На правах рукописи

Фильченков Андрей Сергеевич

Топологически транзитивные косые произведения на клетках в $\mathbb{R}^n$ (n≥ 2)

Специальность: 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2015

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и математического анализа механико-математического факультета Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа механико-математического факультета ННГУ им. Н. И. Лобачевского Л. С. Ефремова

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, информационных технологий и электротехники института информационных систем и технологий МАТИ - Российского государственного технологического университета имени К. Э. Циолковского А. Ю. Жиров

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики факультета естественных наук ИАТЭ НИЯУ МИФИ Н. Э. Клиншпонт

Ведущая организация: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 16 июня 2015 г. в 17 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых по адресу: 600024, г. Владимир, пр-т. Строителей, д. 11. Факс (4922) 53-25-75, 33-13-91; e-mail: oid@vlsu.ru

С текстом диссертации можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте www.vlsu.ru Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, с авторефератом — на сайтах http://vak2.ed.gov.ru/catalogue/ и http://diss.vlsu.ru

Автореферат разослан 28 апреля 2015 г.

Ученый секретарь
Совета Д 212.025.08
д.ф.-м.н., доцент Наумова С.Б.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исторически первыми примерами дискретных динамических систем класса косых произведений являются цилиндрические каскады. Цилиндрический каскад, т.е. дискретная динамическая система, заданная на цилиндре $S^1 \times \mathbb{R}$ с координатами $x \in S^1$ и $y \in \mathbb{R}$ (S^1 — окружность, $\mathbb{R}$ — прямая), получающаяся итерированием отображения $T(x, y) = (x + \alpha, y + f(x))$, α — иррациональное число, впервые возникает в мемуарах по качественной теории дифференциальных уравнений А. Пуанкаре[1]. В указанной работе формулируется задача исследования ω-предельных множеств траекторий цилиндрического каскада с использованием множества точек пересечения траекторий с образующей цилиндра $x_0 \times \mathbb{R}$ при любом $x_0 \in S^1$. Одна из трёх высказанных Пуанкаре гипотез связана с реализуемостью транзитивного случая, то есть с возможностью существования точек с плотными на всём цилиндре траекториями. Транзитивные траектории занимают большое место в исследованиях Дж. Биркгофа[2].

Первыми примерами топологически транзитивных цилиндрических каскадов являются примеры Л. Г. Шнирельмана[3] и А. С. Безиковича[4].

Изучению топологически транзитивных цилиндрических каскадов и доказательству теорем существования топологически транзитивных гомеоморфизмов и диффеоморфизмов произвольного класса гладкости с различными фазовыми пространствами посвящены работы Е. А. Сидорова[5–7].

Свойство топологической транзитивности цилиндрического каскада тесно связано[8] с решением пятой проблемы Гильберта о существовании ана-

---

[1] Пуанкаре А. *О кривых определяемых дифференциальными уравнениями.* ОГИЗ М.-Л. — 1947.

[2] Биркгоф Дж. *Динамические системы.* Ижевск: Издат. дом «Удмуртский университет». — 1999.

[3] Шнирельман Л. Г. *Пример одного преобразования плоскости.* Известия донского политехнического института в Новочеркасске. Научный отдел, физмат часть. — 1930. — № 14 — С. 64-77.

[4] Besikovitch A. S. *A Problem on Topological Transformations of the Plane.* Fund. math. — 1937. — V. 28 — P.61-65.

[5] Сидоров Е. А. *Гладкие топологически транзитивные динамические системы.* Матем. заметки. — 1968. — Т. 4, вып. 6 — С. 751–759.

[6] Сидоров Е. А. *Топологически транзитивные цилиндрические каскады.* Матем. заметки. — 1973. — № 14:3 — С. 441-452.

[7] Сидоров Е. А. *Топологически транзитивные динамические системы.* Диссертация. ГГУ. — 1973.

[8] Gottschalk W. H., Hedlund G. A. *Topological Dynamics.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publications. Providence. — 1955. — V. 36

литических функциональных уравнений, отдельными решениями которых являются недифференцируемые функции.

Укажем обзоры[9–10], посвящённые различным аспектам свойства топологической транзитивности непрерывных отображений. К этим работам примыкает статья[11], в которой, в частности, построен пример непрерывного транзитивного косого произведения, заданного на компактном прямоугольнике, периодические точки которого плотны только лишь на горизонтальных слоях $y = 0$, $y = 1$.

Значительное место в современной теории динамических систем занимает изучение аттракторов. При этом выделяется две задачи: исследование топологической структуры аттрактора[12–15] и изучение динамики на аттракторе[16–19].

В связи с обнаружением нехаотических аттракторов существует ряд исследований, посвящённых различным аспектам структуры и динамики систем на такого рода аттракторах[20–23]. Традиционно существует обширная библиография, посвящённая изучению хаотических аттракторов[24–26]. Особое место в исследованиях хаотических аттракторов дискретных динамических систем занимает изучение аттракторов-континуумов, размерность которых либо меньше размерности фазового пространства[15,19,22], либо совпадает с размерностью фазового пространства динамической систе-

---

[9] Alseda Ll., Del Rio M. A., Rodriguez J. A. *A Survey on the Relation Between Transitivity and Dense Periodicity for Graph Maps.* JDEA. — 2003. — V. 9:3-4 — P. 281-288.

[10] Kolyada S., Snoha L. *Some Aspects of Topological Transitivity - A Survey.* Iteration theory (ECIT 94)(Opava). Grazer Math. Ber., Karl-Franzens-Univ. Graz. — 1997. — V. 334. — P. 3-35.

[11] Alseda Ll., Kolyada S., Llibre J., Snoha L. *Entropy and Periodic Points for Transitive Maps.* Trans. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 351 — P. 1551–1575.

[12] Р. В. Плыкин *О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов.* УМН. — 1986. — №39, В. 6(240). — С. 75–113.

[13] Plykin R. V., Klinshpont N. E. *Strange Attractors. Topologic, Geometric and Algebraic Aspects.* Regul. Chaotic Dyn. — 2010. — V. 15, № 2-3 — P. 335–347.

[14] Ильяшенко Ю. С. *Многомерные костистые аттракторы.* Функц. анализ и его прил. — 2012. — Т. 46, № 4 — С. 1–13.

[15] Efremova L. S. *Example of the Smooth Skew Product in the Plane with the One-dimensional Ramified Continuum as the Global Attractor.* ESAIM: Proceedings. — April 2012. — V. 36 — P. 15-24.

[16] Smale S. *Differentiable Dynamical Systems.* Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 73 — P. 747–817.

[17] Сатаев Е. А. *Стохастические свойства сингулярно гиперболических аттракторов.* Нелинейная динам. — 2010. — № 6:1 — С. 187–206.

[18] Viana M. *Multidimensional Nonhyperbolic Attractors.* Publications Mathematiques de L'IHES. — 1997. — V. 85 (1) — P. 63–96.

[19] Volk D. *Persistent Massive Attractors of Smooth Maps Ergodic Theory and Dynamical Systems.* Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2014. — V.34, Is.02 — P. 693-704.

[20] Jager T. H. *On the Structure of Strange Non-chaotic Attractors in Pinched Skew Products.* Ergodic Theory Dynam. Systems. — 2007. — V. 27:2 — P. 493–510.

мы[18,27–30]).

Завершая данный раздел, отметим, что динамические системы класса косых произведений возникают, например, при изучении математических моделей биологических систем[31], развитой турбулентности[32], теории сигналов[33], физики квазикристаллов[34].

Таким образом, исследование свойства топологической транзитивности косых произведений, заданных на компактах, и построение примеров топологически транзитивных аттракторов, размерность которых совпадает с размерностью фазового пространства, является актуальной.

Цель работы. Целью диссертации является обнаружение новых типов топологически транзитивных C^3-гладких косых произведений, заданных на n-мерных клетках; получение динамического критерия и достаточ-

---

[21] Бежаева З. И., Оселедец В. И. *Об одном примере «странного нехаотического аттрактора»*. Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30, № 4 — С. 1–9.

[22] Ефремова Л. С. *Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейшего косого произведения отображений интервала.* М.: Матем. сб. — 2010. — Т. 201. №6 — С. 93–130.

[23] Pikovsky A. S., Feudel U. *Characterizing Strange Nonchaotic Attractors.* Chaos 5. — 1995. — № 1. — P. 253–260.

[24] *Странные аттракторы. Ред. Синай, Я. Г., Шильников.* Л. П. М.: Мир. Серия: Новое в зарубежной науке. Математика. — 1981. — Вып. 22 — 254 с.

[25] Тураев Д. В., Шильников Л. П. *Пример дикого странного аттрактора.* Матем. сб. — 1998. — Т. 189, №2 — С. 137–160.

[26] Белых В. Н. *Хаотические и странные аттракторы двумерного отображения.* Матем. сб. — 1995. — Т. 186, №3 — С. 3–18.

[27] Bamon R., Kiwi J., Rivera-Letelier J., Urzua R. *On the Topology of Solenoidal Attractors of the Sylinder.* Annales de l'Institut Henri Poincare. Non Linear Analysis. — 2006. — V. 23, Is. 2 — P. 209–236.

[28] Ефремова Л. С., Фильченков А. С. *Топологическая транзитивность косых произведений в плоскости с отрицательным шварцианом семейства отображений в слоях.* Труды МФТИ. — 2012. — Том 4, № 4 — С. 82-93.

[29] Фильченков А. С. *Пример гладкого косого произведения на плоскости, имеющего топологически транзитивный, но не топологически эргодический аттрактор.* Труды 56-й всероссийской научной конференции МФТИ. Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе. Тезисы докладов. — Москва-Долгопрудный. — Управление и прикладная математика. — 2013. — Т. 1 — С. 26-27.

[30] Фильченков А. С. *Косое произведение на n-мерной клетке ($n \geq 2$), имеющее n-мерный топологически транзитивный аттрактор, не обладающий свойством полной топологической транзитивности.* Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль. — 2014. — С. 171-172.

[31] Gukenheimer J., Oster G., Ipaktchi A. *The Dynamics of Density Dependent Population Models* Journ. Math. Biology — 1977. — V. 4:2. — P. 8–147.

[32] Beck C. *Chaotic Cascade Model for Turbulent Velocity Distributions.* Phys. Rev. — 1994. — № 49. — P. 3641—3652.

[33] Davies M. E., Campbell K. M. *Linear Recursive Filters and Nonlinear Dynamics.* Nonlinearity. — 1996. — V. 9 — P. 487–499.

[34] Belmesova S. S., Efremova L. S. *On the Concept of Integrability for Discrete Dynamical Systems. Investigation of Wandering Points of Some Trace Map.* Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2015. — V. 112. Ch. 7.

ных условий найденных типов топологической транзитивности; построение примеров дискретных динамических систем, обладающих транзитивными аттракторами, размерность которых совпадает с размерностью фазового пространства динамической системы.

Общие методы исследования. В работе применяются методы теории дискретных динамических систем и, в частности, одномерной динамики, методы функционального анализа и топологии.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Перечислим их.

1. Получен динамический критерий топологической транзитивности (теоремы 1, 2) косых произведений, действующих на n-мерных клетках, из класса $T^3_u(I^n)$ (определение класса $T^3_u(I^n)$ см. далее).

2. Получены достаточные условия топологической транзитивности, но не полной топологической транзитивности (теорема 3) косых произведений из класса $T^3_{fb}(I^n)$ (определение класса $T^3_{fb}(I^n)$ см. далее).

3. Получены достаточные условия полной топологической транзитивности косых произведений из класса $T^3_{fb}(I^n)$ (теорема 4).

4. Доказаны теоремы существования C^3-гладких косых произведений, заданных на n-мерных клетках, каждое из которых обладает n-мерным топологически транзитивным аттрактором, представляющим собой единичную n-мерную клетку, динамические системы на которых топологически транзитивны (теорема 3.5 — случай полной топологической транзитивности, теорема 3.10 — случай неполной топологической транзитивности).

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в настоящей работе, могут применяться для исследования случайных динамических систем[35–36], интегрируемых динамических систем[34, 37, 38].

Методы данной работы могут быть использованы также для исследования других классов топологически транзитивных динамических систем и построения новых примеров топологически транзитивных многомерных

[35] Бланк М. Л. *Асимптотические свойства случайных отображений.* УМН. — 1988. — №43:4 (262) — С. 201–202.

[36] Клепцын В. А., Нальский М. Б. *Сближение орбит в случайных динамических системах на окружности.* Функциональный анализ и его приложения. — 2004. — Т. 38. Вып. 4. — С. 36-54.

[37] Веселов А. П. *Интегрируемые отображения.* УМН. — 1991. — Т. 46, №5 (281) — С. 3-43.

[38] Grigorchuk R.I., Zuk A. *The Lamplighter Group as a Group Generated by a 2-state Automaton, and its Spectrum.* Geometriae Dedicata. — 2001. — V. 87 — P. 209-244.

аттракторов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2008, 2010, 2012, 2014), на международной конференции «European Conference on Iteration Theory» (Нант, Франция, 2010), на международной конференции «Sixth International Conference on Dynamic Sytems and Applications» (Атланта, Джорджия, США, 2011), на всероссийских научных конференциях МФТИ (2008, 2009, 2011, 2012, 2013) на XX международной молодёжной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2013» (Москва, 2013), на международной конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы» (Нижний Новгород, 2013), на научном семинаре по математической физике в ИПМ им. М. В. Келдыша в 2011 гг. (научные руководители д.ф.-м.н. М. В. Масленников, д.ф.-м.н. В. А. Дородницын, д.ф.-м.н. В. В. Веденяпин, д.ф.-м.н. Ю. Н. Орлов), на научных семинарах кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа ННГУ (научные руководители д.ф.-м.н., профессор А. Д. Морозов, д.ф.-м.н., профессор Л. М. Лерман) в 2010 - 2011 гг, на научном семинаре «Нелинейная динамика: теория и приложения» (семинар им. Л. П. Шильникова) НИИ ПМК ННГУ в 2013 г, на научном семинаре «Эргодическая теория и динамические системы» (научные руководители академик Д. В. Аносов, д.ф.-м.н., профессор А. М. Стёпин) в 2013 г, на научном семинаре «Дифференциальные уравнения и динамические системы» (научные руководители д.ф.-м.н., профессор А. А. Давыдов и д.ф.-м.н., профессор А. М. Степин) в 2014 г, на научном семинаре «Нелинейный анализ и его приложения» кафедры ФАиП ВлГУ (научные руководители д.ф.-м.н., профессор А. А. Давыдов, д.ф.-м.н., профессор В. И. Данченко и д.ф.-м.н., профессор М. С. Беспалов) в 2015 г.

Публикации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [1]–[13], указанных в конце автореферата. Все результаты из совместных статей, выносимые автором на защиту, получены им самостоятельно. Личным вкладом автора в опубликованные совместно с научным руководителем Л. С. Ефремовой работы являются формулировки и доказательства теорем, построение примеров. Л. С. Ефремовой принадлежат постановка задач и общее руководство работой.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, разбитых на 8 параграфов, и списка литературы. Объем диссертации — 101 страница, библиография — 87 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приводится библиографический обзор, даются основные определения, описываются результаты работы.

Основным понятием данной работы является понятие топологической транзитивности.

Определение 0.1. Пусть X — топологическое пространство. Отображение $\varphi : X \to X$ называется *топологически транзитивным*[39], если существует такая точка $x_0 \in X$, что её траектория $O_\varphi(x) = \varphi^n(x)_{n \in N}$ плотна в X. При этом точка с плотной траекторией называется *транзитивной точкой* отображения φ.

В работе будет использован классический критерий топологической транзитивности отображения.

Предложение 0.2. *Отображение $\varphi : X \to X$ топологически транзитивно тогда и только тогда*[39]*, когда для любых двух непустых открытых подмножеств $U, V \subset X$ существует такое натуральное число $n = n(U, V)$, что $V \cap \varphi^n(U) \neq \emptyset$.*

Дадим определение косого произведения, заданного на n-мерной клетке I^n $(n \geq 2)$, где $I^n = \prod\limits_{j=1}^{n} I_j$, а $I_j = [a_j,\, b_j]$ $(1 \leq j \leq n)$ — произвольные отрезки числовой прямой.

Отображение $F : I^n \to I^n$ вида

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(f_1(x_1), f_{2,x_1}(x_2), ..., f_{n,x_1,x_2,...,x_{n-1}}(x_n)\right), \qquad (0.1)$$

где $f_{i,x_1,x_2,...,x_{i-1}}(x_i) = f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i)$ $(2 \leq i \leq n)$, будем называть косым произведением, действующим на n-мерной клетке I^n. Для любого натурального $n \geq 2$ введём следующие обозначения $\hat{I}^{n-1} = \prod\limits_{j=1}^{n-1} I_j$, $\hat{f}_{n-1} = (f_1, ..., f_{n-1,x_1,x_2,...,x_{n-2}})$, $\hat{x}_{n-1} = (x_1, ..., x_{n-1})$, $(x_1, \ldots, x_n) = (\hat{x}_{n-1}, x_n)$.

Отображение $\hat{f}_{n-1} : \hat{I}^{n-1} \to \hat{I}^{n-1}$ будем называть факторотображением косого произведения $F : I^n \to I^n$. При любом $\hat{x}_{n-1} \in \hat{I}^{n-1}$ отображение $f_{n,\hat{x}_{n-1}}(x_n) : I_n \to I_n$ называется отображением в слое над точкой $\hat{x}_{n-1}$. Для любых $\hat{x}_n \in \hat{I}^n$ и $k \geq 2$ имеем:

$$F^k(\hat{x}_{n-1}, x_n) = \left(\hat{f}^k_{n-1}(\hat{x}_{n-1}), f_{n,\hat{x}_{n-1},k}(x_n)\right), \qquad (0.2)$$

где

$$f_{n,\hat{x}_{n-1},k}(x_n) = f_{n,\hat{f}^{k-1}_{n-1}(\hat{x}_{n-1})} \circ f_{n,\hat{f}^{k-2}_{n-1}(\hat{x}_{n-1})} \circ ... \circ f_{n,\hat{x}_{n-1}}(x_n).$$

[39] Каток А., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем.* Факториал. М. — 1999. — Гл. 1, §1.4

Заметим, что при любом $2 \leq i \leq n$ отображение $\hat{f}_i$ ($\hat{f}_n = F$) также представляет собой косое произведение, заданное на i-мерной клетке $\hat{I}^i$.

Основным результатом главы I является динамический критерий топологической транзитивности (теорема 1) косых произведений из класса $T_u^3(I^n)$ (определение класса $T_u^3(I^n)$ см. далее). Этот критерий связывает свойство топологической транзитивности со свойствами равномерной аппроксимируемости фазового пространства периодическими орбитами (определение 0.3) и свойством всюду плотности в фазовом пространстве множества периодических точек (теорема 2).

Пусть P — произвольное разбиение замкнутой n-мерной ($n \geq 2$) клетки I^n координатными $(n-1)$-мерными гиперплоскостями на m замкнутых n-мерных клеток J_j, любые две из которых либо не пересекаются, либо имеют общую вершину, общее ребро или общую k-мерную грань ($2 \leq k \leq n-1$), при этом $I^n = \bigcup\limits_{j=1}^{m} J_j$.

Определение 0.3. Будем говорить, что фазовое пространство I^n отображения F *равномерно аппроксимируется периодическими орбитами*, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого разбиения P n-мерной клетки I^n с параметром $\lambda(P) < \varepsilon$, найдётся F-периодическая орбита $Orb_F(x)$, пересекающаяся с внутренней частью подклетки J_j при каждом $1 \leq j \leq m$.

В §1 главы I рассматривается взаимосвязь свойств топологической транзитивности и равномерной аппроксимируемости фазового пространства периодическими орбитами для произвольного непрерывного отображения, заданного на n-мерной клетке.

Пусть $T_u^3(I^n)$ класс C^3-гладких косых произведений вида (0.1), удовлетворяющих следующим условиям:

$(C.1)$ *при любом* $2 \leq i \leq n$ *и* $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$ *шварциан отображения* $f_{i,\hat{x}_{i-1}}(x_i)$, *определенный в силу равенства*

$$S\left(f_{i,\hat{x}_{i-1}}(x_i)\right) = \frac{\frac{\partial^3}{\partial x_i^3} f_{i,\hat{x}_{i-1}}(x_i)}{\frac{\partial}{\partial x_i} f_{i,\hat{x}_{i-1}}(x_i)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_{i,\hat{x}_{i-1}}(x_i)}{\frac{\partial}{\partial x_i} f_{i,\hat{x}_{i-1}}(x_i)}\right)^2,$$

отрицателен при всех $x_i \in I_i$ *таких, что* $\frac{\partial}{\partial x_i} f_{i,\hat{x}_{i-1}}(x_i) \neq 0$;

$(C.2)$ *при каждом* $2 \leq i \leq n$ *и* $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$ *отображение* $f_{i,\hat{x}_{i-1}}(x_i) : I_i \to I_i$, *как функция переменной* x_i, *имеет не более одной критической точки на интервале* (a_i, b_i), *причём эта точка невырожденная*[40];

[40] de Melo W., van Strien S. *One-Dimensional Dynamics.* Springer. — 1996.

$(C.3)$ $f_{i,\hat{x}_{i-1}}(\partial(I_i)) \subseteq \partial(I_i)$, *где* $\partial(I_i)$ *— граница отрезка* I_i, *при всех* $2 \leq i \leq n$, $\hat{x}_{i-1} \in I^{\hat{i-1}}$.

Пример, построенный при доказательстве теоремы 3.5 (см. главу III), показывает, что класс $T_u^3(I^n)$ непуст.

В §2 главы I рассматриваются общие свойства топологически транзитивных косых произведений из класса $T_u^3(I^n)$, доказанные в работах [1] и [13]. В частности, доказывается сюръективность отображений в слоях $f_{i,\hat{x}_{i-1}}$, $2 \leq i \leq n$, $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$, косых произведений из класса $T_u^3(I^n)$.

Определение 0.4. Непрерывное отображение $\varphi : [a,\, b] \to [a,\, b]$ называется *унимодальным (мультимодальным)*[40], если отрезок $[a,\, b]$ представим в виде объединения двух промежутков $[a,\, c_1]$ и $(c_1,\, b]$ ($(k+1)$-го промежутка $[a,\, c_1]$, $(c_1,\, c_2), \ldots, (c_k,\, b]$ $(k \geq 2)$), на каждом из которых φ является гомеоморфизмом, $\varphi(a) = \varphi(b) = a$ ($\varphi(a) = \varphi(b) = b$), $\varphi(c_i) \in \{a, b\}$ при всех $i = \overline{1, k}$.

Важную роль в теории унимодальных (мультимодальных) отображений отрезка играет понятие комбинаторной эквивалентности, выделяющее унимодальные (мультимодальные) отображения, всевозможные (соответствующие) итерации которых имеют «одинаковую схему складок».

Определение 0.5. Пусть даны два мультимодальных (унимодальных) отображения $g_1, g_2 : I_2 \to I_2$ с множествами критических точек $C(g_1)$ и $C(g_2)$ соответственно (в случае унимодальных отображений каждое из множеств $C(g_1)$ и $C(g_2)$ является одноточечным). Говорят, что эти отображения *комбинаторно эквивалентны*[40], если существует сохраняющая ориентацию биекция $h : \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} g_1^n(C(g_1)) \to \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} g_2^n(C(g_2))$ такая, что $h \circ g_1(z) = g_2 \circ h(z)$ при всех $z \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} g_1^n(C(g_1))$ и $h(C(g_1)) = C(g_2)$, здесь $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

С точностью до комбинаторной эквивалентности существует отображение специального вида, которое описывает поведение любого унимодального отображения.

Предложение 0.6. *Однопараметрическое семейство квадратичных унимодальных отображений* $g_\lambda(y) = \lambda(y - a_i)(b_i - y) : I_i \to I_i$ ($I_i = [a_i,\, b_i]$ *— отрезок числовой прямой) является полным в пространстве унимодальных отображений*[40].

Свойство полноты означает, что для любого унимодального отображения $\varphi : I_i \to I_i$, существует $\lambda \in R$ такое, что $g_\lambda(y) = \lambda(y - a_i)(b_i - y)$ комбинаторно эквивалентно $\varphi(x)$.

В §3.1 главы I формулируются утверждения, указывающие на взаимосвязь комбинаторной эквивалентности и топологической для унимодальных отображений. В §3.2 главы I доказывается, что отображения в слоях $f_{i,\hat{x}_{i-1}}$, $2 \leq i \leq n$, $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$ топологически транзитивных косых произведений из класса $T_u^3(I^n)$ являются унимодальными (см. определение 0.4) сюръекциями. Кроме того, используя понятия комбинаторной эквивалентности и предложение 0.6, получаем основной результат §3.2.

Лемма 1.27. *Пусть $F \in T_u^3(I^n)$ удовлетворяет условию $(A.1)$. Тогда при каждом $2 \leq i \leq n$, $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$ и $k \geq 1$ отображение $f_{i,\hat{x}_{i-1},k}(x_i) : I_i \to I_i$ комбинаторно эквивалентно отображению $g_\lambda^k : I_i \to I_i$ при $\lambda = \frac{4b_i}{(b_i-a_i)^2}$.*

Наряду с комбинаторной эквивалентностью рассматривают и более сильный вариант эквивалентности — топологическую эквивалентность.

Определение 0.7. Говорят, что отображения $\varphi : X \to X$ и $\psi : Y \to Y$ (X, Y — многообразия) *топологически эквивалентны*[39], если существует гомеоморфизм $h : X \to Y$ такой, что $\varphi = h^{-1} \circ \psi \circ h$.

В параграфе §3.3 главы I доказывается, что отображение $f_{i,\hat{x}_{i-1},k}(x_i) : I_i \to I_i$ не только комбинаторно, но и топологически эквивалентно отображению $g_\lambda^k : I_i \to I_i$ при $\lambda = \frac{4b_i}{(b_i-a_i)^2}$.

Далее доказывается критерий топологической транзитивности косых произведений из класса $T_u^3(I^n)$.

Теорема 1. *Для отображения $F \in T_u^3(I^n)$ $(n \geq 2)$ следующие утверждения эквивалентны:*

$(A.1)$ *F топологически транзитивно;*

$(A.2)$ *фазовое пространство I^n равномерно аппроксимируется периодическими орбитами косого произведения F.*

Теорема 1 доказана в работах [2], [12]. Отметим, что теорема 1, в частности, означает, что для хаотичности по Девани (отображение топологически транзитивно и имеет плотное множество периодических точек) косых произведений F из класса $T_u^3(I^n)$ достаточно лишь выполнения свойства топологической транзитивности.

Определение 0.8. *Правосторонним (левосторонним) неустойчивым многообразием периодической точки x^* периода k отображения $\varphi : I \to I$* (I — отрезок числовой прямой)[39] называется множество

$$W_+^u(x^*, \varphi^k) = \left\{x \in I \,\middle|\, \forall U^+(x^*) \ \ \exists l \in \mathbb{N} : x \in \varphi^{lk}(U^+(x^*))\right\}$$

$$\left(W_-^u(x^*, \varphi^k) = \left\{x \in I \,\middle|\, \forall U^-(x^*) \ \ \exists l \in \mathbb{N} : x \in \varphi^{lk}(U^-(x^*))\right\}\right),$$

где $U^+(x^*)$ — произвольная правосторонняя окрестность точки x^* ($U^-(x^*)$ — произвольная левосторонняя окрестность точки x^*).

Теорема 2. *Пусть $F \in T_u^3(I^n)$ $(n \geq 2)$ удовлетворяет дополнительному условию*

$(C.4)$ существует точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in Per(F)$ (наименьшего) периода k ($Per(F)$ — множество всех периодических точек отображения F) такая, что:

a) если $x_1^* \in IntI_1$, то $W_+^u(x_1^*, f_1^l) = I_1$, $W_-^u(x_1^*, f_1^l) = I_1$, где l — период точки x_1^* относительно f_1 (l — делитель k), $Int(\cdot)$ — внутренность множества;

b) если $x_1^* = a_1$ (или $x_1^* = b_1$), тогда $W_+^u(x_1^*, f_1^l) = I_1$ ($W_-^u(x_1^*, f_1^l) = I_1$).

Тогда каждое из условий $(A.1)$ или $(A.2)$ эквивалентно условию

$(A.3)$ множество $Per(F)$ периодических точек отображения F всюду плотно в I^n.

Теорема 2 доказана в работах [2], [12].

Сформулированные теоремы проясняют природу топологической транзитивности отображений из $T_u^3(I^n)$: топологическая транзитивность здесь равносильна возможности равномерно аппроксимировать фазовое пространство рассматриваемой динамической системы её периодическими орбитами с любой наперёд заданной степенью точности.

Сформулируем определение полной топологической транзитивности и выделим класс косых произведений, отличный от $T_u^3(I^n)$.

Определение 0.9. Говорят, что отображение $F : I \to I$ обладает свойством *полной топологической транзитивности*, если для любого натурального k отображение F^k топологически транзитивно.

Обозначим через $T_{fb}^3(I^n)$ пространство C^3-гладких отображений (0.1), удовлетворяющих условиям $(C.1)$, $(C.2)$ и

$(C.3')$ $a_i < f_{i,\hat{x}_{i-1}}(a_i) \le b_i$ и $f_{i,\hat{x}_{i-1}}(b_i) = a_i$ при всех $2 \le i \le n$, $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$.

Пример, построенный при доказательстве теоремы 3.10 (см. главу III), показывает, что класс $T_{fb}^3(I^n)$ непуст.

Основными результатами второй главы являются достаточные условия неполной топологической транзитивности (теорема 3) и достаточные условия полной топологической транзитивности (теорема 4) косых произведений из класса $T_{fb}^3(I^n)$.

В §1 главы II содержатся утверждения, необходимые для доказательства теоремы 3. В частности, показывается (лемма 2.3), что отображение $f_{n,\hat{x}_{n-1}}(x_n)$, косого произведения из класса $T_{fb}^3(I^n)$, удовлетворяющего условиям $(Y.1)$–$(Y.4)$ (см. далее) с топологически транзитивным и обладающим плотным множеством периодических точек факторотображением $\hat{f}_{n-1}$, имеет неподвижную точку с одной и той же координатой x_n при всех $\hat{x}_{n-1} \in \hat{I}^{n-1}$. Обозначим через $p_i(\hat{x}_{i-1})$ единственную неподвижную точку отображения $f_{i,\hat{x}_{i-1}}(x_i)$, $2 \le i \le n$, $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}_{i-1}$ косого произведения

$F \in T^3_{fb}(I^n)$.

Следующее утверждение является центральным в §2 главы II и доказывается в работах [9], [12], [13].

Теорема 3. *Пусть косое произведение* $F \in T^3_{fb}(I^n)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(Y.1) *при всех* $2 \le i \le n$ *и* $\hat{x}_{i-1} \in Per(\hat{f}_{i-1})$ *справедливы следующие равенства*

$$p_i(\hat{x}_{i-1}) = p_i(\hat{f}_{i-1}(\hat{x}_{i-1})) = p_i(\hat{f}^2_{i-1}(\hat{x}_{i-1})) = \ldots = p_i(\hat{f}^{l-1}_{i-1}(\hat{x}_{i-1}))$$

где l *— (наименьший) период точки* $\hat{x}_{i-1}$*;*

(Y.2) *при любых* $2 \le i \le n$ *и* $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$ *точка* $p_i(\hat{x}_{i-1})$ *— отталкивающая неподвижная точка отображения* $f_{i,\hat{x}_{i-1}}$*;*

(Y.3) *отображение* f_1 *обладает свойством полной топологической транзитивности;*

(Y.4) *при любых* $2 \le i \le n$ *и* $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$ *отображение* $f_{i,\hat{x}_{i-1}}$ *сюръективно и* $f_{i,\hat{x}_{i-1}}(a_i) = p_i(\hat{x}_{i-1})$.

Тогда косое произведение F *является топологически транзитивным отображением, не обладающим свойством полной топологической транзитивности, и имеет плотное в* I^n *множество периодических точек.*

В отличие от косых произведений из класса $T^3_u(I^n)$, где неполная топологическая транзитивность может реализоваться лишь в случае неполной топологической транзитивности отображения f_1, в классе $T^3_{fb}(I^n)$ неполная топологическая транзитивность реализуется в силу свойств отображений в слоях $f_{i,\hat{x}_{i-1}}(x_i)$.

В §3 главы II найден ещё один тип топологической транзитивности отображений из класса $T^3_{fb}(I^n)$. В отличие от рассмотрений предыдущего раздела, в данном параграфе будем предполагать, что косые произведения $F \in T^3_{fb}(I^n)$ имеют сюръективные отображения в слоях $f_{i,\hat{x}_{i-1}}$ такие, что их значения в левых граничных точках отрезка I_i совпадают не с неподвижной точкой, а с некоторой отталкивающей периодической точкой $z_{i,1}$ нечётного периода $s_i > 1$ отображения $f_{i,\hat{x}_{i-1}}$, независящей от выбора точки $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$. Будем обозначать через $\{z_{i,1}, z_{i,2}, \ldots, z_{i,s_i}\}$ орбиту точки $z_{i,1}$. Сформулируем основное утверждение данного параграфа (доказано в работе [12]).

Теорема 4. *Пусть косое произведение* $F \in T^3_{fb}(I^n)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(4.1) *отображение* f_1 *топологически транзитивно;*

(4.2) *при всех* $2 \le i \le n$, $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$ *отображение* $f_{i,\hat{x}_{i-1}}$ *сюръективно, и* $f_{i,\hat{x}_{i-1}}(a_i) = z_{i,1}$.

Тогда косое произведение F топологически транзитивно и имеет плотное на I^n множество периодических точек.

Также, как и в случае отображений из класса $T^3_u(I^n)$, свойство полной топологической транзитивности косых произведений из §3 главы II может быть реализовано только в случае полной топологической транзитивности отображения f_1.

Доказательство теоремы 4 разбито на ряд шагов. На первом шаге устанавливается отсутствие притягивающих периодических точек (лемма 2.8) и блуждающих интервалов (лемма 2.9) у отображений
$f_{i-1,\hat{x}_{i-1},k}(x_i) : I_i \to I_i$ при любых $2 \le i \le n$, $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$ и $k \in \mathbb{N}$. Это свойство позволит исследовать расположение точек экстремума у отображений $\left\{f_{i,\hat{x}_{i-1},k}\right\}_{k\ge 1}$ (лемма 2.10).

На втором шаге (лемма 2.12, следствие 2.13 и лемма 2.14) показывается, что для любого интервала $\{\hat{x}_{i-1}\} \times J$, $2 \le i \le n$, $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$, $J \subset I_i$ существует натуральное число k^* такое, что $\hat{f}_i^{k^*}(\{\hat{x}_{i-1}\} \times J) = \left\{\hat{f}_{i-1}^{k^*}(\hat{x}_{i-1})\right\} \times [z_{i,min}, z_{i,max}]$, где $z_{i,min} = inf\{z_{i,1},\ z_{i,2},\ \ldots,\ z_{i,s_i}\}$, $z_{i,max} = sup\{z_{i,1},\ z_{i,2},\ \ldots,\ z_{i,s_i}\}$. В лемме 2.15 показывается, что при любых $2 \le i \le n$ и $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$ существует $k^{**} \in \mathbb{N}$ такое, что $f_{i,\hat{x}_{i-1},k^{**}}\left((z_{i,min}, z_{i,max})\right) = I_i$.

Указанные свойства позволяют доказать, что что при любых $2 \le i \le n$, $\hat{x}_{i-1} \in \hat{I}^{i-1}$ и $J \subset I_i$ существует $k^{***} \in \mathbb{N}$ такое, что $\hat{f}_i^{k^{***}}(\{\hat{x}_{i-1}\} \times J) = \left\{\hat{f}_{i-1}^{k^{***}}(\hat{x}_{i-1})\right\} \times I_i$. Последнее свойство существенно используется при доказательстве топологической транзитивности косых произведений рассматриваемого вида.

Отметим, что в отличие от рассмотренных ранее случаев, в §3 главы II рассматривается принципиально «n-мерная» топологическая транзитивность. Последнее означает, что отображения в слоях, топологически транзитивных косых произведений из теоремы 4, могут не быть топологически транзитивными отображениями, несмотря на то, что само косое произведение топологически транзитивно.

В главе III с использованием теорем 1 и 3 доказываются теоремы существования C^3-гладких косых произведений, заданных на n-мерных клетках, каждое из которых обладает n-мерным топологически транзитивным аттрактором, представляющим собой единичную n-мерную клетку (теоремы 3.5 и 3.10).

Теорема 3.5. *Существует косое произведение*

$$F_{1,n} : [0,1] \times [-0,25,\ 1,05]^{n-1} \to [0,1] \times [-0,25,\ 1,05]^{n-1},$$

$F_{1,n}\big|_{[0,1]^n} \in T^3_u(I^n)$, *обладающее транзитивным аттрактором* $A_{1,n} = [0,1]^n$.

Теорема 3.10. *Существует косое произведение*

$$F_{2,n} : [0,\,1] \times [-0,5,\,1,2]^{n-1} \to [0,\,1] \times [-0,5,\,1,2]^{n-1},$$

$F_{2,n}\big|_{[0,1]^n} \in T^3_{fb}(I^n)$ *с транзитивным, но не обладающий свойством полной топологической транзитивности аттрактором* $A_{2,n} = [0,1]^n$.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю к. ф.-м. н. Л. С. Ефремовой за постановку задач, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] **Ефремова Л. С., Фильченков А. С.** О простейших топологически транзитивных косых произведениях в плоскости. Современная математика и её приложения. — 2012. — Т.85 — С. 64-72. Английский перевод статьи: Efremova L. S., Filchenkov A. S. On the Simplest Topologically Transitive Skew Products in the Plane. Journal of Mathematical Sciences (N. Y.). — 2014. — V. 200. N. 1. — P.71-81.

[2] **Ефремова Л. С., Фильченков А. С.** Топологическая транзитивность косых произведений в плоскости с отрицательным шварцианом семейства отображений в слоях. Труды МФТИ. — 2012. — Том 4, № 4 — С. 82-93.

[3] **Фильченков А. С.** Пример топологически транзитивного, но не топологически эргодического гладкого косого произведения в плоскости. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. — 2012. — №4 (1). — С. 193-201.

[4] **Ефремова Л. С., Фильченков А. С.** Об одном примере топологически транзитивного косого произведения в плоскости. Проблемы фундаментальной и прикладной математики. — М.: МФТИ. — 2009. — С. 61-68.

[5] **Efremova L. S., Filchenkov A. S.** The Uniform Approximability of the Phase Space by Periodic Orbits and the Topological Transitivity of Skew Products in the Plane. Europ. Conf. on Iter. Theor. Abstracts. — Nant, France. — 2010. — P. 22.

[6] **Efremova L. S., Filchenkov A. S.** Boundary Conditions for Fiber Maps and Topological Transitivity of Some Smooth Skew Products in the Plane. The Sixth International Conference on Dynamic Systems and Applications. Abstracts. — Atlanta, Georgia, U.S.A. — 2011. — P. 63.

[7] **Фильченков А. С.** Новый пример гладкого косого произведения, имеющего аттрактор с непустой внутренностью. Труды 54-ой всероссийской научной конференции МФТИ. Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе. Тезисы докладов. — Москва-Долгопрудный. — Управление и прикладная математика. — т. 1. — 2011. — С. 42.

[8] **Фильченков А. С.** Пример топологически транзитивного, но не топологически эргодического гладкого косого произведения в плоскости. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Суздаль. — 2012.

[9] **Filchenkov A. S.** Boundary Conditions for Fiber Maps and Topological Transitivity of skew Products of Interval Maps. International Conference «Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors», dedicated to the memory of L. P. Shil'nikov (Nizhni Novgorod, July 1-5, 2013). Book of Abstracts. — 2013. — P. 39-40.

[10] **Фильченков А. С.** Пример гладкого косого произведения на плоскости, имеющего топологически транзитивный, но не топологически эргодический аттрактор. Труды 56-й всероссийской научной конференции МФТИ. Тезисы докладов. — Москва-Долгопрудный. — Управление и прикладная математика. — т. 1. — 2013. — С. 26-27.

[11] **Фильченков А. С.** Косое произведение на n-мерной клетке ($n \geq 2$), имеющее n-мерный топологически транзитивный аттрактор, не обладающий свойством полной топологической транзитивности. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль. — 2014. — С. 171-172.

[12] **Фильченков А. С.** Некоторые топологически транзитивные косые произведения на клетках в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Деп. в ВИНИТИ 18.12.2014, №341-В2014. — 2014. — 63 с.

[13] **Ефремова Л. С., Фильченков А. С.** Граничные условия для отображений в слоях и топологическая транзитивность косых произведений отображений интервала. Проблемы математического анализа. — 2015. — №79. — С. 107–112.

Подписано в печать 18.04.2015
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. _____. Тираж 100 экз.
Заказ №
Издательство