят теоретический характер. Её значимость заключается как в решении конкретной задачи о классификации, так и в возможности применения разработанного метода к решению близких задач (например, аналитической классификации ростков седло-узловых голоморфных векторных полей в размерности 3 или ростков полугиперболических отображений в размерности выше 2).

Методология и методы исследования

Для построения нормализующих отображений в секториальных областях использован метод сжимающих отображений. Для построения функциональных инвариантов используется традиционная система, основанная на построении нормализующего атласа. Для доказательства теоремы о реализации применена теория почти комплексных структур.

Положения выносимые на защиту

1. Доказана теорема о строгой аналитической классификации простейших ростков полугиперболических отображений; в частности, построены функциональные модули аналитической классификации;

2. Получены необходимые и достаточные условия существования голоморфного центрального многообразия простейших ростков полугиперболических отображений; в случае существования такого многообразия исследована связь с модулями Экалля-Воронина аналитической классификации ростков одномерных конформных отображений, касательных к тождественному;

3. Получены необходимые и достаточные условия включаемости простейшего ростка полугиперболического отображения в поток; исследована связь модулей построенной классификации с модулями Мартине-Рамиса и Мещеряковой-Тессье аналитической классификации ростков седло-узловых векторных полей.

Степень достоверности и апробация результатов

1. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (рук. д.ф.-м.н., проф. В. Е. Федоров);

2. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», г. Москва, 29 мая - 4 июня 2011 г.;

3. Международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», оз. Банное, респ. Башкортостан, 12-16 марта 2018 г.;

4. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, г. Суздаль, 6-11 июля 2018 г.;

5. Международная конференция «Вещественные и комплексные динамические системы», г. Москва, 26-30 ноября 2018 г.

Все результаты диссертации получены лично автором. В совместных работах с С. М. Ворониным научному руководителю принадлежат постановка задачи и общее руководство.

Структура и объём диссертации

Диссертационная работа содержит введение, пять глав, список обозначений и список литературы. Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь личные вкусы автора. Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00739A.

Краткое содержание диссертации

Введение содержит постановку задачи и основные определения, историографию вопроса, актуальность темы исследования, новизну полученных результатов, методы исследования, краткое содержание, апробации.

В **первой главе** описаны этапы решения задачи и собраны понятия и факты, которые так или иначе используются при доказательстве основных результатов диссертации.

В работе рассматриваются ростки голоморфных отображений $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$. Как обычно, два отображения F и $\tilde{F}$ с различными областями определения $U, \tilde{U}$ будем называть *аналитически эквивалентными*, если существует голоморфная замена координат $H : \tilde{U} \to U$, сопрягающая $\tilde{F}$ с F:

$$F \circ H = H \circ \tilde{F} \tag{0.0.1}$$

Эквивалентность будем называть *строгой*, если сопрягающая замена координат H имеет вид:

$$H(x, y) = (x + o(x^2), y + o(x)),\ \ x \to 0 \tag{0.0.2}$$

Замены координат вида (0.0.2) будем называть *нормированными.*

Два ростка будем называть *строго аналитически эквивалентными*, если существуют их строго аналитически эквивалентные представители.

Два ростка F и $\tilde{F}$ будем называть строго *формально* эквивалентными, если существует формальная нормированная замена координат H, для которой (0.0.1) верно как равенство формальных рядов.

Росток отображения неподвижной точке $(0,0)$, а так же его представитель, называют *полугиперболическим*, если один из его мультипликаторов в этой точке гиперболический (не равный по модулю нулю или единице), а другой — параболический (равен единице).

Полугиперболический росток F или его представитель F будем называть *типичным*, если в его разложении

$$F(x,y) = (x + cx^2 + ..., \Lambda y + ...), \text{ где } |\Lambda| \neq 0, 1, \ (x,y) \to (0,0) \tag{0.0.3}$$

постоянная c не равна нулю. Например, росток F_λ отображения

$$F_\lambda : (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{1-x}, e^\lambda y\right), \ \lambda \in \mathbb{R}_+$$

является типичным полугиперболическим.

Пусть $\mathbf{F}_\lambda$ — класс ростков, строго формально эквивалентных ростку F_λ. Ростки этого класса будем называть *простейшими*. Росток F_λ будем называть *нормальной формой* класса $\mathbf{F}_\lambda$. Объектом исследования в диссертации являются именно ростки класса $\mathbf{F}_\lambda$.

Обозначим $\mathbf{SH}$ класс типичных ростков полугиперболических диффеоморфизмов. Из теоремы Адамара-Перрона [4] следует, что для диффеоморфизма класса $\mathbf{SH}$ существует одномерное голоморфное инвариантное многообразие. Выпрямляя его, без ограничения общности можем считать, что оно совпадает с прямой $\{x = 0\}$. Класс ростков из $\mathbf{SH}$, инвариантное многообразие которых совпадает с прямой $\{x = 0\}$, будем обозначать $\mathbf{SH}_0$.

Во **второй главе** построена формальная классификация ростков класса $\mathbf{SH}_0$.

Теорема 0.0.1 (о полуформальной нормализации). *1. Для ростка* $\mathsf{F} \in \mathbf{SH}$ *существует единственный набор комплексных чисел* (a, λ, β) *такой,* *что F формально эквивалентен $\mathsf{F}_{a\lambda\beta}$, где $F_{a\lambda\beta} = g^1_{\omega_{a\lambda\beta}}$ — сдвиг за единичное время вдоль векторного поля*

$$\omega_{a\lambda\beta} = v_a(x) + y(\lambda + \beta v_a'(x))\frac{\partial}{\partial y},\ (a, \lambda, \beta) \in \mathbb{C}^3$$

где $v_a(x) = \frac{x^2}{1+ax}\frac{\partial}{\partial x}$, $\operatorname{Im}\lambda \in [0;\ 2\pi)$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$.

2. *Для представителя F ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{SH}_0$ формальное нормализующее преобразование является* полуформальным. *А именно: нормализующий ряд $H(x, y)$ является формальным по переменной x с аналитическими (в одной и той же области) по переменной y коэффициентами.*

Замечание 0.0.1. *Заметим, что класс $\mathbf{F}_\lambda$ является подклассом $\mathbf{SH}_0$ при значениях параметров $a = \beta = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Тем самым часть задачи диссертации выполнена в более общем виде, чем заявлено.*

Будет показано также, что формальная нормализующая замена единственна с точностью до «суперпозиционного» домножения на сдвиг $g^t_{\omega_{a,\lambda,\beta}}$ за фиксированное время $t \in \mathbb{C}$ и растяжения $(x, y) \mapsto (x, ky)$, $k \neq 0$. В частности, отсюда следует, что:

Замечание 0.0.2. *Полуформальная нормированная нормализующая замена координат единственна.*

В **третьей главе** построены секториальные нормированные нормализующие отображения (т.е. голоморфные замены координат, строго сопрягающие нормальную форму F_λ с ростком класса $\mathbf{F}_\lambda$ на секториальных областях).

Определение 0.0.1. *Будем называть левой секториальной областью S^l на ξ-плоскости дополнение к выпуклой оболочке объединения диска $B_R \stackrel{def}{=} \{|\xi| \leq R\}$, области, лежащей «справа» от прямой $L_{R+3} \stackrel{def}{=} \{\xi \in \mathbb{C} : Re\xi = R+3\}$ (для любого ξ из области «справа» выполнено: $Re\xi > R+3$) и сектора $\{\xi \in \mathbb{C} : |\arg\xi| \leq \tilde{\delta}\}$.*

Определение 0.0.2. *Будем называть левой верхней S_1 (нижней S_2) секториальной областью на ξ-плоскости пересечение S^l и полуплоскости $\{\xi \in \mathbb{C} : \delta < \arg \xi < \pi + \delta\}$ ($\{\xi \in \mathbb{C} : \pi - \delta < \arg \xi < 2\pi - \delta\}$).*

Определение 0.0.3. *Будем называть правой верхней S_4 (нижней S_3) секториальной областью на ξ-плоскости пересечение области «справа» от прямой $L_R \stackrel{def}{=} \{\xi \in \mathbb{C} : Re\xi = R\}$ и полуплоскости $\{\xi \in \mathbb{C} : -\delta < \arg \xi < \pi - \delta\}$ ($\{\xi \in \mathbb{C} : \pi + \delta < \arg \xi < 2\pi + \delta\}$).*

Определение 0.0.4. *Будем называть секториальной областью X_j на x-плоскости прообраз области S_j при отображении $\varkappa : x \mapsto \xi = -\frac{1}{x}$:*

$$X_j \stackrel{def}{=} \varkappa^{-1}(S_j)$$

Выбирая подходящие параметры секториальных областей, без ограничения общности можем считать, что набор $\{\Omega\}$ секториальных областей $\Omega_j = X_j \times \{|y| < \varepsilon\}$ образует покрытие прорезанной окрестности начала координат $\{0 < |x| < \tilde{\varepsilon}\} \times \{|y| < \varepsilon\}$, где $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{R}$. Это покрытие мы и будем называть *стандартным.* Секториальные области Ω_j так же будем называть *стандартными секториальными областями.*

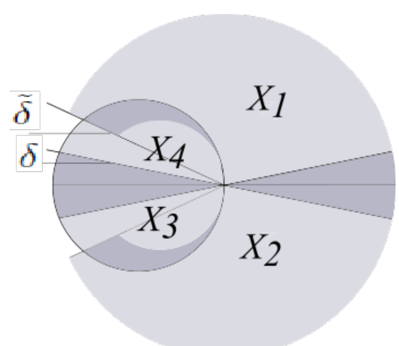


Рис. 1: Секториальные области на x-плоскости X_j.

Теорема 0.0.2 (о секториальной нормализации)**.** *Для любого ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ существует стандартное покрытие $\{\Omega\}$ (рис.1) такое, что:*

1. *Существует единственное нормированное голоморфное отображение, сопрягающее F_λ с F на Ω_j, $j \in \mathbb{Z}_4$;*

2. *Нормированное полуформальное нормализующее отображение является асимптотическим для построенного голоморфного нормированного нормализующего отображения в каждой стандартной секториальной области.*

В **четвёртой главе** построены инварианты аналитической классификации и доказана теорема о реализации.

Пусть F — представитель ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$; H_j — построенные выше для F голоморфные нормированные секториальные нормализующие отображения на секториальных областях Ω_j, $j \in \mathbb{Z}_4$.

Так как области определения нормализующих отображений Ω_j, $j \in \mathbb{Z}_4$ пересекаются, то естественным образом возникают так называемые «функции перехода»: пусть H_j и H_{j+1} — голоморфные отображения, сопрягающие отображение с нормальной формой на секториальных областях Ω_j и Ω_{j+1} соответственно. Отображения $\Phi_{j,j+1} \stackrel{def}{=} H_{j+1}^{-1} \circ H_j$ будем называть *функциями перехода*; функции $\Phi_{j,j+1}$ определены на областях $\tilde{\Omega}_{j,j+1} \stackrel{def}{=} \Omega_j \cap H_j^{-1} \circ H_{j+1}(\Omega_{j+1})$. Без ограничения общности можем считать, что $\tilde{\Omega}_{j,j+1} = \Omega_{j,j+1}$ — пересечение областей Ω_j и Ω_{j+1} (этого можно добиться уменьшением параметров секториальных областей).

Замечание 0.0.3. *Будет показано, что построенные функции перехода $\Phi_{j,j+1}$ голоморфны на $\Omega_{j,j+1}$ и в координатах $I : (x, y) \mapsto (t = e^{-\frac{2\pi i}{x}}, \tau = ye^{\frac{\lambda}{x}})$ имеют вид:*

$$(t(1 + A_{j,j+1}), (\tau + B_{j,j+1})(1 + A_{j,j+1})^{-\frac{\lambda}{2\pi i}}),\ j \in \mathbb{Z}_4$$

где:

$$\left.\begin{array}{l} A_{1,2}=0,\ B_{1,2}=C\in\mathbb{C};\\ A_{4,1}=A_{4,1}(t,\tau),\ B_{4,1}=B_{4,1}(t,\tau)\ \ \textit{голоморфны в } \Theta_{4,1}=(\mathbb{C}^2,0),\\ \textit{причём } A_{4,1}(t,\tau)=O(t),\ B_{4,1}(t,\tau)=O(t),\ t\to 0;\\ A_{2,3}=A_{2,3}(t,\tau),\ B_{2,3}=B_{2,3}(t,\tau)\ \ \textit{голоморфны в } \Theta_{2,3}=(\mathbb{C},\infty)\times(\mathbb{C},0),\\ \textit{причём } A_{2,3}(t,\tau)=O(1),\ B_{2,3}(t,\tau)=O(t^{-1}),\ t\to\infty;\\ A_{3,4}=A_{3,4}(\tau),\ B_{3,4}=B_{3,4}(\tau)\ \ \textit{голоморфны в } \Theta_{3,4}=(\mathbb{C},0),\\ \textit{причём } A_{3,4}(\tau)=O(\tau),\ B_{3,4}(\tau)=O(\tau^2),\ \tau\to 0. \end{array}\right\} \tag{0.0.4}$$

Определение 0.0.5. *Построенный выше набор* $(A_{j,j+1}, B_{j,j+1}, C)$*, будем называть* набором функциональных инвариантов или функциональным модулем *ростка* F *и обозначать* m_F*.*

Теорема 0.0.3 (об эквивалентности и эквимодальности)**.** *Для строгой аналитической эквивалентности ростков класса* $\mathbf{F}_\lambda$ *необходимым и достаточным условием является совпадение их наборов функциональных инвариантов:* $\forall \mathsf{F}, \mathsf{G} \in \mathbf{F}_\lambda : \mathsf{F} \sim \mathsf{G} \iff m_F = m_G$*.*

Пусть $\mathbf{M}_\lambda$ — функциональное пространство, элементами которого являются всевозможные наборы $(A_{j,j+1}, B_{j,j+1}, C)$, $j \in \mathbb{Z}_4$, $j = 2, 3, 4$ где $A_{j,j+1}$ и $B_{j,j+1}$ удовлетворяют условиям (0.0.4), $C \in \mathbb{C}$. Будет доказано, что каждый элемент пространства $\mathbf{M}_\lambda$ может быть реализован как модуль аналитической классификации ростка класса $\mathbf{F}_\lambda$.

Теорема 0.0.4 (о реализации)**.** *Для любого* $m \in \mathbf{M}_\lambda$ *существует росток полугиперболического отображения* $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ *такой, что* m *является набором функциональных инвариантов ростка* F*.*

В **пятой главе** приведены три приложения полученной классификации.

Теорема 0.0.5 (о существовании центрального многообразия).

Пусть $(A_{j,j+1}(t,\tau), B_{j,j+1}(t,\tau), C)$, $j \in \mathbb{Z}_4$, $j = 2,3,4$ *— набор функциональных инвариантов ростка* F *класса* $\mathbf{F}_\lambda$. *Для ростка* F *существует голоморфное в* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *центральное многообразие тогда и только тогда, когда выполнено:*

$$B_{2,3}(t,0) \equiv 0,\ B_{4,1}(t,0) \equiv 0,\ C = 0$$

Отметим, что в случае, если росток F имеет голоморфное центральное многообразие, то сужение ростка на это многообразие является ростком конформного параболического отображения. Аналитическая классификация таких отображений хорошо известна и имеет функциональные модули.

Теорема 0.0.6 (о связи с одномерной динамикой).

Пусть росток $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ *имеет голоморфное центральное многообразие. Тогда нетривиальные сужения компонент модуля ростка* F *на центральное многообразие являются модулем Экалля-Воронина сужения ростка* F *на центральное многообразие.*

Голоморфный росток F называется *включаемым* (в поток) если он является сдвигом за единичное время вдоль голоморфного в окрестности нуля ростка векторного поля. Два голоморфных в окрестности нуля ростка векторных полей v и $\tilde{v}$ называются *строго формально эквивалентными*, если существует обратимая формальная замена координат H такая, что равенство

$$v \circ H = H' \cdot \tilde{v}$$

верно как равенство формальных рядов.

Теорема 0.0.7 (о включении в поток).

Пусть росток $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ *и* $(A_{j,j+1}, B_{j,j+1}, C)$ *— его набор функциональных инвариантов. Тогда росток* F *включаем если и только если:*

$$A_{4,1} = B_{4,1} = A_{2,3} = B_{2,3} = 0$$

Замечание 0.0.4. *Таким образом, если росток класса F_λ включаем, то из его функциональных инвариантов нетривиальными являются инварианты $A_{3,4}(\tau)$, $B_{3,4}(\tau)$ и C. Аналитическая классификация ростков голоморфных векторных полей класса $\mathbf{v}_\lambda$ (строго формально эквивалентных ростку поля $v_\lambda = x^2\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$), имеет три функциональных инварианта: модули Мартине-Рамиса и модуль Мещеряковой-Тессье. Тогда в условиях теоремы 0.0.7 инварианты $A_{3,4}(\tau)$ и C являются модулями Мартине-Рамиса ростка $v \in \mathbf{v}_\lambda$; $B_{3,4}(\tau)$ — модуль Мещеряковой-Тессье ростка $v \in \mathbf{v}_\lambda$.*

1. Схема решения и методы исследования

Решение задачи о строгой аналитической классификации ростков класса $\mathbf{F}_\lambda$ состоит из следующих этапов:

1. Приведение отображения F (представителя ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$) к предварительной нормальной форме.

Из теоремы 0.0.1 о полуформальной классификации, в частности, следует, что если $\mathcal{H}(x, y)$ — полуформальная нормализующая замена координат (формальный степенной ряд по переменной x с голоморфными по y коэффициентами), то её частичная сумма $\mathcal{H}_N(x, y)$ является голоморфной заменой координат, которая сопрягает отображение F с *предварительной нормальной формой* F_N которая отличается от F_λ на малую невязку:

$$F_N = F_\lambda + \Delta_N$$

где $\Delta_N = (O(x^N), O(x^N))$ при $x \to 0$.

2. На втором шаге строим голоморфные отображения, строго сопрягающее нормальную форму F_λ с предварительной нормальной формой F_N на секториальных областях.

Покроем начало координат набором секториальных областей $\{\Omega\}$. Обозначим H_N^j голоморфную нормализующую замену координат, сопрягающую нормальную форму F_λ с предварительной нормальной формой F_N на секториальной области Ω_j. Тогда H_N^j удовлетворяет функциональному уравнению

$$F_\lambda \circ H_N^j - H_N^j \circ F_\lambda = \Delta_N \circ H_N^j,\ (x, y) \in \Omega_j$$

линеаризация которого доставляет гомологическое уравнение

$$F_\lambda \circ H_N^j - H_N^j \circ F_\lambda = \Delta_N,\ (x, y) \in \Omega_j$$

Две секториальные области Ω_1 и Ω_2 будут полуинвариантны относительно обратного отображения F^{-1}, что позволит частично решить гомологическое уравнение методом простого суммирования. В областях Ω_3 и Ω_4 будет доказано существование голоморфного центрального многообразия и инвариантных кривых $\Gamma_c = \{(x, y) : \ y = ce^{-\frac{\lambda}{x}}\}$. Сужение гомологического уравнения на инвариантные кривые в условиях существования центрального многообразия позволит решить гомологическое уравнение. Разработанный механизм построения решения на инвариантных кривых позволяет достроить решение гомологического уравнения в этих областях.

Полученные в процессе построения решения гомологического уравнения асимптотические оценки позволяют применить для построения решения функционального уравнения теорему о сжимающих отображениях и получить голоморфное нормализующее отображение H_N^j в некоторых секториальных областях $\hat{\Omega}_j$ (Ω_j, но при, возможно, более малых радиусах).

Композиция частичный суммы $\mathcal{H}_N$ и голоморфного секториального нормализующего отображения H_N^j доставляет искомое нормированное голоморфное секториальное нормализующее отображение H^j, сопрягающее нормальную форму F_λ с F на Ω_j. Отображение H^j является единственным в классе голоморфных нормированных отображений, сопрягающих F_λ с F на некоторой секториальной области; H^j не зависит от выбора N; нормированное полуформальное нормализующее отображение $\mathcal{H}$ является асимптотическим для H^j, $j \in \mathbb{Z}_4$.

3. Третий шаг — построение инвариантов аналитической классификации.

На предыдущем шаге был построен атлас нормализующих преобразований отображения F. Функции перехода нормализующего атласа доставляют так называемые «функциональные инварианты». Доказанная в главе 4 теорема об эквивалентности и эквимодальности утверждает, что вся информация об аналитическом типе отображения содержится именно в этих функциональных инвариантах.

4. Реализация.

Построенные функциональные модули, описанные в замечании 0.0.3 являются элементами некоторого функционального пространства $\mathbf{M}_\lambda$ (точное описание в главе 4). На последнем шаге будет показано, что каждый набор из пространства $\mathbf{M}_\lambda$ может быть реализован как функциональный модуль ростка класса $\mathbf{F}_\lambda$.

Из построений функциональных модулей следует, что пара $(\{\Omega\}, \{H_j\})$, $j \in \mathbb{Z}_4$ (где $\{\Omega\}$ — стандартное покрытие, а $\{H_j\}$ — голоморфные нормализующие отображения), можно понимать как комплексную структуру на прорезанной окрестности начала координат такую, что существует представитель F ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ в картах $(\tilde{x}, \tilde{y}) = H_j(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_j$ имеющий вид F_λ. Функции $\Phi_{j,j+1} = H_{j+1}^{-1} \circ H_j|_{\Omega_j \cap \Omega_{j+1}}$ тогда суть функции перехода, компоненты которых являются элементами пространства $\mathbf{M}_\lambda$.

При доказательстве теоремы 0.0.4 о реализации мы наоборот, рассмотрим набор $\{\Phi_{j,j+1}\}$ голоморфных на некоторых областях $\{\Omega_{j,j+1}\}$. Тогда существует стандартное покрытие $\{\Omega\}$ такое, что $\Omega_{j,j+1}$ являются пересечением секториальных областей Ω_j и Ω_{j+1}.

Склеивая секториальные области Ω_j по голоморфизмам $\Phi_{j,j+1}$, получим многообразие $\mathcal{M}$. Построим диффеоморфизм из $\mathcal{M}$ в некоторое многообразие $\mathcal{N}_0$. Многообразие $\mathcal{N}_0$ представляет собой прямое произведение проколотой окрестности начала координат на диск малого радиуса и наделёно почти комплексной структурой, индуцированной комплексной структурой $\mathcal{M}$. Продолжим по непрерывности почти комплексную структуру в начало координат (прямое произведение нуля на диск) — пространство $\mathcal{N}$. Определённая таким образом почти комплексная структура является гладкой. Тогда из теоремы Ньюлендера-Ниренберга следует, что в некоторой малой окрестности нуля $\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ существует голоморфное в смысле почти комплексной структуры $\mathcal{N}$ отображение из $\tilde{\mathcal{N}}$ в $(\mathbb{C}^2, 0)$. Уменьшая, если требуется, радиусы исходных областей, без ограничения общности можем считать, что $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$.

Наконец, определим на многообразии $\mathcal{M}$ некоторое голоморфное отображение, в естественных картах совпадающее с F_λ. Тогда «сквозное» голоморфное отображение из Ω_j в $\mathcal{M}$, из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$, а потом в $(\mathbb{C}^2, 0)$ сопрягает отображение F_λ с некоторым голоморфным отображением F, определённым на $(\mathbb{C}^2, 0)$. Причём «сквозное» отображение может быть выбрано вида

$$(x + o(x^2), y + o(x)) \text{ при } x \to 0$$

поэтому росток отображения F будет принадлежать классу $\mathbf{F}_\lambda$. Таким образом каждому набору голоморфизмов $\Phi_{j,j+1}, j \in \mathbb{Z}_4$ поставлен в соответствие росток класса $\mathbf{F}_\lambda$.

2. Формальная классификация

Заметим, что росток класса $\mathbf{SH}_0$ — резонансный. По теореме Пуанкаре-Дюлака [4] формальной заменой координат такой росток можно привести к виду

$$(x, y) \mapsto (f(x), yK(x))$$

Однако, такие ростки допускают и дальнейшую нормализацию. А именно, первая компонента $x \mapsto f(x)$ является параболическим ростком. Формальная классификация параболических ростков хорошо известна [1]: в типичном случае класс формальной эквивалентности такого ростка определяется одним числовым модулем. Удобно использовать в качестве формальной нормальной формы параболического ростка сдвиг за единичное время $g^1_{v_a}$ вдоль ростка (в начале координат) векторного поля

$$v_a(x) = \frac{x^2}{1+ax}\frac{\partial}{\partial x}, \quad a \in \mathbb{C}$$

Далее, имеется известная параллельность результатов по классификации отображений и векторных полей. Формальная классификация векторных полей с особой точкой типа седлоузел в двумерном случае получена в [15]. Для типичных векторных полей с такой особой точкой (сдвиг за единичное время вдоль такого векторного поля как раз и есть полугиперболическое отображение), формальная классификация имеет три числовых параметра. Так что в качестве формальной нормальной формы для типичных полугиперболических отображений можно было бы взять сдвиги за единичное время вдоль формальной нормальной формы седлоузловых векторных полей из [15]. Однако для наших целей будет удобно использовать другие формальные нормальные формы, которые, впрочем, так же будут зависеть от 3-х параметров. Кроме того, для того, чтобы формальную классификацию ростков полугиперболических отображений получить из классификации седлоузловых векторных полей, надо доказать теорему о формальном включении ростков полугиперболических отображений в поток, что само по себе нетривиально.

Кроме того, как отмечалось выше, для дальнейших исследований полугиперболических ростков нам потребуется нечто большее нежели просто приводимость к формальной нормальной форме. Однако ни теорема Пуанкаре-Дюлака, ни теорема о формальном включении в поток не дают необходимого результата. Поэтому теорема о формальной классификации будет доказана прямыми выкладками, а теорему о формальном включении в поток (и даже в её усиленном «полуформальном» варианте) получим в качестве простого следствия. При этом мы получим существенно более сильный результат, состоящий в том, что представитель ростка класса $\mathbf{SH}_0$ приводится к формальной нормальной форме полуформальной заменой.

Теорема 2.0.1 (о полуформальной классификации). *1. Для ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{SH}$ существует единственный набор комплексных чисел a, λ, β такой, что F формально эквивалентен $\mathsf{F}_{a\lambda\beta}$, где $F_{a\lambda\beta} = g^1_{\omega_{a\lambda\beta}}$ — сдвиг за единичное время вдоль векторного поля*

$$\omega_{a\lambda\beta} = v_a(x) + y(\lambda + \beta v_a'(x))\frac{\partial}{\partial y}, \quad (a, \lambda, \beta) \in \mathbb{C}^3$$

где $v_a(x) = \frac{x^2}{1+ax}\frac{\partial}{\partial x}$, $\operatorname{Im}\lambda \in [0;\ 2\pi)$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$.

2. Для представителя F ростка класса $\mathbf{SH}_0$ нормализующее преобразование является полуформальным *(т.е. формальным по переменным x с аналитическими по переменным y коэффициентами, в одной и той же области для всех коэффициентов).*

Замечание 2.0.1. *Будет показано так же, что ФНФ единственна, то есть по заданному ростку $\mathsf{F} \in \mathbf{SH}_0$ параметры a, λ, β его ФНФ определяются однозначно, а нормализующая замена единственна с точностью до «суперпозиционного» домножения на сдвиг $g^t_{\omega_{a\lambda\beta}}$ за фиксированное время $t \in \mathbb{C}$ и растяжения $(x, y) \mapsto (x, ky)$, $k \neq 0$.*

Следствие 2.0.1. *Пусть $\mathsf{F}_{a,\lambda,\beta}$ — формальная нормальная форма ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{SH}_0$. Тогда: $\forall N \in \mathbb{N}$ существует росток $\mathsf{F}_N \in \mathbf{SH}_0$, аналитически* *эквивалентный ростку* F *такой, что*

$$\mathsf{F}_N(x,y) - \mathsf{F}_{a\lambda\beta}(x,y) = O(|x|^N) \text{ при } |x| \to 0$$

Росток F_N будем называть *предварительной нормальной формой.*

Следствие 2.0.2. *Для любого ростка* $\mathsf{F} \in \mathbf{SH}_0$ *можно построить такое росток формального векторного поля* v *с особой точкой типа седлоузел, что* $F = g_v^1$.

2.1. Схема доказательства

Теорема о полуформальной классификации будет доказана в два этапа. В пункте 2.2 (1 этап) стандартным методом последовательных приближений полугиперболический росток будет приведен с помощью полуформальных замен координат к так называемой предварительной формальной нормальной форме (ПФНФ). На втором этапе (пункт 2.3) ПФНФ будет приведена к полиномиальному виду, окончание доказательства — в пункте 2.4. В пункте 2.5 мы покажем единственность формальной нормальной формы (и «почти единственность» формальной нормализующей замены). Следствия 1 и 2 будут доказаны в пункте 2.6.

2.2. Предварительная формальная нормальная форма

Пусть росток F из класса $\mathbf{SH}_0$, F — его представитель. В первую очередь преобразуем отображение F к более простому виду. Фактически, это и будет классическая формальная нормальная форма Пуанкаре-Дюлака. Однако мы покажем приводимость к такому виду «полуформальными» заменами координат.

Лемма 2.2.1. *Существует формальная замена координат, приводящая типичное полугиперболическое отображение* F *— представитель ростка из* *класса* $\mathbf{SH}_0$ *к некоторому виду, который будем называть* предварительная формальная нормальная форма *(ПФНФ)*

$$F_0(x,y) = (f(x), yK(x)), \text{ где } f(x) = x + x^2 + O(x^3),\ K(x) = \Lambda + O(x). \quad (2.2.1)$$

Нормализующее преобразование при этом может быть выбрано в виде

$$(x,y) \mapsto \left(\sum_i \alpha_i(y) x^i;\ \sum_j \beta_j(y) x^j \right), \quad i,j = 0,1,...$$

с α_i, β_j *- аналитическими функциями, определенными для всех* i,j *в некоторой фиксированной окрестности начала координат.*

Доказательство. 1. Коэффициент b_0.

Для представителя F ростка класса $\mathbf{SH}_0$ прямая $\{x = 0\}$ является инвариантной, поэтому $F(\{x=0\}) = \{x=0\}$. Представим отображение F в виде ряда Хартогса в полидиске $S_{rR} = \{(x,y) :\ |x| < r,\ |y| < R\}$:

$$F(x,y) = \big(xa_1(y) + x^2 a_2(y) + ..., b_0(y) + b_1(y)x + ...\big)$$

в котором функции $a_i(y), b_j(y),\ i = 1,2,...,\ j = 0,1,...,$ голоморфны. Тогда они удовлетворяют условиям: $a_1(0) = 1,\ a_2(0) \neq 0,\ b_0(0) = 0,\ b_0'(0) = \Lambda$, $|\Lambda| \neq 0,1$. Всюду ниже мы будем использовать такие же разложения в ряды Хартогса и отслеживать лишь значения параметра R (радиус сходимости круга, в котором голоморфны все коэффициенты ряда), не обращая внимания на другой параметр.

Сужение f отображения F на прямую $\{x = 0\}$ — это гиперболическое отображение $y \mapsto b_0(y)$. По теореме Шредера [18] оно может быть линеаризовано аналитической заменой координат. Таким образом, без ограничения общности можем считать, что $b_0(y) = \Lambda y$.

2. Нормализация коэффициента a_1.

Аналитическая на S_{rR} замена координат $H_1(x,y) = (k(y)x, y)$ преобразует F к виду

$$F_1(x,y) = H_1^{-1} \circ F \circ H_1(x,y) = (xa_1(y)k(y)\frac{1}{k(\Lambda y + ...)} + ..., \Lambda y + ...)$$

Мы хотим выбрать такое $k(y)$, чтобы

$$a_1(y)\frac{k(y)}{k(\Lambda y)} = 1 \tag{2.2.2}$$

Если $|\Lambda| > 1$, то искомое голоморфное решение уравнения (2.2.2) дается формулой

$$k(y) = \prod_{n=1}^{\infty} a_1\left(\frac{y}{\Lambda^n}\right)$$

Если же $0 < |\Lambda| < 1$, то голоморфным решением уравнения (2.2.2) будет функция

$$k(y) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_1(\Lambda^n(y))}$$

Сходимость бесконечных произведений и их голоморфность в круге $\{|y| < R\}$ следует из соответствующих теорем комплексного анализа. Таким образом, голоморфной на S_{rR} заменой координат коэффициент a_1 можно сделать равным 1. Всюду далее будем считать $a_1 \equiv 1$.

Замечание 2.2.1. *Отметим, что после выполненной замены второй параметр полидиска S_{rR} — радиус сходимости коэффициентов разложения в ряд Хартогса нормализуемого отображения — не изменился.*

3. Нормализация коэффициентов a_2 и b_1.

Рассмотрим преобразование $H_2(x, y)$ вида:

$$H_2(x, y) = (x + \alpha(y)x^2, y + \beta(y)x)$$

и обратное к нему

$$H_2^{-1}(x, y) = (x - \alpha(y)x^2 + O(x^3), y - \beta(y)x + O(x^2))$$

Тогда

$$\begin{gathered} F_2(x, y) = H_2^{-1} \circ F_1 \circ H_2(x, y) = \\ = (x + x^2(\alpha(y) - \alpha(\Lambda y) + a_2(y)) + O(x^3), \Lambda y + x(\Lambda\beta(y) - \beta(\Lambda y) + b_1(y)) + O(x^2)), \\ \text{при } x \to 0 \end{gathered}$$

Мы бы хотели решить два уравнения:

$$\alpha(\Lambda y) - \alpha(y) = a_2(y) \tag{2.2.3}$$

$$\beta(\Lambda y) - \Lambda\beta(y) = b_1(y) \tag{2.2.4}$$

Это позволило бы максимально упростить, то есть сделать равными нулю соответствующие коэффициенты ряда F_2. Рассмотрим сначала уравнение (2.2.3). Представим функции $a_2(y)$ и $\alpha(y)$ в виде степенных рядов:

$$\alpha(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k y^k, \quad a_2(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2,k} y^k$$

здесь первый ряд является разложением неизвестной функции α, а второй ряд сходится круге $\{|y| < R\}$. Подставим эти разложения в уравнение и, сравнивая левую и правую части, получим:

$$(\Lambda^k - 1)\alpha_k = a_{2,k}, \quad k = 0, 1, 2... \tag{2.2.5}$$

Для любого $k \neq 0$ уравнение (2.2.5) разрешимо; при $k = 0$ решение существует только в случае $a_{2,0} = 0$. Повторяя те же рассуждения для (2.2.4), получаем для коэффициентов β_k и $b_{1,k}$ разложений $\beta(y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k(y)$ и $b_1(y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{1,k}(y)$ систему

$$(\Lambda^k - \Lambda)\beta_k = b_{1,k}, \quad k = 0, 1, 2...$$

уравнения которой разрешимы для всех $k \neq 1$; при $k = 1$ необходимым условием разрешимости является равенство нулю коэффициента $b_{1,1}$. Итак, при замене координат указанного вида коэффициент a_2 можно сделать равным константе, а коэффициент b_1 привести к линейному виду. Отметим, что из условий типичности следует, что $a_2(0) \neq 0$, Поэтому, без ограничения общности можем ниже считать, что $a_2(y) = const \neq 0$, $b_1(y) = b_{1,1}y$. Наконец, используя дополнительное преобразование $(x, y) \mapsto (mx, y)$, можем добиться того, что $a_2(y) = 1$.

Так как функции $a_2(y)$ и $b_1(y)$ аналитические в области $\{|y| < R\}$, то ряды $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ так же сходятся в круге $\{|y| < R\}$, поэтому построенное преобразование H голоморфно на S_{rR} и по прежнему справедливо замечание из предыдущего подпункта.

4. Индукция.

Пусть на некотором шаге отображение F_{N-1} имеет форму

$$F_{N-1}(x,y) = (x + x^2 + \alpha_3 x^3 + ... + \alpha_{N-1}x^{N-1} + \alpha_N(y)x^N + O(x^{N+1});$$

$$y(\Lambda + \beta_1 x + ... + \beta_{N-2}x^{N-2}) + \beta_{N-1}(y)x^{N-1} + O(x^N))$$

где $\alpha_3, ..., \alpha_{N-1}, \beta_1, ..., \beta_{N-2}$ являются константами, функции $\alpha_N(y)$ и $\beta_{N-1}(y)$ голоморфны на $\{|y| < R\}$. Будем использовать преобразование

$$H_N(x,y) = \left(x + \alpha(y)x^N, y + \beta(y)x^{N-1}\right)$$

Тогда, как и на предыдущем шаге, можем сделать коэффициент α_N равным константе, а коэффициент β_{N-1} — линейным по переменной y, при этом $H_N(x,y)$ будет голоморфно на S_{rR} и, опять же, будет справедливо замечание 2.

5. Окончание доказательства.

Выполняя для любого N замену из предыдущего пункта, построим последовательность замен H_N, каждая из которых «улучшает» по одной паре «мономов» из разложения нормализуемого преобразования в ряд Хартогса. Заметим, что в суперпозиции $\mathcal{H}_N = H_1 \circ H_2 \circ ... \circ H_N$ происходит стабилизация «мономов» в разложении $\mathcal{H}_N$. То же происходит и с нормализуемым отображением $F_N = \mathcal{H}_N^{-1} \circ F \circ \mathcal{H}_N$. Поэтому бесконечная суперпозиция $\mathcal{H} = \lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{H}_N$ сходится в пространстве формальных рядов по переменной x с коэффициентами, голоморфными по переменной y в круге $\{|y| < R\}$, и является искомой полуформальной нормализующей заменой координат, поскольку F_N сходятся к ПФНФ (2.2.1) в том же пространстве рядов. $\square$

Замечание 2.2.2. *Из специфики построения замен следует, что бесконечная суперпозиция, приводящая F к ПНФ, является формальным рядом по переменной x с коэффициентами, голоморфными в одной и той же окрестности начала координат.*

2.3. Второй шаг формальной нормализации

Выше мы привели типичное полугиперболическое отображение к виду (2.2.1). Вторичная нормализация, приводящая его к ФНФ будет выполнена с помощью замены вида

$$H(x, y) = (p(x), yq(x)) \tag{2.3.1}$$

$$p'(0) = 1 \tag{2.3.2}$$

Эта замена приводит ПФНФ (2.2.1) к виду $\tilde{F} = H^{-1} \circ F_0 \circ H = (\tilde{f}(x), \tilde{K}(x)y)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= p^{-1} \circ f \circ p \\ \tilde{K}(x) &= K \circ p \cdot \tfrac{q}{q \circ \tilde{f}} \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Замечание 2.3.1. *Значения*

$$\begin{aligned} f'''(0) &= \tilde{f}'''(0) \\ K(0) &= \tilde{K}(0) \\ K'(0) &= \tilde{K}'(0) \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

не меняются при действии замены координат (2.3.1), (2.3.2) (являются инвариантами формальной классификации типичных полугиперболических отображений). Для второго и третьего равенств это очевидно, а первое показано в [11] (но, конечно, легко может быть проверено прямыми выкладками).

Напомним, что f является типичным параболическим отображением и $\tilde{f}$ — сопряженное к нему. Из формальной классификации параболических отображений известно (см. [11]), что существует константа a и формальная замена координат $p(x)$, переводящая отображение f к $\tilde{f} = g^1_{v_a}(x)$, где $g^1_{v_a}(x)$ является сдвигом за единичное время вдоль векторного поля $v_a = \frac{x^2}{1+ax}\frac{\partial}{\partial x}$. Более того, если $f(x)$ имеет вид $f(x) = x + x^2 + \ldots$ (а для первой компоненты отображения (2.2.1) это так), то для замены $p(x)$ будет выполнено условие (2.3.2). Далее, положим $\varphi = \ln q$, $\quad k = \ln\left(\frac{\tilde{K}}{K \circ p}\right)$, тогда второе уравнение из (2.3.3) принимает вид

$$-\varphi \circ \tilde{f} + \varphi = k. \tag{2.3.5}$$

Определение 2.3.1. *Параболическое отображение будем называть* типичным, *если в разложении*

$$f(x) = x + cx^2 + \ldots$$

постоянная «с» не равна нулю.

Лемма 2.3.1. *Для любого типичного формального параболического отображения $\tilde{f}$ и любой функции $k(x)$, такой, что $k(0) = k'(0) = 0$, существует единственное формальное решение $\varphi(x)$ уравнения (2.3.5) такое, что $\varphi(0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{f} = x + cx^2 + \ldots$, $c \neq 0$, $k(x) = \sum\limits_{j=2}^{\infty} k_j x^j$; $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j x^j$. Подставляя эти разложения в (2.3.5), получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j (x + cx^2 + \ldots)^j = \sum_{j=2}^{\infty} k_j x^j$$

Приравнивая коэффициенты при x^j, $j = 1, 2, \ldots$ мы получим бесконечную систему уравнений

$$-c(j-1)\varphi_{j-1} + \ldots = k_j, \quad j = 2, \ldots$$

где многоточием обозначены члены, зависящие от φ_s с номерами s, меньшими, чем $j-1$. Так как $c \neq 0$ для типичного параболического отображения, то эти уравнения можно решать последовательно. Это дает существование, а так же и единственность формального решения. $\square$

Лемма 2.3.2. *Для любых параболических диффеоморфизмов* $f(x) = x + x^2 + \ldots$ *и* $p(x) = x + \ldots$*; любых* K *и* $\tilde{K}$ *, удовлетворяющих (2.3.4), существует формальное решение* q *второго уравнения системы (2.3.3), такое что* $q(0) = 1$*. Это решение является единственным (с точностью до умножения на константу). В частности это доказывает, что любое отображение* $F \in \mathbf{SH}_0$ *вида* $(2.2.1)$ *может быть приведено формальной заменой вида (2.3.1) к форме* $\tilde{F}_{a\lambda b}$

$$\tilde{F}_{a\lambda b}(x, y) = (g^1_{v_a}(x), y(\Lambda + bx)),\ \Lambda = e^{\lambda}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из леммы (2.3.1), а второе — из первого. □

2.4. Окончание доказательства теоремы о формальной классификации

Пусть $F_{a\lambda\beta} = g^1_{\omega_{a\lambda\beta}}(x, y)$ — сдвиг за единичное время вдоль векторного поля $\omega_{a\lambda\beta}$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v_a(x) \\ \dot{y} = y(\lambda + \beta v_a'(x)) \end{cases}$$

Пусть $(x(t), y(t))$ — её решение с начальными условиями $(x(0) = x_0, y(0) = y_0)$. Получим $x(t) = g^t_{v_a}(x_0)$, $\frac{dy}{dx} = \lambda y \frac{1}{v_a(x)} + y\beta \frac{v_a'(x)}{v_a(x)}$. Тогда $dy = \lambda y dt + y\beta d(\ln v_a(x))$, и $y(t) = y_0 e^{\lambda t} \left(\frac{v_a(x_0)}{v_a(x(t))}\right)^{-\beta}$. Обозначив $f_a = g^1_{v_a}$, мы получим

$$F_{a\lambda\beta}(x_0, y_0) = \big(f_a(x_0), e^{\lambda} y_0 (f_a'(x_0))^{-\beta}\big) \tag{2.4.1}$$

Наконец, если

$$\Lambda = e^{\lambda},\ \Lambda(x) = \Lambda \left(f_a'(x)\right)^{-\beta}$$

то $F_{a\lambda\beta} = (f_a(x), y\Lambda(x))$.

Вычислим инварианты (2.3.4) для $F_{a\lambda\beta}$. Это и будут в точности параметры a, $\Lambda = e^{\lambda}$, β. Поэтому, по лемме 2.3.2, $F_{a\lambda\beta}$ приводится к $\tilde{F}_{a\lambda\beta}$

заменой вида (2.3.1). Но и исходное отображение F, в соответствии с построением этого и предыдущего пунктов, приводится к некоторой форме $\tilde{F}_{a\lambda\beta}$ полуформальными заменами. Следовательно, исходное отображение F можно привести к виду $F_{a\lambda\beta}$ полуформальными заменами переменных. Теорема о формальной нормализации доказана.

2.5. Единственность ФНФ и формальной нормализующей замены

Пусть $F = F_{a\lambda\beta}$ и $F' = F_{a'\lambda'\beta'}$ — две формальные нормальные формы из теоремы о формальной классификации, и пусть формальная замена координат H сопрягает F и F':

$$F \circ H = H \circ F' \tag{2.5.1}$$

Заметим, что для формальных нормальных форм прямые $\{x = 0\}$ и $\{y = 0\}$ являются инвариантными (первая из них — их общее инвариантное гиперболическое подмногообразие, вторая — центральное многообразие). Поэтому замена координат H должна их сохранять. Значит, замена H имеет вид

$$H(x, y) = (xa(x, y); yb(x, y)) \tag{2.5.2}$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$ — формальные степенные ряды, причем $a(0, 0) \cdot b(0, 0) \neq 0$. Но тогда формальное отображение $h(x) = xa(x, 0)$ сопрягает отображения $f_a(x)$ и $f_{a'}(x)$:

$$h \circ f_a = f_{a'} \circ h \tag{2.5.3}$$

Из единственности ФНФ параболических отображений [11] отсюда следует совпадение параметров a и a': $a = a'$. Аналогично, формальный диффеоморфизм $g(y) = yb(0, y)$ сопрягает сужения F и F' на прямую $\{x = 0\}$:

$$g(\Lambda y) = \Lambda' g(y) \tag{2.5.4}$$

Дифференцируя (2.5.4) по y и подставляя $y = 0$, получим $\Lambda = \Lambda'$, а из условия $\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\lambda' \in [0; 2\pi)$ получим $\lambda = \lambda'$. Далее, сравнивая в (2.5.3), с учетом того, что $a = a'$, коэффициенты при x^2, получим

$$h'(0) = a(0,0) = 1 \tag{2.5.5}$$

Далее, подставляя (2.5.2) в (2.5.1) и вычисляя коэффициент при xy во второй компоненте полученного равенства, из равенства (2.5.5) мы получим $\beta = \beta'$. Это завершает доказательство единственности ФНФ.

Для изучения вопроса единственности нормализующей замены достаточно рассмотреть формальные замены координат, сохраняющие ФНФ. Таким образом, надо найти все формальные замены $H(x, y)$, удовлетворяющие условию (2.5.1) (для случая $F = F'$). Повторяя те же рассуждения, что и выше и используя те же обозначения, получим опять же равенства (2.5.3) и (2.5.4), в которых $a = a'$, $\Lambda = \Lambda'$. Из (2.5.3) следует, что h коммутирует с f_a. Как было показано в [11], все формально коммутирующие с f_a отображения h имеют вид $h = g^t_{v_a}$ для некоторого $t \in \mathbb{C}$. Рассмотрим отображение $H_t = g^t_{\omega_{a\lambda\beta}}$; так как $F = g^1_{\omega_{a\lambda\beta}}$, то H_t и F коммутируют: $H_t \circ F = F \circ H_t$. Но тогда и $H_t^{-1} \circ H$ коммутирует с F. Поэтому, без ограничения общности можем считать, что $h = id$ (этого можно добиться, заменив H на $H_t^{-1} \circ H$).

Далее, из (2.5.4) следует линейность g: $g(y) = ky$, $k \neq 0$. Линейное отображение $L : (x, y) \mapsto (x, ky)$ так же коммутирует с ФНФ F. Повторяя те же выкладки. что и выше, мы можем, тем самым, считать, что и отображение g тождественно. Наконец, как и выше, подставляя (2.5.2) в (2.5.1) и используя условие «$H = id$ на прямых $\{x = 0\}$ и $\{y = 0\}$», последовательным приравниванием коэффициентов при степенях x^k (то есть, фактически, повторяя все рассуждения из пунктов 4-6 и решая соответствующие, в данном случае однородные, уравнения), получим $H \equiv id$. С учетом двух сделанных поправок нормализующей замены, это и дает её единственность с точностью до растяжения вдоль y и сдвига вдоль векторного поля $\omega_{a\lambda\beta}$.

2.6. Доказательство следствий

Доказательство следствия 1

Пусть $H(x,y) = (H_1(x,y), H_2(x,y))$ — формальная нормализующая замена, построенная выше в теореме о формально классификации. Заметим, что каждый из формальных рядов $H_j(x,y),\ j = 1,2$ представим в виде $H_j(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^j(y)x^k$, где функции $c_k^j(y)$ голоморфны в некоторой фиксированной окрестности начала координат. Рассмотрим замену $H_N(x,y) = (H_{1N}(x,y), H_{2N}(x,y))$, где $H_{jN}(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{N} c_k^j(y)x^k$. Это — голоморфная замена, и она переводит росток требуемого вида с ростком F.

Доказательство следствия 2

Пусть F — произвольный росток из $\mathbf{SH}_0$, $F_{a\lambda\beta} = g^1_{\omega_{a\lambda\beta}}$ — его ФНФ, и пусть H — полуформальная замена координат, сопрягающая F и $F_{a\lambda\beta}$:

$$F \circ H = H \circ F_{a\lambda\beta}$$

Пусть замена H переводит векторное поле $\omega_{a\lambda\beta}$ в векторное поле ω:

$$H' \cdot \omega = \omega_{a\lambda\beta} \circ H$$

Тогда $F = g^1_\omega$, что и требовалось доказать.

3. Секториальная нормализация

В данном разделе будет доказана теорема 0.0.2 о секториальной нормализации на секториальных областях Ω_j, $j \in \mathbb{Z}_4$.

3.1. Выпрямляющие координаты

Определение 3.1.1. *Отображение K, действующее по правилу*

$$(\xi, z) = K(x, y) \stackrel{def}{=} \left(\xi = \varkappa(x), z = y\,(v(x))^{-\beta}\right) \tag{3.1.1}$$

где $\varkappa(x) = -\frac{1}{x} + a\ln x$, $v(x) = \frac{x^2}{1+ax}$ (при соответствующем выборе ветви логарифма) будем называть выпрямляющими координатами *(оно выпрямляет векторное поле $\omega_{a\lambda\beta}$).*

Лемма 3.1.1. *Пусть $v_a = \frac{x^2}{1+ax}$ и $\omega_{a\lambda\beta} = v_a\frac{\partial}{\partial x} + y(\lambda + \beta v_a'(x))\frac{\partial}{\partial y}$ — векторные поля, f и $F_{a\lambda\beta}$ — сдвиги за единичное время первого и второго поля, соответственно. Тогда:*
$\varkappa_* v_a = \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\varkappa \circ f \circ \varkappa^{-1} = \xi + 1$;
$K_*\omega_{a\lambda\beta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \lambda z\frac{\partial}{\partial z}$, $K \circ F_{a\lambda\beta} \circ K^{-1} = F_0$, где $F_0 : (\xi, z) \mapsto (\xi + 1, \Lambda z)$.

Доказательство. Доказательство проводится путем соответствующих вычислений. □

В этой главе мы построим голоморфное нормализующее отображение H_N, сопрягающие нормальную форму F_λ с предварительной нормальной формой F_N. Решать эту задачу удобнее в выпрямляющих координатах.

Обозначим $F_0 \stackrel{def}{=} K \circ F_{a\lambda\beta} \circ K^{-1}$ нормальную форму на (ξ, z)-плоскости, которая имеет вид

$$F_0(\xi, z) = \left(\xi + 1, e^{\lambda} z\right) \tag{3.1.2}$$

Лемма 3.1.2. *Пусть отображения F, F_0, $F_{a\lambda\beta}$ и F_N определены выше. Тогда отображение $\tilde{F}_N \stackrel{def}{=} K \circ F_N \circ K^{-1}$ имеет вид*

$$\tilde{F}_N(\xi, z) = F_0(\xi, z) + O\left(\tilde{\Delta}_{1N}, \tilde{\Delta}_{2N}\right),\ \tilde{\Delta}_{jN}(\xi, z) = O\left(|\xi|^{-N_1}\right),\ j = 1, 2, \quad \textit{при } \xi \to \infty$$

где $N_1 = \min\{N-2, N-2Re\beta\}$.

Доказательство. Нам известно, что предварительная нормальная форма на (x, y)-плоскости имеет вид (см. следствие 2.0.1):

$$F_N(x,y) = \left(\lambda(x) + \Delta_{1N}(x,y), ye^{\lambda}\Lambda(x) + \Delta_{2N}(x,y)\right)$$

где $\Delta_{jN}(x,y) = O\left(|x|^N\right),\ j = 1,2$ при $x \to 0$. На (ξ, z)-плоскости нормальная форма имеет вид:

$$F_{a\lambda\beta}(x,y) = \left(\varkappa^{-1}\left(\varkappa(x)+1\right), e^{\lambda}y\left(\frac{v(x)}{v\left(\varkappa^{-1}\left(\varkappa(x)+1\right)\right)}\right)^{-\beta}\right) \tag{3.1.3}$$

где

$$\varkappa(x) = O\left(|x|^{-1}\right),\ v(x) = O\left(|x|^2\right),\ x \to 0 \tag{3.1.4}$$

Отображение K сопрягает $F_{a\lambda\beta}$ нормальной формой F_0; обратное к нему имеет вид

$$K^{-1} : (\xi, z) \mapsto \left(x = \varkappa^{-1}(\xi), y = zv^{\beta}(\varkappa^{-1}(\xi))\right),$$
$$\text{где } \varkappa^{-1}(\xi) = O\left(|\xi|^{-1}\right),\ v^{\beta}(\varkappa^{-1}(\xi)) = O\left(|\xi|^{-2Re\beta}\right),\ |\xi| \to \infty \tag{3.1.5}$$

Подставляя K и K^{-1} в определение отображения $\tilde{F}_N$ получаем

$$\tilde{F}_N(\xi,z) = \Big[\varkappa\left(\varkappa^{-1}(\xi+1) + \Delta_{1N}\left(\varkappa^{-1}(\xi), zv^{\beta}(\kappa^{-1}(\xi))\right)\right),$$
$$\left.\frac{e^{\lambda}zv^{\beta}(\varkappa^{-1}(\xi+1)) + \Delta_{2N}\left(\varkappa^{-1}(\xi), zv^{\beta}(\kappa^{-1}(\xi))\right)}{v^{\beta}\left(\varkappa^{-1}(\xi+1) + \Delta_{1N}\left(\varkappa^{-1}(\xi), zv^{\beta}(\kappa^{-1}(\xi))\right)\right)}\right] = F_0(\xi,z) + \left(\tilde{\Delta}_{1N}(\xi,z), \tilde{\Delta}_{2N}(\xi,z)\right)$$

Отсюда

$$\tilde{\Delta}_{1N}(\xi,z) = \varkappa\left(\varkappa^{-1}(\xi+1) + \Delta_{1N}\left(\varkappa^{-1}(\xi), zv^{\beta}(\kappa^{-1}(\xi))\right)\right) - (\xi+1) =$$
$$= \varkappa\left(\varkappa^{-1}(\xi+1) + \Delta_{1N}\left(\varkappa^{-1}(\xi), zv^{\beta}(\kappa^{-1}(\xi))\right)\right) - \varkappa\left(\varkappa^{-1}(\xi+1)\right) =$$
$$= \varkappa'(\kappa^{-1}(\xi))\Delta_{1N}\left(\varkappa^{-1}(\xi), zv^{\beta}(\kappa^{-1}(\xi))\right) + O(\Delta_{1N}) = O\left(|\xi|^{-N+2}\right)$$

Аналогично для $\tilde{\Delta}_{2N}(\xi, z)$:

$$\tilde{\Delta}_{2N}(\xi, z) = \frac{e^{\lambda} z v^{\beta}(\varkappa^{-1}(\xi+1)) + \Delta_{2N}\left(\varkappa^{-1}(\xi), z v^{\beta}(\kappa^{-1}(\xi))\right)}{v^{\beta}\left(\varkappa^{-1}(\xi+1) + \Delta_{1N}\left(\varkappa^{-1}(\xi), z v^{\beta}(\kappa^{-1}(\xi))\right)\right)} - e^{\lambda} z =$$

$$= e^{\lambda} z \frac{v^{\beta}\left(\varkappa^{-1}(\xi+1)\right) - v^{\beta}\left(\varkappa^{-1}(\xi+1) + \Delta_{1N}\right)}{v^{\beta}\left(\varkappa^{-1}(\xi+1) + \Delta_{1N}\right)} + \Delta_{2N} v^{-\beta}\left(\varkappa^{-1}(\xi+1) + \Delta_{1N}\right) =$$

$$= z \frac{\partial v^{\beta}\left(\varkappa^{-1}\right)}{\partial \xi}(\xi+1) O\left(|\xi|^{-N+2Re\beta}\right) + O\left(|\xi|^{2Re\beta}\right)\Delta_{2N} = O\left(|\xi|^{-N_1}\right)$$

где $N_1 = \min\{N-2, N-2Re\beta\}$. Лемма доказана. □

Замечание 3.1.1. *В рассматриваемом простейшем случае для значений параметров* $a = \beta = 0$ *выполнено:*

$$\tilde{\Delta}_{jN} = O\left(|\xi|^{-N_1}\right), \quad N_1 = N - 2$$

3.2. Функциональные и гомологические уравнения

В рассматриваемом простейшем случае выпрямляющие координаты имеют вид:

$$K : (x, y) \mapsto \left(\xi = -\frac{1}{x}, z = y\right) \tag{3.2.1}$$

Пусть в новых координатах голоморфное нормализующее преобразование $\tilde{H}_N$ имеет вид:

$$\tilde{H}_N(\xi, z) = (\xi + h_N(\xi, z), z + g_N(\xi, z))$$

Тогда функции h_N и g_N удовлетворяют паре функциональных уравнений:

$$h_N \circ F_0 - h_N = \tilde{\Delta}_{1N} \circ \tilde{H}_N \tag{3.2.2}$$

$$g_N \circ F_0 - \Lambda g_N = \tilde{\Delta}_{2N} \circ \tilde{H}_N \tag{3.2.3}$$

Считая h_N, g_N, $\tilde{\Delta}_{1N}$, $\tilde{\Delta}_{2N}$ малыми, и пренебрегая членами порядка выше первого, из функциональных уравнений получим так называемые гомологические уравнения:

$$h_N \circ F_0 - h_N = \tilde{\Delta}_{1N} \tag{3.2.4}$$

$$g_N \circ F_0 - \Lambda g_N = \tilde{\Delta}_{2N} \tag{3.2.5}$$

где $\tilde{\Delta}_{jN}(\xi, z) = O(|\xi|^{-N+2})$ при $\xi \to \infty$, $j = 1, 2$.

Решать поставленную задачу — строить нормализующее преобразование мы будем по следующему алгоритму:

Шаг 1. Построение (h, g) — пары решений гомологических уравнений на некоторых секториальных областях.

Шаг 2. Построение вспомогательных операторов: оператора решения гомологических уравнений $\mathcal{L} : (\Delta_1, \Delta_2) \to (h, g)$ и оператора подстановки $\mathcal{R} : (h, g) \to (\delta_1, \delta_2) = (\Delta_1(\xi + h, z + g), \Delta_2(\xi + h, z + g))$. Тем самым неподвижная точка композиции операторов $\mathcal{H} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ доставляет решение функциональных уравнений $\tilde{H}_N = id + (h_N, g_N)$:

$$\mathcal{H} \circ (h_N, g_N) = (h_N, g_N)$$

Сжимаемость оператора $\mathcal{H}$ будет обеспечена выбором подходящих параметров секториальных областей.

Шаг 3. Композиция частичной суммы полуформальной нормализующей замены координат $\mathtt{H}_N$ и голоморфного нормализующего секториального отображения H_N доставляет секториальное нормализующее отображение H.

Дадим определение областей, в которых будем решать гомологические уравнения.

Определение 3.2.1. *Обозначим $\tilde{S}_r$ область, лежащую «справа» от вертикальной прямой $\{Re\xi = R\}$ (то есть вещественные части всех точек области $\tilde{S}_r$ больше чем R).*

Определение 3.2.2. *Обозначим $\tilde{S}_l$ область, лежащую «слева» от вертикальной прямой $\{Re\xi = -R\}$.*

Определение 3.2.3. *Обозначим $\tilde{S}_r^{\pm}$ пересечение области $\tilde{S}_r$ и полуплоскости $\{0 < \pm \arg \xi + \delta < \pi\}$.*

Определение 3.2.4. *Обозначим* $\tilde{S}_l^{\pm}$ *пересечение области* $\tilde{S}_l$ *и полуплоскости* $\{0 < \pm \arg \xi - \delta < \pi\}$.

Определение 3.2.5. *Обозначим* $\tilde{W}_r$ *(соответственно,* $\tilde{W}_r^{\pm}$, $\tilde{W}_l$, $\tilde{W}_l^{\pm}$*) область, полученную как прямое произведение* $\tilde{S}_r$ *на диск* $\{|z| < \varepsilon\}$ *(соответственно,* $\tilde{S}_r^{\pm}$, $\tilde{S}_l$, $\tilde{S}_l^{\pm}$*).*

Определение 3.2.6. *Решением гомологического уравнения в некоторой замкнутой области* W *будем называть голоморфную на* W *функцию* u, *удовлетворяющую уравнению на* $\overset{\circ}{W} \overset{def}{=} intW$. *Норму решения на* W *будем задавать стандартным способом*

$$\|u\|_W = \sup_W |u(\xi, z)| \tag{3.2.6}$$

Определение 3.2.7. *Пусть* $\mathbf{D}_m(W)$ *— класс функций, голоморфных на* $\overset{\circ}{W}$ *и непрерывных на* W *с конечной нормой*

$$\|d\|_{W,m} = \sup_W |d(\xi, z)(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}}| < +\infty,\ m > 3 \tag{3.2.7}$$

3.3. Main Lemma

В этой части мы решим промежуточную задачу: простейшее функциональное уравнение

$$u(\xi + 1) - u(\xi) = d(\xi),\ \xi \in \Pi \subset \mathbb{C} \tag{3.3.1}$$

в области типа «криволинейная полоса».

Определение 3.3.1. *Пусть* $L_- \overset{def}{=} \{\xi = (x(y) + iy) :\ y \in \mathbb{R}\}$ *— кусочно-гладкая кривая, где функция* x *удовлетворяет ограничению:*

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| \leq c_\Pi,\ c_\Pi \in \mathbb{R} \tag{3.3.2}$$

Пусть кривая $L_+ = L_- + \frac{3}{2}$ и кривые L_- и L_+ образуют границу некоторой криволинейной полосы Π. Пусть $\overset{\circ}{\Pi} \overset{def}{=} Int\Pi$ — внутренность полосы Π.

Определение 3.3.2. *Обозначим* $\mathbf{D}_m(\Pi)$ *класс функций, голоморфных на* $\overset{\circ}{\Pi}$ *и непрерывных на* Π *с конечной нормой*

$$\|d\|_{\Pi,m} = \sup_{\Pi}|d(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}| < +\infty, \; m > 3 \tag{3.3.3}$$

Определение 3.3.3. *Решением уравнения (3.3.1) с правой частью* $d \in \mathbf{D}_m(\Pi)$ *будем называть функцию , голоморфную на расширенной полосе* $\Pi^1 \overset{def}{=} \overset{\circ}{\Pi} \cup \{\xi : \; \xi - 1 \in \overset{\circ}{\Pi}\}$ *и удовлетворяющих уравнению (3.3.1) на* $\overset{\circ}{\Pi}$. *Норму решения на полосе* Π *будем задавать стандартным способом*

$$\|u\|_{\Pi} = \sup_{\Pi}|u(\xi)|$$

Лемма 3.3.1 (Main Lemma). *Функция*

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{d(t)dt}{t-\xi-n} + \int\limits_{L_+}\frac{d(t)dt}{t-\xi+n+1}\right) \tag{3.3.4}$$

является решением уравнения (3.3.1) с правой частью $d \in \mathbf{D}_m(\Pi)$ *на полосе* Π, *причём:*

1. *существует некоторая постоянная* $c = c(m, c_\Pi)$ *такая, что:*

$$\|u\|_{\Pi} \le c\|d\|_{\Pi,m};$$

2. *обозначим* $M_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{L_-} d(t)dt$, *тогда существует некоторая постоянная* $C = C(m, c_\Pi)$ *такая, что:*

$$|u(\xi) \mp M_0| \le \frac{C\|d\|_{\Pi,m}}{|\xi|^{m-3}} \text{ при } \pm \operatorname{Im}\xi > |\operatorname{Re}\xi|, \; |Im\xi| > 1;$$

3. *решение уравнения 3.3.1 единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, удовлетворяющих утверждению 2.*

Доказательство. Функция u вида (3.3.4) действительно является решением уравнения (3.3.1), так как

$$u(\xi+1)-u(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{d(t)dt}{(t-\xi-n-1)}+\int\limits_{L_+}\frac{d(t)dt}{(t-\xi+n)}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{d(t)dt}{(t-\xi-n)}+\int\limits_{L_+}\frac{d(t)dt}{(t-\xi+n+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{L_+}\frac{d(t)dt}{t-\xi}-\int\limits_{L_-}\frac{d(t)dt}{t-\xi}\right)=d(\xi)$$

Голоморфность и ограниченность

Рассмотрим часть полосы с «преобладанием» вещественной части: $\Pi^{\mathrm{Re}}\overset{def}{=}\Pi\cap\left\{|\operatorname{Im}\xi|\le\max\left\{1;\frac{1}{1+c_\Pi}|\operatorname{Re}\xi|\right\}\right\}$.

Доказательство проведём на полосе $\tilde\Pi$ ширины 1, граница которой состоит из кривых $\tilde L_-\overset{def}{=}L_-+\frac14$ и $\tilde L_+\overset{def}{=}L_+-\frac14$. В дальнейшем мы сможем продолжить решение с полосы $\tilde\Pi$ на полосу Π, используя уравнение (3.3.1). При этом голоморфность и ограниченность решения будут сохранены, так как функция в правой части уравнения голоморфна и ограничена на всей полосе Π.

Положим $\tilde\Pi^{\mathrm{Re}}\overset{def}{=}\tilde\Pi\cap\Pi^{Re}$. На области $\tilde\Pi^{\mathrm{Re}}$ обе подынтегральные функции (в представлении (3.3.4) решения u) голоморфны при $n\ge1$ и мы можем перейти к интегрированию по одной из границ, допустим, по L_- и сложить интегралы. Тогда:

$$|u(\xi)|\le\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{L_+}\frac{d(t)dt}{t-\xi+1}+\int\limits_{L_-}\frac{d(t)dt}{t-\xi}\right)\right|+\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{L_-}\frac{(2t-2\xi+1)d(t)dt}{(t-\xi-n)(t-\xi+n+1)}\right|$$

Замечание 3.3.1. *Здесь и далее при построении оценок мы опираемся на следующее утверждение: для любой пары неотрицательных чисел* (x,y) *вы-*

полнено:

$$(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}(1+x+y)$$

Это простое следствие известного неравенства о среднем.

Из определения кривой L_- следует, что для любого $\xi \in \tilde{\Pi}$ выполнено:

если $t \in L_-$ то $|t-\xi| \geq \frac{1}{4\sqrt{1+c_\Pi^2}}$
если $t \in L_+$ то $|t-\xi+1| \geq \frac{1}{4\sqrt{1+c_\Pi^2}}$
если $t \in L_-,\ n \geq 1$ то $|t-\xi-n| \geq \frac{n}{\sqrt{1+c_\Pi^2}}$ и $|t-\xi+n+1| \geq \frac{n}{\sqrt{1+c_\Pi^2}}$
а так же для любого $t \in \partial\Pi$ верно, что $|dt| \leq \sqrt{1+c_\Pi^2}dy$

Так же полоса Π (а, значит, и $\tilde{\Pi}$) гарантированно пересечёт или пару прямых $l_1 = \{\xi = a+i,\ a \in \mathbb{R}\}$, $l_2 = \{\xi = a-i,\ a \in \mathbb{R}\}$ или пару прямых $l_3 = \{\xi = a + \frac{a}{(1+c_\Pi)}i, a \in \mathbb{R}\}$, $l_4 = \{\xi = a - \frac{a}{(1+c_\Pi)}i, a \in \mathbb{R}\}$.

Таким для любого ξ из $\tilde{\Pi}^{Re} = \tilde{\Pi} \cap \Pi^{Re}$ верно, что $|\xi|$ ограничен:

$$|\xi| \leq c|x(0)|,\ c = c(c_\Pi)$$

Из условия (3.3.2), в частности, следует, что

$$|c_\Pi|y| - |x(0)|| \leq |x(y)| \leq |x(0)| + c_\Pi|y| \tag{3.3.5}$$

Так как $d \in \mathbf{D}_m(\Pi)$, из замечания (3.3.1) и последнего неравенства:

$$|2t-2\xi+1||d(t)| \leq \frac{(c_1|y| + c_2|x(0)|)\|d\|_{\Pi,m}}{(1+|x(y)|+|y|)^m},\ c_j = c_j(c_\Pi, m),\ j = 1,2$$

Если $|x(0)| \leq c_\Pi|y|$, то достаточно отбросить $|x(y)|$ в знаменателе; если же $|x(0)| \geq c_\Pi|y|$, то оценка ниже следует из левой части неравенства (3.3.5):

$$|2t-2\xi+1||d(t)| \leq \frac{\hat{c}\|d\|_{\Pi,m}}{(1+|y|)^{m-1}},\ \hat{c} = \hat{c}(m, c_\Pi)$$

Так как в нашей задаче $m > 3$, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|dy}{(1+|y|)^{m-1}}$ сходится и из равномерности оценок выше и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ следует голоморфность решения u на $\tilde{\Pi}^{\mathrm{Re}}$, а так же истинность утверждения 1. То есть

$$\sup_{\tilde{\Pi}^{\mathrm{Re}}}|u(\xi)| \leq c_1\|d\|_{\Pi,m},\ c_1 = c_1(m, c_\Pi) \tag{3.3.6}$$

Часть полосы $\Pi^{\mathrm{Im}} \overset{def}{=} \Pi\backslash\Pi^{\mathrm{Re}}$. На части полосы с преобладанием мнимой части Π^{Im} нам потребуется преобразовать вид решения.

Замечание 3.3.2. *Заметим, что для любого натурального числа* $s \geq 1$ *на подмножестве* $\tilde{\Pi}^{\mathrm{Im}} \overset{def}{=} \tilde{\Pi}\backslash\tilde{\Pi}^{\mathrm{Re}}$ *выполнено:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(\xi+n)(\xi+n+1)...(\xi+n+s+1)}\right)+ \\ +\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(\xi-n-1)(\xi-n)...(\xi-n+s)}\right) = 0$$

Это легко проверить прямыми вычислениями.

Функции вида $t(t+1)...(t+s)$, $s \in \mathbb{N}$ голоморфны при $t \in \Pi$, поэтому для всех $s \in \mathbb{N}$ суммы следующего рода будут равны нулю:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{t(t+1)...(t+s)d(t)dt}{(\xi+n)(\xi+n+1)...(\xi+n+s+1)}\right)+ \\ +\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{L_+}\frac{t(t+1)...(t+s)d(t)dt}{(\xi-n-1)(\xi-n)...(\xi-n+s)}\right) = 0 \tag{3.3.7}$$

Будем для всех $s = \overline{1, m-3}$ последовательно прибавлять и вычитать из решения u вида (3.3.4) суммы вида (3.3.7) и получим следующий результат:

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{dt}{t-\xi-n} + \int\limits_{L_+}\frac{dt}{t-\xi+n+1}\right) + \right.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{tdt}{(\xi+n)(\xi+n+1)} + ... + \int\limits_{L_-}\frac{t\cdot ...\cdot(t+m-4)dt}{(\xi+n)...(\xi+n+m-3)} + \int\limits_{L_-}\frac{dt}{\xi+n} + \right.$$

$$\left.+\int\limits_{L_+}\frac{tdt}{(\xi-n-1)(\xi-n)} + ... + \int\limits_{L_+}\frac{t\cdot ...\cdot(t+m-4)dt}{(\xi-n-1)...(\xi-n+m-4)} + \int\limits_{L_+}\frac{dt}{\xi-n-1}\right) -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{dt}{\xi+n} + \int\limits_{L_+}\frac{dt}{\xi-n-1}\right) -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{tdt}{(\xi+n)(\xi+n+1)} + \int\limits_{L_+}\frac{tdt}{(\xi-n-1)(\xi-n)}\right) - ...$$

$$\left.... - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{t\cdot ...\cdot(t+m-4)dt}{(\xi+n)...(\xi+n+m-3)} + \int\limits_{L_+}\frac{t\cdot ...\cdot(t+m-4)dt}{(\xi-n-1)...(\xi-n+m-4)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{t(t+1)...(t+m-3)d(t)dt}{(\xi+n)(\xi+n+1)...(\xi+n+m-3)(t-\xi-n)} + \right.$$

$$\left.+\int\limits_{L_+}\frac{t(t+1)...(t+m-3)d(t)dt}{(\xi-n-1)(\xi-n)...(\xi-n+m-4)(t-\xi+n+1)}\right) -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi+n}\int\limits_{L_-}d(t)dt \quad (3.3.8)$$

Покажем голоморфность (1) Так как полоса $\tilde{\Pi}$ отстоит от L_- и L_+ на $\frac{1}{4}$, то множители $(t-\xi-n)$ и $(t-\xi+n+1)$ из знаменателей первой суммы имеют оценку:

$$|t-\xi-n| \geq \frac{\frac{1}{4}+n}{\sqrt{1+c_{\Pi}^2}},\ t\in L_-,\ \xi\in\tilde{\Pi},\ n\geq 0 \tag{3.3.9}$$

$$|t-\xi+n+1| \geq \frac{\frac{1}{4}+n}{\sqrt{1+c_{\Pi}^2}},\ t\in L_+,\ \xi\in\tilde{\Pi},\ n\geq 0 \tag{3.3.10}$$

(2) В силу условия (3.3.3) на функцию d, определения кривых интегрирования L_- и L_+, а так же замечания 3.3.1 найдётся $c=c(m,c_{\Pi})$ такая, что для любого $t\in L_-\cup L_+$, для любого $m>3$ выполнено:

$$|t(t+1)...(t+m-3)d(t)dt| \leq \frac{|t|+m-3)^{m-2}\|d\|_{\Pi,m}|dt|}{(1+|t|^2)^{\frac{m}{2}}} \leq \frac{c\|d\|_{\Pi,m}dy}{(1+|y|)^2} \tag{3.3.11}$$

(3) Так как для любого $\xi\in\tilde{\Pi}^{\mathrm{Im}}$, $|\operatorname{Im}\xi|\geq \max\left\{1;\frac{1}{1+c_{\Pi}}|\operatorname{Re}\xi|\right\}$, то, согласно замечанию 3.3.1:

$$|\xi+n| \geq \frac{1}{2}(|\operatorname{Re}\xi+n|+|\operatorname{Im}\xi| \geq \frac{1}{2}\left(|\operatorname{Re}\xi+n|+\frac{1}{1+c_{\Pi}}|\operatorname{Re}\xi|\right) \geq \frac{n}{2(1+c_{\Pi})}$$

отсюда:

$$\begin{array}{r} |\xi+n|...|\xi+n+m-3| \geq \frac{n}{2(1+c_{\Pi})} \\ |\xi-n-1|...|\xi-n+m-4| \geq \frac{n}{2(1+c_{\Pi})} \end{array} \text{ где } n>0,\ \xi\in\tilde{\Pi}^{\mathrm{Im}} \tag{3.3.12}$$

если же $n=0$, то

$$\begin{array}{r} |\xi||\xi+1|...|\xi+m-3| \geq 1 \\ |\xi-1||\xi|...|\xi+m-4| \geq 1 \end{array} \text{ где } \xi\in\tilde{\Pi}^{\mathrm{Im}} \tag{3.3.13}$$

Тогда из (3.3.9)-(3.3.13), а так же в силу сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(1+|y|)^2}$ и ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ следует, что найдётся такая $c_2=c_2(m,c_{\Pi})$, что для всех $\xi\in\tilde{\Pi}^{\mathrm{Im}}$ выполнено:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{t(t+1)...(t+m-3)d(t)dt}{(\xi+n)(\xi+n+1)...(\xi+n+m-3)(t-\xi-n)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{L_+}\frac{t(t+1)...(t+m-3)d(t)dt}{(\xi-n-1)(\xi-n)...(\xi-n+m-4)(t-\xi+n+1)}\right)\right| \leq \tag{3.3.14}$$

$$\le c_2(m, c_\Pi)\|d\|_{\Pi,m}$$

Осталось оценить «хвост» $\left|\frac{1}{2\pi i}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\xi+n}\int\limits_{L_-}d(t)dt\right|$.

Заметим, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi+n} = \pi\operatorname{ctg}(\pi\xi)$$

Отсюда $\left|\frac{1}{2\pi i}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\xi+n}\int\limits_{L_-}d(t)dt\right| = \left|\frac{M_0}{i}\operatorname{ctg}(\pi\xi)\right|$. Так как при $|\operatorname{Im}\xi| \ge 1$ котангенс ограничен: $|\operatorname{ctg}(\pi\xi)| \le 3$, и, так как функция d удовлетворяет (3.3.3), а кривая L_- — условию (3.3.2), так как $m > 3$, то:

$$|M_0| = \left|\frac{1}{2}\int\limits_{L_-}d(t)dt\right| \le \frac{1}{2}\int\limits_{L_-}\frac{\|d\|_{\Pi,m}|dt|}{(1+|t|^2)^{m/2}} = const \tag{3.3.15}$$

поэтому найдётся некоторая $c_3 = c_3(m, c_\Pi)$ такая, что для любого $\xi \in \tilde{\Pi}^{Im}$ выполнено:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\xi+n}\int\limits_{L_-}d(t)dt\right| \le c_3\|d\|_{\Pi,m} \tag{3.3.16}$$

Положим $\tilde{c} \overset{def}{=} \max\{c_1; c_2 + c_3\}$, где $c_j,\ j = 1,2,3$ из (3.3.6, 3.3.14 и 3.3.16). В силу равномерности оценок (3.3.14) и (3.3.16), решение u вида (3.3.4) голоморфно на $\tilde{\Pi}$ и ограничено с постоянной $\tilde{c}$.

Продолжим решение с полосы $\tilde{\Pi}$ на полосу Π по уравнению (3.3.1), причём, так как правая часть голоморфна и на Π удовлетворяет условию (3.3.3), то продолжение решения на Π так же голоморфно и ограничено, причём:

$$\|u\|_\Pi \le c\|d\|_{\Pi,m},\ c = c(m, c_\Pi)$$

Асимптотика

Для построения асимптотической оценки вернёмся к третьему шагу доказательства голоморфности (пункт выше). Здесь будем считать, что $|\operatorname{Im}\xi| \ge |\operatorname{Re}\xi|$, $|Im\xi| > 1$.

Представим решение u в виде (3.3.8). Так как $\operatorname{Re}\xi$ может быть произвольным, то для каждого значения $n \in \mathbb{Z}$ может существовать $\xi \in \tilde{\Pi}$ такое, что разность $|\operatorname{Re}\xi - n| = 0$. Если перенумеровать ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi+n)(\xi+n+1)...(\xi+n+m-3)}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi-n-1)(\xi-n)...(\xi-n+m-4)}$ так, что для некоторого целого k: $|\operatorname{Re}\xi + n + s| - k = 0$ ($s = \overline{0, m-3}$), то, учитывая что множителей в знаменателе каждого из рядов ровно $m-2$, получим:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi+n)(\xi+n+1)...(\xi+n+m-3)}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{m-1}}{(k+|\operatorname{Im}\xi|)^{m-2}} \leq \frac{2^m}{(m-3)|\operatorname{Im}\xi|^{m-3}};$$

аналогично

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi-n-1)(\xi-n)...(\xi-n+m-4)}\right| \leq \frac{2^m}{(m-3)|\operatorname{Im}\xi|^{m-3}};$$

отсюда

$$\left|u(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi+n}\int\limits_{L_-} d(t)dt\right| \quad \leq \quad \tilde{C}(m, c_\Pi) \ \cdot \ \frac{2^{m+1}}{(m-3)|\operatorname{Im}\xi|^{m-3}} \quad (3.3.17)$$

где $\tilde{C}(m, c_\Pi) = \int\limits_{L_+(L_-)} \frac{(|t|+m-3)^{m-2}\|d\|_{\Pi,m}|dt|}{(1+|t|^2)^{\frac{m}{2}}}$ (интеграл сходится в силу условия (3.3.2)).

Напомним, что $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi+n} = \pi \operatorname{ctg}(\pi\xi)$, где $\operatorname{ctg}(\pi\xi)$ принимает различные по знаку значения при $\operatorname{Im}\xi \to +\infty$ или $\operatorname{Im}\xi \to -\infty$. Поэтому оценку асимптотики естественно проводить отдельно в верхней и нижней полуплоскости.

Пусть $\operatorname{Im}\xi > |\operatorname{Re}\xi|$, $|Im\xi| > 1$, тогда с учётом (3.3.17) и (3.3.15):

$$|u(\xi) - M_0| = \left| u(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi+n}\int\limits_{L_-} d(t)dt - \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi+n}\int\limits_{L_-} d(t)dt - M_0 \right| \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{C}(m, c_\Pi)\cdot 2^{m+1}}{(m-3)|\operatorname{Im}\xi|^{m-3}} + \left| -\frac{\operatorname{ctg}(\pi\xi)}{2i}\int\limits_{L_-} d(t)dt - \frac{1}{2}\int\limits_{L_-} d(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{C}(m, c_\Pi)\cdot 2^{m+1}}{(m-3)|\operatorname{Im}\xi|^{m-3}} + \left| \frac{2}{e^{2\pi\operatorname{Im}\xi} - 1} \right| \int\limits_{L_-} \frac{\|d\|_{\tilde{\Pi}^{\mathrm{Im}}, m}|dt|}{(1+|t|^2)^{\frac{m}{2}}} \leq$$

$$\leq const(m, c_\Pi)\cdot\frac{\|d\|_{\Pi, m}}{|\operatorname{Im}\xi|^m}$$

В нижней полуплоскости ($\operatorname{Im}\xi < -|\operatorname{Re}\xi|$) оценка аналогична.

Так как $|\operatorname{Re}\xi| \leq |\operatorname{Im}\xi|$, то $|\operatorname{Im}\xi| \geq \frac{|\xi|}{2}$. Тогда, продолжая решение с полосы $\tilde{\Pi}$ на полосу Π, получим, что найдётся некоторая $C = C(m, c_\Pi)$ такая, что для любого $\xi \in \Pi$ выполнено:

$$|u(\xi) \mp M_0| \leq \frac{C\|d\|_{\Pi, m}}{|\xi|^{m-3}} \text{ при } \pm\operatorname{Im}\xi > |\operatorname{Re}\xi|,\ |Im\xi| > 1 \qquad (3.3.18)$$

Единственность

Пусть u_1, u_2 — два голоморфных и ограниченных решения уравнения (3.3.1), удовлетворяющих утверждению 2 леммы. Обозначим $u \overset{def}{=} u_1 - u_2$; тогда u голоморфна и ограничена на Π и удовлетворяет уравнению

$$u(\xi+1) - u(\xi) = 0$$

Продолжим её на всю комплексную плоскость по 1-периодичности и получим ограниченную и голоморфную на всей комплексной плоскости функцию. Значит, по теореме Лиувилля [29], $u \equiv const$. С учетом асимптотики (3.3.18), $u \equiv 0$. $\square$

Замечание 3.3.3. *Используя уравнение (3.3.1) мы можем продолжить решение и до голоморфного и ограниченного на области шире чем полоса* Π — *на полосу* Π^1 *(*$\partial\Pi^1 \stackrel{def}{=} \{L_+ + 1\} - \{L_-\}$*) по следующей формуле:*

$$u(\xi + 1) = u(\xi) + d(\xi)$$

с сохранением утверждения 2.

3.4. Решение гомологических уравнений на $\tilde{W}_r$

Будем решать уравнения

$$h(\xi + 1, e^\lambda z) - h(\xi, z) = \Delta_1(\xi, z) \tag{3.4.1}$$

$$g(\xi + 1, e^\lambda z) - e^\lambda g(\xi, z) = \Delta_2(\xi, z) \tag{3.4.2}$$

где $\Delta_1 \in \mathbf{D}_m(\tilde{W}_r)$, $\Delta_2 \in \mathbf{D}_m(\tilde{W}_r)$.

Заметим, что функция J, определяемая по правилу

$$J(\xi, z) = ze^{-\lambda\xi}$$

является первым интегралом нормальной формы $F_0(\xi, z) \mapsto \big(\xi + 1, e^\lambda z\big)$ ($\forall c \in \mathbb{C}$ кривая $\Gamma_c \stackrel{def}{=} \{(\xi, z) \in \tilde{W}_r : J(\xi, z) = c\}$ является инвариантной кривой отображения F_0). Так как $(\xi, z) \in \tilde{W}_r$, то $|z| < \varepsilon$, поэтому для любых $c \in \mathbb{C}$ должно выполняться неравенство $|ce^{\lambda\xi}| < \varepsilon$, откуда находим, что

$$\operatorname{Re} \xi < \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\varepsilon}{|c|}$$

Также для построения решения в правой секториальной области мы будем применять Main Lemma, поэтому необходимо, чтобы полоса Π ширины $3/2$, определенная в предыдущей секции, содержалась в области значений переменной ξ. Отсюда получаем оценку на параметр «c»:

$$\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\varepsilon}{|c|} > R + 2$$

то есть

$$|c| < \varepsilon e^{-\lambda(R+2)} \overset{def}{=} c_0 \tag{3.4.3}$$

Определим инвариантную кривую γ_c:

$$\gamma_c \overset{def}{=} \left\{\xi \in \tilde{S}_r : \ \operatorname{Re}\xi < \frac{1}{\lambda}\ln\frac{\varepsilon}{|c|}\right\}$$

Определение 3.4.1. *Будем называть* малой секториальной областью σ *объединение инвариантных кривых* $\Gamma_c = \{(\xi, z) : \xi \in \gamma_c; z = ce^{-\lambda\xi}\}$ *по всем «c» таким, что* $|c| < c_0$.

Отметим, что при $c = 0$ инвариантная кривая γ_0 совпадает с $\tilde{S}_r$.

Определение 3.4.2. *Будем называть* верхней или нижней *малой секториальной областью* $\sigma^{\pm}$ *(*верхней или нижней *инвариантной кривой* $\gamma_c^{\pm}$*) пересечение области* σ *(*γ_c*) с областью* $\tilde{W}_r^{\pm}$ *(*$\tilde{S}_r^{\pm}$*).*

Отметим, что на параметр раствора $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ в данном разделе не накладываются дополнительные условия.

В этой части будут доказаны леммы:

Лемма 3.4.1 (О решении первого гомологического уравнения на σ.)**.** *Пусть функция* $\Delta_1 \in \mathbf{D}_m(\tilde{W}_r)$*, тогда первое гомологическое уравнение имеет пару решений* $h^{\pm}$*, голоморфных и ограниченных на малой секториальной области* σ*, для которых выполнено:*

1. *найдётся* $c = c(m)$ *такая, что* $\|h^{\pm}\|_{\sigma} \le c\|\Delta_1\|_{\sigma,m}$*;*
2. *найдётся* $C = C(m, \delta)$ *такая, что:* $|h^{\pm}(\xi, z)| \le \frac{C\|\Delta_1\|_{\sigma,m}}{|\xi|^{m-3}}$ *при* $(\xi, z) \in \sigma^{\pm}$*;*
3. *решение первого гомологического уравнения (3.4.1) в правой секториальной области единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, удовлетворяющих утверждению 2.*

Лемма 3.4.2 (О решении второго гомологического уравнения на σ.)**.** *Пусть* $\Delta_2 \in \mathbf{D}_m(\tilde{W}_r)$*, тогда второе гомологическое уравнение имеет пару решений* $g^{\pm}$*, для которых выполнено:*

1. *найдётся* $c = c(m)$*такая, что* $\|g^{\pm}\|_{\sigma} \leq c\|\Delta_2\|_{\sigma,m}$*;*

2. *найдётся* $C = C(m,\delta)$ *такая, что* : $|g^{\pm}(\xi,z)| \leq \frac{C\|\Delta_2\|_{\sigma,m}}{|\xi|^{m-3}}$ *при* $(\xi,z) \in \sigma^{\pm}$*;*

3. *решение второго гомологического уравнения на* $\tilde{W}_r$ *единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, удовлетворяющих утверждению 2.*

Доказательство леммы о решении первого гомологического уравнения на σ**.**

Доказательство первой леммы будет построено следующим образом:

Шаг 1. Сужение первого гомологического уравнения на инвариантную кривую γ_c и построение решения в полосе $\Pi \subset \gamma_c$.

Шаг 2. Продолжение решения с полосы на γ_c.

Шаг 3. Построение решения в малой секториальной области.

Шаг 1. Положим

$$\varphi_c(\xi) \stackrel{def}{=} h(\xi, ce^{\lambda\xi}),\ \xi \in \gamma_c$$

$$\Delta_c(\xi) \stackrel{def}{=} \Delta_1(\xi, ce^{\lambda\xi}),\ \xi \in \gamma_c$$

Тогда уравнение (3.4.1) сводится к уравнению

$$\varphi_c(\xi+1) - \varphi_c(\xi) = \Delta_c(\xi),\ \xi \in \gamma_c \tag{3.4.4}$$

Заметим, что область γ_c построена таким образом, что содержит некоторую вертикальную полосу

$$\Pi \stackrel{def}{=} \{\xi \in \gamma_c :\ \operatorname{Re}\xi \in [A, A+3/2]\}\,,\ A > R > 1 \tag{3.4.5}$$

А именно: пусть функция $\Delta_c \in \mathbf{D}_m(\Pi)$. Тогда граница $\partial\Pi$ распадается на две части: $\partial\Pi = L_+ - L_-$, где $L_- \stackrel{def}{=} \{\xi \in \gamma_c :\ \operatorname{Re}\xi = A\}$, $L_+ \stackrel{def}{=} \{\xi \in \gamma_c :\ \operatorname{Re}\xi = A + \frac{3}{2}\}$.

Следующее предложение следует из Main Lemma.

Предложение 3.4.1. *Функция*

$$\varphi_c(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{L_-}\frac{\Delta_c(t)dt}{t-\xi-n} + \int_{L_+}\frac{\Delta_c(t)dt}{t-\xi+n+1}\right) \tag{3.4.6}$$

голоморфна и ограничена на полосе

$$\tilde{\Pi} \stackrel{def}{=} \{\xi :\ \operatorname{Re}\xi \in [A, A+5/2] \subset \gamma_c\},\ A > R > 1$$

и является решением уравнения (3.4.4), причём:

1. *найдётся* $c = c(m)$ *такая, что* $\|\varphi_c\|_\Pi = \sup\limits_{\Pi}|\varphi_c(\xi)| \le c\|\Delta_c\|_{\Pi,m}$*;*
2. *найдётся* $C = C(m,\delta)$ *такая что:*

   $$\sup_{\Pi}|\varphi_c(\xi) \mp M_0| \le \frac{C\|\Delta_c\|_{\Pi,m}}{|\xi|^{m-3}},\ \xi \in \Pi,\ \pm\operatorname{Im}\xi > \operatorname{tg}\delta\operatorname{Re}\xi$$

   где

   $$M_0 \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\int\limits_{L_-}\Delta_c(t)dt \tag{3.4.7}$$

3. *решение уравнения (3.4.4) единственно в классе голоморфных и ограниченных в полосе* $\tilde{\Pi}$ *функций, удовлетворяющих утверждению 2;*
4. *если функция* Δ_c *аналитически зависит от некоторого параметра «c», то и функция* φ_c *— тоже аналитически зависит от «c».*

Замечание 3.4.1. *Без ограничения общности можем считать, что из построения оценок в доказательстве утверждения 2 Main Lemma следует истинность утверждения 2 последнего предложения.*

Замечание 3.4.2. *Аналитическая зависимость от параметра «c» следует из определения решения* φ_c*, а так же стандартных теорем о равномерной сходимости рядов и интегралов.*

Отметим, что Main Lemma, а также последнее предложение доставляют асимптотическую оценку решения φ_c на полосе Π при достаточно больших значениях мнимой части ξ. Следующее предложение доказывает аналогичную асимптотическую оценку на «куске» полосы $Re\xi > tg\delta|Im\xi|$.

Предложение 3.4.2. *Пусть φ_c — решение уравнения (3.4.4) вида (3.4.6) на полосе $\Pi \in \gamma_c$; M_0 из (3.4.7). Тогда найдётся $C = C(m, \delta)$ такая, что*

$$\sup_{\Pi} |\varphi_c(\xi) \mp M_0| \leq \frac{C\|\Delta_c\|_{\Pi,m}}{|\xi|^{m-2}},\ \xi \in \Pi,\ |\operatorname{Im}\xi| < \operatorname{tg}\delta|\operatorname{Re}\xi|$$

Доказательство. Отметим, что так как $|\operatorname{Im}\xi| < \operatorname{tg}\delta|\operatorname{Re}\xi|$ то $|\xi| \leq (1 + \operatorname{tg}\delta)|\operatorname{Re}\xi|,$ то есть $|\operatorname{Re}\xi| \geq \frac{|\xi|}{1+\operatorname{tg}\delta}$.

Представим решение φ_c в виде суммы первых двух слагаемых и ряда, в котором обе подынтегральные функции голоморфны на всей полосе Π (так как ширина полосы меньше 2), поэтому интегралы не зависят от прямой интегрирования и их можно объединить:

$$\varphi_c(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{L_-}\frac{\Delta_c(t)dt}{t-\xi} + \int\limits_{L_+}\frac{\Delta_c(t)dt}{t-\xi+1} + \int\limits_{L_-}\frac{\Delta_c(t)dt}{t-\xi-1} + \int\limits_{L_+}\frac{\Delta_c(t)dt}{t-\xi+2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_{L_+}\frac{(2t-2\xi+1)\Delta_c(t)dt}{(t-\xi-n)(t-\xi+n+1)}$$

Оценим сначала первые четыре слагаемых. Отступим от границы полосы Π на 1/4 «внутрь» и обозначим $\tilde{\Pi} \stackrel{def}{=} \{\xi :\ \operatorname{Re}\xi \in [A + \frac{1}{4}; A + \frac{5}{4}]\}$ и $\tilde{\Pi}^{Re} = \tilde{\Pi} \cap \{|Im\xi| < tg\delta|Re\xi|\}$. Тогда для любых $t \in L_-$, $\xi \in \tilde{\Pi}^{Re}$ выполнено:

$|t-\xi| > 1/4$

$|t-\xi-1| > 1/4$

$(1+|t|^2)^{m/2} > c(1+A)^m,$ для некоторой $c = c(m)$

$1 + A > |Re\xi - 1| > \tilde{C}|Re\xi| > C|\xi|$ для некоторых $C = C(m,\delta),\ \tilde{C} = \tilde{C}(m,\delta)$

Тогда для $s = -1, 0$, $\xi \in \tilde{\Pi}^{Re}$ выполнено:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_-}\frac{\Delta_c(t)dt}{t-\xi+s}\right| \leq \frac{c_1\|\Delta_c\|_{\gamma_c,m}}{|\xi|^{m-1}},\ c_1 = c_1(m,\delta) \tag{3.4.8}$$

из аналогичных рассуждений следует, что для $s = 1, 2$, $\xi \in \tilde{\Pi}^{Re}$ выполнено:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_+}\frac{\Delta_c(t)dt}{t-\xi+s}\right| \leq \frac{c_2\|\Delta_c\|_{\gamma_c,m}}{|\xi|^{m-1}},\ c_2 = c_2(m,\delta) \tag{3.4.9}$$

Для оценки последнего слагаемого — ряда нам будут полезны несколько неравенств:

$$
\begin{aligned}
&t \in L_+ = A + \tfrac{3}{2} + i\tau,\ n \geq 2: \\
&|t-\xi-n| = \sqrt{(A+\tfrac{3}{2}-\operatorname{Re}\xi-n)^2+(\operatorname{Im}\xi-\tau)^2} \geq \tfrac{1}{2}(n-\tfrac{3}{2}); \\
&|t-\xi+n+1| = \sqrt{(A+\tfrac{3}{2}-\operatorname{Re}\xi+n+1)^2+(\operatorname{Im}\xi-\tau)^2} \geq \tfrac{1}{2}n; \\
&|2t-2\xi+1| \leq (|2(A+\tfrac{3}{2})-2\operatorname{Re}\xi+1|+2|\operatorname{Im}\xi-\tau|) \leq \\
&\qquad \leq 2A+6+2\operatorname{Re}\xi+1+2\operatorname{tg}\delta\operatorname{Re}\xi+2|\tau| \leq const+c(\delta)A+2|\tau|; \\
&|\Delta_c(t)| \leq \tfrac{\|\Delta_c\|_{m,\gamma_c}}{(1+(A+3/2)^2+|\tau|^2)^{\frac{m}{2}}} \leq \tfrac{2^{\frac{m}{2}}\|\Delta_c\|_{m,\gamma_c}}{(A+3/2+|\tau|)^m}.
\end{aligned}
$$

Так как $n > 2$, то получаемый при оценке ряд сходится. Так как $m > 3$, то сходится интеграл. Поэтому существует некоторая $c_3 = c_3(m,\delta)$ такая, что для любого $\xi \in \tilde{\Pi}^{Re}$ выполнено:

$$
\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=2}^{\infty}\int\limits_{L_+}\frac{(2t-2\xi+1)\Delta_c(t)dt}{(t-\xi-n)(t-\xi+n+1)}\right| \leq c_3(m,\delta)\frac{\|\Delta_c\|_{\gamma_c,m}}{|\xi|^{m-2}}
$$

Так же получаем оценку для M_0:

$$
|M_0| = \frac{1}{2}\left|\int\limits_{L_-}\Delta_c(t)dt\right| \leq \frac{c_4(m,\delta)\|\Delta_c\|_{\gamma_c,m}}{|\xi|^{m-1}},\ \xi \in \Pi
$$

Положим $C(m,\delta) = \max\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Предложение доказано. $\square$

Замечание 3.4.3. *Утверждения 2 предложений 3.4.1 и 3.4.2 в совокупности могут быть сформулированы в следующей форме:*

$$
\exists C = C(m,\delta)\ \textit{такая что}:\ |\varphi_c(\xi) \mp M_0| \leq \frac{C\|\Delta_c\|_{\Pi,m}}{|\xi|^{m-3}},\ \xi \in \gamma_c^{\pm} \cap \Pi
$$

Шаг 2. Продолжение решения на γ_c. На этом шаге покажем, что значение M_0 зависит от выбора полосы (то есть полосу Π можно строить произвольно на γ_c). А также что решение φ_c, построенное на некоторой полосе Π совпадает (на полосе Π) с продолжением решения $\tilde{\varphi}_c$, построенным на некоторой другой полосе $\tilde{\Pi}$.

Для любого ξ с вещественной частью из отрезка $\left[A+5/2, \frac{1}{\lambda}\ln\frac{\varepsilon}{|c|}\right]$ найдется некоторое натуральное $N \le \left[\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\varepsilon}{|c|} - A - 3/2\right]$ такое, что $(\xi - N) \in \Pi$ и тогда продолжение решения вправо может быть определено как:

$$\varphi_c(\xi) = \varphi_c(\xi - N) + \sum_{n=1}^{N} \Delta_c(\xi - n) \tag{3.4.10}$$

Продолжение влево может быть определено аналогично

$$\varphi_c(\xi) = \varphi_c(\xi + K) - \sum_{k=0}^{K-1} \Delta_c(\xi + k) \tag{3.4.11}$$

где $K \in \mathbb{N}$ таково, что $(\xi + K) \in \Pi$.

Обозначим

$$L_- \stackrel{def}{=} \{\xi \in \gamma_c : \ \operatorname{Re}\xi = A\}\,,\ \tilde{L}_- \stackrel{def}{=} \{\xi \in \gamma_c : \ \operatorname{Re}\xi = B\}\,,\ \text{где}$$

$$1 < R < A < B < \frac{1}{\lambda}\ln\frac{\varepsilon}{|c|} - \frac{3}{2}$$

Построим по ним полосы Π и $\tilde{\Pi}$ вида (3.4.5); обозначим $M_0 = \int\limits_{L_-} \Delta_c(t)dt$ и $\tilde{M}_0 = \int\limits_{\tilde{L}_-} \Delta_c(t)dt$.

Предложение 3.4.3. $M_0 = \tilde{M}_0$

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник $\Pi_{A,B,N}$ с границей: $\partial\Pi_{A,B,N} = \{\xi : \ \operatorname{Re}\xi = A;\ \operatorname{Re}\xi = B;\ \operatorname{Im}\xi = -N;\ \operatorname{Im}\xi = N\}$. В силу голоморфности функции Δ_c, интеграл по границе прямоугольника будет равен нулю:

$$\int\limits_{\partial\Pi_{A,B,N}} \Delta_c(t)dt = 0$$

Так как $\Delta_c \in \mathbf{D}_m(\gamma_c)$, то $\Delta_c(\xi) = O(\xi^{-m+3})$, $|\xi| \to \infty$. Отсюда следует, что интегралы по верхней и нижней границам стремятся к нулю при $N \to \infty$, то есть $M_0 = \tilde{M}_0$. $\square$

Предложение 3.4.4. *Решение φ_c из (3.4.6), (3.4.10) и (3.4.11) не зависит от выбора полосы* Π.

Доказательство. Пусть φ_c и $\tilde{\varphi}_c$ — решения первого гомологического уравнения (3.4.4), построенные на некоторой полосе Π и $\tilde{\Pi}$ соответственно (напомним, что полоса Π лежит «слева» от полосы $\tilde{\Pi}$, то есть $A < B$). Продолжим по формуле (3.4.10) решение φ_c с полосы Π на полосу $\tilde{\Pi}$. Так как φ_c и $\tilde{\varphi}_c$ — решения уравнения (3.4.4), то их разность

$$r(\xi) \stackrel{def}{=} \varphi_c(\xi) - \tilde{\varphi}_c(\xi),\ \xi \in \tilde{\Pi}$$

голоморфна и ограничена на $\tilde{\Pi}$ и является 1-периодической:

$$r(\xi+1) - r(\xi) = 0$$

Так как ширина полосы $\tilde{\Pi}$ больше единицы, то разность r по 1-периодичности может быть продолжена с полосы $\tilde{\Pi}$ на всю комплексную плоскость. Отсюда, по теореме Лиувилля [29] $r \equiv const$.

Напомним, что из предложения (3.4.3) следует, что $M_0 = \tilde{M}_0$. Так как ширина полосы Π больше 1, то для любого $\xi \in \Pi$ существует натуральное N такое, что $\xi_N = \xi + N \in \tilde{\Pi}$. Тогда согласно (3.4.11):

$$\varphi_c(\xi_N) = \varphi_c(\xi) + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_c(\xi+n),\ \xi \in \Pi \tag{3.4.12}$$

Отметим, что при этом

$$\operatorname{Im}\xi = \operatorname{Im}\xi_N \stackrel{def}{=} I \tag{3.4.13}$$

Тогда, так как $\Delta_c \in \mathbf{D}_m(\gamma_c)$, то согласно (3.4.11), (3.4.13) и утверждению 2 Main Lemma:

$$|r| = |\varphi_c(\xi_N) - \tilde{\varphi}_c(\xi_N)| = |\varphi(\xi) \mp M_0 + \sum_{n=1}^{N} \Delta_c(\xi+n) - \tilde{\varphi}_c(\xi_N) \pm M_0| \leq$$

$$\leq |\varphi_c(\xi) \mp M_0| + |\pm M_0 - \tilde{\varphi}_c(\xi_N)| + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{const \cdot \|\Delta_c\|_{\gamma_c, m}}{(1+|I|^2)^{m/2}} \to 0,\ I \to \pm\infty$$

Отсюда $r \equiv 0$, то есть решение φ_c не зависит от выбора полосы Π. $\square$

Предложение 3.4.5. *Функция φ_c, определяемая формулами (3.4.10) и (3.4.11), является голоморфным и ограниченным решением уравнения (3.4.4) на γ_c, причём:*

1. *найдётся $c(m)$ такая, что $\|\varphi_c\|_{\gamma_c} \leq c(m)\|\Delta_c\|_{\gamma_c,m}$;*
2. *найдётся $C(m,\delta)$ такая что $\sup\limits_{\gamma_c}|\varphi_c(\xi) \mp M_0| \leq \frac{C(m,\delta)\|\Delta_c\|_{\gamma_c,m}}{|\xi|^{m-3}}$, $\xi \in \gamma_c^{\pm}$;*
3. *решение уравнения (3.4.4) единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, удовлетворяющих условию 2.*
4. *если функция Δ_c аналитически зависит от некоторого параметра «c», то и функция φ_c — тоже аналитически зависит от «c».*

Доказательство. Функция φ_c, определяемая формулами (3.4.11) и (3.4.10) удовлетворяет уравнению (3.4.4) — это проверяется прямыми выкладками.

Функция φ_c, определяемая формулами (3.4.11) и (3.4.10) является голоморфной и ограниченной на каждой полосе $\{\xi : \mathrm{Re}\,\xi \in (A; A{+}1) \subset \gamma_c, A \in \mathbb{Z}\}$ как сумма голоморфных и ограниченных функций. При этом, так как эти функции удовлетворяют уравнению (3.4.4), то все точки прямой $\{\xi \in \gamma_c : \mathrm{Re}\,\xi \in \mathbb{Z}\}$ являются устранимыми, следовательно, φ_c голоморфна на γ_c.

Утверждения 2-4 следуют аналогичных утверждений для решения φ_c на полосе и предложения 3.4.5. Достаточно покрыть γ_c полосами вида Π и на каждой из них построить решение, для каждого из которых утверждения 2-4 верны.

□

Шаг 3. Окончание доказательства леммы 3.4.1.

Напомним, что функция Δ_c является сужением функции Δ_1 на кривую Γ_c, аналитически зависящим от параметра «c».

В силу независимости решения φ_c от полосы (предложение 3.4.4), начинать построение решения φ_c мы можем с любой полосы $\Pi_c \subset \gamma_c$. Для достаточно малых параметров «c» и для всех $\tilde{c} < c$, полоса γ_c содержится в $\gamma_{\tilde{c}}$, то есть полоса Π_c может быть использована для построения всех решений $\varphi_{\tilde{c}}$ с параметром «$\tilde{c}$», меньшим «c».

Случай $c = 0$. Для любого $c \neq 0$ область γ_c содержится в области $\gamma_c|_{c=0} = \gamma_0$. Поэтому построение «нулевого» решения, удовлетворяющего так же соотношениям оценки утверждения 1 и асимптотики утверждения 2 (при $c = 0$) мы можем начинать с любой полосы Π_c. По тем же соображениям, что приведены выше, мы получаем единственность решения и аналитическую зависимость от параметра «c» в точке $c = 0$.

Таким образом, мы построили решение первого гомологического уравнения в малой секториальной области σ. Это решение является голоморфным на каждой кривой Γ_c и аналитически зависит от параметра «c». По теореме Хартогса [30] оно голоморфно на σ.

Тем самым лемма 3.4.1 доказана.

Доказательство леммы о решении второго гомологического уравнения на σ.

Замечание 3.4.4. *Предположим, что на $\tilde{S}_r$ существует голоморфное секториальное центральное многообразие для отображения $\tilde{F}$. Тогда мы можем выпрямить его и считать, что оно совпадает с прямой $\{z = 0\}$: $\tilde{F}(\xi, 0) = (..., 0)$.*

Тогда для функции Δ_2 из правой части второго гомологического уравнения выполнено:

$$\Delta_2(\xi, 0) = 0 \tag{3.4.14}$$

Учитывая (3.4.14) можно считать, что существует некоторая голоморфная в правой секториальной области $S^r_{R\varepsilon}$ функция $\tilde{\Delta}_2$ такая, что функция Δ_2 имеет вид

$$\Delta_2(\xi, z) = e^{\lambda} z \tilde{\Delta}_2(\xi, z) \tag{3.4.15}$$

Более того, по лемме Шварца также выполнено:

$$\tilde{\Delta}_2(\xi, z) = \frac{1}{\varepsilon} O(\xi^{-N}),\ \xi \to \infty$$

где N достаточно большое. Таким образом, решение второго гомологического уравнения будем искать в форме

$$g(\xi, z) = z\tilde{g}(\xi, z). \tag{3.4.16}$$

После подстановки (3.4.15) и (3.4.16) во второе гомологическое уравнение мы получаем

$$\tilde{g} \circ F_0 - \tilde{g} = \tilde{\Delta}_2 \tag{3.4.17}$$

где в правой части стоит функция класса $\mathbf{D}_m(\tilde{W}_r)$. Уравнение (3.4.17) аналогично первому гомологическому уравнению, поэтому лемма о решении второго гомологического уравнения на σ.

Замечание 3.4.5. *Так как параметр R области $\tilde{W}_r$ может быть выбран достаточно большим, а малая секториальная область σ «отличается» от $\tilde{W}_r$ на полосу Π (ширины $3/2$), то без ограничения общности можем считать, что решения гомологических уравнений построены на области $\tilde{W}_r$.*

Секториальное центральное многообразие.

Замечание 3.4.6. *Существование голоморфного центрального многообразия в правой секториальной области доказали [34]. Этот факт не выносится на защиту.*

Замечание 3.4.7. *В данном разделе доказано существование центрального многообразия в области, чуть большей чем $\tilde{W}_r$. А именно, область $S^r_{R\delta\varepsilon}$ является прямым произведением диска $\{|z| < \varepsilon\}$ на область $S^r_{R\delta}$. Область $S^r_{R\delta}$ — это дополнение к выпуклой оболочке объединения диска радиуса R и сектора $\{|\arg \xi - \pi| < \delta\}$, $\delta \in (0; \pi/2)$.*

В этом разделе мы докажем существование голоморфного центрального многообразия в правой секториальной области $S^r_{R\delta\varepsilon}$. Этот факт позволит свести решение второго гомологического уравнения к решению первого гомологического уравнения.

В координатах (ξ, z) отображение $\tilde{F}$ имеет форму

$$\tilde{F}(\xi, z) = F_0(\xi, z) + (\Delta_1, \Delta_2),\ (\xi, z) \in S^r_{R_0\delta\varepsilon_0}$$

где $F_0(\xi, z) = (\xi + 1, e^{\lambda} z)$.

Лемма 3.4.3. *Для заданного $\delta \in (0; \frac{\pi}{2})$ и для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует R_1 такое, что для любого $R > R_1$ и некоторой голоморфной функции*

$$\psi:\ S^r_{R\delta}\ \to\ D_\varepsilon = \{|z| < \varepsilon\}$$

её график $\Gamma = \{(\xi, \psi(\xi)) :\ \ \xi \in S^r_{R\delta}\}$ является инвариантным для отображения $\tilde{F}$.

$$\tilde{F}(\Gamma) \subset \Gamma \tag{3.4.18}$$

Доказательство. Включение (3.4.18) означает что

$$\Lambda\psi(\xi) + \Delta_2(\xi, \psi(\xi)) = \psi(\xi + 1 + \Delta_1(\xi, \psi(\xi)))$$

или, по-другому,

$$\psi(\xi) = e^{-\lambda}(\psi(\xi + 1 + \Delta_1(\xi, \psi(\xi))) - \Delta_2(\xi, \psi(\xi))) =: [A\psi](\xi) \tag{3.4.19}$$

Правая часть (3.4.19) определяет оператор $A : \psi \mapsto A\psi$, действующий на множестве функций ψ с областью определения $S^r_{R\delta}$. Пусть M — метрическое пространство, состоящее из функций ψ, голоморфных на $S^r_{R\tilde{\delta}}$ с нормой

$$\|\psi\| = \sup_{S^r_{R\tilde{\delta}}} |\psi(\xi)| \leq \varepsilon$$

и метрикой, индуцированной этой нормой. Мы хотим для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найти $R_1 > R_0$ такое, что для любого $R > R_1$:

1. оператор A корректно определен на M,

2. A действует из M в M,

3. A - сжимающий.

1. Пусть

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(R) = \|\Delta_i\|_{S^r_{R\tilde{\delta}} \times D_\varepsilon} = \sup_{S^r_{R\tilde{\delta}} \times D_\varepsilon} |\Delta_i(\xi, z)|, \ i = 1, 2$$

тогда для выполнения пункта 1) достаточно условия, что при всех $\xi \in S^r_{R\delta}$ точка $(\xi, \psi(\xi))$ принадлежит области $S^r_{R_0\delta\varepsilon_0}$, а точка $\xi+1+\Delta_1(\xi, \psi(\xi))$ должна принадлежать $S^r_{R\delta}$. Первое будет верно, если (см. рис. ниже)

$$\varepsilon < \varepsilon_0 \tag{3.4.20}$$

а второе — если

$$\varepsilon_1 < \sin\delta \tag{3.4.21}$$

2. Если $\psi \in M$, то

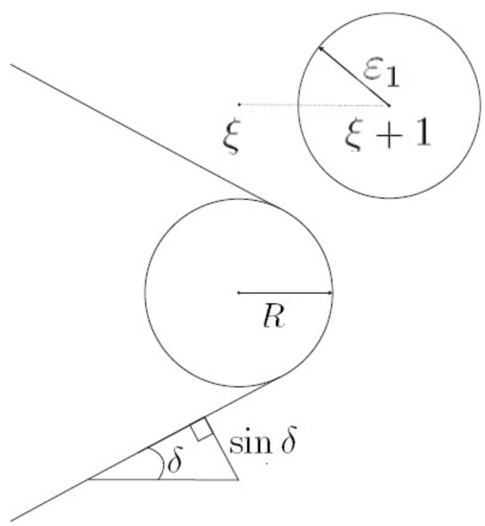


Рис. 2: Круг с центром в точке $\xi + 1$ радиуса ε_1 содержится в $S^r_{R\delta}$ если $\varepsilon_1 < \sin\delta$.

$$|[A\psi](\xi)| \leq e^{-\lambda}(\|\psi\| + \|\Delta_2\|) \leq e^{-\lambda}(\varepsilon + \varepsilon_2) \leq \varepsilon$$

значит, $A\psi$ будет принадлежать M, если

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2(R) < \varepsilon(\Lambda - 1) \tag{3.4.22}$$

3. Если $\xi \in S^r_{R\delta}$, где $R \geq R_1$, тогда

$$|[A\psi_1](\xi) - A[\psi_2](\xi)| = e^{-\lambda}|(\psi_1(\xi+1+\Delta_1(\xi,\psi_1(\xi))) - \psi_2(\xi)(\xi+1+\Delta_1(\xi,\psi_2(\xi))) -$$

$$-\Delta_2(\xi,\psi_1(\xi)) + \Delta_2(\xi,\psi_2(\xi)))| \leq$$

$$\leq e^{-\lambda}[|\psi_1(\xi)(\xi+1+\Delta_1(\xi,\psi_1(\xi))) - \psi_1(\xi)(\xi+1+\Delta_1(\xi,\psi_2(\xi)))| +$$

$$+|\psi_1(\xi)(\xi+\Delta_1(\xi,\psi_2(\xi))) - \psi_2(\xi)(\xi+1+\Delta_1(\xi,\psi_2(\xi)))| + |\Delta_2(\xi,\psi_1(\xi)) - \Delta_2(\xi,\psi_2(\xi))|\ ]$$

Правая часть неравенства состоит из трех слагаемых. Ниже оценим каждое из них.

4. Расстояния в $S^r_{R\delta}$ (рис. ниже). Обозначим за γ кратчайшую кривую, соеди-

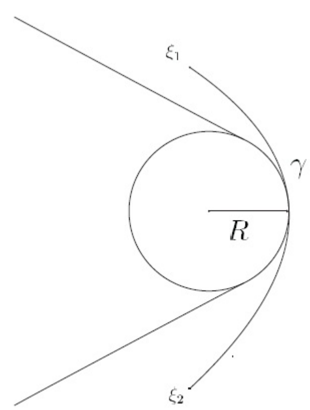


Рис. 3: Расстояния в $S^R_{R\delta}$ от ξ_1 до ξ_2 - длина кратчайшей кривой $\gamma \subset S^r_{R\delta}$, их содержащей.

няющую точки ξ_1 и ξ_2. Тогда для любых двух точек ξ_1 и ξ_2 из области $S^r_{R\delta}$, для любой голоморфной в $S^r_{R\delta}$ функции $f(\xi)$ выполнено:

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq c \cdot \sup_{\xi \in S^R_{R\delta}} |f'(\xi)| \cdot |\xi_1 - \xi_2|$$

для некоторой константы $c = c(\delta)$.

Первое слагаемое. Пусть $d = d(R) = \sin\delta - \varepsilon_1 > 0$. Тогда обе точки $\xi_1 = \xi + 1 + \Delta_1(\xi,\psi_1(\xi))$ и $\xi_2 = \xi + 1 + \Delta_1(\xi,\psi_2(\xi))$ лежат в круге K_ξ радиуса

ε_1 с центром в точке $\xi+1$.

$$|\psi_1(\xi_1)-\psi_1(\xi_2)| \leq |\Delta_1(\xi,\psi_1(\xi))-\Delta_1(\xi,\psi_2(\xi))| \cdot \sup_{|t-(\xi+1)|<\varepsilon_1} |\psi_1'(t)| \leq$$

$$\leq \sup_{|t-(\xi+1)|<\varepsilon_1} |\psi_1'(t)| \cdot \sup_{S^r_{R\delta}\times D_\varepsilon} |\Delta'_{1z}(\xi,z)| \cdot |\psi_1(\xi)-\psi_2(\xi)| \leq$$

По интегральной формуле Коши: если $t\in K_\xi$, $\xi\in S^r_{R\delta}$, то $|\psi'(t)|\leq \frac{\|\psi\|}{d}$; если $\varepsilon<\frac{\varepsilon_0}{2}$, тогда $\Delta'_{1z}(\xi,z)|\leq \frac{\|\Delta_1\|}{\varepsilon_0-\varepsilon}$

$$\leq \frac{\|\psi\|}{d}\cdot\frac{\|\Delta_1\|}{\varepsilon_0-\varepsilon}\cdot\|\psi_1-\psi_2\| \leq \varepsilon\cdot\varepsilon_1(R)\frac{1}{d(\varepsilon_0-\varepsilon)}\|\psi_1-\psi_2\|$$

В частности, если

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1(R)<\frac{1}{2}\sin\delta,\ \varepsilon<\frac{\varepsilon_0}{2} \tag{3.4.23}$$

то $|\psi_1(\xi_1)-\psi_1(\xi_2)|\leq\frac{2\varepsilon_1}{\sin\delta}\cdot\|\psi_1-\psi_2\|$.

Второе слагаемое: $|\psi_1(\xi_2)-\psi_2(\xi_2)|\leq\|\psi_1-\psi_2\|$.

Третье слагаемое:

$$|\Delta_2(\xi,\psi_1(\xi))-\Delta_2(\xi,\psi_2(\xi))| \leq \|\psi_1-\psi_2\|\cdot\sup_{S^r_{R\delta\times D_\varepsilon}}|\Delta'_{2z}(\xi,z)|\leq$$

(аналогично оценке первого слагаемого)

$$\leq\|\psi_1-\psi_2\|\cdot\frac{\varepsilon_2(R)}{\varepsilon_0/2},\ \text{если}\ \varepsilon<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

5. Из 4 следует, что $\|A\psi_1-A\psi_2\|\leq\|\psi_1-\psi_2\|\cdot e^{-\lambda}\cdot(\frac{2\varepsilon_1}{\sin\delta}+1+\frac{2}{\varepsilon_0}\varepsilon_2)$.

6. Мы считаем, что N_2 достаточно большое. Тогда $\varepsilon_1(R)$ и $\varepsilon_2(R)$ стремятся к нулю при $R\to\infty$. Поэтому существует достаточно большое R_1 такое что (3.4.23) разрешимо и

$$\Lambda^{-1}\cdot(\frac{2\varepsilon_1}{\sin\tilde{\delta}}+\frac{2}{\varepsilon_0}\varepsilon_2+1)<1 \tag{3.4.24}$$

тогда оператор A является сжимающим.

7. Окончание доказательства. Выберем $\varepsilon>0$ из промежутка $(0,\frac{\varepsilon_0}{2})$, после этого мы выберем R_1 такое, что выполнено (3.4.22), (3.4.23) и (3.4.24) для всех $R\geq R_1$. Тогда пункты а) б) и в) выполнены и по теореме о неподвижной точке

(метрическое пространство M является полным) мы получаем утверждение леммы. □

Замечание 3.4.8. *В приведенных выше рассуждениях параметр δ был выбран произвольно. Поэтому, из утверждения о единственности теоремы о неподвижной точке следует, что секториальное центральное многообразие единственно в следующем смысле: два любых секториальных центральных многообразия с различными областями определения совпадают на общей области определения.*

3.5. Решение гомологических уравнений на $\tilde{W}_l$

В этом разделе мы докажем две леммы о решении гомологических уравнений области $\tilde{W}_l$. Отметим также, что в этом разделе, в лемме о решении второго гомологического уравнения, будет определено значение параметра раствора секториальной области δ.

Лемма 3.5.1 (о решении первого гомологического уравнения на области $\tilde{W}_l$). *Пусть $\Delta_1 \in \mathbf{D}_m(\tilde{W}_l)$, тогда существует голоморфное решение h первого гомологического уравнения на $\tilde{W}_l$, такое что:*

1. *найдётся $c(m)$ такая, что$\|h\|_{\tilde{W}_l} \leq c(m)\|\Delta_1\|_{\tilde{W}_l,m}$;*
2. *$h(\xi, z) = O(|\xi|^{-m+1})$ при $|\xi| \to \infty,\ (\xi, z) \in \tilde{W}_l$;*
3. *решение первого гомологического уравнения на $\tilde{W}_l$ единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, для которых выполнено утверждение 2.*

Лемма 3.5.2 (о решении второго гомологического уравнения на $\tilde{W}_l$). *Пусть $\Delta_2 \in \mathbf{D}_m(\tilde{W}_l)$, тогда существует голоморфное и ограниченное решение второго гомологического уравнения $g^{\pm}$ на $\tilde{W}_l$ такое что:*

1. *найдётся $c(m, \lambda)$ такая что $\|g^{\pm}\|_{\tilde{W}_l} \leq c(m, \lambda)\|\Delta_2\|_{\tilde{W}_l,m}$;*

2. *$g^{\pm}(\xi,z)=O(|\xi|^{-m+3})$ при $|\xi|\to+\infty, (\xi,z)\in\tilde{W}_l^{\pm}$;*

3. *пусть $\delta\in(0;\frac{\pi}{2})$ такое, что $\operatorname{tg}\delta>\frac{\lambda}{2\pi}$, тогда решение второго гомологического уравнения на области $\tilde{W}_l^{\pm}$ единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, для которых выполнено утверждение 2.*

Доказательство леммы 3.5.1 о решении первого гомологического уравнения

Решение первого гомологического уравнения может быть представлено следующим образом:

$$h(\xi,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Delta_1(\xi-n,e^{-\lambda n}z) \tag{3.5.1}$$

Нетрудно проверить, что функция h, задаваемая (3.5.1), действительно удовлетворяет первому гомологическому уравнению в левой секториальной области.

Для доказательства утверждений 1 и 2 воспользуемся тем, что вещественная часть ξ для $\xi\in\tilde{W}_l$ отрицательна:

$$(1+|\xi-n|^2)\geq\frac{1}{4}\left(|\operatorname{Re}\xi|+n+|\operatorname{Im}\xi|+1\right)^2\geq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}|\xi|+\frac{1}{2}(n+1)\right)^2 \tag{3.5.2}$$

и условием (3.2.7) на функцию Δ_1 из правой части уравнения (3.2.4), отсюда

$$|h(\xi,z)|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\Delta_1(\xi-n,e^{-\lambda n}z)\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\|\Delta_1\|_{S^l_{R\varepsilon},m}}{(1+|\xi-n|^2)^{\frac{m}{2}}}\leq\frac{2^{2m}}{(m-1)}\frac{\|\Delta_1\|_{S^l_{R\varepsilon},m}}{|\xi|^{m-1}}$$

Так как $|\xi|>R>1$, то в качестве $c(m)$ можно выбрать $c(m)=\frac{2^{2m}}{(m-1)}$.

Покажем единственность. Предположим, что h_1 и h_2 — решения первого гомологического уравнения на области $\tilde{W}_l$, для которых выполнено условие 2. Пусть $r=h_1-h_2$ — разность этих решений. Тогда для r на всей области $\tilde{W}_l$ выполнено:

$$r(\xi+1,e^{\lambda}z)-r(\xi,z)=0 \tag{3.5.3}$$

и r может быть продолжена на $\mathbb{C}^2$ следующим способом. Пусть (ξ, z) — точка $\mathbb{C}^2$ вне $\tilde{W}_l$. Тогда существуют такие $n_1 = [\operatorname{Re}\xi + R] + 1$ и $n_2 = [\log_{e^\lambda} \frac{1}{\varepsilon}] + 1$, что для $n = \max\{n_1; n_2\}$, точка (ξ_0, z_0)=$(\xi - n, e^{-\lambda n} z)$ попадает в область $\tilde{W}_l$ и мы можем определить значение функции r в точке (ξ, z) через значение в точке (ξ_0, z_0), а именно:

$$r(\xi, z) = r(\xi - n, e^{-\lambda n} z) = r(\xi_0, z_0)$$

Так как r голоморфна и ограничена на $\tilde{W}_l$, то её продолжение на $\mathbb{C}^2$ голоморфно и ограничено на $\mathbb{C}^2$. Из теоремы Лиувилля [29] следует, что $r \equiv const$. С учётом условия 2, $r \equiv 0$.

Лемма 3.5.1 доказана.

Доказательство леммы 3.5.2 о решении второго гомологического уравнения

Рассмотрим сужение второго гомологического уравнения на $S_0 \stackrel{def}{=} \tilde{W}_l \cap \{z = 0\}$. Отметим, что из определения левой секториальной области следует, что $S_0 = \tilde{S}_l$. Положим

$$g_0(\xi) \stackrel{def}{=} g(\xi, 0)$$

$$\Delta_0(\xi) \stackrel{def}{=} \Delta_2(\xi, 0)$$

Тогда g_0 может быть найдено как решение уравнения:

$$g_0(\xi + 1) - e^\lambda g_0(\xi) = \Delta_0(\xi), \;\; \xi \in \tilde{S}_l \tag{3.5.4}$$

Умножим уравнение (3.5.4) на $e^{-\lambda(\xi+1+R)}$ и положим

$$d(\xi) \stackrel{def}{=} e^{-\lambda(\xi+1+R)} \Delta_0(\xi) \tag{3.5.5}$$

Тогда уравнение (3.5.4) примет вид:

$$u(\xi + 1) - u(\xi) = d(\xi), \;\; \xi \in \tilde{S}_l \tag{3.5.6}$$

Следуя Main Lemma, зададим на $\tilde{S}_l$ полосу Π ширины $3/2$ следующим образом: вертикальная прямая $L_+ \overset{def}{=} \partial\tilde{S}_l = \{\operatorname{Re}\xi = -R\}$ будет образовывать правую границу полосы, а вертикальная прямая $L_- = L_+ - 3/2$ — левую, причём $\partial\Pi = L_+ - L_-$.

Функция d в правой части уравнения (3.5.6), учитывая условие (3.2.7) на функцию Δ_2, принадлежит классу $\mathbf{D}_m(\Pi)$. Поэтому верна следующая:

Лемма 3.5.3 (следует из Main Lemma и замечания 3.4.1)**.** *Функция*

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int\limits_{L_-}\frac{d(t)dt}{t-\xi-n} + \int\limits_{L_+}\frac{d(t)dt}{t-\xi+n+1}\right)$$

является решением уравнения (3.5.6) с правой частью $d \in \mathbf{D}_m(\Pi)$ *на полосе* Π*, причём:*

1. *существует* $c(m)$ *такое, что* $\|u\|_\Pi \le c(m)\|d\|_{\Pi,m}$*;*
2. *существует* $M_0^R = \frac{1}{2}\int\limits_{L_-} d(t)dt$*, существует* $C(m,\delta)$*:*

$$\forall\delta \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right),\ \sup_{\Pi}|u(\xi) \mp M_0^R| \le \frac{C(m,\delta)\|d\|_{\Pi,m}}{|\xi|^{m-3}},\ \xi\in\Pi,\ \pm\operatorname{Im}\xi > \operatorname{tg}\delta|\operatorname{Re}\xi|$$

3. *решение уравнения (3.5.6) единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, удовлетворяющих утверждению 2 на полосе* Π*.*

Положим $M_0(a) \overset{def}{=} \frac{1}{2}\int\limits_{Ret=a}\Delta_0(t)e^{-\lambda(t+1)}dt$. Отметим, что при $a = -R-\frac{3}{2}$, $M_0 = M_0^R e^{\lambda R}$. Тогда

Предложение 3.5.1. *Значение* M_0 *не зависит от выбора* $a < -R$*.*

Доказательство. Рассмотрим для некоторого натурального N прямоугольник Π_N с границами $L_-^1 = -R_1 + i\tau,\ \tau\in[-N,N]$, $L_-^2 = -R_2 + i\tau,\ \tau\in[-N,N]$, $L_-^{N_-} = -iN + R,\ R\in[R_1,R_2]$ и $L_-^{N_+} = +iN + R,\ R\in[R_1,R_2]$.

Так как функция $\Delta_0(t)e^{-\lambda(t+1)}$ голоморфна на S_R^l, то интеграл по границе прямоугольника Π_N равен нулю. Рассмотрим интеграл во верхней границе прямоугольника $L_-^{N_+}$:

$$\left|\frac{1}{2}\int\limits_{L_-^{N_+}}\Delta_0(R+iN)e^{\lambda(R+iN+1)}dR\right| \leq \int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\|\Delta_0\|_{S_R^l,m}e^{\lambda(R-1)}dR}{2(1+|R|^2+|N|^2)^{m/2}} \leq$$

$$\leq \frac{\|\Delta_0\|_{S_R^l,m}(e^{\lambda(R_2-1)}-e^{\lambda(R_1-1)})}{N^m} \to 0 \text{ при } N\to\infty$$

Аналогично рассмотрим интеграл по нижней границе прямоугольника и получим, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_{L_-^1}\Delta_0(t)e^{-\lambda(t+1)}dt = \frac{1}{2}\int\limits_{L_-^2}\Delta_0(t)e^{-\lambda(t+1)}dt$$

Таким образом, предложение доказано. □

Пусть функция u — решение уравнения (3.5.6) с правой частью $d \in \mathbf{D}_m(\Pi)$, определённой в (3.5.5) из Main Lemma.

Положим

$$g_0(\xi) \overset{def}{=} u(\xi)e^{\lambda(\xi+R)},\ \xi\in\Pi \tag{3.5.7}$$

и продолжим его с полосы Π на полуплоскость $\tilde{S}_l$ исходя из (3.5.4) по формуле:

$$g_0(\xi) \overset{def}{=} e^{-\lambda k}g_0(\xi+k)-\sum_{n=0}^{k-1}e^{-\lambda(n+1)}\Delta_0(\xi+n),\ k=[-R-Re\xi],\ \xi\in\tilde{S}_l\backslash\Pi \tag{3.5.8}$$

Предложение 3.5.2. *Функция g_0, определяемая формулами (3.5.7) и (3.5.8), является голоморфным и ограниченным решением уравнения (3.5.4) на $\tilde{S}_l$, причём:*

1. $\exists c=c(m,\lambda)$ *такая что:* $\|g_0\|_{\tilde{S}_l} \leq \|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m}$*;*
2. $|g_0(\xi)\mp M_0e^{\lambda\xi}| = O(|\xi|^{-m+3}),\ \xi\in\tilde{S}_l^{\pm},\ |\xi|\to\infty.$

Доказательство. Так как полоса Π ширины больше 1, то для любой точки ξ слева от полосы точка $(\xi + k),\ k = [-R - Re\xi]$ попадает в полосу Π, поэтому решение g_0, определённое по формуле (3.5.8), корректно определено на $\tilde{S}_l$ при этом:

— Функция g_0 удовлетворяет уравнению (3.5.4) (проверяется прямыми выкладками).

— Функция g_0 является голоморфной как конечная сумма голоморфных функций на каждой полосе $\{\xi :\ Re\xi \in (-A-1; -A), A \in \mathbb{N}\}$. Заметим, что так как функция g_0, определяемая формулами (3.5.7) и (3.5.8), удовлетворяет уравнению (3.5.4), то все точки прямой $\{\xi \in \tilde{S}_l : Re\xi \in \mathbb{Z}_-\}$ является устранимыми, следовательно, g_0 голоморфна на $\tilde{S}_l$.

— Из Main Lemma следует оценка g_0 на полосе Π:

$$\|g_0\|_\Pi = \left\|u(\xi)e^{\lambda(\xi+R)}\right\|_\Pi \le c(m)\|\Delta_0(\xi)e^{-\lambda(\xi+R+1)}\|_{\Pi,m} \le c(m)\|\Delta_0\|_{\Pi,m}$$

Оценим норму g_0, продолженного на $\tilde{S}_l \backslash \Pi$ (напомним, что $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то есть $e^{-\lambda} < 1$):

$$\begin{aligned}&\|g_0\|_{\tilde{S}_l\backslash\Pi} \le e^{-\lambda(k+1)}\|g_0\|_\Pi + \tfrac{e^{-\lambda}-e^{-\lambda(k+1)}}{1-e^{-\lambda}}\|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m} \le c(m)\|\Delta_0\|_{\Pi,m}+\\ &+\tfrac{1}{e^\lambda-1}\|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m} \le \left(c(m)+\tfrac{1}{e^\lambda-1}\right)\|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m} = c(m,\lambda)\|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m}\end{aligned}$$

Отсюда

$$\|g_0\|_{\tilde{S}_l} \le c(m,\lambda)\|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m}$$

Это доказывает первое утверждение предложения.

— Утверждение 2 Main Lemma доставляет асимптотическую оценку решения в полосе Π (напомним, что $g_0(\xi) = u(\xi)e^{\lambda(\xi+R)}$, $\Delta_0(\xi) = d(\xi)e^{\lambda(\xi+R+1)}$ и $M_0e^{\lambda\xi} = M_0^R e^{\lambda(\xi+R)}$):

$$|g_0(\xi) \mp M_0e^{\lambda\xi}| \le \frac{C(m)\|\Delta_0\|_{\Pi,m}}{|\xi|^{m-3}},\ \pm Im\xi > |Re\xi|,\ \xi \in \Pi \qquad (3.5.9)$$

Продолжим функцию g_0 с полосы Π на $\tilde{S}_l$ по формуле (3.5.8) (сохранив для продолженной функции то же обозначение). Тогда $\forall \xi \in \tilde{S}_l$ такой что $|Im\xi| >$

$|Re\xi|$ выполнено:

$$\left|g_0(\xi) \mp M_0 e^{\lambda\xi}\right| = \left|e^{-\lambda k} g_0(\xi+k) \mp M_0 e^{\lambda(\xi+k)} e^{-\lambda k} - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda(n+1)} \Delta_0(\xi+n)\right| \leq$$
$$\leq \left|e^{-\lambda k}\left(g_0(\xi+k) \mp M_0 e^{\lambda(\xi+k)}\right)\right| + \left|\sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda(n+1)} \Delta_0(\xi+n)\right|$$

Так как точка $\xi+k$ попадает в полосу Π, то для первого слагаемого выполнено неравенство (3.5.9). Оценивая второе слагаемое, в результате получим:

$$\left|g_0(\xi) \mp M_0 e^{\lambda\xi}\right| \leq \frac{C(m)\|\Delta_0\|_{\Pi,m}}{|\xi+k|^{m-3} e^{\lambda k}} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m}}{|Im\xi|^m e^{\lambda n}},\ \pm Im\xi > |Re\xi|,\ \xi \in \tilde{S}_l$$

Заметим, что в этом рассматриваемом нами случае достаточно большой по модулю мнимой части ξ выполнено: $|\xi+k| > |Im\xi| > |\xi|/2$. Отсюда

$$|g_0(\xi) \mp M_0 e^{\lambda\xi}| \leq \frac{\hat{C}(m,\lambda)\|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m}}{|\xi|^{m-3}},\ \pm Im\xi > |Re\xi|,\ \xi \in \tilde{S}_l \qquad (3.5.10)$$

Если же ξ лежит внутри сектора $|Im\xi| \leq tg\delta|Re\xi|$, $Re\xi < -R$, то достаточно показать асимптотику вида $O(|Re\xi|^{-m+3})$, так как при $|Im\xi| \leq tg\delta|Re\xi|$, $|\xi| \leq (1+tg\delta)|Re\xi|$, то есть $|Re\xi| \geq \frac{|\xi|}{1+tg\delta}$.

Построим решение $g_0(\xi)$ уравнения (3.5.4) в $\tilde{S}_l$ по описанной выше схеме: пусть $\xi \in \tilde{S}_l$, тогда существует натуральное число $k = [-Re\xi - R]$ такое, что $\xi+k$ попадает в полосу Π:

$$|g_0(\xi) \mp M_0 e^{\lambda\xi}| = \left|e^{-\lambda k}\left(g_0(\xi+k) \mp M_0 e^{\lambda(\xi+k)}\right) - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda(n+1)} \Delta_0(\xi+n)\right| \leq$$

Так как $\xi+k$ лежит в полосе Π, то $e^{-\lambda(\xi+k)}$ (очевидно) и $g_0(\xi+k)$ (по Main Lemma) ограничены, отсюда:

$$\leq \frac{c\|\Delta_0\|_{\Pi,m}}{e^{\lambda k}} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2^m\|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m} e^{-\lambda(n+1)}}{(1+|Re\xi+n|)^m} \leq \frac{c\|\Delta_0\|_{\Pi,m} e^{\lambda R}}{e^{\lambda|Re\xi|}} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2^m\|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m} e^{-\lambda(n+1)}}{(1+|Re\xi+n|)^m}$$

Производная $\frac{\partial}{\partial n}\left(e^{-\lambda(n+1)}(1+|Re\xi|-n)^{-m}\right) = 0$ при $n_0 = \frac{-m}{\lambda} + 1 + |Re\xi|$; при достаточно больших значениях $|Re\xi|$ значение $n_0 \in \mathbb{R}_+$; $k \leq |Re\xi|$, поэтому:

$$\sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda(n+1)}(1+|Re\xi+n|)^{-m} = \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda(n+1)}(1+|Re\xi|-n)^{-m} \leq$$
$$\leq |Re\xi| \cdot (\lambda/m)^m\, e^{m-2\lambda} e^{-|Re\xi|}$$

тогда для некоторой константы $\tilde{C}(m,\lambda,\delta)$ выполнено:

$$|g_0(\xi) \mp M_0 e^{\lambda\xi}| \le \frac{\tilde{C}(m,\lambda,\delta)\|\Delta_0\|_{\tilde{S}_l,m}}{|\xi|^m},\ |Im\xi| < tg\delta|Re\xi|,\ \xi \in \tilde{S}_l \qquad (3.5.11)$$

из неравенств (3.5.10), (3.5.11) и ограничения $\delta \in (\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$ следует второе утверждение предложения 2. □

Предложение 3.5.3. *Для любого $\delta \in (\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$ такого что $tg\delta > \frac{\lambda}{2\pi}$ голоморфное и ограниченное на $\tilde{S}_l$ решение уравнения (3.5.4), удовлетворяющее утверждению 2 леммы о решении второго гомологического уравнения, единственно.*

Доказательство. Пусть $g_1^{\pm}(\xi)$ и $g_2^{\pm}(\xi)$ являются голоморфными и ограниченными решениями уравнения:

$$g_0(\xi+1) - e^{\lambda}g_0(\xi) = \Delta_0(\xi),\ \xi \in \tilde{S}_l$$

и удовлетворяют утверждению 2 предложения 2 на $\tilde{S}_l^{\pm}$. Положим

$$g^{\pm} \stackrel{def}{=} g_1^{\pm} - g_2^{\pm}$$

Тогда

$$g^{\pm}(\xi+1) - e^{\lambda}g^{\pm}(\xi) = 0,\ \xi \in \tilde{S}_l^{\pm}$$

Обозначим $u^{\pm}(\xi) \stackrel{def}{=} g^{\pm}(\xi)e^{-\lambda\xi}$. Тогда функция $u^{\pm}$ является голоморфной на $\tilde{S}_l$, а так же 1-периодической.

Рассмотрим область $\tilde{S}_l^{+}$.

Для любого ξ из $\tilde{S}_l^{+}$ существует натуральное n такое, что $\tilde{\xi} = \xi + n$ попадает в «ломаную» полосу

$$\Pi^{+} = \begin{cases} -R-1 \le Re\xi \le -R, \text{ если } Im\xi > -Rtg\delta \\ ctg\delta Im\xi - 1 \le Re\xi \le ctg\delta Im\xi, \text{ если } Im\xi \le -Rtg\delta \end{cases}$$

В силу 1-периодичности, $u^{+}(\tilde{\xi}) = u^{+}(\xi)$. Покажем ограниченность функции

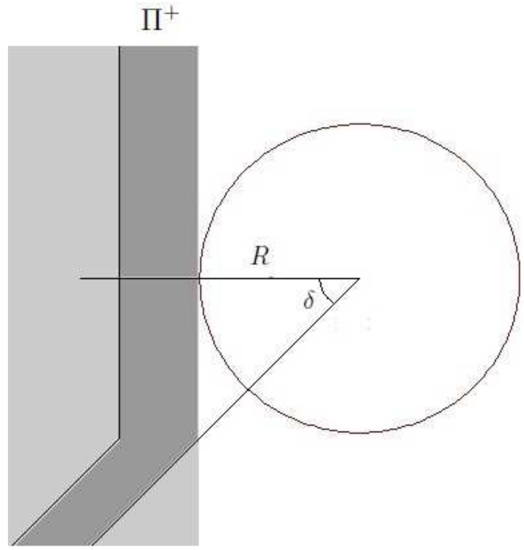


Рис. 4: Полоса Π^+.

u^+ на полосе Π^+. Положим

$$J : \xi \mapsto t = e^{2\pi i \xi} \tag{3.5.12}$$

Заметим, что:

$$J(\Pi^+ \cap \{Im\xi > -Rtg\delta\}) = \{0 < |t| < e^{2\pi R}\}$$
$$J(\Pi^+ \cap \{Im\xi \leq -Rtg\delta\}) = \{|t| \geq e^{2\pi R}\}$$

Функция u^+ в координатах (3.5.12) имеет вид:

$$\tilde{u}^+(t) \stackrel{def}{=} J^{-1} \circ u^+ \circ J = t^{\frac{-\lambda}{2\pi i}} g^+ \left(\frac{1}{2\pi i} \ln t \right)$$

В силу 1-периодичности функции u^+, функция $\tilde{u}^+$ определена корректно и голоморфна на $\mathbb{C}_* = J(\tilde{S}_l)$. Кроме того:

$$|t| = |e^{2\pi i \xi}| = e^{-2\pi Im\xi}$$

В образе $\left\{0 < |t| < e^{2\pi R}\right\}$ верхней части полосы выполнено:

$$\left| t^{\frac{-\lambda}{2\pi i}} \right| = e^{-\lambda Re\xi} = e^{-\lambda Re\tilde{\xi}} \leq e^{\lambda(R+1)}$$

$$|\tilde{u}^+(t)| \leq \left| g^+ \left(\frac{1}{2\pi i} \ln t \right) \right| e^{\lambda(R+1)} \leq Const \text{ при } \left\{0 < |t| < e^{2\pi R}\right\} \tag{3.5.13}$$

Тогда в образе нижней части полосы (то есть $\left\{|t| \geq e^{2\pi R}\right\}$) выполнено:

$$|t^{\frac{-\lambda}{2\pi i}}| = e^{-\lambda Re\xi} = e^{-\lambda Re\tilde{\xi}} \leq e^{-\frac{\lambda Im\tilde{\xi}}{tg\delta}} e^{\lambda} = e^{-\frac{\lambda Im\xi}{tg\delta}} e^{\lambda} = e^{\lambda} |t|^{\frac{\lambda}{2\pi tg\delta}}$$

$$|\tilde{u}^{+}(t)| \leq |t|^{\frac{\lambda}{2\pi tg\delta}} \left| g^{+}\left(\frac{1}{2\pi i}\ln t\right)\right| \leq Const|t|^{\frac{\lambda}{2\pi tg\delta}} \text{ при } \{|t| \geq e^{2\pi R}\}$$

Так как $tg\delta > \frac{\lambda}{2\pi}$, то из оценок Коши для коэффициентов ряда Тейлора [29] следует, что $t = \infty$ является устранимой особой точкой функции $\tilde{u}^{+}$, так что $\tilde{u}^{+}$ ограничена при $\{|t| \geq e^{2\pi R}\}$. А, с учётом (3.5.13), $\tilde{u}^{+}$ ограничена на $\mathbb{C}_{*}$.

Так как $\tilde{u}^{+}$ голоморфна на $\mathbb{C}_{*}$, то из теоремы Римана об устранимой особенности [29] следует, что $\tilde{u}^{+}$ голоморфна (и ограничена) на $\mathbb{C}$. Из теоремы Лиувилля следует, что $\tilde{u}^{+} = const$.

Тогда $g^{+}(\xi) = const \cdot e^{\lambda\xi}$; в силу асимптотических свойств функций g^{+} (утверждение 2 предложения 2), так как лучи $\{\xi : \ Re\xi = const \leq -R, \ Im\xi \geq 0\}$ принадлежат области S_l^{+}, то $g^{+} \equiv 0$.

Аналогично рассмотрим область $\tilde{S}_l^{-} = \{Re\xi \leq -R, \ Im\xi \leq -tg\delta Re\xi\}$

Для любого $\xi \in \tilde{S}_l^{-}$ существует натуральное n такое, что $\tilde{\xi} = \xi + n$ попадает в «ломаную» полосу Π^{-}:

$$\Pi^{-} = \begin{cases} -R - 1 \leq Re\xi \leq -R, \text{ если } Im\xi < Rtg\delta \\ -ctg\delta Im\xi - 1 \leq Re\xi \leq -ctg\delta Im\xi, \text{ если } Im\xi \geq Rtg\delta \end{cases}$$

Подействуем отображением (3.5.12) $(J : \xi \mapsto (t = e^{2\pi i\xi}))$:

$$J(\Pi^{-} \cap \{Im\xi < Rtg\delta\}) = \{|t| > e^{-Rtg\delta}\}$$
$$J(\Pi^{-} \cap \{Im\xi \geq Rtg\delta\}) = \{0 < |t| \leq e^{-Rtg\delta}\}$$

$$\tilde{u}^{-}(t) \stackrel{def}{=} J^{-1} \circ u^{+} \circ J = t^{\frac{-\lambda}{2\pi i}} g^{-}\left(\frac{1}{2\pi i}\ln t\right)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, в силу 1-периодичности функции u^{-}, функция $\tilde{u}^{-}$ определена корректно и голоморфна на $\mathbb{C}_{*}$. Кроме того, в силу ограниченности g^-:

$$|\tilde{u}^-(t)| \leq Const \cdot \begin{cases} e^{\lambda(R+1)}, \text{ если } |t| > e^{-Rtg\delta} \\ e^{\lambda}|t|^{\frac{-\lambda}{2\pi tg\delta}}, \text{ если } 0 < |t| \leq e^{-Rtg\delta} \end{cases}$$

Из оценок Коши для коэффициентов ряда Лорана [29] следует, что $t = 0$ является устранимой особой точкой $\tilde{u}^-$, поэтому $\tilde{u}^-$ продолжаема до голоморфной и ограниченной на $\mathbb{C}$ функции. Поэтому $\tilde{u}^- = const$ на $\mathbb{C}$. Отсюда, как и в случае выше, $g^- \equiv 0$. $\square$

Положим

$$g_0^{\pm}(\xi) \stackrel{def}{=} g_0(\xi) \mp M_0 e^{\lambda\xi}$$

Положим $g_0^{\pm}(\xi) \stackrel{def}{=} g_0(\xi) \mp M_0 e^{\lambda\xi}$. Мы построили решение редуцированного второго гомологического уравнения (3.5.4) на области $\tilde{S}_l$. Вычтем теперь из второго гомологического уравнения уравнение (3.5.4). Получим уравнение

$$r(\xi + 1, e^{\lambda} z) - e^{\lambda} r(\xi, z) = \rho_N(\xi, z), \ (\xi, z) \in \tilde{W}_l \tag{3.5.14}$$

где

$$\rho_N(\xi, z) \stackrel{def}{=} \Delta_{2N}(\xi, z) - \Delta_0(\xi), \ r(\xi, z) \stackrel{def}{=} g(\xi, z) - g_0(\xi)$$

Из леммы Шварца [29] следует, что $\rho_N(\xi, z) = z\tilde{\Delta}_N(\xi, z)$, где $\tilde{\Delta}_N$ класса $\mathbf{D}_m(\tilde{W}_l)$. Решение уравнения (3.5.14) в левой секториальной области $\tilde{W}_l$ будем искать в виде $r(\xi, z) = z\tilde{g}(\xi, z)$, где $\tilde{g}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{g}\left(\xi + 1, e^{\lambda} z\right) - \tilde{g}(\xi, z) = e^{-\lambda}\tilde{\Delta}_N(\xi, z), \ (\xi, z) \in \tilde{W}_l \tag{3.5.15}$$

Так как функция $e^{-\lambda}\tilde{\Delta}_N \in \mathbf{D}_m(\tilde{W}_l)$, то справедливо следующее предложение (оно является переформулировкой леммы 1):

Предложение 3.5.4. *Функция $\tilde{g}$ вида*

$$\tilde{g}(\xi, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\tilde{\Delta}_N\left(\xi - n, e^{-\lambda n} z\right)$$

голоморфна, ограничена и является решением уравнения (3.5.15) на $\tilde{W}_l$ причём:

1. *для некоторой константы* $c = c(m)$ *верно:* $\|\tilde{g}\|_{\tilde{W}_l} \le c\|\tilde{\Delta}_N\|_{\tilde{W}_l,m}$*;*

2. $\tilde{g}(\xi, z) = O(|\xi|^{-m+1})$ *при* $|\xi| \to \infty$*,* $(\xi, z) \in \tilde{W}_l$*;*

3. *решение уравнения (3.5.15) единственно на* $\tilde{W}_l$ *в классе голоморфных и ограниченных функций, для которых выполнено утверждение 2.*

Предложения 3.5.2-3.5.4 доставляют требуемое решение второго гомологического уравнения в области $\tilde{W}_l$ следующего вида

$$g^{\pm}(\xi, z) = g_0^{\pm}(\xi) + z\tilde{g}(\xi, z),\ (\xi, z) \in \tilde{W}_l$$

где $g_0^{\pm}$ из предложений 3.5.2 и 3.5.3, $\tilde{g}$ — из предложения 3.5.4.

Осталось отметить, что, так как $\forall(\xi, z) \in \tilde{W}_l$, $\operatorname{Re}\xi < -R$, то

$$\|M_0 e^{\lambda\xi}\|_{\tilde{W}_l} = \sup_{\tilde{W}_l}\left|\frac{1}{2}\int\limits_{\operatorname{Re}t=-R-\frac{3}{2}} \Delta_0(t)e^{-\lambda(t-\xi)}dt\right| \le$$

$$\le c(\lambda)\int\limits_{\operatorname{Re}t=-R-\frac{3}{2}} \frac{\|\Delta_0\|_{\tilde{W}_l,m}}{(1+|t|^2)^{m/2}}dt = C(\lambda)\|\Delta_0\|_{\tilde{W}_l,m}$$

Тем самым доказана лемма 3.5.2 (её другие оценки следуют из соответствующих оценок предложений 3.5.2-3.5.4).

3.6. Вспомогательные операторы

Данный раздел посвящён второму шагу доказательства теоремы о секториальной Wнормализации. Здесь будут построены вспомогательные операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$, а так же доказана сжимаемость оператора $\mathcal{H} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ при подходящем выборе параметров секториальных областей.

Так как все рассуждения данного раздела для секториальных областей $\tilde{W}_r$ и $\tilde{W}_l$ полностью идентичны, обозначим для краткости, эти области W, а, соответственно, области $\tilde{W}_r^{\pm}$ и $\tilde{W}_l^{\pm}$ обозначим $W^{\pm}$.

Для вектор-функции $d = (d_1, d_2)$, голоморфной на области W, положим

$$\|d\|_{W,m} \stackrel{def}{=} \|d_1\|_{W,m} + \|d_2\|_{W,m} \tag{3.6.1}$$

Обозначим $\mathbf{B}_m(W)$ — нормированное пространство, состоящее из всех вектор-функций $d = (d_1, d_2)$, голоморфных на W с конечной нормой $\|d\|_{W,m} < \infty$, определяемой (3.6.1).

Для вектор-функции $f = (h, g)$, голоморфной на левой секториальной области W, положим

$$\|f\|_W \stackrel{def}{=} \|h\|_W + \|g\|_W \tag{3.6.2}$$

Обозначим $\mathbf{A}(W)$ — пространство вектор-функций $f = (h, g)$ голоморфных на W с нормой (3.6.2).

Отметим, что пространства $\mathbf{B}_m(W)$ и $\mathbf{A}(W)$ — банаховы.

Оператор решения гомологических уравнений $\mathcal{L}^{\pm}$

Обозначим $\mathcal{L}^{\pm}$ оператор, разрешающий гомологические уравнения (3.2.4) и (3.2.5) с правой частью $d \in \mathbf{B}_m(W)$ (сопоставляющий вектор-функции $d \in \mathbf{B}_m(W)$ вектор-функцию $f^{\pm} \in \mathbf{A}(W)$):

$$f^{\pm} = \mathcal{L}^{\pm}[d]$$

и действующий согласно леммам 3.5.1 и 3.5.2. Тогда следующая лемма следует непосредственно из лемм 3.5.1 и 3.5.2:

Лемма 3.6.1. *Для любого* $m \in (3; N-2)$ *оператор* $\mathcal{L}^{\pm}$ *является корректно определённым оператором, действующим из* $\mathbf{B}_m(W)$ *в* $\mathbf{A}(W)$*, причём для некоторой* $\mathfrak{C}(m, \lambda)$ *верно:*

$$\forall d \in \mathbf{B}_m(W): \ \|\mathcal{L}^{\pm}[d]\|_W \le \mathfrak{C}(m, \lambda)\|d\|_{W,m}$$

Оператор подстановки $\mathcal{R}$

Пусть $\delta \in (0; \frac{\pi}{2})$ такое, что $tg\delta > \frac{\lambda}{2\pi}$. Пусть здесь и всюду далее вектор-функция $\Delta_N = (\Delta_{1N}, \Delta_{2N})$ — фиксированная вектор-функция.

Выберем параметры $R_0 > 1$, $\varepsilon_0 > 0$ и построим $W_{R_0\varepsilon_0}$ так, что Δ_N голоморфна на $W_{R_0\varepsilon_0}$. Тогда из леммы 3.1.2 следует, что Δ_N класса $\mathbf{B}_{N-2}(W_{R_0\varepsilon_0})$.

Выберем положительное число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$ и $R_1 > \max\{R_0+1; 1/\varepsilon_0\}$, тогда для любого $\xi \in \{Re\xi \le -R_1\}$ прямое произведение единичного диска с центром в точке ξ на круг $|z| < \varepsilon_0$ целиком содержится в $W_{R_0\varepsilon_0}$. Выберем некоторое $R > R_1$, $\varepsilon < \varepsilon_1$ и построим секториальную область $W_{R\varepsilon}$.

Пусть $\omega = \min\{1/2; \varepsilon_0/2\}$. Обозначим

$$\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon}) = \{f \in \mathbf{A}(W_{R\varepsilon}) : \ \|f\|_{W_{R\varepsilon}} \le \omega\}$$

шар радиуса ω (с центром в нуле) в метрическом пространстве $\mathbf{A}(W_{R\varepsilon})$ с метрикой, определяемой нормой (3.6.2).

Обозначим $\mathcal{R}$ оператор, действующий по правилу $\mathcal{R}[(h,g)] = (d_1, d_2)$, где:

$$d_1(\xi,z) = \Delta_{1N}(\xi + h(\xi,z), z + g(\xi,z)), \ d_2(\xi,z) = \Delta_{2N}(\xi + h(\xi,z), z + g(\xi,z))$$

Лемма 3.6.2. $\forall m \in (3; N-2)$ *оператор* $\mathcal{R}$ *является корректно определённым оператором, действующим из* $\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$ *в* $\mathbf{B}_m(W_{R\varepsilon})$ *таким, что:*

1. $\|\mathcal{R}[f]\|_{W_{R\varepsilon},m} \le c_1, \ \forall f \in \mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$, *для некоторой* $c_1 = c_1(m, R, \varepsilon_0)$;
2. *оператор* $\mathcal{R}^\pm$ *— липшицев с постоянной* $c_2 = c_2(m, R, \varepsilon_0)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$, тогда $\forall (\xi,z) \in W_{R\varepsilon}$: $|h(\xi,z)| \le \omega$, $|g(\xi,z)| \le \omega$.

Обозначим $\tilde{\xi} = \xi + h(\xi,z)$, $\tilde{z} = z + g(\xi,z)$.

Оператор $\mathcal{R}^\pm$ корректно определён на $\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$, так как $\tilde{\xi} = \xi + h(\xi,z)$ лежит в шаре $|\tilde{\xi} - \xi| < \omega \le 1/2$, а $|\tilde{z}| = |z + g(\xi,z)| < \varepsilon_0$, поэтому если $(\xi,z) \in W_{R\varepsilon}$, то пара $(\tilde{\xi},\tilde{z}) \in W_{(R-\omega)\varepsilon_0} \subset W_{R_0\varepsilon_0}$ и пара (d_1,d_2) корректно определена на $W_{R\varepsilon}$ и обе функции голоморфны, так как $\Delta_N \in \mathbf{B}_{N-2}(W_{R_0\varepsilon_0})$.

Ограниченность.

Для всех $(\xi, z) \in W_{R\varepsilon}$ верны оценки:

$$\|d_1\|_{W_{R\varepsilon},m} = \sup_{W_{R\varepsilon}} |d_1(\xi,z)(1+|\xi|^2)^{m/2}| =$$

$$= \sup_{W_{R\varepsilon}} \left| \Delta_{1N}(\tilde{\xi},\tilde{z})(1+|\tilde{\xi}|^2)^{m/2} \frac{(1+|\xi|^2)^{m/2}}{(1+|\tilde{\xi}|^2)^{m/2}} \right| \le 2^{m/2} \|\Delta_{1N}\|_{W_{(R-\omega)\varepsilon_0},m}$$

аналогично

$$\|d_2\|_{W_{R\varepsilon},m} \le 2^{m/2} \|\Delta_{2N}\|_{W_{(R-\omega)\varepsilon_0},m}$$

Так как $\omega \le 1/2$, то $\|\Delta_{jN}\|_{W_{(R-\omega)\varepsilon_0},m} \le \|\Delta_{jN}\|_{W_{(R-1/2)\varepsilon_0},m}$, $j = 1, 2$. Тем самым первая оценка получена с постоянной:

$$c_1 = 2^{m/2} \|\Delta_N\|_{W_{(R-1/2)\varepsilon_0},m}$$

Липшицевость. Пусть $(h,g) \in \mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$ и $(a,b) \in \mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$. Для точек $(\xi, z) \in W_{R\varepsilon}$ обозначим $(\xi_1, z_1) = (\xi + h(\xi,z), z + g(\xi,z))$, $(\xi_2, z_2) = (\xi + a(\xi,z), z + b(\xi,z))$. Тогда:

$$\|d_1[h,g] - d_1[a,b]\|_{W_{R\varepsilon},m} = \sup_{W_{R\varepsilon}} \left| (\Delta_{1N}(\xi_1,z_1) - \Delta_{1N}(\xi_2,z_2))(1+|\xi|^2)^{m/2} \right| \le$$

$$\le \sup_{W_{R\varepsilon}} \left[\sup_{p\in[\xi_1,\xi_2]} \left| \frac{\partial \Delta_{1N}}{\partial \xi}(p,z_1)(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \right| \cdot |h(\xi,z) - a(\xi,z)| \right] +$$

$$+ \sup_{W_{R\varepsilon}} \left[\sup_{q\in[z_1,z_2]} \left| \frac{\partial \Delta_{1N}}{\partial z}(\xi_2,q)(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \right| \cdot |g(\xi,z) - b(\xi,z)| \right] \le$$

Так как $(h,g) \in \mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$,$(a,b) \in \mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$, то при $(\xi,z) \in W_{R\varepsilon}$ выполнено:

1. $|h(\xi,z)| < \omega < 1/2$, $|a(\xi,z)| < \omega < 1/2$, поэтому для любого $p \in [\xi_1, \xi_2]$ шар B_p с центром в (p, z_1) радиуса $1/4$ лежит в области $W_{(R-3/4)\varepsilon}$;

2. $|g(\xi,z)| < \omega < \varepsilon_0/2$, $|b(\xi,z)| < \omega < \varepsilon_0/2$, поэтому для любого $q \in [z_1, z_2]$ шар B_q радиуса $\varepsilon_0/4$ с центром в точке (ξ_2, q) лежит в области $W_{R(\frac{3}{4}\varepsilon_0)}$.

$$\leq \sup_{W_{R\varepsilon}} \left[\sup_{p\in[\xi_1,\xi_2]} \left| 4 \max_{\tilde{\xi}\in\partial B_p} \left(\Delta_{1N}(\tilde{\xi}, z_1)(1+|\xi|^2)^{m/2} \frac{(1+|\tilde{\xi}|^2)^{m/2}}{(1+|\tilde{\xi}|^2)^{m/2}} \right) \right| \right] \|h-a\|_{W_{R\varepsilon}} +$$

$$+ \sup_{W_{R\varepsilon}} \left[\sup_{q\in[z_1,z_2]} \left| \frac{\max_{\tilde{z}\in\partial B_q} |\Delta_{1N}(\xi_2, \tilde{z})|}{\varepsilon_0/4} (1+|\xi|^2)^{m/2} \frac{(1+|\xi_2|^2)^{m/2}}{(1+|\xi_2|^2)^{m/2}} \right| \right] \|g-b\|_{W_{R\varepsilon}} \leq$$

Так как (из выбора параметров) $\frac{1}{\varepsilon_0} < R$, а так же:

1. $W_{R\varepsilon} \subset W_{(R-3/4)\varepsilon} \subset W_{(R-3/4)\varepsilon_0}$; $\sup\limits_{W_{(R-3/4)\varepsilon_0}} \frac{(1+|\xi|^2)^{m/2}}{(1+|\tilde{\xi}|^2)^{m/2}} \leq 2$;

2. $W_{R\varepsilon} \subset W_{R(\frac{3}{4}\varepsilon_0)} \subset W_{(R-3/4)\varepsilon_0}$; $\sup\limits_{W_{(R-3/4)\varepsilon_0}} \frac{(1+|\xi|^2)^{m/2}}{(1+|\xi_2|^2)^{m/2}} \leq 2$;

то

$$\begin{aligned}
&\|d_1[h,g] - d_1[a,b]\|_{W_{R\varepsilon},m} \leq \\
&\qquad \leq 4\|\Delta_{1N}\|_{W_{(R-3/4)\varepsilon_0}} \|h-a\|_{W_{R\varepsilon}} + 4R\|\Delta_{1N}\|_{W_{(R-3/4)\varepsilon_0}} \|d-b\|_{W_{R\varepsilon}} \leq \\
&\qquad\qquad \leq 4R\|\Delta_{1N}\|_{W_{(R-3/4)\varepsilon_0}} \|(h,g)-(a,b)\|_{W_{R\varepsilon}}
\end{aligned}$$

Теми же рассуждениями покажем, что

$$\|d_2[h,g] - d_2[a,b]\|_{W_{R\varepsilon},m} \leq 4R\|\Delta_{2N}\|_{W_{(R-3/4)\varepsilon_0},m} \|(h,g)-(a,b)\|_{W_{R\varepsilon}}$$

Так как $\omega \leq 1/2$, то оператор $\mathcal{R}$ — липшицев с постоянной

$$c_2 = 4R\|\Delta_N\|_{W_{(R-3/4)\varepsilon_0},m}$$

□

Предложение 3.6.1. $\forall m \in (3; N-3)$ *выполнено:*

$$\mathfrak{c}(R,m) = \max\{c_1, c_2\} \leq \frac{2^{N-5}\|\tilde{\Delta}_N\|_{W_{R_0\varepsilon_0},(N-2)}}{R^{N-3-m}}$$

Доказательство. Напомним, что $\tilde{\Delta}_N \in \mathbf{B}_{N-2}(W_{R_0\varepsilon_0})$; заметим, что $R-3/4 > R/4$ (при $R>1$) и $4^{\frac{N-2-m}{2}} \leq 2^{N-5}$ поэтому при заданных выше параметрах

R_0 и ε_0 выполнено:

$$\|\tilde{\Delta}_N\|_{W_{(R-3/4)\varepsilon_0},m} =$$

$$= \sup_{W_{(R-3/4)\varepsilon_0}} \left((|\tilde{\Delta}_{1N}(\xi,z)| + |\tilde{\Delta}_{2N}(\xi,z)|)(1+|\xi|^2)^{\frac{N-2}{2}} \cdot \frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \leq$$

$$\leq \sup_{W_{(R-3/4)\varepsilon_0}} \frac{\|\tilde{\Delta}_N\|_{W_{R_0\varepsilon_0},(N-2)}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N-2-m}{2}}} \leq \frac{4^{\frac{N-2-m}{2}}\|\tilde{\Delta}_N\|_{W_{R_0\varepsilon_0},(N-2)}}{R^{N-2-m}} \leq \frac{2^{N-5}\|\tilde{\Delta}_N\|_{W_{R_0\varepsilon_0},(N-2)}}{R^{N-2-m}}$$

отсюда следует утверждение предложения. □

Сжимаемость композиции операторов $\mathcal{H}^\pm \stackrel{def}{=} \mathcal{L}^\pm \circ \mathcal{R}$.

Сначала уточним выбор параметров секториальных областей.

Выберем некоторые $\varepsilon_0 > 0$, $R_0 > 1$, $3 < m < N-3$; построим $W_{R_0\varepsilon_0}$; по ним вычислим $\|\Delta_N\|_{W_{R_0\varepsilon_0},(N-2)}$ и $\mathfrak{C}(m,\lambda)$ (из леммы 3.6.1). Положим

$$\omega = \min\{1/2; \varepsilon_0/2\}, \ 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$$

Пусть $c(N)$ из предложения 3.6.1, обозначим

$$R_1 = \max\left\{R_0+1; 1/\varepsilon_0; \left(c(N)\omega^{-1}\mathfrak{C}(m,\lambda)\|\Delta_N\|_{W_{R_0\varepsilon_0},(N-2)}\right)^{\frac{1}{N-m-3}}\right\}$$

Выберем, наконец, $R \geq R_1$ и положительное $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. Построим $\mathbf{A}(W_{R\varepsilon})$, $\mathbf{B}_m(W_{R\varepsilon})$ и $\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$.

Лемма 3.6.3. *Оператор $\mathcal{H}^\pm$ при указанном выше выборе параметров действует из $\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$ и является сжимающим.*

Доказательство. Из леммы 3.6.1 следует, что оператор $\mathcal{R}$ действует из $\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{B}_m(W_{R\varepsilon})$ с константой c_1 (утверждение 1) и липшицев с константой c_2 (утверждение 2), также выполенено утверждение предложения 3.6.2.

Из леммы 3.6.1 следует, что линейный оператор $\mathcal{L}^\pm$, разрешающий гомологические уравнения, действует из $\mathbf{B}_m(W_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{A}(W_{R\varepsilon})$ и ограничен с константой $\mathfrak{C}(m,\lambda)$.

Тогда: так как $\forall f \in \mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$, $\mathcal{R}[f] \in \mathbf{B}_m(W_{R\varepsilon})$, то для оператора $\mathcal{H}^\pm$ выполнено:

$$\forall f \in \mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon}): \ \|\mathcal{H}^\pm[f]\|_{W_{R\varepsilon}} \leq \|\mathcal{L}^\pm\|_{W_{R\varepsilon}} \cdot \|\mathcal{R}[f]\|_{W_{R\varepsilon},m} \leq \mathfrak{C}(m,\lambda)\mathfrak{c}(R,m) \tag{3.6.3}$$

В силу линейности оператора $\mathcal{L}^\pm$ также выполнено:

$$\forall f_{1,2} \in \mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon}): \ \|\mathcal{H}^\pm[f_1] - \mathcal{H}^\pm[f_2]\|_{W_{R\varepsilon}} = \\ = \|\mathcal{L}^\pm(\mathcal{R}[f_1] - \mathcal{R}[f_2])\|_{W_{R\varepsilon}} \leq \mathfrak{C}(m,\lambda)\mathfrak{c}(R,m)\|f_1 - f_2\|_{W_{R\varepsilon}} \tag{3.6.4}$$

В силу выбора R из предложения 3.6.2 выполнено соотношение:

$$\mathfrak{c}(R,m)\mathfrak{C}(m,\lambda) \leq \omega \leq 1/2 \tag{3.6.5}$$

из (3.6.3) и (3.6.5) следует корректность оператора $\mathcal{H}^\pm$, из (3.6.4) и (3.6.5) — сжимаемость. Лемма доказана. $\square$

Доказательство леммы о решении функциональных уравнений.

Построим области $W^\pm_{R\varepsilon}$. Напомним, что $\delta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $tg\delta > \frac{\lambda}{2\pi}$.

Напомним также, что Δ_N — функция из правой части функциональных уравнений. Выбор класса $\mathbf{B}_{N-2}$ с параметром $N-2$ обусловлен леммой 3.1.2.

Лемма 3.6.4. *На области $W_{R\varepsilon}$:*

1. *существует голоморфное и ограниченное отображение $\tilde{H}^\pm_N$ сопрягающее F_0 с $\tilde{F}_N$ вида:*

$$\tilde{H}^\pm_N(\xi,z) = (\xi + h_N(\xi,z), z + g^\pm_N(\xi,z))$$

2. *$\tilde{H}^\pm_N(\xi,z) = (\xi + o(|\xi|^{-N+6}), z + o(|\xi|^{-N+6}))$ при $|\xi| \to \infty$, $(\xi,z) \in W^\pm_{R\varepsilon}$;*

3. *нормализующее отображение, сопрягающее F_0 с $\tilde{F}_N$ на области $W^\pm_{R\varepsilon}$, единственно в классе голоморфных и ограниченных функций, для которых выполнено утверждение 2.*

Доказательство. Пространство $\mathbf{A}(W_{R\varepsilon})$ с нормой (3.6.2) является банаховым, поэтому пространство $\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$ с индуцированной метрикой — полно. Так как по лемме 6 оператор $\mathcal{H}^\pm$ действует из $\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$ и является сжимающим, то по теореме о сжимающих отображениях в области $W_{R\varepsilon}$:

$$\exists! \left(h_N^\pm, g_N^\pm\right): \ \left(h_N^\pm, g_N^\pm\right) = \mathcal{H}^\pm \left(h_N^\pm, g_N^\pm\right) \tag{3.6.6}$$

Отсюда следует, что существует и единственно отображение $\tilde{H}_N^\pm(\xi, z) = (\xi + h^\pm(\xi, z), z+g_N^\pm(\xi, z))$, удовлетворяющее паре функциональных уравнений (т.е. сопрягающее F_0 с $\tilde{F}_N$). Так как $(h_N^\pm, g_N^\pm) \in \mathbf{M}_\omega(S_{R\varepsilon})$, то $\tilde{H}_N$ голоморфно в $W_{R\varepsilon}$. Первое утверждение доказано (равенство отображений $h_N^+ = h_N^-$ на пересечении $W_{R\varepsilon}^+$ и $W_{R\varepsilon}^-$ может быть показано в точности так же как утверждение предложения 3.5.3.

Так как из леммы 3.6.2 следует, что оператор $\mathcal{R}$ действует из $\mathbf{M}_\omega(W_{R\varepsilon})$ в $\mathbf{B}_m(W_{R\varepsilon})$, то из лемм 3.5.1 и 3.5.2 следует утверждение 2.

Утверждение 3 так же может быть показано аналогично утверждению предложения 3.5.3. □

Замечание 3.6.1. *Отметим, что из определения секториальных областей $\tilde{W}_l^+$ и $\tilde{W}_l^-$ следует, что они пересекаются. Равенство отображений h_N^+ и h_N^- на пересечении этих областей может быть показано в точности так же как единственность секториального голоморфного нормализующего отображения в п.3.7.*

3.7. Доказательство теоремы о секториальной нормализации

Все рассуждения раздела проводятся в предположении выбора параметров для доказательства леммы 3.6.4.

Существование решения

Лемма 3.6.4 доставляет голоморфную нормализующую замену координат $\tilde{H}^{\pm}_N$, сопрягающую нормальную форму F_0 с предварительной нормальной формой $\tilde{F}_N$ на области $W_{R\varepsilon}$. Тогда композиция $\tilde{H}^{\pm}_N \circ \tilde{\mathtt{H}}_N$ является голоморфным отображением, сопрягающим F_0 с отображением $\tilde{F}$ на $W_{R\varepsilon}$.

Нормированность

Из построения следует, что отображение $\tilde{H}^{\pm}_N \circ \tilde{\mathtt{H}}_N$ является нормированным на $W^{\pm}_{R\varepsilon}$.

Отметим, что из нормированности отображения $\tilde{H}^{\pm}_N \circ \tilde{\mathtt{H}}_N$ в секториальных областях $W^{\pm}_{R\varepsilon}$ следует их обратимость при подходящем выборе достаточно большого параметра R.

Единственность

Пусть существует два голоморфных, ограниченных и нормированных отображения, сопрягающих F_0 с $\tilde{F}$ на области $W^{\pm}_{R\varepsilon}$. Обозначим их $H^{\pm}$ и $G^{\pm}$. Из нормированности следует существование обратного отображения $(G^{\pm})^{-1}$, которое действует из $G^{\pm}(W^{\pm}_{R\varepsilon})$ в $W^{\pm}_{R\varepsilon}$. Отображение $\Phi^{\pm} = H^{\pm} \circ (G^{\pm})^{-1}$ будем называть *функцией перехода*. Из построения функции перехода следует, что она коммутирует с нормальной формой F_0:

$$F_0 \circ \Phi^{\pm} = F_0 \circ H^{\pm} \circ (G^{\pm})^{-1} = H^{\pm} \circ \tilde{F} \circ (G^{\pm})^{-1} = H^{\pm} \circ (G^{\pm})^{-1} \circ F_0 = \Phi^{\pm} \circ F_0$$

Пусть функция перехода имеет вид $\Phi^{\pm}(\xi, z) = (\xi + h(\xi, z), z + g^{\pm}(\xi, z))$, голоморфна, ограничена и так же является нормированной. Из коммутируемости с нормальной формой следует, что:

$$h(\xi, z) = h\left(\xi + 1, e^{\lambda} z\right) \tag{3.7.7}$$

$$e^{\lambda} g^{\pm}(\xi, z) = g^{\pm}\left(\xi + 1, e^{\lambda} z\right)$$

Заметим, что для производной $\frac{\partial g^{\pm}}{\partial z}$ выполнено то же соотношение, что и для функции h:

$$\frac{\partial g^{\pm}}{\partial z}(\xi, z) = \frac{\partial g^{\pm}}{\partial z}\left(\xi + 1, e^{\lambda} z\right) \tag{3.7.8}$$

Причём из оценок Коши [29] и нормированности следует, что производная $\frac{\partial g^{\pm}}{\partial z}$ так же является голоморфной и ограниченной на, быть может, меньшей, секториальной области, с аналогичной асимптотикой.

Заметим, что уравнения (3.7.7) и (3.7.8) в точности повторяют уравнение (3.5.3) из доказательства единственности решения первого гомологического уравнения (лемма 3.5.1). Повторяя те же рассуждения, получим

$$h(\xi, z) = \frac{\partial g^{\pm}}{\partial z}(\xi, z) = 0,\ (\xi, z) \in \mathbb{C}^2$$

Отсюда следует, что $g^{\pm}$ не зависит от z: для $g^{\pm}(\xi, z) = g^{\pm}(\xi)$ и выполнено:

$$e^{\lambda} g^{\pm}(\xi) = g^{\pm}(\xi + 1),\ \xi \in S^{\pm}_{R\varepsilon} \tag{3.7.9}$$

В точности такое же уравнение и так же в области $S^{\pm}_{R\varepsilon}$ уже было рассмотрено в доказательстве единственности редуцированного второго гомологического уравнения (предложение 3.5.4). Отсюда $g^{\pm} \equiv 0$ на $S^{\pm}_{R\varepsilon}$.

Асимптотика

Пусть $\tilde{H}^{\pm} \overset{def}{=} \tilde{H}^{\pm}_N \circ \tilde{\mathtt{H}}_N$ — построенные выше отображения. Из доказанной выше единственности и единственности аналитического продолжения следует, что при построении $\tilde{\mathtt{H}}_N$ и $\tilde{H}^{\pm}_N$ параметр $N > 6$ мог быть выбран произвольно. Тогда, так как

$$\tilde{H}_N = id + (O(|\xi|^{-N+6}), O(|\xi|^{-N+6})),\ |\xi| \to \infty$$

то:

$$\forall N > 6:\ \tilde{H}^{\pm}_N \circ \tilde{\mathtt{H}}_N = \tilde{\mathtt{H}}_N + O(|\xi|^{-N+6}),\ |\xi| \to \infty$$

откуда и следует, что полуформальная нормализующая замена координат $\tilde{\mathtt{H}}$ является асимптотическим рядом для $\tilde{H}^{\pm}_N \circ \tilde{\mathtt{H}}_N$ при $N \to \infty$.

Продолжение решений функциональных уравнений с области $\tilde{W}_l$ на секториальную область $S^l \times \{|z| < \varepsilon\}$

Напомним, что стандартные секториальные области Ω_1 и Ω_2 строились как прямое произведение прообраза левой секториальной области на ξ-плоскости S^l на диск $\{|y| < \varepsilon\}$. Обозначим $W_l = S^l \times \{|z| < \varepsilon\}$ и определим области $W_l^{\pm}$ аналогично областям $\tilde{W}_l^{\pm}$. Решения функциональный уравнений были построены на существенно меньшей чем $W_l^{\pm}$ области $\tilde{W}_l^{\pm}$. Исправим это.

Были построены голоморфные секториальные нормализующие отображения $\tilde{H}_N^{\pm} = (\xi + h_N(\xi, z), z + g_N^{\pm}(\xi, z))$ на секториальных областях $\tilde{W}_l^{\pm}$. Продолжим h_N и $g_N^{\pm}$ по функциональным уравнениям на секториальные области $W_l^{\pm}$ по следующему правилу.

Обозначим $\xi_j = \xi - j$, $z_j = e^{-\lambda j} z$. Тогда для любого $\xi \in W_l^{\pm} \backslash \tilde{W}_l^{\pm}$ найдётся $k = [Re\xi - R + 1]$ такое, что $(\xi_k, z_k) \in \tilde{W}_l^{\pm}$. Тогда h_N и $g_N^{\pm}$ могут быть корректно продолжены по индукции до голоморфных и ограниченных на $W_l^{\pm}$ функций по формулам:

$$h_N(\xi, z) = h_N(\xi_k, z_k) + \sum_{n=1}^{k} \Delta_{1N}(\xi_n + h_N(\xi_n, z_n), z_n + g_N(\xi_n, z_n))$$
$$g_N(\xi, z) = e^{\lambda k} g_N(\xi_k, z_k) + \sum_{n=1}^{k} e^{\lambda(n-1)} \Delta_{1N}(\xi_n + h_N(\xi_n, z_n), z_n + g_N(\xi_n, z_n))$$

Из оценок $\tilde{H}_N^{\pm}$ на $\tilde{W}_l$ и ограниченности k (k не превышает $2R+3$) следует, что продолженное таким образом на W_l отображение единственно, голоморфно, ограничено и сохраняет асимптотические свойства на $W_l^{\pm}$.

Окончание доказательства теоремы о секториальной нормализации

Выбирая параметры областей достаточно большими (радиус R и раствор δ) и достаточно малыми (радиус ε), без ограничения общности можем считать, что прообразами областей W_l^+, W_l^-, $\tilde{W}_r^-$ и $\tilde{W}_r^+$ при отображении $K : (x, y) \mapsto (\xi = -\frac{1}{x}, z = y)$ являются стандартные секториальные области Ω_1, Ω_2, Ω_3 и

Ω_4 и построенное отображение $H_j = K^{-1} \circ \tilde{H}_j \circ K$, $j \in \mathbb{Z}_4$ удовлетворяет теореме 0.0.2.

Таким образом теорема 0.0.2 о секториальной нормализации доказана.

4. Теорема об аналитической классификации

Для удобства последующих рассуждений обозначим W_j образ стандартной секториальной области Ω_j при действии выпрямляющего отображения K. В разделе выше данные области были обозначены $W_1 = W_l^+$, $W_2 = W_l^-$, $W_3 = \tilde{W}_r^-$ и $W_4 = \tilde{W}_r^+$.

Пусть $H_j,\ j \in \mathbb{Z}_4$ — построенные в теореме 0.0.2 голоморфные нормированные секториальные нормализующие отображения.

4.1. Теорема об эквивалентности и эквимодальности

Определение 4.1.1. *Функции* $\Phi_{j,j+1} \overset{def}{=} H_{j+1}^{-1} \circ H_j,\ j \in \mathbb{Z}_4$ *с областями определения* $\tilde{\Omega}_{j,j+1} = \Omega_j \cap H_j^{-1} \circ H_{j+1}(\Omega_{j+1})$ *будем называть* функциями перехода.

Замечание 4.1.1. *В силу определения и теоремы о секториальной нормализации 0.0.2, тождественное отображение является асимптотическим для функций перехода при* $x \to 0$*, то есть*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \Phi_{j,j+1}(x,y) - (x,y) = (O(|x|^N), O(|x|^N)),\ |x| \to 0,\ (x,y) \in \tilde{\Omega}_{j,j+1}$$

Запишем функции перехода в выпрямляющих координатах: $\Psi_{j,j+1} \overset{def}{=} K \circ \Phi_{j,j+1} \circ K^{-1}$. Обозначим $\tilde{W}_{j,j+1}$ образ области $\tilde{\Omega}_{j,j+1}$ при отображении K. Отметим, что из замечания 4.1.1 следует, что

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \Psi_{j,j+1}(\xi,z) - (\xi,z) = (O(|\xi|^{-N}), O(|\xi|^{-N})),\ |\xi| \to \infty,\ (\xi,z) \in \tilde{W}_{j,j+1} \tag{4.1.1}$$

Положим, что функции перехода имеют вид

$$\Psi_{j,j+1}(\xi,z) = (\xi + h_{j,j+1}(\xi,z), z + g_{j,j+1}(\xi,z))$$

где $h_{j,j+1}$ и $g_{j,j+1}$ голоморфны и ограничены на $\tilde{W}_{j,j+1}$, $j \in \mathbb{Z}_4$. Из построения секториальных нормализующих отображений на секториальных областях Ω_3

и Ω_4 следует, что в силу существования голоморфного центрального многообразия, функция перехода $\Psi_{3,4}$ может быть представлена в виде

$$\Psi_{3,4}(\xi, z) = (\xi + h_{j,j+1}(\xi, z), z(1 + \tilde{g}_{j,j+1}(\xi, z)))$$

где $\tilde{g}_{3,4}$ голоморфна и ограничена на $\tilde{W}_{3,4}$.

Рассмотрим отображение J, действующее по правилу

$$J : (\xi, z) \mapsto (t = e^{2\pi i \xi}, \tau = z e^{-\lambda \xi})$$

Заметим, что отображение J является первым интегралом нормальной формы F_0 (в частности, инвариантно относительно сдвига $\xi \mapsto \xi + 1$). Поэтому корректно определено обратное к нему

$$J^{-1} : (t, \tau) \mapsto \left(\xi = \frac{1}{2\pi i} \ln t, z = \tau t^{\frac{\lambda}{2\pi i}}\right)$$

Обозначим $\Upsilon_{j,j+1} \stackrel{def}{=} J \circ \Psi_{j,j+1} \circ J^{-1}$ и $\Theta_{j,j+1} = J(\tilde{W}_{j,j+1})$, тогда:

$$\Upsilon_{3,4}(t, \tau) = \left(t e^{2\pi i \alpha_{3,4}(t,\tau)}, \tau \left(1 + \beta_{3,4}(t, \tau)\right) e^{-\lambda \alpha_{3,4}(t,\tau)}\right), \ (t, \tau) \in \Theta_{3,4}$$

$$\Upsilon_{j,j+1}(t, \tau) = \left(t e^{2\pi i \alpha_{j,j+1}(t,\tau)}, \left(\tau + \beta_{j,j+1}(t, \tau)\right) e^{-\lambda \alpha_{j,j+1}(t,\tau)}\right)$$
$$(t, \tau) \in \Theta_{j,j+1}, \ j = 1, 2, 4$$

где:

$$\begin{aligned}
&\Theta_{3,4} = \{0 < |t| < \infty\} \times \{|\tau| < const < +\infty\} \\
&\alpha_{3,4}(t, \tau) = h_{3,4}\left(\tfrac{1}{2\pi i} \ln t, \tau t^{\frac{\lambda}{2\pi i}}\right), \ \beta_{3,4}(t, \tau) = g_{3,4}\left(\tfrac{1}{2\pi i} \ln t, \tau t^{\frac{\lambda}{2\pi i}}\right) \\
&\Theta_{1,2} = \{0 < |t| < \infty\} \times \{|\tau| < +\infty\} \\
&\Theta_{2,3} = \{|t| > const\} \times \{|\tau| < const < +\infty\} \\
&\Theta_{4,1} = \{|t| < const < \infty\} \times \{|\tau| < const < +\infty\} \\
&\alpha_{j,j+1}(t, \tau) = \varphi_{j,j+1}\left(\tfrac{1}{2\pi i} \ln t, \tau t^{\frac{\lambda}{2\pi i}}\right), \ \beta_{j,j+1}(t, \tau) = t^{\frac{-\lambda}{2\pi i}} \varphi_{j,j+1}\left(\tfrac{1}{2\pi i} \ln t, \tau t^{\frac{\lambda}{2\pi i}}\right) \\
&j = 1, 2, 4
\end{aligned}$$

Отметим, что функции $\alpha_{j,j+1}$ и $\beta_{j,j+1}$, $j \in \mathbb{Z}_4$ голоморфны и ограничены на областях определения. Тогда:

1) Из теоремы Лиувилля и теоремы об устранимой особенности [29] следует, что $\alpha_{3,4} = \alpha_{3,4}(\tau)$, $\beta_{3,4} = \beta_{3,4}(\tau)$, $\alpha_{1,2} \equiv C_1$, $\beta_{1,2} \equiv C_2$, где C_j, $j = 1, 2$ — некоторые постоянные.

2) Из построения голоморфных нормализующих отображений в правой секториальной области (а именно, решения гомологических уравнений на инвариантных кривых Γ_c) следует, что если параметр «c» выбрать равным нулю, то голоморфное нормализующее отображение в области $\tilde{W}_3$ совпадёт с решением в $\tilde{W}_4$. Напомним, что «нулевая» инвариантная кривая задаётся парами (ξ, z) из правой секториальной области такими, что $0 = ze^{-\lambda\xi}$. Таким образом $\alpha_{3,4}(0) = \beta_{3,4}(0) = 0$.

3) Функции перехода $\Upsilon_{2,3}$ при $t \to \infty$ и $\Upsilon_{4,1}$ при $t \to 0$ асимптотически тождественны.

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{1,2}(t,\tau) &= (t, \tau + C)\\
\Upsilon_{2,3}(t,\tau) &= \Big(t(1 + A_{2,3}(t,\tau)), (\tau + B_{2,3}(t,\tau))\,(1 + A_{2,3}(t,\tau))^{\frac{-\lambda}{2\pi i}}\Big)\\
\Upsilon_{3,4}(t,\tau) &= \Big(t(1 + A_{3,4}(\tau)), \tau\,(1 + B_{3,4}(\tau))\,(1 + A_{3,4}(\tau))^{\frac{-\lambda}{2\pi i}}\Big)\\
\Upsilon_{4,1}(t,\tau) &= \Big(t(1 + A_{4,1}(t,\tau)), (\tau + B_{4,1}(t,\tau))\,(1 + A_{4,1}(t,\tau))^{\frac{-\lambda}{2\pi i}}\Big)
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&A_{4,1} = A_{4,1}(t,\tau),\ B_{4,1} = B_{4,1}(t,\tau)\ \text{ голоморфны в } (\mathbb{C}^2, 0),\\
&\text{причём } A_{4,1}(t,\tau) = O(t),\ B_{4,1}(t,\tau) = O(t),\ t \to 0;\\
&A_{2,3} = A_{2,3}(t,\tau),\ B_{2,3} = B_{2,3}(t,\tau)\ \text{ голоморфны в } (\mathbb{C}, \infty) \times (\mathbb{C}, 0),\\
&\text{причём } A_{2,3}(t,\tau) = O(1),\ B_{2,3}(t,\tau) = O(t^{-1}),\ t \to \infty;\\
&A_{3,4} = A_{3,4}(\tau),\ B_{3,4} = B_{3,4}(\tau)\ \text{ голоморфны в } (\mathbb{C}, 0),\\
&\text{причём } A_{3,4}(\tau) = O(\tau),\ B_{3,4}(\tau) = O(\tau),\ \tau \to 0\\
&C \in \mathbb{C}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.1.3}$$

Определение 4.1.2. *Построенный выше набор* $(A_{j,j+1}, B_{j,j+1}, C)$*,* $j \in \mathbb{Z}_4$ $j = 2, 3, 4$ *будем называть* набором функциональных инвариантов *отображения* $F \in \mathbf{F}_\lambda$ *и обозначать* m_F*. Без ограничения общности можем считать, что набор* m_F *так же является функциональным модулем ростка* F.

Покажем теперь, что построенные выше наборы действительно являются инвариантами аналитической классификации ростков полугиперболических отображений класса $\mathbf{F}_\lambda$.

Напомним, что два ростка F и $\tilde{\mathsf{F}}$ будем называть *строго аналитически эквивалентными*, если существует сопрягающая их представителей голоморфная замена координат H, такая, что

$$H(x, y) = (x + o(x^2), y + o(x)),\ x \to 0 \tag{4.1.4}$$

Теорема 4.1.1 (Об эквивалентности и эквимодальности)**.** *Для строгой аналитической эквивалентности ростков класса* $\mathbf{F}_\lambda$ *необходимым и достаточным условием является условие совпадения их наборов функциональных инвариантов.*

Доказательство. Необходимость.

Пусть F и $\tilde{F}$ — представители ростков F и $\tilde{\mathsf{F}}$ класса $\mathbf{F}_\lambda$; U и $\tilde{U}$ — их области определения. Пусть F и $\tilde{F}$ строго аналитически эквиваленты, и $H : \tilde{U} \to U$ — сопрягающая их замена вида (4.1.4):

$$F \circ H = H \circ \tilde{F},\ (x, y) \in \tilde{U}$$

Пусть H_j — одно из секториальных нормализующих преобразований для F, определенное на секториальной области Ω_j:

$$F \circ H_j = H_j \circ F_\lambda,\ (x, y) \in \Omega_j$$

Меняя, если требуется, параметры секториального покрытия $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{Z}_4}$, без ограничения общности можем считать, что $U \backslash \{x = 0\} = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}_4} H_j(\Omega_j)$. Тогда отображение $G_j \overset{def}{=} H^{-1} \circ H_j$ является корректно определённым соответствующим секториальным нормализующим аналитическим отображением для $\tilde{F}$:

$$\tilde{F} \circ G_j = (H^{-1} \circ F \circ H) \circ (H^{-1} \circ H_j) = \\ = H^{-1} \circ F \circ H_j = H^{-1} \circ H_j \circ F_\lambda = G_j \circ F_\lambda, \ (x, y) \in \Omega_j \quad (4.1.5)$$

Пусть H_j и H_{j+1} — два нормализующих секториальных отображения, определенных на соседних секториальных областях Ω_j и Ω_{j+1}, и $\Phi_{j,j+1} \overset{def}{=} H_{j+1}^{-1} \circ H_j$ — функция перехода отображения F. Тогда для функции перехода $\tilde{\Phi}_{j,j+1}$ отображения $\tilde{F}$ выполнено:

$$\tilde{\Phi}_{j,j+1} = G_{j+1}^{-1} \circ G_j = H_{j+1}^{-1} \circ H \circ (H^{-1} \circ H_j) = H_{j+1}^{-1} \circ H_j = \Phi_{j,j+1}$$

Отсюда следует совпадение соответствующих росткам наборов функциональных инвариантов.

Достаточность.

Пусть для определённых выше отображений F и $\tilde{F}$ заданы системы секториальных нормализующих отображений $\{H_j\}$ и $\{G_j\}$ соответственно и по ним построены наборы функций перехода $\{\Phi_j\}, \{\tilde{\Phi}_j\}$:

$$\Phi_{j,j+1} = H_{j+1}^{-1} \circ H_j, \ \tilde{\Phi}_{j,j+1} = G_{j+1}^{-1} \circ G_j$$

Так как F и $\tilde{F}$ являются представителями ростков, то без ограничения общности можем считать, что функции перехода определены на одних и тех же секториальных областях.

Пусть наборы функциональных инвариантов, соответствующие этим наборам функций перехода, совпадают; тогда совпадают и сами наборы функций перехода:

$$\Phi_{j,j+1} = \tilde{\Phi}_{j,j+1}$$

Положим $D_j \overset{def}{=} H_j \circ G_j^{-1}$ на каждой секториальной области Ω_j соответственно. Тогда на пересечении соседних областей j и $j+1$ выполнено следующее:

$$D_j = H_j \circ G_j^{-1} = H_{j+1} \circ \Phi_{j,j+1} \circ \tilde{\Phi}_{j,j+1}^{-1} \circ G_{j+1}^{-1} = H_{j+1} \circ G_{j+1}^{-1} = D_{j+1}$$

Поэтому на объединении всех секториальных областей корректно определено отображение D, совпадающее с D_j на Ω_j. Это отображение сопрягает F и $\tilde{F}$:

$$\tilde{F} \circ D_j = \tilde{F} \circ H_j \circ G_j^{-1} = H_j \circ F_\lambda \circ G_j^{-1} = H_j \circ G_j^{-1} \circ F = D_j \circ F$$

Осталось отметить, что по теореме Хартогса [**?**] D аналитически продолжается до локального голоморфизма $\mathcal{D}$. Более того, из оценок секториального нормализующего отображения следует выполнение условий нормировки (4.1.4) из определения строгой эквивалентности. Это дает строгую аналитическую эквивалентность ростков F и $\tilde{\mathsf{F}}$. $\square$

4.2. Реализация

Пусть $\mathbf{M}_\lambda$ — пространство, элементами которого являются всевозможные наборы $(A_{j,j+1}, B_{j,j+1}, C)$, $j = 2, 3, 4$, удовлетворяющие (4.1.3). В этом разделе будет доказана следующая теорема.

Теорема 4.2.1 (о реализации)**.** *Для любого набора $m \in \mathbf{M}_\lambda$ найдётся росток $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ такой, что $m = m_F$.*

Из определения областей стандартного покрытия следует, что Ω_j и Ω_{j+1} пересекаются. Пересечение областей стандартного покрытия будем называть *стандартным пересечением* и обозначать $\Omega_{j,j+1}$. Набор стандартных пересечений, соответственно, обозначим $\{\Omega_{j,j+1}\}$.

Замечание 4.2.1. *Заметим, что по стандартному пересечению может быть* однозначно *восстановлено стандартное покрытие.*

Определение 4.2.1. *Будем говорить, что набор областей $A = \{A_j\}$ вписан в набор областей $B = \{B_j\}$, если для любого j область A_j является подобластью B_j.*

Определение 4.2.2. *Набор областей* $\{E_j\}$ *(набор* $\{E_{j,j+1}\}$*) будем называть* секториальным покрытием *(соответственно* секториальным пересечением*), если в* $\{E_j\}$ *можно вписать стандартное покрытие и* $\{E_j\}$ *можно вписать в стандартное покрытие (для набора* $\{E_{j,j+1}\}$ *— аналогично).*

Построение топологического пространства $\mathcal{M}$

Пусть $m = (A_{j,j+1}, B_{j,j+1}, C)$ — элемент пространства $\mathbf{M}_\lambda$. Определим по m набор отображений $\{\Upsilon_{j,j+1}(t,\tau)\}$ с областями определения $\Theta_{1,2} = \mathbb{C}^2$, $\Theta_{2,3} = (\mathbb{C}, \infty) \times (\mathbb{C}, 0)$; $\Theta_{3,4} = \mathbb{C} \times (\mathbb{C}, 0)$, $\Theta_{4,1} = (\mathbb{C}^2, 0)$ по правилу:

$$\begin{aligned}
&\Upsilon_{1,2}(t,\tau) = (t, \tau + C)\\
&\Upsilon_{j,j+1}(t,\tau) = \left(t(1 + A_{j,j+1}(t,\tau)), (\tau + B_{j,j+1}(t,\tau))(1 + A_{j,j+1}(t,\tau))^{-\frac{\lambda}{2\pi i}}\right), \ j = 2, 4\\
&\Upsilon_{3,4}(t,\tau) = \left(t(1 + A_{3,4}(\tau)), (\tau + B_{3,4}(\tau))(1 + A_{3,4}(\tau))^{-\frac{\lambda}{2\pi i}}\right)
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Области $\Theta_{j,j+1}$ будем называть *естественными* областями определения функций $\Upsilon_{j,j+1}$. Запишем $\Upsilon_{j,j+1}$ в координатах (x, y) где $(t,\tau) = I(x,y)$ из (3.5.12):

$$\Phi_{j,j+1} \stackrel{def}{=} I^{-1} \circ \Upsilon_{j,j+1} \circ I$$

Будем называть *естественной* областью определения отображения $\Phi_{j,j+1}$ часть прообраза области $\Theta_{j,j+1}$ при отображении I, где обе компоненты отображения $\Phi_{j,j+1}$ голоморфны; естественные области определения будем обозначать $dom\Phi_{j,j+1}$. Заметим, что в силу определения компонент $A_{j,j+1}$ и $B_{j,j+1}$ выполнено:

$$\forall N \in \mathbb{N}: \ \Phi_{j,j+1}(x,y) - (x,y) = (o(|x|^{-N}), o(|x|^{-N})), \ x \to 0, \ (x,y) \in dom\Phi_{j,j+1} \tag{4.2.2}$$

Без ограничения общности можем считать, что, в силу (4.2.2), в набор $\{dom\Phi_{j,j+1}\}$ может быть вписано стандартное пересечение $\{U_{j,j+1}\}$ такое, что:

— наборы $\{\Phi_{j,j+1}(U_{j,j+1})\}$ и $\{\Phi_{j,j+1}^{-1}(U_{j,j+1})\}$ тоже вписаны в $\{dom\Phi_{j,j+1}\}$;

— в набор $\{U_{j,j+1} \cap \Phi_{j,j+1}(U_{j,j+1}) \cap \Phi_{j,j+1}^{-1}(U_{j,j+1})\}$ может быть вписано некоторое стандартное пересечение.

Тем самым наборы

$$\{E_{j,j+1}\} \stackrel{def}{=} \{\Phi_{j,j+1}^{-1}(U_{j,j+1}) \cap U_{j,j+1}\}$$
$$\{Z_{j,j+1}\} \stackrel{def}{=} \{U_{j,j+1} \cap \Phi_{j,j+1}(U_{j,j+1})\}$$

являются наборами секториальных пересечений. Причём

$$\Phi_{j,j+1}(E_{j,j+1}) = Z_{j,j+1}$$

Выберем некоторую секториальную область V_j так, что она «связывает» области $E_{j,j+1}$ и $Z_{j-1,j}$ в односвязную секториальную область. Кроме того, будут выполнены также условия замечаний 4.2.2 и 4.2.4 (см. ниже). Возможность построения такой области следует из построения областей стандартного пересечения. Построим набор секториальных областей $\{\Omega_j\}$ по правилу:

$$\Omega_j \stackrel{def}{=} Z_{j-1,j} \cup V_j \cup E_{j,j+1} \tag{4.2.3}$$

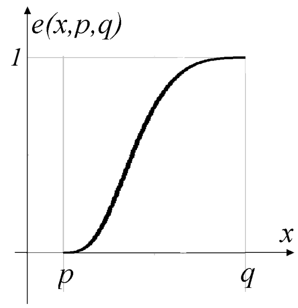
Рассмотрим топологическое пространство $\mathcal{M}$ полученное из $\{\Omega_j\}$ склейкой по отображениям $\Phi_{j,j+1}$ по следующему правилу. Пусть элементами пространства $\Omega_j \times \{j\}$ являются точки $(x, y) \times \{j\}$. Тогда $\forall j$ отображения склейки $\Phi_{j,j+1}$ действуют из $E_j \times \{j\}$ в $Z_{j+1,j+2} \times \{j+1\}$. Элементами $\mathcal{M}$ будут:

$$\begin{aligned}&\text{точки } (x, y) \times \{j\}, \quad \text{если } (x, y) \in \Omega_j \backslash (Z_{j,j+1} \cup E_{j,j+1})\\ &\text{пары } ((x, y) \times \{j\}, \Phi_{j,j+1}(x, y) \times \{j+1\}), \quad \text{если } (x, y) \in E_{j,j+1}\end{aligned}$$

Пусть $\pi_j : \Omega_j \to \mathcal{M}$ — естественные вложения; пусть $W_j \stackrel{def}{=} \pi_j(\Omega_j)$. Топологию на $\mathcal{M}$ определим стандартным образом: множество $U \subset \mathcal{M}$ открыто если и только если $\forall j$ множества $\pi_j^{-1}(U \cap W_j)$ открыты. Тогда (W_j, π_j^{-1}) — естественные карты многообразия $\mathcal{M}$, $\Phi_{j,j+1}$ — их функции перехода:

$$\pi_{j+1}^{-1} \circ \pi_j = \Phi_{j,j+1} \tag{4.2.4}$$

Замечание 4.2.2. *Без ограничения общности можем считать, что в силу выбора областей V_j, пространство $\mathcal{M}$ является* хаусдорфовым, *поэтому карты (W_j, π_j^{-1}) определяют на $\mathcal{M}$ структуру комплексного многообразия. Совокупность $W = \{W_j\}$ образует открытое покрытие многообразия $\mathcal{M}$.*



Введём вспомогательную функцию

$$e(x,p,q) = \exp\left(\frac{-\exp\left(\frac{-1}{(q-x)^2}\right)}{(p-x)^2}\right),\ x \in (p,q)$$

её график представлен на рис.выше.

Замечание 4.2.3. *Функция $e(x,p,q)$ — бесконечно гладкая и ограниченная на замыкании области определения.*

Замечание 4.2.4. *В силу построения областей $E_{j,j+1}$, $Z_{j,j+1}$ и выбора V_j, существует стандартное пересечение $\{\omega_{j,j+1}\}$ с параметрами d, $\tilde{d}$ и $\tilde{R}$ такое что области $\omega_{j,j+1}$ вписаны в $E_j \cap Z_j$ (для подходящих $0 < d < \delta$, $\tilde{\delta} < \tilde{d} < \frac{\pi}{2}$, $\tilde{R} > R$, где δ, $\tilde{\delta}$ и R — параметры стандартного пересечения $\{U_{j,j+1}\}$).*

Пусть кривые $\arg x = \alpha_{j,j+1}(|x|)$ и $\arg(x) = \beta_{j,j+1}(|x|)$ задают «левую» и «правую» границу секториальной области $\omega_{j,j+1}$ (то есть $\omega_{j,j+1} = \{(x,y) : \alpha_{j,j+1}(|x|) \leq \arg(x) \leq \beta_{j,j+1}(|x|)\}$).

По стандартному пересечению $\{\omega_{j,j+1}\}$ построим стандартное покрытие $\{\omega_{j,j+1}\}$. Определим на каждом ω_j *срезающую функцию* θ_j по правилу:

$$\theta_j = \begin{cases} 1,\ (x,y) \in \omega_j \backslash (\omega_{j,j+1} \cup \omega_{j-1,j}) \\ 1 - e(\arg x, \alpha_{j-1,j}(|x|), \beta_{j-1,j}(|x|)),\ (x,y) \in \omega_{j-1,j} \\ e(\arg x, \alpha_{j,j+1}(|x|), \beta_{j,j+1}(|x|)),\ (x,y) \in \omega_{j,j+1} \end{cases}$$

Заметим, что функции θ_j продолжаемы по тем же формулам с ω_j на Ω_j. Без ограничения общности можем считать, что θ_j определёны на Ω_j.

Почти комплексная структура

Определим на W_j функцию $\theta_j \circ \pi_j^{-1}$ и продолжим её с W_j на всё $\mathcal{M}$, полагая равной нулю вне W_j.

Положим

$$G \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{4} \theta_j \circ \pi_j^{-1} \cdot \pi_j^{-1}$$

Тогда G действует из $\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}^2$. Обозначим $\mathcal{N}_0$ образ многообразия $\mathcal{M}$ при отображении G. Из построения многообразия $\mathcal{M}$ и отображения G следует, что, $\mathcal{N}_0 = (\mathbb{C}_*, 0) \times (\mathbb{C}, 0)$. Обозначим G_j сужение G на W_j.

Замечание 4.2.5. *Несложно проверить, что, если радиусы исходных областей достаточно малы, то G инъективно на $\mathcal{M}$. А, значит, G_j инъективно на W_j.*

Из замечания 4.2.5 следует, что существуют обратные отображения $G^{-1} : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{M}$ и $G_j^{-1} : G(W_j) \to W_j$.

Замечание 4.2.6. *Диффеоморфизм $G : W \to \mathcal{N}_0$ задаёт на $\mathcal{N}_0$ почти комплексную структуру (ПКС) [28], индуцированную комплексной структурой $\mathcal{M}$ (замечание 4.2.2).*

Замечание 4.2.7. *Из (4.2.2) и ограниченности срезающих (замечание 4.2.3) следует, что*

$$\begin{gathered}\forall N \in \mathbb{N}: \; G_j \circ \pi_j - (x, y) = \left(o\left(x^N\right), o\left(x^N\right)\right), \; x \to 0, \; (x, y) \in \Omega_j \\ \forall N \in \mathbb{N}: \; \pi_j^{-1} \circ G_j^{-1} - (x, y) = \left(o\left(x^N\right), o\left(x^N\right)\right), \; x \to 0, \; (x, y) \in G(W_j)\end{gathered} \tag{4.2.5}$$

Более того, из замечания 4.2.3 и вида секториального покрытия $\{\Omega_j\}$ следует возможность почленного дифференцирования выражения (4.2.5).

Обозначим

$$\begin{gathered}\pi_j^{-1} \circ G_j^{-1} = (a_j, b_j) \\ \omega_1^j = d(a_j), \quad \omega_2^j = d(b_j)\end{gathered}$$

Определим на $\mathcal{N}_0$ две 1-формы по правилу:

$$\omega_1 = \sum_{j=1}^{4} \theta_j \circ \pi_j^{-1} \circ G_j^{-1} \cdot \omega_1^j \qquad \omega_2 = \sum_{j=1}^{4} \theta_j \circ \pi_j^{-1} \circ G_j^{-1} \cdot \omega_2^j$$

Отметим, что в силу построения, функции $\theta_j \circ \pi_j^{-1} \circ G_j^{-1}$ отличны от нуля лишь на $G(W_j)$. Таким образом, 1-формы ω_1 и ω_2 в действительности являются суммой двух слагаемых (на пересечении $G(W_j)$ и $G(W_{j+1})$) и ровно одним слагаемым вне пересечений.

Пусть Ω_h — пространство 1-форм, голоморфных на $\mathcal{N}_0$ в смысле ПКС из замечания 4.2.6. Тогда

Лемма 4.2.1. *Радиусы исходных областей могут быть выбраны достаточно малыми для того, чтобы* $\Omega_h =< \omega_1, \omega_2 >$.

Доказательство. По определению индуцированной ПКС, в точках $B = G(A)$ таких, что $A \in W_j$, пространство $\Omega_h(B)$ голоморфных 1-форм ПКС натянуто на дифференциалы компонент отображения $G_j^{-1}(B)$:

$$\Omega_h(B) =< \omega_1^j, \omega_2^j >$$

По определению 1-форм ω_1^j, ω_2^j, так как $(a_{j+1}, b_{j+1}) = \Phi_{j,j+1}(a_j, b_j)$, то $< \omega_1^{j+1}, \omega_2^{j+1} > = < \omega_1^j, \omega_2^j >$ (там, где все они определены — т.е. на пересечении секторов $G(W_j)$ и $G(W_{j+1})$). Поскольку формы ω_1 и ω_2 есть линейные комбинации форм ω_1^j и ω_2^j, то $< \omega_1^j, \omega_2^j > \subset \Omega_h$. С учётом асимптотики (4.2.5) и определения срезающих функций, получим линейную независимость 1-форм ω_1 и ω_2. Откуда и следует требуемое:

$$\forall B \in \mathcal{N}_0 : \ \Omega_h(B) =< \omega_1, \omega_2 >$$

$\square$

Таким образом на $\mathcal{N}_0$ задана почти комплексная структура (ПКС), индуцированная диффеоморфизмом G.

Окончание доказательства теоремы о реализации

Определённая таким образом на $\mathcal{N}_0$ почти комплексная структура является интегрируемой (или, согласно терминологии [28], разрешимой), так как индуцирована.

Продолжим ПКС по непрерывности с $\mathcal{N}_0 = (\mathbb{C}_*, 0) \times (\mathbb{C}, 0)$ на $Int(\overline{\mathcal{N}_0}) = \mathcal{N} = (\mathbb{C}^2, 0)$, полагая

$$\Omega_h(0, y) =< dx, dy >, \ (0, y) \in \mathcal{N} \backslash \mathcal{N}_0 \tag{4.2.6}$$

Из замечания 4.2.7 и леммы 4.2.1 следует, что определённая таким образом структура на $\mathcal{N}$ является гладкой, то есть ПКС на $\mathcal{N}$. Более того, так как исходная ПКС на $\mathcal{N}_0$ была интегрируемой, то по непрерывности продолженная ПКС на $\mathcal{N}$ тоже будет интегрируема.

Теорема 4.2.2 (Ньюлендера-Ниренберга 5.7.4, [28])**.** *Всякая разрешимая ПКС определяется (локально) единственной аналитической структурой.*

Из теоремы Ньюлендера-Ниренберга следует, что существует определённое в некоторой окрестности $\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ точки $(0, 0)$ голоморфное в смысле ПКС инъективное отображение $P : \tilde{\mathcal{N}} \to (\mathbb{C}^2, 0)$ (т.е. такое, что линейное подпространство дифференциальных 1-форм Ω_h в точках из $\tilde{\mathcal{N}}$ порождено дифференциалами компонент отображения P); кроме того, $P \in C^\infty(\tilde{\mathcal{N}})$. Уменьшая, если требуется, радиусы исходных областей, без ограничения общности можем считать, что $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$.

Замечание 4.2.8. *Если отображение P удовлетворяет теореме Ньюлендера-Ниренберга, то для любого голоморфного и инъективного в некоторой достаточно малой окрестности $\left(\mathbb{C}^2, 0\right)$ отображения T композиция $T \circ P$ так же удовлетворяет теореме.*

Пусть $J_j = P \circ G_j$. Тогда отображение J_j действует из $W_j \subset \mathcal{M}$ в $\mathbb{C}^2$ и комплексную структуру $\mathcal{M}$ переводит в комплексную структуру $\mathbb{C}^2$. А, значит, J_j голоморфно. Отображение $J = P \circ G$ — биголоморфизм многообразия $\mathcal{M}$ на $P(\mathcal{N}_0)$.

Поскольку отображения склейки $\Phi_{j,j+1}$ коммутируют с нормальной формой F_λ, то на некоторой подобласти $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ корректно определено голоморфное отображение $\tilde{F}$, в естественных картах совпадающее в F_λ.

Биголоморфизм J сопрягает $\tilde{F}$ с некоторым голоморфным отображением $\overset{\circ}{F}$, определенным, в свою очередь, на подобласти $\mathcal{N}_1 = P(G(\tilde{\mathcal{M}}))$. Как обычно, выбирая параметры исходных областей достаточно малыми, без ограничения общности можем считать, что $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$, $\mathcal{N}_0 = G(\mathcal{M})$, $\mathcal{N}_1 = P(\mathcal{N}_0)$.

Обозначим $\mathcal{N}_2 = Int(\overline{N}_1)$. Обозначим L часть прямой $\{x = 0\}$, пересекающуюся с $\mathcal{N}$. Тогда $L = \mathcal{N} \backslash \mathcal{N}_0$. Тогда $\overset{\circ}{F}$ голоморфно всюду на $\mathcal{N}_2$ кроме $P(L)$. Заметим, что сужение P на L голоморфно (это следует из (4.2.6)), так что $P(L)$ — аналитическая кривая и, согласно [30], является «тонким множеством». Таким образом, согласно теореме Римана (см. теорему 2, гл.3 §7 [30]), $\overset{\circ}{F}$ продолжается до некоторого $\dot{F}$, голоморфного на $\mathcal{N}_2 = \left(\mathbb{C}^2, 0\right)$.

Заметим, что отображение $\hat{G}_j \overset{def}{=} G_j \circ \pi_j$ является гладким (согласно построению) и сопрягает отображение F_λ с некоторым гладким отображением $\hat{F}_j$, заданным на $\hat{\Omega}_j = \hat{G}_j(\Omega_j) \subset \mathcal{N}$.

В силу построения, существует некоторая секториальная область $\tilde{V}_j \subset V_j$ (V_j из (4.2.3)) такая, что срезающая θ_j равна 1 на $\tilde{V}_j$. Тогда на этой секториальной области пространство голоморфных 1-форм Ω_h порождено $< dx, dy >$. То есть $\hat{G}_j$ голоморфно на $\tilde{V}_j$. Следовательно, отображение P голоморфно в образе $\hat{G}_j(\tilde{V}_j)$. То есть ряд Тейлора отображения P с центром в точках области $\hat{G}_j(\tilde{V}_j)$ (понимаемый в вещественном смысле) не содержит переменных $\bar{x}, \bar{y}$. Так как $(0,0) \subset \partial\tilde{V}_j$, то из асимптотических формул замечания 4.2.7 следует, что $(0,0) \in \partial\hat{G}_j(\tilde{V}_j)$. Тогда, по непрерывности, ряд Тейлора отображения P с центром в начале координат также не содержит $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Отсюда следует, что F_λ формально эквивалентно $\dot{F}$ (в комплексном смысле). То есть $\dot{F}$ — полугиперболическое отображение.

Согласно доказанной в работе [**?**] теореме о полуформальной классификации, а так же следствию 1 из неё, для любого натурального N существует голоморфная замена координат T_N, сопрягающая F_λ с полугиперболическим отображением $\dot{F}$ с точностью до невязки $\left(o\left(x^N\right), o\left(x^N\right)\right)$ при $x \to 0$. Тогда отображение

$$H_j \overset{def}{=} T_2 \circ J_j \circ \pi_j$$

определённое на Ω_j, голоморфно, нормировано и сопрягает нормальную форму F_λ с голоморфным отображением F, имеющим следующий вид:

$$F(x, y) = F_\lambda(x, y) + \left(o\left(x^2\right), o\left(x^2\right)\right),\ x \to 0$$

Так что F строго формально эквивалентно F_λ, то есть является представителем ростка класса $\mathbf{F}_\lambda$.

Из построения отображений H_j следует, что они являются секториальными нормализующими для F. Но тогда соответствующие им функции перехода равны $\Phi_{j,j+1}$:

$$H_{j+1}^{-1} \circ H_j = \pi_{j+1}^{-1} \circ \pi_j = \Phi_{j,j+1}$$

так что в соответствии с построением модулей строгой аналитической классификации исходный набор m и есть модуль ростка F:

$$m = m_F$$

Тем самым теорема о реализации доказана.

5. Следствия

5.1. Необходимые и достаточные условия существования центрального многообразия

Как известно (теорема Адамара-Перрона [4]), каждому гиперболическому мультипликатору Λ ($|\Lambda| \neq 0, 1$) ростка голоморфного отображения F в его неподвижной точке соответствует инвариантное одномерное подмногообразие Γ_Λ: $F(\Gamma_\Lambda) \subset \Gamma_\Lambda$, касательного к собственному вектору e_Λ, соответствующему Λ. Однако, для параболического мультипликатора Λ ($|\Lambda| = 1$), это, вообще говоря, не так. Точнее: можно найти формальное инвариантное многообразие $\tilde{\Gamma}_\Lambda$ (его называют центральным), касающееся e_Λ. В вещественном гладком случае оно — гладкое. Однако оно не всегда является голоморфным. Ниже приводится критерий существования голоморфного центрального многообразия для ростков полугиперболических отображений, сформулированный в терминах построенных ранее модулей.

Теорема 5.1.1. *Пусть* $(A_{j,j+1}(t,\tau), B_{j,j+1}(t,\tau), C)$, $j = 2, 3, 4$ — *набор функциональных инвариантов ростка* F *класса* $\mathbf{F}_\lambda$. *Для ростка* F *существует голоморфное в* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *центральное многообразие тогда и только тогда, когда выполнено:*

$$B_{2,3}(t,0) \equiv 0,\ \ B_{4,1}(t,0) \equiv 0,\ \ C = 0 \qquad (5.1.1)$$

Доказательство. **Достаточность.** Росток отображения $F_\lambda = \left(\frac{x}{1-x}, \Lambda y\right)$ имеет голоморфное на $(\mathbb{C}^2, 0)$ центральное многообразие $L = \{y = 0\}$. Теорема о секториальной нормализации утверждает, что для любого ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ существует его представитель F и существует набор секториальных областей $\{\Omega_j\}$ такой, что в каждой Ω_j росток F аналитически эквивалентен F_λ, соответствующее (единственное) секториальное нормализующее отображение обозначим H_j:

$$F \circ H_j = H_j \circ F_\lambda,\ \ (x, y) \in \Omega_j$$

Таким образом в каждой секториальной области $\tilde{\Omega}_j = H_j(\Omega_j)$ существует и единственно голоморфное секториальное центральное многообразие $M_j = H_j(L \cap \Omega_j)$. Причём в пункте 3.7 было доказано, что M_3 совпадает с M_4 на пересечении секторов $\tilde{\Omega}_3 \cap \tilde{\Omega}_4$ и образуют единственное голоморфное центральное многообразие на $\tilde{\Omega}_3 \cup \tilde{\Omega}_4$.

Если $C = 0$, то функция перехода $\Phi_{1,2} = H_2^{-1} \circ H_1$ тождественна, откуда следует, что $H_1 = H_2$ и поэтому $M_1 = M_2$ на пересечении секторов $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$ и образуют единственное голоморфное центральное многообразие на $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$.

Рассмотрим многообразия M_4 и M_1. Как следует из условия (5.1.1) вторая компонента функции перехода $\Phi_{4,1} = H_1^{-1} \circ H_4$ (отметим, что $\Phi_{4,1} : \Omega_1 \cap \Omega_4 \to \Omega_1 \cap \Omega_4$), делится на $\tau = ye^{\frac{\lambda}{x}}$, отсюда $\Phi_{4,1}(L \cap (\Omega_1 \cap \Omega_4)) \subseteq L \cap (\Omega_1 \cap \Omega_4)$. Тогда на пересечении $\tilde{\Omega}_4 \cap \tilde{\Omega}_1$ выполнено:

$$
\begin{aligned}
M_4|_{\tilde{\Omega}_4 \cap \tilde{\Omega}_1} &= H_4(L \cap (\Omega_1 \cap \Omega_4)) = \\
&= H_1 \circ \Phi_{4,1}(L \cap (\Omega_1 \cap \Omega_4)) \subseteq H_1(L \cap (\Omega_1 \cap \Omega_4)) = M_1|_{\tilde{\Omega}_4 \cap \tilde{\Omega}_1}
\end{aligned}
$$

Из аналогичных рассуждений для $\Phi_{4,1}^{-1}$ следует, что на $M_4|_{\tilde{\Omega}_4 \cap \tilde{\Omega}_1} = M_1|_{\tilde{\Omega}_4 \cap \tilde{\Omega}_1}$.

Аналогично при выполнении условия (5.1.1) секториальное центральное многообразие M_2 на пересечении секторов $\tilde{\Omega}_2$ и $\tilde{\Omega}_3$ совпадает с M_3.

То есть для отображения F такого, что для его функциональных инвариантов выполнено условие (5.1.1) существуют секториальные центральные многообразия M_j, голоморфные в $\tilde{\Omega}_j$ такие, что на пересечении областей они совпадают и вместе образуют голоморфное в инвариантное для F многообразие $M_0 = \bigcup M_j$. Из теоремы об устранимой особенности следует, что многообразие $M = M_0 \cup \{(0,0)\}$ и есть искомое голоморфное центральное многообразие.

Необходимость. Пусть для ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ в $(\mathbb{C}^2, 0)$ существует голоморфное центральное многообразие. Тогда можем его выпрямить и считать равным $\{y = 0\}$. В этом случае $H_1 = H_2$, следовательно, $C = 0$. Так как F и F_λ сохраняют прямую $\{y = 0\}$, то все секториальные нормализующие отображения также её сохраняют, что и означает выполнение условия (5.1.1). □

5.2. Связь с одномерной динамикой

Росток конформного отображения $\mathsf{f} : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с неподвижной точкой 0 называется *параболическим*, если он касателен к тождественному в неподвижной точке и не равен тождественному. Два параболических ростка f и g называются *аналитически эквивалентными*, если существует росток голоморфной замены координат $\mathsf{h} : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, сопрягающий их:

$$\mathsf{h} \circ \mathsf{f} = \mathsf{g} \circ \mathsf{h} \tag{5.2.1}$$

Аналитическая классификация ростков параболических отображений была получена независимо Экаллем [33] и Ворониным [11] и имеет функциональные инварианты (модули Экалля-Воронина).

Два ростка параболических отображений будем называть формально эквивалентными, если существует обратимое формальное отображение h такое, что (5.2.1) верно как равенство формальных рядов.

Определение 5.2.1. *Два ростка параболических отображений будем называть* строго *эквивалентными, если сопрягающая их замена координат h имеет вид $h(x) = x + o(x^2),\ x \to 0$.*

Замечание 5.2.1. *Если росток полугиперболического отображения класса $\mathbf{F}_\lambda$ имеет голоморфное центральное многообразие, то сужение ростка на центральное многообразие является ростком параболического отображения.*

На вопрос: «Как связаны между собой модули Экалля-Воронина и построенные выше модули строгой аналитической классификации полугиперболических отображений?», отвечает следующая теорема.

Теорема 5.2.1. *Пусть росток $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ имеет голоморфное центральное многообразие. Тогда нетривиальные сужения компонент модуля ростка F*

на центральное многообразие являются модулем Экалля-Воронина сужения ростка F *на центральное многообразие.*

Доказательство. Пусть для ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ существует голоморфное центральное многообразие, обозначим его M. Обозначим f сужение ростка F на M. Пусть F — представитель ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$, $\{\Omega_j\}$ — секториальное покрытие, на котором определены нормализующие отображения $\{H_j\}$.

Замечание 5.2.2. *Из построения нормализующего отображения в секториальных областях следует, что* $\forall j: \ H_j(L) = M$, *где* $L = \{y = 0\}$ *— голоморфное центральное многообразие нормальной формы* F_λ. *А именно: для нормализующих отображений* H_1 *и* H_2 *это следует из замечания 3.4.4, для* H_3 *и* H_3 *— из доказательства леммы 3.5.2.*

Обозначим h_i сужение H_j на многообразие L. Обозначим f_0 сужение нормальной формы F_λ на L. Заметим, что росток отображения

$$f_0(x) = \frac{x}{1-x}$$

является параболическим.

Обозначим $\mathbf{f}_0$ класс ростков голоморфных параболических отображений *строго формально* эквивалентных ростку отображения f_0.

В силу замечания 5.2.2, так как отображения H_j сопрягают отображение F с нормальной формой F_λ в $\Omega_j = X_j \times \{|y| < \varepsilon\}$, то h_j сопрягают f с f_0 в X_j. Тогда из определения функциональных инвариантов следует, что нетривиальные сужения функциональных инвариантов ростка F на L (в координатах (x, y)), а именно, $A_{4,1}(x, 0)$ и $A_{2,3}(x, 0)$ являются функциональными инвариантами ростка f в задаче о строгой аналитической классификации параболических отображений (модулем Экалля-Воронина). $\square$

5.3. Проблема включения

Определение 5.3.1. *Росток голоморфного отображения $F : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ называется* включаемым, *если существует голоморфный в $(\mathbb{C}^2, 0)$ росток векторного поля v такой, что $F = g_v^1$ — сдвиг за единичное время вдоль поля v.*

Определение 5.3.2. *Два голоморфных в $(\mathbb{C}^2, 0)$ ростка векторных полей v и $\tilde{v}$ называются* строго формально эквивалентными, *если существует формальная замена координат $H(x, y) = (x + o(x^2), y + o(x)),\ x \to 0$ такая, что равенство*

$$v \circ H = H' \cdot \tilde{v}$$

верно как равенство формальных рядов.

Напомним, что отображение $F_\lambda = \left(\frac{x}{1-x}, e^\lambda y\right),\ \lambda \in \mathbb{R}_+$ является сдвигом за единичное время вдоль векторного поля $v_\lambda = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y},\ \lambda \in \mathbb{R}_+$.

Обозначим $\mathbf{V}_\lambda$ класс ростков голоморфных в $(\mathbb{C}^2, 0)$ векторных полей, строго формально эквивалентных ростку поля v_λ.

Теорема 5.3.1 (О включении в поток)**.** *Пусть росток $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ и m_F — его набор функциональных инвариантов. Тогда существует росток векторного поля v класса $\mathbf{V}_\lambda$ ($\mathsf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$) такой, что росток $\mathsf{F} = g_{\mathsf{v}}^1$, если и только если для m_F выполнено:*

$$A_{4,1} = B_{4,1} = A_{2,3} = B_{2,3} = 0$$

Доказательство. **Достаточность.** Пусть F — представитель ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$. Пусть $m_F = (A_{j,j+1}, B_{j,j+1}, C)$ — его функциональный модуль; $\{\Omega_j\}$ — секториальный набор, на котором построены функции перехода отображения F.

Так как функциональные инварианты $A_{4,1}$, $A_{2,3}$, $B_{4,1}$ и $B_{2,3}$ равны нулю, то функции перехода $\Phi_{2,3}$ и $\Phi_{4,1}$, действующие на пересечении секторов $\Omega_2 \cap \Omega_3$ и $\Omega_4 \cap \Omega_1$ соответственно, тождественны, то есть $H_4 = H_1,\ (x, y) \in \Omega_4 \cap \Omega_1$ и $H_2 = H_3,\ (x, y) \in \Omega_2 \cap \Omega_3$.

Тем самым на объединении секториальных областей $\Omega_4 \cup \Omega_1$ корректно определено голоморфное нормализующее отображение, которое совпадает с H_4 на Ω_4 и с H_1 на Ω_1, обозначим его H_+; и аналогично в $\Omega_2 \cup \Omega_3$ определено голоморфное нормализующее отображение H_-. Тогда функция перехода на пересечении секторов Ω_3 и Ω_4 задаётся следующим образом:

$$\Phi_{\mp} \stackrel{def}{=} H_+^{-1} \circ H_- = \left(\frac{-2\pi i}{\frac{-2\pi i}{x} + \ln\left(1 + A(ye^{\lambda/x})\right)}, y + e^{-\lambda/x} B(ye^{\lambda/x}) \right)$$

где $A = A_{3,4}(\tau)$, $B = B_{3,4}(\tau)$.

Из уравнения

$$H'_+ \cdot v_+ = v_\lambda \circ H_+$$

найдём векторное поле v_+. Тогда в силу определения ростка F_λ, так как F аналитически эквивалентен F_λ в объединении секторов $\Omega_4 \cup \Omega_1$, то F является сдвигом за единичное время вдоль поля v_+ в $\Omega_4 \cup \Omega_1$.

Аналогично существует v_- такое, что $F = g^1_{v_-}$ на объединении секторов $\Omega_2 \cup \Omega_3$ и v_- является решением уравнения.

$$H'_- \cdot v_- = v_\lambda \circ H_-$$

Таким образом на пересечении секторов $\Omega_3 \cap \Omega_4$ определены два векторных поля v_+ и v_-. Заметим, что векторное поле v_λ удовлетворяет уравнению (проверяется прямыми вычислениями):

$$\Phi'_{\mp} \cdot v_\lambda = v_\lambda \circ \Phi_{\mp}$$

Откуда следует, что на пересечении секторов $\Omega_3 \cap \Omega_4$ выполнено:

$$v_+ = (H'_+)^{-1} \cdot v_\lambda \circ H_+ \circ H_-^{-1} \circ H_- = (H'_+)^{-1} \cdot (H_+ \circ H_-^{-1})' \cdot v_\lambda \circ H_- =$$
$$= (H'_+)^{-1} \cdot H'_+ \cdot (H_-^{-1})' \cdot H'_- \cdot v_- = v_-$$

Аналогично на пересечении секторов Ω_1 и Ω_2 функция перехода

$$\Phi_{\pm} = H_-^{-1} \circ H_+ = (x, y + e^{-\lambda/x})$$

коммутирует с векторным полем v_λ. Поэтому аналогично получается, что $v_+ = v_-$ на $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Таким образом существует голоморфное векторное поле v_0:

$$v_0 = \begin{cases} v_-, & x \in \Omega_2 \cup \Omega_3 \\ v_+, & x \in \Omega_4 \cup \Omega_1 \end{cases}$$

такое, что отображение F является сдвигом за единичное время вдоль поля v_0. Областью определения векторного поля v_0 является $\cup\Omega_j$ — произведение проколотой окрестности начала координат $\{0 < |x| < \tilde{\varepsilon}\}$ на диск $\{|y| < \varepsilon\}$. Поле v_0 голоморфно и ограничено на $\cup\Omega_j$, по теореме об устранимой особенности продолжим его на $x = 0$. Продолжение обозначим v. Заметим, что из асимптотики секториальных нормализующих отображений H_j следует, что росток векторного поля v принадлежит классу $\mathbf{V}_\lambda$. Тогда росток F является сдвигом за единичное время вдоль v на $(\mathbb{C}^2, 0)$.

Необходимость. Пусть F — представитель ростка $\mathsf{F} \in \mathbf{F}_\lambda$ и $F = g_v^1$, где v — представитель ростка $\mathsf{v} \in \mathbf{V}_\lambda$. Тогда из теоремы о секториальной нормализации голоморфных векторных полей [15] следует, что существует секториальны набор $\{\Omega_j\}$ такой, что на секториальных областях Ω_+ вида $\Omega_1 \cup \Omega_4$ и Ω_- вида $\Omega_2 \cup \Omega_3$ соответственно существует пара голоморфных нормализующих отображений H_+, H_-, сопрягающих поле v с полем v_λ. Значит, $H_\pm$ сопрягает и сдвиги за единичное время. Отсюда $H_4 = H_1 = H_+$ на пересечении секториальных областей $\Omega_1 \cap \Omega_4$ и $H_2 = H_3 = H_-$ на $\Omega_2 \cap \Omega_3$ соответственно, откуда следует, что функции перехода $\Phi_{4,1}$ и $\Phi_{2,3}$ тождественны. □

Замечание 5.3.1. *Таким образом, если росток класса $\mathbf{F}_\lambda$ включаем, то из его функциональных инвариантов нетривиальными являются инварианты $A_{3,4}(\tau)$, $B_{3,4}(\tau)$ и C. Аналитическая классификация ростков голоморфных векторных полей класса $\mathbf{V}_\lambda$ имеет три функциональных инварианта: модули Мартине-Рамиса [38], [39] и модуль Мещеряковой-Тессье [15]. Из приведённого выше доказательства (раздел «необходимость») и в тех же* *обозначениях следует, что инварианты* $A_{3,4}(\tau)$ *и* C *являются модулями Мартине-Рамиса ростка* v*, а* $B_{3,4}(\tau)$ *— модуль Мещеряковой-Тессье этого ростка.*

Заключение

В работе получена строгая аналитическая классификация простейших ростков голоморфных двумерных полугиперболических отображений. Для ростков такого класса:

— построены модули строгой аналитической классификации; доказана теорема об эквивалентности и эквимодальности; доказана теорема о реализации;

— найдены необходимые и достаточные условия существования голоморфного центрального многообразия (в терминах построенных модулей); указана связь с модулями Экалля-Воронина строгой аналитической классификации параболических отображений;

— доказана теорема о включении; указана связь с модулями Мартине-Рамиса и Мещеряковой-Тессье строгой аналитической классификации ростков голоморфных векторных полей.

Разработанный в диссертации метод решения гомологических уравнений, по всей видимости, позволит получить аналитическую классификацию ростков многомерных резонансных отображений в более общей ситуации (не только для двумерных полугиперболических отображений, но и для любых гиперболических, а так же в размерности выше 2).

Двумерные полугиперболические ростки возникают как преобразования монодромии трёхмерных векторных полей. Поэтому полученные результаты так же могут быть использованы для исследования орбитальной аналитической классификации трёхмерных векторных полей.

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, при этом

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

2. $[a]$ — целая часть вещественного числа a.

3. Символ $\square$ обозначает конец доказательства.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах / В. И. Арнольд // Функциональный анализ и его приложения — 1969 — Т.3, вып.I — С. 1–6.

[2] Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах / В. И. Арнольд // Успехи математических наук, XXVII — 1972 — вып.5(167) — С. 119–184.

[3] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд // М:Наука, — 1978.

[4] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко // Итоги науки и техн., Соврем.проб.мат., Фундам. напр., М:ВИНИТИ — 1985 — Т.1 — С. 7–140.

[5] Белицкий Г. Р. Нормальный формы, инварианты и локальные отображения / Г. Р. Белицкий // Киев:Наукова думка — 1974.

[6] Бронштейн И. У. Инвариантные многообразия и нормальные формы / И. У. Бронштейн, А. Я. Копанский // Кишинёв:Штиинца — 1992.

[7] Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений / А. Д. Брюно // Труды ММО — 1971 —Т.25— С. 119–262.

[8] Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений / А. Д. Брюно // Труды ММО — 1972 — Т.26 — С. 199–239.

[9] Брюно А. Д. Аналитические интегральные многообразия / А. Д. Брюно // Доклады АН СССР — 1974 — Т.216 — С. 253–256.

[10] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа / А. Д. Брюно // М:Наука — 1979.

[11] Воронин С. М. Аналитическая классификация ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с тождественной линейной частью / С. М. Воронин // Функц.анализ — 1981 — Т.15, Вып.1 — С. 1–17.

[12] Воронин С. М. Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения / С. М. Воронин // Функц.анализ — 1982 — Т.16, Вып.2 — С. 94–100.

[13] Воронин С. М. Орбитальная аналитическая эквивалентность вырожденных особых точек голоморфных векторных полей на комплексной плоскости / С. М. Воронин // Тр.мат.инст.им.Стеклова — 1997 — Т.213 — С. 35–55.

[14] Воронин С. М. Аналитическая классификация ростков голоморфных отображений с неизолированными неподвижными точками и постоянными мультипликаторами и ее приложения / С. М. Воронин // Вестник ЧелГУ — 1999 — Т.5 — С. 12–30.

[15] Воронин С. М. Аналитическая классификация седлоузлов / С. М. Воронин, Ю. И. Мещерякова // Тр.ММО — 2005 — Т.66, №1 — С. 93–113.

[16] Воронин С. М. Проблема Тома в задаче об орбитальной аналитической классификации вырожденных особых точек голоморфных векторных полей на плоскости / С. М. Воронин, Л. Ортис-Бобадилла, Э. Росалес-Гонсалес // ДАН — 2010 — Т.434, №4 — С. 443–446.

[17] Дюлак А. О предельных циклах / А. Дюлак // М.:Наука — 1980.

[18] Елизаров П. М. Замечания об орбитальной аналитической классификации ростков векторных полей / П. М. Елизаров, Ю. С. Ильяшенко // Матем.сб. — 1983 — Вып.121(163), №1(5) — С. 111–126.

[19] Зигель К. Л. О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия / К. Л. Зигель // Математика — 1961 —Т.5, вып.2 — С. 103–155.

[20] Ильяшенко Ю. С. Расходимость рядов, приводящих аналитическое дифференциальное уравнение к линейной нормальной форме в особой точке / Ю. С. Ильяшенко // Функциональный анализ и его приложения — 1979 — Т.13, вып.3 — С. 87–88.

[21] Ильяшенко Ю. С. В теории нормальных форм аналитических дифференциальных уравнений при нарушении условий А.Д.Брюно расходимость — правило, сходимость — исключение / Ю. С. Ильяшенко // Вестник Московского университета — 1981 — сер.I, №.2 — С. 10–15.

[22] Ильяшенко Ю. С. Аналитическая теория дифференциальных уравнений, Т. 1 / Ю. С. Ильяшенко, С. Ю. Яковенко // М:МЦНМО — 2013.

[23] Лазуткин В. Ф. Аналитические интегралы полустандартного отображения и распад сепаратрис / В. Ф. Лазуткин // Алгебра и анализ — 1989 — Т.1, №2 — С. 116–131.

[24] Мещерякова Ю. И. Формальная классификация вырожденных элементарных особых точек / Ю. И. Мещерякова // Ур.Соб.типа:Сб.науч.раб.Челяб.гос.ун-та, Челябинск — 2002 — С. 197–206.

[25] Пяртли А. С. Рождение комплексных инвариантных многообразий вблизи особой точки векторного поля, зависящего от параметра / А. С. Пяртли // Функциональный анализ и его приложения — 1972 — Т.6, вып.4 — С. 95–96.

[26] Пяртли А. С. Циклы системы двух комплексных дифференциальных уравнений в окрестности неподвижной точки / А. С. Пяртли // Тр.ММО — 1978 — Т.37 — С. 95–106.

[27] Хартман П. Обыкновенные дифференциальные уравнения / П. Хартман // М:Мир — 1970.

[28] Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных / Л. Хермандер // М:Мир — 1968.

[29] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, т.1 / Б. В. Шабат // URSS — 2015.

[30] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, т.2 / Б. В. Шабат // URSS —2015.

[31] Cerveau D. Groups d'automorphismes de $(C, 0)$ et équiations diffé
retialles $ydy + ... = 0$ (French) / D. Cerveau, R. Moussu // Bull.Soc.Math.France — 1989 — V.116, №4 — P. 459–488.

[32] Elizarov P. M. Finitely generated group of germs of one-dimentional conformal mappings, and invariants for complex singular points / P. M. Elizarov, Yu. S. Il'yashenko, A. A. Shcherbakov, S. M. Voronin // In Adv. Soviet Math., Amer. Math. Soc., Providance — 1993 — V.14 — P. 57–105.

[33] Ecalle J. Sur les fonctions resurgentes / J. Ecalle // Orsay.Publ.Math.d'Orsay — 1981.

[34] Bedford E. Semi-parabolic Bifurcations in Complex Dimension Two / E. Bedford, J. Smillie, T. Ueda // Commun.Math.Phys. — 2017 — V.350, №1 — P. 1–29.

[35] Hukuara H. Equations différentieles ordinaires du premier ordre dans le champs complexe / H. Hukuara, T. Kimura, T. Matuda // Publ.Math.Soc.of Japan — 1961.

[36] Il'yashenko Yu. S. Nonlinear Stokes Phenomena / Yu. S. Il'yashenko // Nonlinear Stokes Phenomena, Adv. in Sov.Math.,13, Amer. Math.Soc., Providence — 1992 — P. 1–51.

[37] Malgrange B. Travoux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systemes dinamique / B. Malgrange // Asterisque — 1982 — №582 — P. 59–73.

[38] Martinet J. Probléme de modules pour des équations diff'erentielles non linéaires du premier ordre / J. Martinet, J. P. Ramis // Inst. Hautes Études Sci.PublMath — 1982 — №55 — P. 63–164.

[39] Martinet J. Classification analytique des équations différentielles non linéaires resonnantes du premier ordre / J. Martinet, J. P. Ramis // Ann.Sci.École norm. supér — 1983 — V.16, №4 — P. 571–621.

[40] Newton I. Philosophia Naturalis Principia Mathematica /I. Newton // London — 1687.

[41] Poincare H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I / H. Poincare // J. Math. Pures et Appl. — 1881 — V.7 —P. 375–422.

[42] Poincare H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle II / H. Poincare // J. Math. Pures et Appl. — 1882 — V.8 —P. 251–296.

[43] Poincare H. Sur les courbes définies par les équations différentielles III / H. Poincare // J. Math. Pures et Appl. — 1885 — V.1 —P. 167–244.

[44] Poincare H. Sur les courbes définies par les équations différentielles IV / H. Poincare // J. Math. Pures et Appl. — 1886 — V.2 —P. 151–218.

[45] Poincare H. Sur les problém des trois corps et les équations de la dinamique / H. Poincare // Acta Math., XIII — 1890 — P. 1–271.

[46] Pfiefer G. A. Existeme of divergent solutions of the functional equations $\phi[g(x)] = a\phi(x)$, $f[f(x)] = g(x)$, where $g(x)$ is a given analytic function, in the irrational case / G. A. Pfiefer // Bull.Amer.Math.Soc. — 1916 — V.22 — pp. 163.

[47] Rousseaua C. The root of extraction problem / C. Rousseaua // J. of Diff. Equation — 2007 — V.234, Issue 1 — P. 110–141.

[48] Rousseaua C. Modulus of analytic classification for the generic unifolding of a codimension 1 resonant diffeomorphism or resonant saddle / C. Rousseaua, C. Christopher // Annales de l'institut Fourier — 2007 — V.57, №1 — P. 301–360.

[49] Rousseaua C. Analytic moduli for Unifoldings of Saddle-Node Vector Fields / C. Rousseaua, L. Teyssier // Mosc.Math.J. — 2008 — V.8, №3 — P. 547–614.

[50] Rousseaua C. The moduli space of germs of generic families of analytic diffeomorphisms unifolding of a codimension one resonant diffeomorphism of resonant saddle / C. Rousseaua // J. of Diff. Equation. — 2010 — V.248 — P. 1794–1825.

[51] Stolovitch L. Family of intersecting totally real manifolds of $(C^n, 0)$ and germs of holomorphic diffeomorphisms / L. Stolovitch // Bulletin de la societe matematique de France — 2015 — V.143, №2 — P. 247–263.

[52] Stolovitch L. Holomorphic normal form of nonlinear perturbations of nilpotent vector fields / L. Stolovitch, F. Verstringe // Regular and Chaotic Dynamics — 2016 — V.21, №4 — P. 410–436.

[53] Tessier L. Classification analytique des champs de vecteurs noeud-cols / L. Tessier // C.R.Acad.Sci.Paris — 2003 — V.336, Ser.1, №8 — P. 619–624.

[54] Tessier L. Equation homologique et cycles asimptotiques dúne singularité neoud-col / L. Tessier // Bulletin des Sciences Math?matiques — 2004 — V.128, №.3 — P. 167–187.

[55] Tessier L. Analytical classification of singular saddle-node vector field / L. Tessier // Jornal of Dynamical and Control Systems — 2004 — V.10, №.4 — P. 577–605.

[56] Ueda T. Local structure of analytic transformations of two complex variables, I / T. Ueda // J. Math. Kyoto Univ. — 1986 — V.26, №2 — P 233–261.

[57] Ueda T. Local structure of analytic transformations of two complex variables, II / T. Ueda // J. Math. Kyoto Univ. — 1991 — V.31, №3 —P. 695–711.

[58] Voronin S. M. Darboux-Whitney's Problem and Related Questions / Nonlinear Stokes Phenomena // Adv. in Sov.Math.,13, Amer. Math.Soc., Providence — 1992.

[59] Voronin S. M. An analytic classification of saddle resonant singular points of holomorfic vector fields in the complex plane / S. M. Voronin, A. A. Grinchii // J.Dynam.Control Systems — 1996 — T.2, №1 — P. 21–53.

[60] Voronin S. M. Invariants for singular points of holomorphic vector fields on complex plane // The Stokes Phenomenon and Hilbert's 16th problem (Groningen, 1995), World Sci. Publ., River Edge, NJ — 1996 — P. 305–323.

[61] Yoccoz J. C. Linearisation des germes de diffeomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$/ J. C. Yoccos // C.R. Acad.Sci.Paris Ser. I Math. — 1988 — V.306, №1 — P. 55–58.

[62] Yoccoz J. C. Theorem de Siegel, nombres de Briuno et polynomes quadratiques / J. C. Yoccos // Asterisque — 1995 — V.231 — P. 3–88.

[63] Zitomirskii M. Local normal forms for constrained systems on 2-manifolds / M. Zitomirskii // Bol. Soc. Bras.Math. — 1993 — V.24 — P. 211–232.

[64] Zoladek H. Monografie Matematyczne, New Series / H. Zolandek // Birkhauser, Basel, Boston, Berlin —V.67 — 2006.

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень ведущих периодических изданий

[65] Шайхуллина П. А. Формальная классификация типичных ростков полугиперболических отображений / П. А. Шайхуллина // Математические заметки СВФУ — 2015 — Т.22, №4 — С. 79—90.

[66] Шайхуллина П. А. О решении простейшего функционального уравнения в области типа «криволинейная полоса» / П. А. Шайхуллина // Математические заметки СВФУ —2017 — Т.24, №4 — С. 87—95.

[67] Шайхуллина П. А. Функциональные инварианты типичных ростков полугиперболических отображений / П. А. Шайхуллина, С. М. Воронин // Чел. Физ.-Мат. Жур. — 2017 — Т.2 — С. 447–455.

Публикации по теме диссертации, примыкающие к основным

[68] Воронин С. М. Секториальная нормализация ростков полугиперболических отображений / С. М. Воронин, П. А. Фомина // Вестник ЧелГУ — 2013 — №. 16 — С. 94–113.

[69] Воронин С. М. Функциональные инварианты ростков полугиперболических отображений / С. М. Воронин, П. А. Фомина // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы: тез. докл. международ. конф. посв. 110-й годовщине И.Г. Петровского — Москва: МГУ, 2011 — С. 173.

[70] Шайхуллина П. А. Нормализующие преобразования ростков полугиперболических отображений в левых секториальных областях / П. А. Шайхуллина // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: тез. докл. междунар. конф. — оз.Банное: Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН, 2018 — С. 89.

[71] Шайхуллина П. А. Аналитическая классификация полугиперболических отображений / П. А. Шайхуллина // Дифференциальные уравнения и динамические системы: тез. докл. междунар. конф. — Суздаль: ВладГУ, 2018 — С. 217–218.

[72] Шайхуллина П. А. Строгая аналитическая классификация простейших ростков полугиперболических отображений / П. А. Шайхуллина // Вещественные и комплексные динамические системы: тез. докл. междунар. конф. посв. 75-летию Ю.С. Ильяшенко — Москва: НМУ, 2018 — С. 63–64.