На правах рукописи

Имайкин Валерий Марсович

О солитонных асимптотиках решений некоторых гиперболических уравнений с нелинейными конечномерными возмущениями

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Волгоградский государственный университет» на кафедре Фундаментальной информатики и оптимального управления Института математики и информационных технологий.

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **А.С. Братусь**, заведующий кафедрой «Прикладная математика» МИИТ
	доктор физико-математических наук, профессор **Е.В. Радкевич**, профессор кафедры дифференциальных уравнений мех.-мат. факультета МГУ
	доктор физико-математических наук **А.А. Ильин**, ведущий научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный Университет, г. Санкт-Петербург

Защита состоится 23 марта 2018 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете по адресу 600024, г. Владимир, проспект Строителей 11, ауд. 136, факс (4922) 53-25-75, 33-13-91; e-mail: oid@vlsu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета и на сайте http://diss.vlsu.ru

Автореферат разослан «   »   2017 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета Д 212.025.08

кандидат физико-математических наук С.Б. Наумова

1. Общая характеристика работы

1.1. Актуальность темы

Изучение асимптотических свойств решений уравнений в частных производных — традиционно одна из важнейших областей теории дифференциальных уравнений, имеющая многочисленные приложения в теоретической физике. В частности, системы, состоящие из гиперболического уравнения и наложенного на него конечномерного возмущения, которые изучены в настоящей диссертации, можно интерпретировать как взаимодействие поля и заряженной частицы. В недавнее время в этой области произошел существенный *математический* прогресс.

Уравнение движения заряженной частицы в электрическом поле было введено Лоренцом в 1895 году [1], хотя впервые оно было написано Максвеллом в одной из работ 1865 г. [2]. С другой стороны, формулы для поля движущегося заряда были найдены Льенаром в 1898 г. и Вихертом в 1900 г. [3]. Таким образом, возникла проблема взаимодействия заряда с создаваемым им самим полем, т.е. проблема "самодействия" заряженной частицы.

Математически это задача исследования асимптотики решений системы, состоящей из гиперболического уравнения, содержащего источник, нелинейно зависящий от конечномерной траектории (траектории движения частицы), а также из обыкновенного уравнения движения частицы, правая часть которого определяется решением возмущенного гиперболического уравнения (полем); например, в случае уравнения Максвелла эта правая часть есть сила Лоренца. Ниже для краткости будем называть такие системы системами взаимодействия поля с частицей.

Этот вопрос приобрел особенную остроту в связи с проблемой бесконечной массы и энергии точечного заряда, поставленной Абрагамом [4] в 1905 г. Для преодоления этой трудности Абрагам ввел понятие "размазанного" электрона.

Формулы Льенара-Вихерта наводят на мысль, что создаваемое ускоренно движущимся зарядом поле уносит энергию, в результате чего ускорение должно стремиться к нулю, как написано в учебниках электродинамики, см., например, [5]. Однако строго доказать это удалось впервые лишь сто лет спустя для модели Абрагама [6, 7].

С другой стороны, системы, описывающие взаимодействие поля с частицей, трансляционно инвариантны и имеют решения типа *солитонов*. Частица в солитонном решении движется равномерно прямолинейно, а поле, сосредоточенное вокруг частицы, сохраняет форму неизменной. Стремление ускорения частицы к нулю, при определенных условиях на плотность заряда, позволяет получить *солитонные* *асимптотики* решений систем и построить начала *теории рассеяния*.

Ряд результатов в этом направлении впервые получен в рамках настоящей диссертации.

1.2. Цель работы

В работе рассмотрен ряд систем, состоящих из двух частей. Первая часть представляет собой гиперболическое уравнение — волновое, Клейна-Гордона или Максвелла, — в правой части которого имеется источник, нелинейно зависящей от конечномерной траектории. Вторая часть является обыкновенным уравнением для этой траектории, правая часть которого зависит от решения гиперболического уравнения. Такие системы можно интерпретировать как системы, описывающие взаимодействие поля с заряженной частицей. Функцию взаимодействия, связывающую обе части системы, можно интерпретировать как *плотность заряда* частицы. Более подробно, в работе рассмотрены четыре системы:

1) Скалярное волновое поле, взаимодействующее с частицей.

2) Скалярное поле Клейна-Гордона, взаимодействующее с частицей.

3) Система Максвелла-Лоренца, описывающая заряженную частицу в поле Максвелла.

4) Неподвижная вращающаяся частица, взаимодействующая с полем Максвелла.

Первые три системы инвариантны относительно пространственных сдвигов и имеют решения типа солитонов. Частица в солитонном решении движется равномерно прямолинейно, поле сохраняет свою форму и перемещается вместе с частицей. Четвертая система, при условии сферической симметрии функции взаимодействия, инвариантна относительно пространственных вращений и имеет решения в виде солитонов вращения, в которых поле остается постоянным, а частица вращается с постоянной угловой скоростью.

Возникает гипотеза, что решения этих систем в долговременном пределе асимптотически приближаются к солитонным решениям. Эту гипотезу удалось обосновать при определенных предположениях о функции взаимодействия и начальных данных задачи Коши, поставленной для указанных систем.

Цели работы:

I. Для всех четырех систем вывести солитонные асимптотики решений в локальных энергетических полунормах, а также рассеяние входящей волны на солитоне в глобальных энергетических нормах для скалярных полей — волнового и Клейна-Гордона, а также для поля Максвелла, взаимодействующих с частицей, при условии *малости функции взаимодействия*, связывающей бесконечномерную (возмущенное гиперболическое уравнение) и конечномерную (обыкновенное уравнение движения частицы) части системы. Это условие можно интерпретировать как *слабое взаимодействие* поля с частицей.

II. Для системы Максвелла-Лоренца получить солитонные асимптотики решений в локальных энергетических полунормах при специальном *условии Винера* на функцию взаимодействия, без предположения ее малости.

III. Для первых трех систем вывести асимптотическую устойчивость солитонных многообразий в подходящих весовых пространствах Соболева и рассеяние входящей волны на солитоне для начальных данных, достаточно близких к солитонному многообразию, при том же условии Винера на функцию взаимодействия.

1.3. Наиболее существенные научные результаты и их новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

I. Впервые получены солитонные асимптотики в локальных энергетических полунормах и рассеяние волны на солитоне в глобальной энергетической норме для систем, состоящих из гиперболического уравнения (волнового, Клейна-Гордона и Максвелла), нелинейно возмущенного конечномерной траекторией, и обыкновенного уравнения для этой траектории, правая часть которого зависит от решения гиперболического уравнения; при условии малой (в $L^2(\mathbb{R}^3)$) функции взаимодействия. Это можно интерпретировать как асимптотику взаимодействия поля и частицы в случае малой плотности заряда частицы. В этом случае также впервые получена солитонная асимптотика в локальных энергетических полунормах и рассеяние волны на солитоне в глобальной энергетической норме для системы, описывающей неподвижную вращающуюся частицу в поле Максвелла.

II. Впервые получена орбитальная устойчивость солитонов системы Максвелла-Лоренца с релятивистской частицей, а также солитонная асимптотика решений этой системы в локальных энергетических полунормах при условии Винера на плотность заряда (без предположения малости плотности).

III. Впервые выведены асимптотическая устойчивость солитонов в глобальной энергетической норме и рассеяние волны на солитоне при условии Винера на плотность заряда частицы (без предположения малости плотности), а также условии близости начальных данных к солитонному многообразию в подходящей весовой соболевской норме.

1.4. Методы исследования

I. В случае слабого взаимодействия поля с частицей (математически это означает, что норма плотности заряда ρ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ достаточно мала) мы применяем для вывода солитонной асимптотики решения *метод интегрального неравенства.* Мы покажем, что при $t \to \infty$ скорость частицы стабилизируется и решение возмущенного гиперболического уравнения стремится к солитонному полю с центром в точке нахождения частицы — в локальной соболевской ("энергетической") полунорме с этим же центром.

Вывод солитонной асимптотики методом интегрального неравенства состоит из нескольких шагов, которые по существу одинаковы для всех рассматриваемых систем, отличаясь лишь техническими подробностями:

1. Определяем подходящий "сопутствующий" солитон, к которому докажем сходимость решения, т.е. покажем, что разность решения и этого солитона со временем стремится к нулю.

2. Выводим уравнение для разности решения и сопутствующего солитона. Записываем интегральное представление решения (интеграл Дюамеля).

3. Выводим по отдельности временно́е убывание компонентов интегрального представления.

4. Определяем специальную мажоранту и записываем для нее интегральное неравенство. Из него следует убывание локальной нормы разности решения и сопутствующего солитона.

5. Для доказательства рассеяния в глобальной энергетической норме применяем *метод Кука* теории рассеяния.

II. Для вывода солитонной асимптотики решений системы Максвелла-Лоренца с в качестве первого шага мы доказываем *орбитальную устойчивость* солитонов; этот результат имеет самостоятельную ценность.

Для доказательства орбитальной устойчивости, ввиду закона сохранения энергии, возникает идея использовать энергию (гамильтониан) в качестве функции Ляпунова. Однако гамильтониан системы является инвариантным относительно сдвигов в $\mathbb{R}^3$, поэтому не может служить функцией Ляпунова непосредственно. Поэтому сначала мы редуцируем систему при помощи канонического преобразования фазового пространства. В новых координатах солитон оказывается глобальным минимумом редуцированного гамильтониана, откуда выводится орбитальная устойчивость солитонов.

При винеровском условии (оно заключается в том, что преобразование Фурье функции взаимодействия не обращается в ноль ни в одной точке) ранее [7] было доказано стремление ускорения частицы к нулю. Комбинируя убывание ускорения и орбитальную устойчивость солитонов, мы получаем существование предельных скоростей и солитонную асимптотику решения в локальных энергетических полунормах.

III. Для вывода асимптотической устойчивости солитонных многообразий и рассеяния входящей волны на солитоне для начальных данных, достаточно близких к солитонному многообразию при том же винеровском условии применяется *метод симплектической проекции*.

1. Сначала строим симплектически ортогональную проекцию решения на солитонное многообразие. Таким образом, возникает разложение решения на компоненту, лежащую на солитонном многообразии (солитонную компоненту) и на трансверсальную компоненту, симплектически ортогональную многообразию.

2. Линеаризуем динамику по трансверсальной компоненте. Разделяем динамику на движение вдоль солитонного многообразия и движение в трансверсальных направлениях.

3. Движение вдоль многообразия определяется солитонной компонентой, которая удовлетворяет обыкновенным *модуляционным уравнениям*. Из этих уравнений следует, что для решения, лежащего вблизи солитонного многообразия, параметры симплектической проекции изменяются “сверхмедленно”.

4. Трансверсальная компонента удовлетворяет *трансверсальному уравнению*, правая часть которого включает линейный неавтономный оператор, а также член второго порядка малости относительно трансверсальной компоненты.

5. Замораживаем линеаризованную динамику в некоторой точке и доказываем убывание решений линейного уравнения с постоянным (несамосопряженным) линейным оператором. Важнейшим обстоятельством является то, что убывание имеет место только для начальных данных, симплектически ортогональных солитонному многообразию.

6. Разность неавтономного и замороженного оператора оценивается методом мажорант. В итоге получаем временнóе убывание трансверсальной компоненты.

7. Из убывания трансверсальной компоненты и модуляционных уравнений выводятся солитонные асимптотики при помощи известной техники теории рассеяния — метода Кука. Обратим внимание, что скорость сходимости оказывается разной в случае уравнения Клейна-Гордона и в случаях волнового уравнения и уравнения Максвелла, что объясняется разной степенью пространственного убывания солитонов.

1.5. Личный вклад автора. Публикации

Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации опубликованы в следующих 14 работах, 10 из которых входят в перечень реферируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций или входящих в международные базы данных и системы цитирования Scopus, Web of Scienc. Полный список публикаций приведен в конце автореферата.

В совместных работах из реферируемых изданий автору принадлежат следующие результаты:

Работа 3: центральная часть доказательства основной Теоремы 2.1 – доказательство оценки (3.5) из леммы 3.1, доказательство теоремы 2.2. полностью.

Работа 4: доказательство Теоремы 2 полностью, бóльшая часть доказательства основной Теоремы 7 – доказательство Леммы 6 и оценки (51), доказательство Теоремы 8 полностью.

Работа 5: центральная часть доказательства основной Теоремы 2.4 – доказательство Леммы 3.1, доказательство Теоремы 2.5 полностью.

Работа 6: пункт 3.1 полностью, пункт 3.2 от начала до формулы (3.15) включительно, пункт 3.3 полностью, параграф 4 полностью.

Работа 7: центральная часть доказательства Теоремы 2.3. – доказательство Леммы 3.1, доказательство Леммы 4.1, пункты 5 и 6 полностью.

Работа 8: параграф 3: доказательство Леммы 3.2, включая Приложение A, параграфы 4,5 полностью, параграф 6: доказательство Леммы 6.2, параграф 7: доказательство Леммы 7.2, параграф 11 полностью, параграф 13: часть, относящаяся к Фурье-представлению, параграф 15: доказательство Леммы 15.2, включая Приложение B, параграф 18: доказательство Предложения 18.1.

Работа 9: параграфы 3, 4, 5 полностью, пункт 6.1, параграф 7 полностью, параграф 8: доказательство Леммы 8.2, параграф 11 полностью.

Работа 10: параграфы 2, 4, 5 полностью, параграф 6: доказательство Леммы 6.2, параграф 7: часть, относящаяся к Фурье-представлению, параграфы 8, 9 полностью, параграф 10: доказательство Леммы 10.2, параграф 15, Приложения A, B, полностью.

Работа 11: параграфы 3, 4, 5, 7, полностью, параграф 8: доказательство Леммы 8.6, параграфы 9, 10, 11 полностью, параграф 12: все, кроме Леммы 12.2, параграф 13: доказательство Предложения 13.1, Приложения A, B, C полностью.

Работа 12: параграф 2: пункт 2.2 и далее, параграф 3 полностью.

Благодарности Автор выражает глубокую благодарность профессору А.И. Комечу за постоянное внимание к работе; профессорам Г. Шпону и Б.Р. Вайнбергу за плодотворное сотрудничество, профессору В.С. Буслаеву, докторам Т.В. Дудниковой и Е.А. Копыловой за обсуждение результатов.

1.6. Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и разработанные методы могут быть использованы специалистами в области дифференциальных уравнений в частных производных и математической физики, в области теории функций, а также в спектральной теории операторов.

Исследования рассматриваемых в диссертации задач проводились при поддержке проектов РФФИ 01-01-04002, 07-01-0018а, 10-01-00578-а, 13-01-0073 А, проектов Немецкого научно-исследовательского сообщества DFG 436 RUS 113/615/0-1(R), 436 RUS 113/929/0-1, совместного проекта РФФИ и DFG 08-01-91950-NNIOa, грантом Wittgenstein 2000 Award и проектами P16105-N05 и P19138-N13 Австрийского исследовательского фонда, а также Институтом Эрвина Шредингера, Вена, Австрия.

1.7. Апробация результатов

В течение последних 15 лет результаты работы неоднократно докладывались на следующих научных семинарах:

Научный семинар по актуальным проблемам математической физики математического центра Мюнхенского технического университета под руководством профессора Г. Шпона (Германия);

Объединенный семинар Мюнхенского технического университета и Мюнхенского городского университета (Германия);

Семинар математического факультета Венского университета (Австрия);

Научный семинар кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессора М.И. Вишика;

Научный семинар Кафедры Фундаментальной информатики и оптимального управления Института математики и информационных технологий Волгоградского государственного университета под руководством профессора А.Г. Лосева;

Семинар "Асимтотические методы в уравнениях математической физики" механико-математического факультета МГУ под руководством профессоров В.В. Жикова, Е.В. Радкевича, А.С. Шамаева, Т.А. Шапошниковой;

Кафедральный семинар кафедры Высшей математики и математической физики физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета под руководством профессора Т.А. Суслиной.

Семинар имени К.И. Бабенко Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН под руководством доктора физ.-мат. наук А.Л. Афендикова.

В период с 2001 по 2016 г. содержащиеся в диссертации результаты были представлены на многочисленных научных конференциях, включая международные:

Ежегодные конференции по различным вопросам математической физики Института Эрвина Шредингера, Вена, Австрия, 2001-2005.

Европейский математический конгресс, Стокгольм, Швеция, 2004.

Минисимпозиум "Солитонная асимптотика и смежные вопросы математической физики", Математический институт в Обервольфахе, Германия, 2008.

Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию академика В.А. Садовничего, МГУ, Москва, 2009.

XVI Международный конгресс математической физики, Прага, Чехия, 2009.

Международная конференция "Современные проблемы анализа и преподавания математики", посвященная 105-летию академика С.М. Никольского, МГУ, Москва, 2010.

Международный математический конгресс, Хайдерабад, Индия, 2010.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения в математической физике", посвященная 65-летию А.И. Комеча, ИППИ РАН, Москва, 2011.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная академику И.Г. Петровскому, МГУ, Москва, 2011.

Международный симпозиум "Анализ, теория операторов и математическая физика" Икстапа, Мексика, 2012, 2014.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения и приложения", посвященная 90-летию М.И. Вишика, Москва, 2012.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения и динамические системы", Суздаль, 2014, 2016.

Тезисы всех докладов опубликованы в сборниках тезисов соответствующих конференций.

1.8. Структура и объем работы

Диссертация состоит из Введения, основной части (Главы 2-8) и Приложения, а также списка литературы. Текст диссертации изложен на 195 страницах. Список литературы содержит 64 наименования. В работе имеется 2 поясняющих иллюстрации.

2. Содержание работы

Введение содержит краткий исторический обзор исследований, основные обозначения и определения. Сформулированы основные результаты, полученные в диссертации, кратко изложены методы их доказательства. Дан обзор известных к настоящему времени результатов по теме исследования.

В **Главе 2** вводятся изучаемые системы, формулируются результаты о существовании динамики в соответствующих фазовых пространствах и выписываются солитонные решения.

Изучаемые системы. Рассматриваются следующие системы, состоящие из гиперболического уравнения, нелинейно возмущенного конечномерной траекторией, и обыкновенного уравнения для этой траектории, правая часть которого зависит от решения гиперболического уравнения. Их можно интерпретировать как системы, описывающие взаимодействие поля с заряженной частицей:

1) Волновое поле (т.е. гиперболическое уравнение — волновое), взаимодействующее с частицей.

2) Поле Клейна-Гордона (гиперболическое уравнение — Клейна-Гордона), взаимодействующее с частицей.

3) Система Максвелла-Лоренца (гиперболическое уравнение — Максвелла; правая часть обыкновенного уравнения — сила Лоренца), описывающая заряженную частицу в поле Максвелла.

4) Неподвижная вращающаяся частица в поле Максвелла.

1) Рассмотрим скалярное волновое поле $\psi(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, взаимодействующее с релятивистской заряженной частицей. Пусть $q(t) \in \mathbb{R}^3$, $p(t) \in \mathbb{R}^3$ — координаты и импульс частицы соответственно в момент t, тогда система имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}(x,t) = \pi(x,t), \ \ \dot{\pi}(x,t) = \Delta\psi(x,t) - \rho(x - q(t)), \ \ x \in \mathbb{R}^3, \ \ t \in \mathbb{R}, \\ &\dot{q}(t) = p(t)/\sqrt{1+p^2}, \ \ \dot{p}(t) = -\int \nabla\psi(x,t)\,\rho(x-q(t))dx. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Функционал энергии (гамильтониан) для волновой системы (2.1) равен:

$$\mathcal{H}(\psi,\pi,q,p)=\frac{1}{2}\int\Big(|\pi(x)|^2+|\nabla\psi(x)|^2\Big)dx+\int\psi(x)\rho(x-q)dx+\sqrt{1+p^2}.$$

2) В случае поля Клейна-Гордона система записывается аналогично:

$$\begin{aligned}&\dot\psi(x,t)=\pi(x,t),\ \ \dot\pi(x,t)=\Delta\psi(x,t)-m^2\psi(x,t)-\rho(x-q(t)),\\&\dot q(t)=p(t)/\sqrt{1+p^2(t)},\ \ \dot p(t)=-\int\nabla\psi(x,t)\,\rho(x-q(t))\,dx,\end{aligned}\tag{2.2}$$

где $m>0$. Заметим, что система для волнового уравнения (2.1) имеет вид (2.2) с $m=0$.

Для системы Клейна-Гордона (2.2) функционал энергии (гамильтониан) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_m(\psi,\pi,q,p)\ \ =\ \ &\tfrac{1}{2}\textstyle\int\Big(|\pi(x)|^2+|\nabla\psi(x)|^2+m^2|\psi(x)|^2\Big)dx+\\&\textstyle\int\psi(x)\rho(x-q)dx+\sqrt{1+p^2}.\end{aligned}$$

3) В случае поля Максвелла система имеет вид ($\wedge$ обозначает векторное произведение):

$$\dot E(x,t)=\nabla\wedge B(x,t)-\rho(x-q(t))\dot q(t),\ \ \dot B(x,t)=-\nabla\wedge E(x,t),\tag{2.3}$$

$$\dot q(t)=\frac{p(t)}{\sqrt{1+p^2(t)}},\ \ \dot p(t)=\int\left(E(x,t)+\dot q(t)\wedge B(x,t)\right)\,\rho(x-q(t))dx,\tag{2.4}$$

кроме того, налагаются условия трансверсальности

$$\nabla\cdot E(x,t)=\rho(x-q(t)),\quad \nabla\cdot B(x,t)=0.\tag{2.5}$$

Здесь $E(x,t),B(x,t)$ — соответственно электрическое и магнитное поля. Энергия для системы Максвелла-Лоренца имеет вид

$$H(E,B,q,p)=\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}\int\left(|E(x)|^2+|B(x)|^2\right)dx.$$

4) Для неподвижной вращающейся частицы в поле Максвелла система имеет вид:

$$E(-x,t)=-E(x,t),\quad B(-x,t)=B(x,t),\tag{2.6}$$

$$\dot E(x,t)=\nabla\wedge B(x,t)-(\omega(t)\wedge x)\rho(x),\quad \dot B(x,t)=-\nabla\wedge E(x,t),\tag{2.7}$$

$$\nabla \cdot E(x,t) = \rho(x), \;\; \nabla \cdot B(x,t) = 0. \tag{2.8}$$

$$I\,\dot\omega(t) = \int x \wedge [E(x,t) + (\omega(t)\wedge x)\wedge B(x,t)]\rho(x)\,dx, \tag{2.9}$$

где $I = (2/3)\int x^2\rho(x)dx$ — момент инерции частицы. Функционал энергии равен

$$H(E,B,\omega) = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{1}{2}\int \Big(|E(x)|^2 + |B(x)|^2\Big)dx.$$

Во всех системах механическую массу частицы, а также скорость распространения волны мы считаем равными 1.

Будем записывать системы (2.1), (2.2), (2.3)–(2.5), (2.6)–(2.9) в виде

$$\dot Y(t) = G(Y(t)), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

где $Y(t) := (\psi(x,t), \pi(x,t), q(t), p(t))$ для волнового уравнения и уравнения Клейна-Гордона, $Y(t) := (E(x,t), B(x,t), q(t), p(t))$ для уравнения Максвелла, $Y(t) := (E(x,t), B(x,t), \omega(t))$ для уравнения Максвелла с вращающейся частицей; G — нелинейный оператор, определяемый правой частью соответствующей системы. Все производные понимаются в смысле обобщенных функций. Рассмотрим задачу Коши для (2.10) с начальным условием

$$Y(0) = Y_0. \tag{2.11}$$

Фазовые пространства и существование динамики. Введем фазовое пространство для волновой системы (2.1). Рассмотрим пространство $\dot H^1$ — пополнение вещественного пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ по норме $|\nabla\psi(x)|$, где $|\cdot|$ — норма в $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Определение 2.1. *1) $\dot{\mathcal{E}}$ — гильбертово пространство $\dot H^1 \oplus L^2 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ с конечной нормой*

$$\|\,Y\|_{\dot{\mathcal{E}}} = |\nabla\psi| + |\pi| + |q| + |p|, \quad \text{где} \quad Y = (\psi,\pi,q,p)\,.$$

2) $\dot{\mathcal{F}}$ — пространство $\dot H^1 \oplus L^2$ полей $F = (\psi,\pi)$ с конечной нормой

$$\|F\|_{\dot{\mathcal{F}}} = |\nabla\psi| + |\pi|.$$

Заметим, что $\dot H^1$ не содержится в L^2, однако $\dot{\mathcal{E}}$ является пространством состояний конечной энергии, т.е. $\mathcal{H}(Y) < \infty$ при $Y \in \dot{\mathcal{E}}$.

Теперь введем фазовое пространство для системы (2.2). Пусть $H^0 = L^2$ — вещественное гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $|\cdot|$, а H^1 — пространство Соболева $H^1 = \{\psi \in L^2 : |\nabla\psi| \in L^2\}$ с нормой $\|\psi\|_{H^1} = |\nabla\psi| + |\psi|$.

Определение 2.2. *1) Фазовое пространство $\mathcal{E}$ уравнения (2.2) при $m > 0$ — это вещественное гильбертово пространство $H^1 \oplus L^2 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ состояний $Y = (\psi, \pi, q, p)$ с конечной нормой*

$$\|Y\|_{\mathcal{E}} = \|\psi\|_{H^1} + |\pi| + |q| + |p|.$$

2) $\mathcal{F}$ — пространство $H^1 \oplus L^2$ полей $F = (\psi, \pi)$ с конечной нормой

$$\|F\|_{\mathcal{F}} = \|\psi\|_{H^1} + |\pi|.$$

Введем фазовое пространство для системы (2.3)–(2.5). Положим $\mathbf{L}^2 = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Определим пространство

$$\mathcal{L} = \mathbf{L}^2 \oplus \mathbf{L}^2 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3, \ \ \|Y\|_{\mathcal{L}} = |E| + |B| + |q| + |p|, \ \text{ где } Y = (E, B, q, p).$$

Определение 2.3. *1) Фазовое пространство $\mathcal{M}$ — подпространство $\mathcal{L}$, состоящее из таких $Y = (E, B, q, p)$, что выполнены условия $\nabla \cdot E = \rho(x - q)$, $\nabla \cdot B = 0$.*

2) $\mathcal{F}$ — пространство полей $F = (E, B)$, где $(E, B, q, p) \in \mathcal{M}$; $\|F\|_{\mathcal{F}} = |E| + |B|$.

Заметим,что $\mathcal{M}$ — метрическое, но не линейное подпространство $\mathcal{L}$, метрика индуцирована вложением $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$.

Наконец, введем фазовое пространство для системы (2.6)-(2.9). Положим $\mathcal{F} = \mathbf{L}^2 \oplus \mathbf{L}^2$ и $\mathcal{L} = \mathcal{F} \oplus \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} &\|(E(x), B(x))\|_{\mathcal{F}} = |E| + |B|, \ \ \|Y\|_{\mathcal{L}} = |E| + |B| + |\omega|, \\ &Y = (E(x), B(x), \omega) \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Фазовое пространство $\mathcal{M}_s$ — метрическое пространство состояний $(E(x), B(x), \omega) \in \mathcal{L}$, удовлетворяющих условиям симметрии/антисимметрии (2.6) и связям

$$\nabla \cdot E(x) = \rho(x) \quad \nabla \cdot B(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Метрика на $\mathcal{M}_s$ индуцируется вложением $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{L}$.

Мы накладываем следующие условия регулярности и убывания на плотность распределения заряда: ρ — вещественная функция, принадлежащая пространству Соболева $H^1(\mathbb{R}^3)$, с компактным носителем, т.е.

$$\rho, \nabla\rho \in L^2(\mathbb{R}^3), \qquad \rho(x) = 0 \ \text{ при } \ |x| \geq R_\rho. \qquad (C)$$

При условии (C) каждая из систем (2.1), (2.2), (2.3)-(2.5), (2.6)-(2.9) *определяет динамику на соответствующем фазовом пространстве.*

Солитоны. Обозначим $V := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1\}$.

Системы (2.1), (2.2), (2.3) – (2.5) инвариантны относительно сдвигов и допускают *солитонные решения*

$$Y_{a,v}(t) = (\psi_v(x - vt - a), \pi_v(x - vt - a), vt + a, p_v), \ \ p_v = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

в случае волнового уравнения и уравнения Клейна-Гордона, а также

$$Y_{a,v}(t) = (E_v(x - vt - a), B_v(x - vt - a), vt + a, p_v), \ \ p_v = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

в случае уравнения Максвелла, для любых $a \in \mathbb{R}^3$, $v \in V$.

В x-представлении солитоны в случае уравнения Клейна-Гордона задаются формулами

$$\psi_v(x) = -\frac{\gamma}{4\pi} \int \frac{e^{-m|\gamma(y-x)_\| + (y-x)_\perp|}\rho(y)dy}{|\gamma(y - x)_\| + (y - x)_\perp|}, \ \ \pi_v(x) = -v \cdot \nabla\psi_v(x).$$

Здесь мы положили $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ и $x = x_\| + x_\perp$, где $x_\| \| v$ и $x_\perp \perp v$, $x \in \mathbb{R}^3$.

В случае волнового уравнения формулы для солитонов имеют вид:

$$\psi_v(x) = -\frac{\gamma}{4\pi} \int \frac{\rho(y)dy}{|\gamma(y - x)_\| + (y - x)_\perp|}, \ \ \pi_v(x) = -v \cdot \nabla\psi_v(x).$$

В случае уравнения Максвелла E_v, B_v задаются следующими формулами:

$$E_v(x) = -\nabla\psi_v(x) + v \cdot \nabla \ A_v(x), \ \ B_v(x) = \nabla \wedge A_v(x);$$

$$\psi_v(x) = \frac{\gamma}{4\pi} \int \frac{\rho(y)dy}{|\gamma(y - x)_\| + (y - x)_\perp|}, \ \ A_v(x) = v\psi_v(x).$$

В случае уравнения Максвелла с вращающейся частицей мы накладываем дополнительное условие сферической симметрии на плотность заряда $\rho(x)$:

$$\rho(x) = \rho_1(|x|).$$

При этом система (2.6)–(2.9) становится инвариантной относительно вращений в $\mathbb{R}^3$ и имеет солитоны вращения $(E_\omega(x), B_\omega(x), \omega)$, $\omega = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^3$. В Фурье-представлении солитонные поля имеют вид:

$$\widehat{E}_\omega = -i\frac{k\hat{\rho}(k)}{k^2}, \ \widehat{B}_\omega = -\frac{(k \wedge (\omega \wedge \nabla_k))\hat{\rho}(k)}{k^2}.$$

Заметим, что солитонные поля *непрерывно зависят от параметра* $v \in V$ ($\omega \in \mathbb{R}^3$ в случае вращающейся частицы).

Основная цель диссертации — получить, в той или иной форме, *солитонные асимптотики* решений систем (2.1), (2.2), (2.3)–(2.5), (2.6)-(2.9), а также построить начала *теории рассеяния.*

Глава 3 посвящена выводу солитонных асимптотик при условии *слабого взаимодействия поля с частицей.* Это означает, что функция взаимодействия $\rho(x)$ достаточно мала в норме пространства L^2:

$$\delta_\rho := \|\rho\|_{L^2} \ll 1. \tag{2.12}$$

1. Волновое уравнение. Введем пространство начальных условий, достаточно быстро убывающих на бесконечности.

Определение 2.4. $\mathcal{E}^\sigma$ *при* $0 \le \sigma \le 1$ — *пространство состояний* $(\psi(x), \pi(x), q, p) \in \mathcal{E}$, *для которых*

$$\int\limits_{\{R \le |x|\}} (|\nabla\psi(x)|^2 + |\psi(x)|^2 + |\pi(x)|^2)\, dx = \mathcal{O}(R^{-2-2\sigma}) \quad \text{при} \quad R \to \infty\,.$$

Обозначим через $U(t)$ группу свободного волнового уравнения на $\mathcal{F}$.

Теорема 2.5. *Пусть величина* δ_ρ *достаточно мала:* $\delta_\rho \le \delta_\rho(\overline{v}, R_\rho)$.

Рассмотрим решение $Y(t) = (\psi(x,t), \pi(x,t)), q(t), p(t)) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ *системы (2.1), с начальным условием* $Y(0) \in \mathcal{E}^\sigma$ *при некотором* $\sigma \in (0,1]$. *Тогда ускорение частицы стремится к нулю:*

$$|\ddot{q}(t)| \le C(1+|t|)^{-1-\sigma}. \tag{2.13}$$

и решение $Y(t)$ *имеет следующую долговременную асимптотику:*

1) *Существуют такие* $v_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \dot{q}(t) \in V$, *что*

$$\begin{aligned} |\dot{q}(t) - v_\pm| &\le C\ (1+|t|)^{-\sigma}, && (2.14)\\ \|F(q(t)+\cdot, t) - F_{v_\pm}(\cdot)\|_R &\le C_R(1+|t|)^{-\sigma}, \quad \forall R > 0. && (2.15)\end{aligned}$$

2) *Существуют такие* $F_\pm \in \mathcal{F}$, *что*

$$\|F(\cdot,t) - F_{v_\pm}(\cdot - q(t)) - U(t)F_\pm\|_{\mathcal{F}} \le C(1+|t|)^{-\sigma}. \tag{2.16}$$

Сокращенная запись асимптотик (2.14)–(2.16) понимается так: при $t > 0$ справедливы оценки с предельными значениями, помеченными индексом "+", при $t < 0$ — индексом "−". То же относится к формулировкам последующих теорем.

2. Уравнение Клейна-Гордона.

Определение 2.6. *Пусть* $0 < \sigma < 1/2$, $\alpha = (1-2\sigma)/3$. *Множество* $\mathcal{E}^\sigma$ *— пространство состояний* $(\psi, \pi, q, p) \in \mathcal{E}$, *для которых*

$$\int\limits_{R \le |x|} (R^2|\psi(x)|^2 + |\nabla\psi(x)|^2)\, dx = \mathcal{O}(R^{-(4+2\sigma)})$$

и

$$\int\limits_{R^\alpha \le |x|} (|\psi(x)|^2 + |\pi(x)|^2)\, dx = \mathcal{O}(R^{-(4+2\sigma)})$$

при $R \to +\infty$.

Обозначим через $U(t)$ группу свободного уравнения Клейна-Гордона на $\mathcal{F}$.

Теорема 2.7. *Пусть выполнено условие* (C) *и решение* $Y(t)$ *системы (2.2) имеет начальное условие* $Y(0) \in \mathcal{E}^\sigma$ *при некотором* $\sigma \in (0; 1/2)$. *Тогда при достаточно малом* γ_ρ *выполнена сходимость (2.13) и решение* $Y(t)$ *имеет следующую долговременную асимптотику:*

1) *Существуют такие* $v_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \dot{q}(t) \in V$, *что*

$$|\dot{q}(t) - v_\pm| \ \le C\ (1+|t|)^{-\sigma},$$

$$\|F(\cdot + q(t), t) - F_{v_\pm}\|_R \le C_R(1+|t|)^{-\sigma}, \quad \forall R > 0.$$

2) *Существуют такие* $F_\pm \in \mathcal{F}$, *что*

$$\|F(\cdot, t) - F_{v_\pm}(\cdot - q(t)) - U(t)F_\pm\|_{\mathcal{F}} \le C(1+|t|)^{-\sigma}.$$

3. Уравнение Максвелла.

Определение 2.8. *Для* $0 \le \sigma \le 1$ *положим* $\mathcal{M}^\sigma$ *— пространство состояний* $(E(x), B(x), q, p) \in \mathcal{E}$, *для которых при* $R \to \infty$

$$\int\limits_{\{R \le |x|\}} (|\nabla E(x)|^2 + |E(x)|^2 + |\nabla B(x)|^2 + |B(x)|^2)\, dx = \mathcal{O}(R^{-2-2\sigma})\,.$$

Обозначим через $U(t)$ группу свободного уравнения Максвелла на $\mathcal{F}$.

Теорема 2.9. *Пусть величина* δ_ρ *достаточно мала:* $\delta_\rho \le \delta(\overline{v}, R_\rho)$. *Рассмотрим решение* $Y(t) = (E(x,t), B(x,t), q(t), p(t)) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, *для которого* $Y(0) \in \mathcal{M}^\sigma$ *при некотором* $\sigma \in (0, 1]$. *Тогда выполняется сходимость (2.13) и решение* $Y(t)$ *имеет следующую долговременную асимптотику:*

1) *Существуют такие* $v_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \dot q(t) \in \mathcal{V}$, *что*

$$|\dot q(t) - v_\pm| \ \le C \ (1+|t|)^{-\sigma},$$

$$\|F(\cdot + q(t), t) - F_{v_\pm}\|_R \le C_R(1+|t|)^{-\sigma}, \quad \forall R>0.$$

2) *Существуют такие* $F_\pm \in \mathcal{F}$, *что*

$$\|F(\cdot, t) - F_{v_\pm}(\cdot - q(t)) - U(t)F_\pm\|_{\mathcal{F}} \le C(1+|t|)^{-\sigma}.$$

4. Уравнение Максвелла с вращающейся частицей

Положим $\mathcal{M}^\sigma$, $0 \le \sigma \le 1$ — пространство таких состояний $(E(x), B(x), \omega) \in \mathcal{M}$, что $\nabla E(x)$,$\nabla B(x)$ принадлежат $L^\infty_{\rm loc}$ вне шара B_R с некоторым $R = R(Y) > 0$, причем

$$|E(x)| + |B(x)| + |x|\Big(|\nabla E(x)| + |\nabla B(x)|\Big) \le C|x|^{-1-\sigma} \ \text{ при } \ |x| > R.$$

Обозначим через $F(x,t) = (E(x,t), B(x,t))$ полевые компоненты решения. Пусть $F_\omega(x) = (E_\omega(x), B_\omega(x))$ — полевые компоненты солитона с угловой скоростью ω; $U(t)$ — группа свободного уравнения Максвелла.

Теорема 2.10. *Пусть величина* δ_ρ *достаточно мала:* $\delta_\rho \le \delta(R_\rho)$ *и* $Y(0) \in \mathcal{M}^\sigma$ *с некоторым* $\sigma \in (0,1]$. *Рассмотрим решение* $Y(t) = (E(x,t), B(x,t), \omega(t)) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ *системы (2.6)–(2.9). Тогда* $Y(t)$ *имеет следующую долговременную асимптотику:*

1) *Существуют такие* $\omega_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \omega(t)$, *что*

$$|\omega(t) - \omega_\pm| \ \le C \ (1+|t|)^{-\sigma},$$

и поля сходятся в локальных энергетических полунормах:

$$\|F(x,t) - F_{\omega_\pm}(x)\|_R \le C_R(1+|t|)^{-\sigma}, \quad \forall R>0.$$

2) *Существуют такие* $F_\pm \in \mathcal{F}$, *что:*

$$\|F(x,t) - F_{\omega_\pm}(x) - U(t)F_\pm\|_{\mathcal{F}} \le C(1+|t|)^{-\sigma}.$$

Вывод солитонных асимптотик в случае слабого взаимодействия поля с частицей состоит из нескольких шагов, которые по существу одинаковы для всех типов рассматриваемых систем, см. выше “Описание методов исследования”.

Глава 4 посвящена использованию гамильтоновой структуры и *винеровского условия* для доказательства орбитальной устойчивости солитонов и солитонной асимптотики решений в случае уравнения Максвелла. Для волнового уравнения результаты получены ранее [8]. В случае уравнения Клейна-Гордона имеется принципиальная трудность, связанная с отсутствием строгого принципа Гюйгенса; в итоге вопрос остается пока открытым.

Система Максвелла-Лоренца заменой переменной приводится к гамильтонову виду и, с использованием гамильтоновой структуры, выводится орбитальная устойчивость солитонов.

Непосредственно в виде (2.3) – (2.5) система не имеет гамильтоновой формы. Однако *энергия*

$$H(E, B, q, p) = \sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\int \left(|E(x)|^2 + |B(x)|^2\right) dx$$

и *полный импульс*

$$\mathbf{P}(E, B, q, p) = p + \int E(x) \wedge B(x) dx \tag{2.17}$$

сохраняются вдоль достаточно гладких решений системы.

Опишем замену переменных, при которой система Максвелла-Лоренца преобразуется к гамильтоновой форме. При этом момент становится одной из гамильтоновых переменных, а энергия в новых переменных становится гамильтонианом. Положим

$$E_s(x,t) = E(x,t) + \nabla\varphi_\rho(x - q(t)), \text{ где } \nabla\varphi_\rho \in L^2(\mathbb{R}^3), \ \Delta\varphi_\rho(x) = -\rho(x). \tag{2.18}$$

Функция φ_ρ определена указанными условиями однозначно. Введем магнитный потенциал $A(x,t)$, удовлетворяющий кулоновской калибровке:

$$B(x,t) = \nabla \wedge A(x,t), \ \ \nabla \cdot A(x,t) = 0 \tag{2.19}$$

и момент заряда в магнитном поле:

$$P(t) := p(t) + \int \rho(x - q(t)) A(x,t) dx. \tag{2.20}$$

Предположим, что поля E и B достаточно гладкие, достаточно быстро убывают на бесконечности и для (E, B, q, p) выполняются уравнения (2.3) – (2.5). Тогда (E_s, A, q, P) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\nabla \cdot E_s(x,t) = 0, \ \ \nabla \cdot A(x,t) = 0, \tag{2.21}$$

$$\dot{E}_s(x,t) = -\Delta A(x,t) - \Pi_s[\rho(x - q(t))v(t)], \ \ \dot{A}(x,t) = -E_s(x,t), \tag{2.22}$$

$$v(t) := \dot{q}(t) = \frac{P(t) - \langle \rho(x - q(t)), A(x,t)\rangle}{[1 + (P(t) - \langle \rho(x - q(t)), A(x,t)\rangle)^2]^{1/2}}, \tag{2.23}$$

$$\dot{P}(t) = \sum_{k=1}^{3} v_k(t) \langle \nabla A_k(x,t), \rho(x - q(t))\rangle, \tag{2.24}$$

где Π_s — проектор на пространство соленоидальных (бездивергентных) полей. В представлении Фурье проектор имеет вид

$$\hat{\Pi}(k)\, a = a - \frac{a \cdot k}{k^2} k.$$

Рассмотрим функционал

$$H_s(E_s, A, q, P) = \frac{1}{2} \int \Big(|E_s|^2 + |\nabla A|^2\Big) dx + \big[1 + (P - \langle \rho(x-q), A(x) \rangle)^2\big]^{1/2}. \tag{2.25}$$

Система (2.22)–(2.24) является гамильтоновой с гамильтонианом (2.25). А именно, уравнения (2.22) – (2.24) имеют вид

$$\dot{E}_s = \frac{\delta H_s}{\delta A}, \quad \dot{A} = -\frac{\delta H_s}{\delta E_s},$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H_s}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H_s}{\partial q}.$$

Таким образом, переменные (E_s, A, q, P) являются гамильтоновыми. Полный импульс (2.17) в гамильтоновых переменных имеет вид

$$\mathcal{P}(E_s, A, q, P) = P + \int E_s(x) \wedge (\nabla \wedge A(x)) dx = P + \int E_s(x) \cdot \nabla A(x) dx,$$

где мы обозначили $E \cdot \nabla A := \sum_{k=1}^{3} E_k \cdot \nabla A_k$. Легко проверить, что

$$\mathcal{P}(E_s, A, q, P) = \mathbf{P}(E, B, q, p),$$

$$H_s(E_s, A, q, P) = H(E, B, q, p) - \frac{1}{2} \int |\nabla \varphi_\rho(x)|^2 dx,$$

если переменные (E_s, A, q, P) и (E, B, q, p) связаны соотношениями (2.18), (2.19), (2.20).

Введем фазовое пространство для системы (2.21)–(2.24). Положим $\mathbf{L}^2 = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $\dot{\mathbf{H}}^1$ — замыкание пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ по норме $\|A\|_1 = |\nabla A| := \|\nabla A\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)}$. Обозначим $\mathbf{L}^2_{sol}$, $\dot{\mathbf{H}}^1_{sol}$ подпространства, образованные соленоидальными векторными полями, а именно, замыкания в $\mathbf{L}^2$, $\dot{\mathbf{H}}^1$ соответственно векторных полей из C_0^∞ с нулевой дивергенцией. Определим фазовое пространство

$$\mathcal{M}_h = \mathbf{L}^2_{sol} \oplus \dot{\mathbf{H}}^1_{sol} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3, \quad \|Y\|_{\mathcal{E}} = |E| + \|A\|_1 + |q| + |P|,$$

где $Y = (E, A, q, P)$. Соответствующее пространство только для полей:

$$\mathcal{F}_h = \mathbf{L}^2_{sol} \oplus \dot{\mathbf{H}}^1_{sol}, \quad \|(E, A)\|_{\mathcal{F}} = |E| + \|A\|_1.$$

Из существования динамики для системы (2.3)–(2.5) вытекает следующее утверждение:

Предложение 2.11. *Пусть выполнено условие (C), пусть* $Y_s^0 = (E_s^0, A^0, q^0, P^0) \in \mathcal{M}_h$. *Тогда*

1) Существует и притом единственное решение $Y_s(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_h)$ *системы (2.21)–(2.24) с начальным условием* $Y_s(0) = Y_s^0$.

2) Энергия и полный момент сохраняются:

$$H_s(Y_s(t)) = H_s(Y_s^0), \;\; \mathcal{P}(Y_s(t)) = \mathcal{P}(Y_s^0), \;\; t \in \mathbb{R}.$$

3) Рассмотрим $Y(t) = (E(t), B(t), q(t), p(t))$, *где*

$$E(t) = E_s(t) - \nabla\varphi_\rho(\cdot - q(t)),\; B(t) = \nabla\wedge A(t),\; p(t) = P(t) - \langle\rho(\cdot - q(t)), A(t)\rangle$$

и $(E_s(t), A(t), q(t), P(t)) = Y_s(t)$ *— решение системы (2.21)–(2.24) с начальным условием* $Y_s(0) = Y_s^0$. *Тогда* $Y(t)$ *является, и притом единственным в* $C(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, *решением системы (2.3)–(2.5) с начальными данными*

$$E_0 = E_s^0 - \nabla\varphi_\rho(\cdot - q^0), \;\; B_0 = \nabla\wedge A^0, \;\; q_0 = q^0, \;\; p_0 = P^0 - \langle\rho(\cdot - q^0), A^0\rangle.$$

Сформулируем результат об орбитальной устойчивости солитонов.

Теорема 2.12. *Пусть выполнено условие (C), пусть* $Y(t) = (E(t), B(t), q(t), p(t)) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ *— решение системы (2.3)–(2.5) с начальным условием* $Y(0) = Y_0 = (E_0, B_0, q_0, p_0) \in \mathcal{M}$. *Зафиксируем некоторое* $v \in \mathbb{R}^3$ *с* $|v| < 1$ *и положим*

$$\delta = |E_0(\cdot) - E_v(\cdot - q_0)| + |B_0(\cdot) - B_v(\cdot - q_0)| + |p_0 - p_v|^1.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что*

$$|E(q(t) + \cdot, t) - E_v(\cdot)| + |B(q(t) + \cdot) - B_v(\cdot)| + |p(t) - p_v| \le \varepsilon, \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}$$

при $\delta \le \delta(\varepsilon)$.

Ввиду закона сохранения энергии возникает идея использовать энергию (гамильтониан) в качестве функции Ляпунова для доказательства орбитальной устойчивости. Однако гамильтониан (2.25) является инвариантным относительно сдвигов в $\mathbb{R}^3$, а значит, не может служить функцией Ляпунова непосредственно. Поэтому сначала мы редуцируем систему (2.21)–(2.24) при помощи канонического преобразования, предложенного ранее для случая системы Максвелла-Лоренца с нерелятивистской частицей [9] и для случая волнового уравнения с релятивистской частицей [8]:

$$\mathcal{T}(E_s(x), A(x), q, P) = (\mathcal{E}(x), \mathcal{A}(x), \mathcal{Q}, \mathcal{P}),$$

[1]Обратим внимание, что $p_v|_{v=0} = 0$, вообще говоря, не равно p_0

где

$$\mathcal{E}(x) = E_s(x+q), \ \ \mathcal{A}(x) = A(x+q), \ \ \mathcal{Q} = q, \ \ \mathcal{P} = P + \int E_s(x) \cdot \nabla A(x) dx.$$

Это преобразование обратимо. Положим $\mathcal{H}(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{Q}, \mathcal{P}) = H_s(\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{Q}, \mathcal{P}))$, т.е.

$$\mathcal{H}(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{Q}, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \int (|\mathcal{E}|^2 + |\nabla \mathcal{A}|^2) dx + [1 + (\mathcal{P} - \int \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{A} dx - \langle \rho, \mathcal{A} \rangle)^2]^{1/2}.$$

Лемма 2.13. *Пусть* $Y_s(x,t) = (E_s(x,t), A(x,t), q(t), P(t)) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_h)$ *— решение системы (2.21)–(2.24). Рассмотрим*

$$(\mathcal{E}(x,t), \mathcal{A}(x,t), \mathcal{Q}(t), \mathcal{P}(t)) = \mathcal{T} Y_s =$$

$$(E_s(x + q(t), t), A(x + q(t), t), q(t), P(t) + \int E_s(x,t) \cdot \nabla A(x,t) dx).$$

Тогда 1) удовлетворяются связи

$$\nabla \cdot \mathcal{E}(x,t) = 0, \ \ \nabla \cdot \mathcal{A}(x,t) = 0.$$

2) $(\mathcal{E}(x,t), \mathcal{A}(x,t), \mathcal{Q}(t), \mathcal{P}(t))$ *— принадлежащее* $C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_h)$ *решение следующей гамильтоновой системы:*

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathcal{A}}, \ \ \dot{\mathcal{A}} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathcal{E}},$$

$$\dot{\mathcal{Q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}}, \ \ \dot{\mathcal{P}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{Q}}.$$

Поскольку $\mathcal{H}$ не зависит от $\mathcal{Q}$, можно рассматривать $\mathcal{P}$ как параметр и ввести редуцированный гамильтониан

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int (|\mathcal{E}|^2 + |\nabla \mathcal{A}|^2) dx + [1 + (\mathcal{P} - \int \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{A} dx - \langle \rho, \mathcal{A} \rangle)^2]^{1/2}.$$

Тогда $\mathcal{E}$ и $\mathcal{A}$ удовлетворяют редуцированной гамильтоновой системе

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\delta \mathcal{H}_{\mathcal{P}}}{\delta \mathcal{A}}, \ \ \dot{\mathcal{A}} = -\frac{\delta \mathcal{H}_{\mathcal{P}}}{\delta \mathcal{E}}.$$

Далее мы показываем, что солитон является глобальным минимумом редуцированного гамильтониана и, используя редуцированный гамильтониана в качестве функции Ляпунова, выводим орбитальную устойчивость солитонов.

Наложим на плотность ρ дополнительное *условие Винера* (или винеровское условие):

$$\hat{\rho}(k) = \int e^{ikx}\rho(x)\,dx \neq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{R}^3. \tag{W}$$

Плотности, удовлетворяющие одновременно условиям (C) и (W) существуют [6].

При винеровском условии удается (без предположения малости ρ) доказать убывание ускорения частицы:

$$\ddot{q} \to 0 \ \text{ при } \ t \to \infty,$$

при этом винеровское условие позволяет применить для доказательства убывания Тауберову теорему Винера [7]. Отметим, что в Главе 8 при изучении линеаризованных систем вскроется также спектральный смысл винеровского условия.

Мы показываем (для случая системы Максвелла-Лоренца), что, комбинируя убывание ускорения и орбитальную устойчивость солитонов, можно получить существование предельных скоростей и солитонную асимптотику решения в локальных энергетических полунормах.

Теорема 2.14. *Пусть выполнены условия (C) и (W). Рассмотрим решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ системы (2.3)–(2.5) с начальным условием $Y^0 = (E^0, B^0, q^0, p^0) \in \mathcal{M}^\sigma$, с некоторым $\sigma > 1/2$. Тогда существуют предельные значения скоростей*

$$v_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \dot{q}(t) \tag{2.26}$$

и для любого $R > 0$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left(|E(q(t)+\cdot, t) - E_{v_\pm}(\cdot)|_R + |B(q(t)+\cdot, t) - B_{v_\pm}(\cdot)|_R \right) = 0. \tag{2.27}$$

Известен [7] следующий предварительный результат по асимптотике решений: в условиях теоремы 2.14 для любого $R > 0$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left(|E(q(t)+\cdot, t) - E_{v(t)}(\cdot)|_R + |B(q(t)+\cdot, t) - B_{v(t)}(\cdot)|_R \right) = 0,$$

т.е. доказана сходимость в локальных полунорах к *переменному сопутствующему солитону.* Очевидно, что из этой сходимости и существования предельных скоростей (2.26) следует сходимость (2.27). Поэтому остается доказать существование предельных скоростей. Достаточно провести доказательство только для случая $t \to +\infty$, поскольку наша система обратима по времени. Введем величину колебания скорости на бесконечности

$$\mathrm{osc}_{[T;+\infty)} v(t) := \sup_{t_1, t_2 \geq T} |v(t_1) - v(t_2)|.$$

Существование предельных скоростей следует из убывания колебания на бесконечности:

Предложение 2.15. *В условиях теоремы 2.14*

$$\mathrm{osc}_{[T;+\infty)} v(t) \to 0, \quad \text{при } T \to +\infty. \tag{2.28}$$

Для доказательства мы определенным образом модифицируем решение системы. Модифицированная траектория удовлетворяет новой системе уравнений, которая при больших t будет являться малым возмущением системы (2.3)–(2.5).

Далее, мы показываем, что модифицированные поля: 1) удовлетворяют некоторым неоднородным уравнениям Максвелла; 2) совпадают с солитонными полями вне некоторого светового конуса и 3) совпадают с запаздывающими полями $(E_{(r)}, B_{(r)})$ внутри некоторого меньшего светового конуса.

При достаточно большом t в шаре, где модифицированные поля не равны в точности солитонным, они все же достаточно близки к ним.

Затем получаем выражение силы Лоренца через поля — получается ее выражение через модифицированные поля плюс поправка. Выводим суммируемое убывание поправки и *приближенные законы сохранения* энергии и импульса для модифицированных решений.

Наконец, комбинируя эти соображения с орбитальной устойчивостью, приходим к убыванию колебания скоростей на бесконечности (2.28).

Главы 5-9 посвящены выводу солитонных асимптотик *методом симплектической проекции* при винеровском условии, для решений с начальными данными, достаточно близкими к солитонному многообразию в подходящей весовой соболевской норме; в случае поля Максвелла рассматривается только частица без вращения.

В **Главе 5** описаны методы работы, см. выше, и сформулированы основные результаты.

Напомним обозначение $V = \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1\}$.

Определение 2.16. *Солитонным состоянием называется* $S(\sigma) := (\psi_v(x-b), \pi_v(x-b), b, p_v)$ *для уравнений Клейна-Гордона и волнового, а также* $S(\sigma) := (E_v(x-b), A_v(x-b), b, P_v)$ *для уравнения Максвелла, где* $\sigma := (b, v)$ *с* $b \in \mathbb{R}^3$ *и* $v \in V$.

Солитонное решение имеет вид $S(\sigma(t))$, где

$$\sigma(t) = (b(t), v(t)) = (vt + a, v). \tag{2.29}$$

Определение 2.17. *Солитонное многообразие — это множество* $\mathcal{S} := \{S(\sigma) : \sigma \in \Sigma := \mathbb{R}^3 \times V\}$.

Для формулировки основных результатов введем соболевские пространства с весом.

1. Уравнение Клейна-Гордона.

Положим H^s_α, $s = 0, 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ — пространство Соболева с весовой нормой $\|\psi\|_{s,\alpha} := \|(1 + |x|)^\alpha \psi\|_{H^s}$.

Определение 2.18. *1)* $\mathcal{E}_\alpha$ *— пространство* $H^1_\alpha \oplus H^0_\alpha \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ *с нормой*

$$\|Y\|_\alpha = \|Y\|_{\mathcal{E}_\alpha} = \|\psi\|_{1,\alpha} + \|\pi\|_{0,\alpha} + |q| + |p|. \tag{2.30}$$

2) $\mathcal{F}_\alpha$ *— пространство* $H^1_\alpha \oplus H^0_\alpha$ *с нормой*

$$\|F\|_\alpha = \|F\|_{\mathcal{F}_\alpha} = \|\psi\|_{1,\alpha} + \|\pi\|_{0,\alpha}.$$

Мы используем одни и те же обозначения для норм в пространстве $\mathcal{F}_\alpha$ и в пространстве $\mathcal{E}_\alpha$, определенном в (2.30). Из контекста всегда будет ясно, имеем ли мы дело только с полями, т.е. с элементами пространства $\mathcal{F}_\alpha$, или с полями и частицами, т.е. с элементами пространства $\mathcal{E}_\alpha$.

2. Волновое уравнение.

Рассмотрим пространство $\dot{H}^1_\alpha$ с нормой

$$\|\psi\|_\alpha = |(1 + |x|)^\alpha \nabla\psi|.$$

Определение 2.19. *1)* $\dot{\mathcal{E}}_\alpha$ *— пространство* $\dot{H}^1_\alpha \oplus L^2_{\alpha+1} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ *с нормой*

$$\|Y\|_\alpha = \|Y\|_{\dot{\mathcal{E}}_\alpha} = \|\psi\|_\alpha + \|\pi\|_{0,\alpha+1} + |q| + |p|.$$

2) $\dot{\mathcal{F}}_\alpha$ *— пространство* $\dot{H}^1_\alpha \oplus L^2_{\alpha+1}$ *с нормой*

$$\|F\|_\alpha = \|F\|_{\dot{\mathcal{F}}_\alpha} = \|\psi\|_\alpha + \|\pi\|_{0,\alpha+1}.$$

3. Уравнение Максвелла.

Пусть $\mathbf{L}^2_{sol,\alpha}$, $\dot{\mathbf{H}}^1_{sol,\alpha}$ — подпространства пространств $\mathbf{L}^2_{sol}$, соответственно $\dot{\mathbf{H}}^1_s$, состоящие из всех полей E, соответственно A с конечными нормами

$$\|E\|_{0,\alpha} = |(1 + |x|)^\alpha E|, \ \ \|A\|_{1,\alpha} = |(1 + |x|)^\alpha \nabla A|.$$

Поскольку $\dot{\mathbf{H}}^1_{sol} \subset L^6(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, имеем $\dot{\mathbf{H}}^1_{sol} \subset \mathbf{L}^2_{sol,\alpha}$, $\alpha < -1$. Положим

$\mathcal{M}_\alpha = \mathbf{L}^2_{sol,\alpha+1} \oplus \dot{\mathbf{H}}^1_{sol,\alpha} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$, $\|Y\|_\alpha = \|E_s\|_{0,\alpha+1} + \|A\|_{1,\alpha} + |q| + |P|$.

Введем пространство полей

$$\mathcal{F}_\alpha = \mathbf{L}^2_{sol,\alpha+1} \oplus \dot{\mathbf{H}}^1_{sol,\alpha}, \;\; \|(E_s, A)\|_\alpha = \|E_s\|_{0,\alpha+1} + \|A\|_{1,\alpha}.$$

Для всех трех систем мы требуем несколько более сильных свойств регулярности и симметрии от функции взаимодействия ρ:

$$\rho, \nabla\rho, \nabla\nabla\rho \in L^2(\mathbb{R}^3), \;\; \rho(x) = 0 \text{ при } |x| \geq R_\rho, \;\; \rho(x) = \rho_1(|x|). \quad (2.31)$$

Мы предполагаем также, что выполнено винеровское условие (W). Как будет видно ниже при изучении линеаризованной системы, это условие окажется аналогом “золотого правила Ферми” [10]-[17]: член взаимодействия $\rho(x-q)$ не должен быть ортогонален собственным функциям e^{ikx} непрерывного спектра линейной части уравнения.

Кроме того, в случае волнового уравнения и уравнения Максвелла мы накладываем дополнительные условия равенства нулю первых четырех моментов плотности ρ т.е.

$$\int x^\mu \rho(x) dx = 0, \;\; |\mu| \leq 4. \quad (2.32)$$

Эти условия обеспечивают достаточно быстрое пространственное убывание солитонов. Иначе, например, в случае волнового уравнения норма солитона окажется бесконечной: $|\psi_v| = \infty$, если не наложено никаких дополнительных условий.

В терминах преобразования Фурье условия имеют вид: $\hat{\rho}(k) \neq 0$ при $k \neq 0$, но при $k = 0$ функция $\hat{\rho}(k)$ имеет ноль пятого порядка. Физический смысл условий при $\mu = 0$ — электрическая нейтральность атома, которая обеспечивает его устойчивость. Плотности, удовлетворяющие одновременно условиям (W) и (2.32) существуют: например, если ρ_1 удовлетворяет условиям (W), то применив к ней достаточное число раз оператор Лапласа, получим функцию ρ, удовлетворяющую (2.32).

Основными результатами по асимптотической устойчивости солитонов являются следующие теоремы:

1. Для поля Клейна-Гордона с $m > 0$:

Теорема 2.20. *Пусть выполнены условия (2.31) и (W). Пусть $\beta > 3/2$, а $Y(t)$ — решение задачи Коши (2.10)–(2.11) с начальными данными $Y_0 \in \mathcal{E}_\beta$, достаточно близкими к солитонному многообразию:*

$$Y_0 = S(\sigma_0) + Z_0, \;\; d_\beta := \|Z_0\|_\beta \ll 1. \quad (2.33)$$

Тогда выполняется следующая асимптотика при $t \to \pm\infty$:

$$\dot{q}(t) = v_\pm + \mathcal{O}(|t|^{-3/2}), \qquad q(t) = v_\pm t + a_\pm + \mathcal{O}(|t|^{-1});$$

$$\begin{array}{rcl} (\psi(x,t), \pi(x,t)) & = & (\psi_{v_\pm}(x - v_\pm t - a_\pm), \pi_{v_\pm}(x - v_\pm t - a_\pm)) + \\ & & U(t)\mathbf{\Psi}_\pm + r_\pm(x,t), \end{array}$$

где $U(t)$ — свободная группа уравнения Клейна-Гордона на $\mathcal{F}$, $\mathbf{\Psi}_\pm \in \mathcal{F}$ и

$$\|r_\pm(t)\|_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(|t|^{-1/2}).$$

2. Для волнового уравнения с $m = 0$:

Теорема 2.21. *Пусть выполнены условия (2.31), (2.32) и (W). Пусть $0 < \delta < 1/2$, положим $\beta := 4 + \delta$. Рассмотрим решение $Y(t)$ задачи Коши (2.10)–(2.11) с начальным условием $Y_0 \in \dot{\mathcal{E}}_\beta$, достаточно близким к солитонному многообразию:*

$$Y_0 = S(\sigma_0) + Z_0, \quad d_\beta := \|Z_0\|_\beta \ll 1.$$

Тогда выполняется следующая асимптотика при $t \to \pm\infty$:

$$\dot{q}(t) = v_\pm + \mathcal{O}(|t|^{-1-\delta}), \qquad q(t) = v_\pm t + a_\pm + \mathcal{O}(|t|^{-2\delta}),$$

$$\begin{array}{rcl} (\psi(x,t), \pi(x,t)) & = & (\psi_{v_\pm}(x - v_\pm t - a_\pm), \pi_{v_\pm}(x - v_\pm t - a_\pm)) + \\ & & U(t)\mathbf{\Psi}_\pm + r_\pm(x,t), \end{array}$$

где $U(t)$ — свободная группа волнового уравнения на $\mathcal{F}$, $\mathbf{\Psi}_\pm \in \mathcal{F}$ и

$$\|r_\pm(t)\|_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(|t|^{-\delta}).$$

3. Для поля Максвелла:

Теорема 2.22. *Пусть выполнены условие (2.31), (2.32) и (W), пусть $\beta = 4 + \delta$, $0 < \delta < 1/2$. Предположим, что $Y_0 \in \mathcal{M}_\beta$ и что Y_0 достаточно близко к солитонному многообразию:*

$$Y_0 = S(\sigma_0) + Z_0, \quad d_\beta := \|Z_0\|_\beta \ll 1.$$

Пусть $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ — решение задачи Коши (2.10)–(2.11). Тогда выполняется следующая асимптотика при $t \to \pm\infty$:

$$\dot{q}(t) = v_\pm + \mathcal{O}(|t|^{-1-\delta}), \qquad q(t) = v_\pm t + a_\pm + \mathcal{O}(|t|^{-2\delta}),$$

$$\begin{array}{rcl} (E(x,t), A(x,t)) & = & (E_{v_\pm}(x - v_\pm t - a_\pm), A_{v_\pm}(x - v_\pm t - a_\pm)) + \\ & & U(t)\mathbf{\Psi}_\pm + r_\pm(x,t), \end{array}$$

где $U(t)$ — свободная группа волнового уравнения на $\mathcal{F}$, $\mathbf{\Psi}_\pm \in \mathcal{F}$ и

$$\|r_\pm(t)\|_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(|t|^{-\delta}).$$

Все указанные в теоремах асимптотики достаточно доказать для случая $t \to +\infty$, поскольку системы (2.1), (2.2) и (2.21)–(2.24) обратимы по времени.

В **Главе 6** строится симплектическая проекция на солитонное многообразие и осуществляется линеаризация системы на солитонном многообразии.

Отождествим касательное пространство к $\mathcal{E}$ в каждой точке с самим $\mathcal{E}$. Рассмотрим симплектическую форму Ω, заданную на $\mathcal{E}$ формулой $\Omega = \displaystyle\int d\psi(x) \wedge d\pi(x)\, dx + dq \wedge dp$, т.е.

$$\Omega(Y_1, Y_2) = \langle \psi_1, \pi_2 \rangle - \langle \psi_2, \pi_1 \rangle + q_1 p_2 - q_2 p_1,$$

где

$$Y_j = (\psi_j, \pi_j, q_j, p_j) \in \mathcal{E}, \;\; j = 1, 2,$$

а $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \displaystyle\int \psi_1(x)\psi_2(x) dx$ и т.д.

Определение 2.23. *i)* $Y_1 \nmid Y_2$ *означает, что* $Y_1 \in \mathcal{E}$, $Y_2 \in \mathcal{E}$, *и* Y_1 *симплектически ортогонален* Y_2, *т.е.* $\Omega(Y_1, Y_2) = 0$.

ii) Оператор проектирования $\boldsymbol{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *называется симплектически ортогональным, если* $Y_1 \nmid Y_2$ *для* $Y_1 \in \mathrm{Ker}\boldsymbol{P}$ *и* $Y_2 \in \mathrm{Im}\,\boldsymbol{P}$.

В случае волнового уравнения все определения сохраняются с заменой пространства $\mathcal{E}$ на $\dot{\mathcal{E}}$.

В случае уравнения Максвелла-Лоренца симплектическая форма Ω определена на $\mathcal{E}$ формулой

$$\Omega(Y_1, Y_2) = \int (E_1 \cdot A_2 - E_2 \cdot A_1) dx + q_1 \cdot P_2 - q_2 \cdot P_1$$

для $Y_k = (E_k, A_k, q_k, P_k) \in \mathcal{E}$, $k = 1, 2$, если интеграл сходится.

Рассмотрим касательное пространство $\mathcal{T}_{S(\sigma)}\mathcal{S}$ к многообразию $\mathcal{S}$ в точке $S(\sigma)$. Векторы $\tau_j := \partial_{\sigma_j} S(\sigma)$, где $\partial_{\sigma_j} := \partial_{b_j}$ и $\partial_{\sigma_{j+3}} := \partial_{v_j}$, $j = 1, 2, 3$, образуют базис в $\mathcal{T}_\sigma\mathcal{S}$. Подробнее, для $j = 1, 2, 3$

$$\begin{array}{rcl} \tau_j = \tau_j(v) & := & \partial_{b_j} S(\sigma) = (-\partial_j \psi_v(y), -\partial_j \pi_v(y), e_j, 0) \\ \tau_{j+3} = \tau_{j+3}(v) & := & \partial_{v_j} S(\sigma) = (\partial_{v_j} \psi_v(y), \partial_{v_j} \pi_v(y), 0, \partial_{v_j} p_v) \end{array}, \quad (2.34)$$

где $y := x - b$ — “подвижная система координат”, $e_1 = (1, 0, 0)$ и т.д.

Лемма 2.24. *Пусть выполнено условие (2.31),* $\alpha \in \mathbb{R}$ *и* $\overline{v} < 1$. *Тогда существует окрестность* $\mathcal{O}_\alpha(\mathcal{S})$ *многообразия* $\mathcal{S}$ *в* $\mathcal{E}_\alpha$ *и отображение* $\mathbf{\Pi} : \mathcal{O}_\alpha(\mathcal{S}) \to \mathcal{S}$, *такое что* $\mathbf{\Pi}$ *равномерно непрерывно на* $\mathcal{O}_\alpha(\mathcal{S}) \cap \mathcal{E}_\alpha(\overline{v})$ *в метрике пространства* $\mathcal{E}_\alpha$,

$$\mathbf{\Pi} Y = Y \;\; \textit{при} \;\; Y \in \mathcal{S}, \qquad \textit{и} \qquad Y - S \nmid \mathcal{T}_S\mathcal{S}, \;\; \textit{где} \;\; S = \mathbf{\Pi} Y.$$

Отметим,что для доказательства существования симплектической проекции, а также для вывода *модуляционных уравнений*, см. ниже, существенной оказывается невырожденность матрицы $\Omega(\tau_l(v), \tau_j(v))$.

Рассмотрим решение системы (2.2) и разложим его в сумму

$$Y(t) = S(\sigma(t)) + Z(t), \tag{2.35}$$

где $\sigma(t) = (b(t), v(t)) \in \Sigma$ — произвольная гладкая функция от $t \in \mathbb{R}$. Подробнее, обозначим $Y = (\psi, \pi, q, p)$ и $Z = (\Psi, \Pi, Q, P)$. Тогда (2.35) означает, что

$$\left.\begin{array}{rclrcl} \psi(x,t) & = & \psi_{v(t)}(x - b(t)) + \Psi(x - b(t), t), & q(t) & = & b(t) + Q(t) \\ \pi(x,t) & = & \pi_{v(t)}(x - b(t)) + \Pi(x - b(t), t), & p(t) & = & p_{v(t)} + P(t) \end{array}\right| \tag{2.36}$$

Подставим (2.36) в (2.2) и линеаризуем уравнения по Z. В результате получим уравнение вида

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t) + T(t) + N(t), \ \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.37}$$

Здесь оператор $A(t) = A_{v,w}$ зависит от двух параметров $v = v(t)$ и $w = \dot{b}(t)$ и равен

$$A_{v,w} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Pi \\ Q \\ P \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w \cdot \nabla & 1 & 0 & 0 \\ \Delta - m^2 & w \cdot \nabla & \nabla\rho \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_v \\ \langle \cdot, \nabla\rho \rangle & 0 & \langle \nabla\psi_v, \cdot \nabla\rho \rangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Pi \\ Q \\ P \end{pmatrix},$$

где $B_v = \nu(E - v \otimes v)$.

Член $A(t)Z(t)$ в правой части уравнения (2.37) линейный по $Z(t)$, а $N(t)$ — *член более высокого порядка* по $Z(t)$. Если проекция $S(\sigma(t))$ не является солитонным решением (которое определяется формулой (2.29)), то $T(t)$ — член *нулевого порядка*, который не исчезает при $Z(t) = 0$. Аналогичные разложения построены для волнового уравнения и уравнения Максвелла.

В конце **Главы 6** изучены свойства линеаризованного уравнения, в частности, установлена его гамильтонова форма. Рассмотрен важный для дальнейшего случай $w = v$, при этом оператор $A_{v,w} = A_{v.v}$ приобретает ряд дополнительных свойств, в частности, гамильтониан линеаризованной системы становится неотрицательно определенным.

В **Главе 7** мы раскладываем динамику на две компоненты: вдоль многообразия $\mathcal{S}$ и в трансверсальном направлении. Уравнение (2.37) получено без какого-либо предположения на $\sigma(t)$ из (2.35). Теперь мы положим

$$S(\sigma(t)) := \mathbf{\Pi} Y(t). \tag{2.38}$$

Правда, это можно сделать для тех t, для которых проекция определена. Она определена по крайней мере для достаточно малых t ввиду условия (2.33). Дальнейшие рассуждения проводятся на отрезке $0 \le t \le t_*$, где t_* — грубо говоря, верхняя грань тех t, для которых проекция определена; в итоге наших рассуждений окажется, что $t_* = +\infty$.

Такой выбор разложения позволяет значительно упростить асимптотический анализ динамических уравнений (2.37) для трансверсальной компоненты $Z(t)$. Сначала мы выводим уравнения динамики вдоль солитонного многообразия — *модуляционные уравнения* для параметров $\sigma(t)$, это система обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора $\sigma(t)$. Напомним, что $\sigma(t) = (b(t), v(t))$, где $|v(t)| \le \tilde{v} < 1$, $0 \le t < t_*$. Удобно перейти к новым параметрам (c, v) вместо $\sigma = (b, v)$, где

$$c(t) := b(t) - \int_0^t v(\tau)d\tau, \quad \dot{c}(t) = \dot{b}(t) - v(t) = w(t) - v(t), \qquad 0 \le t < t_*.$$

Лемма 2.25. *Пусть $Y(t)$ — решение задачи Коши (2.11), и выполнены условия (2.35), (2.38). Тогда $(c(t), v(t))$ удовлетворяют уравнению*

$$\begin{pmatrix} \dot{c}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{N}(\sigma(t), Z(t)), \qquad 0 \le t < t_*,$$

где

$$\mathcal{N}(\sigma, Z) = \mathcal{O}(\|Z\|^2_{-\beta})$$

при любом $\beta \in \mathbb{R}$ равномерно по $\sigma \in \Sigma(\tilde{v})$.

Далее, мы получаем следующую оценку временнóго убывания трансверсальной компоненты $Z(t)$, из которой затем выведем основную теорему 2.20:

Предложение 2.26. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.20. Тогда $t_* = \infty$ и*

$$\|Z(t)\|_{-\beta} \le \frac{C(\rho, \overline{v}, d_0)}{(1 + |t|)^{3/2}}, \qquad t \ge 0. \tag{2.39}$$

Чтобы получить убывание (2.39), мы сначала исследуем убывание решения *замороженного уравнения*. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad X(0) = X_0 \tag{2.40}$$

с $A = A_{v,v}$ при фиксированном $v \in V$. Напомним, что параметр $\beta > 3/2$ также фиксирован.

Обозначим $\mathcal{Z}_v$ — пространство векторов X, симплектически ортогональных к касательному пространству $\mathcal{T}_{S(\sigma)}\mathcal{S}$, $\sigma = (b, v)$.

Предложение 2.27. *Пусть выполнены условия (2.31) и (W), $|v| \leq \tilde{v} < 1$, и $X_0 \in \mathcal{E}$. Тогда*
1) Задача Коши (2.40) имеет единственное решение $e^{At}X_0 := X(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.
2) Для $X_0 \in \mathcal{Z}_v \cap \mathcal{E}_\beta$ решение $X(t)$ имеет следующее убывание:

$$\|e^{At}X_0\|_{-\beta} \leq \frac{C(\beta, \tilde{v})}{(1+|t|)^{3/2}} \|X_0\|_\beta, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.41}$$

Для случая волнового уравнения оценка убывания трансверсальной компоненты формулируется следующим образом:

Предложение 2.28. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.21. Тогда $t_* = \infty$ и*

$$\|Z(t)\|_{-\beta} \leq \frac{C(\rho, \overline{v}, d_\delta)}{(1+|t|)^{1+\delta}}, \qquad t \geq 0,$$

где $\beta = 4 + \delta$.

Предложение 2.27 принимает вид

Предложение 2.29. *Пусть выполнены условия (2.31), (2.32) и (W); $|v| \leq \tilde{v} < 1$ и $X_0 \in \dot{\mathcal{E}}$. Тогда*
1) Задача Коши (2.40) имеет единственное решение $e^{At}X_0 := X(t) \in C(\mathbb{R}, \dot{\mathcal{E}})$.
2) Если $X_0 = \boldsymbol{P}_{v_1} Z_0$, $Z_0 \in \dot{\mathcal{E}}_\beta$, то решение $X(t)$ убывает следующим образом:

$$\|e^{At}X_0\|_{-(2+\delta)} \leq \frac{C_\delta(\tilde{v})}{(1+|t|)^{1+\delta}} \|X_0\|_\beta, \ \ t \in \mathbb{R}, \ \ \beta = 4 + \delta.$$

В случае уравнения Максвелла эти утверждения модифицируются следующим образом:

Предложение 2.30. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.22. Тогда $t_* = \infty$, и*

$$\|Z(t)\|_{-\beta} \leq \frac{C(\rho, \tilde{v}, d_\beta)}{(1+|t|)^{1+\delta}}, \qquad t \geq 0.$$

Предложение 2.31. *Пусть выполнены условия (2.31), (2.32) и (W); $|v| \leq \tilde{v} < 1$ и $X_0 \in \mathcal{M}$. Тогда*
1) Задача Коши (2.40) имеет единственное решение $e^{At}X_0 := X(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{M})$.
2) При $X_0 \in \mathcal{Z}_{v_1} \cap \mathcal{M}_\beta$ имеет место следующее убывание:

$$\|e^{At}X_0\|_{-(2+\delta)} \leq \frac{C(\tilde{v})}{(1+|t|)^{1+\delta}} \|X_0\|_\beta, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Зафиксируем произвольное $t_1 \in [0, t_*)$ и перепишем уравнение (2.37) в "замороженном виде"

$$\dot{Z}(t) = A_1 Z(t) + (A(t) - A_1)Z(t) + \tilde{N}(t), \qquad 0 \le t < t_*,$$

где $A_1 = A_{v(t_1),v(t_1)}$. Для уничтожения "плохих членов" $[w(t) - v(t_1)] \cdot \nabla$ в операторе $A(t) - A_1$ выполним замену переменных $(y, t) \mapsto (y_1, t) = (y + d_1(t), t)$ где

$$d_1(t) := \int_{t_1}^{t} (w(s) - v(t_1))ds, \quad 0 \le t \le t_1.$$

Теперь определим

$$Z_1(t) = (\Psi(y_1 - d_1(t), t), \Pi(y_1 - d_1(t), t), Q(t), P(t)).$$

Тогда мы получим окончательную форму "замороженного уравнения" для трансверсальной динамики

$$\dot{Z}_1(t) = A_1 Z_1(t) + B_1(t) Z_1(t) + N_1(t), \ \ 0 \le t \le t_1, \tag{2.42}$$

где $N_1(t) = \tilde{N}(t)$ выражено в терминах $y = y_1 - d_1(t)$, а

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{v(t)} - B_{v(t_1)} \\ 0 & 0 & \langle \nabla(\psi_{v(t)} - \psi_{v(t_1)}), \nabla\rho \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

Выводятся подходящие оценки для "остаточных членов" $B_1(t)Z_1(t)$ и $N_1(t)$ в (2.42).

Уравнение (2.42) можно записать в интегральной форме:

$$Z_1(t) = e^{A_1 t} Z_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-s)}[B_1 Z_1(s) + N_1(s)]ds, \ \ 0 \le t \le t_1.$$

Применим симплектически ортогональную проекцию $\boldsymbol{P}_1 := \boldsymbol{P}_{v(t_1)}$ к обеим частям и получим

$$\boldsymbol{P}_1 Z_1(t) = e^{A_1 t} \boldsymbol{P}_1 Z_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-s)} \boldsymbol{P}_1 [B_1 Z_1(s) + N_1(s)]ds.$$

При $0 \le t \le t_1$ справедлива оценка:

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{P}_1 Z_1(t)\|_{-\beta} \le \tfrac{C}{(1+t)^{3/2}} \|Z(0)\|_\beta \\ &+ C \int_0^t \tfrac{1}{(1+|t-s|)^{3/2}} \left[\|Z(s)\|_{-\beta} \int_s^{t_1} \|Z(\tau)\|^2_{-\beta} d\tau + \|Z(s)\|^2_{-\beta} \right] ds\,. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Для волнового уравнения и уравнения Максвелла также получаем оценку типа (2.43) с $\beta = 4+\delta$.

Наконец, мы заменяем $\boldsymbol{P}_1 Z_1(t)$ на $Z(t)$ в левой части (2.43). Это можно сделать, снова используя условие $d_\beta \ll 1$ из (2.33), ввиду следующей важной оценки:

$$\|Z(t)\|_{-\beta} \le C\|\boldsymbol{P}_1 Z_1(t)\|_{-\beta}, \qquad 0 \le t \le t_1,$$

где C зависит только от ρ и $\overline{v}$.

Аналогичная оценка выводится для волнового уравнения и уравнения Максвелла.

Отсюда следует интегральное неравенство для мажоранты

$$m(t) := \sup_{s\in[0,t]} (1+s)^{3/2}\|Z(s)\|_{-\beta}\ .$$

$$m(t_1) \le C\|Z(0)\|_\beta + C\overline{I}[m^3(t_1) + m^2(t_1)].$$

Из этого неравенства следует, что $m(t_1)$ ограничено и, более того,

$$m(t_1) \le C_1\|Z(0)\|_\beta, \tag{2.44}$$

поскольку $m(0) = \|Z(0)\|_\beta$ достаточно мало в силу (2.33).

Из (2.44) выводится убывание (2.39), а из него, в свою очередь, основная теорема 2.20.

Для завершения доказательства остается установить убывание (2.41). Это сделано в **Главе 8**. Применим преобразование Лапласа

$$\Lambda X = \tilde{X}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} X(t)dt, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0 \tag{2.45}$$

к (2.40). В соответствии с предложением 2.27, мы ожидаем, что решение $X(t)$ ограничено в норме $\|\cdot\|_{-\beta}$. Тогда интеграл (2.45) сходится и является аналитической функцией в области $\operatorname{Re}\lambda > 0$, и

$$\|\tilde{X}(\lambda)\|_{-\beta} \le \frac{C}{\operatorname{Re}\lambda}, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Выведем уравнение для $\tilde{X}(\lambda)$, которое равносильно задаче Коши для (2.40) с начальным условием $X(0) = X_0 \in \mathcal{E}_{-\beta}$. Применяя преобразование Лапласа к (2.40), получаем уравнение

$$\lambda\tilde{X}(\lambda) = A\tilde{X}(\lambda) + X_0, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0. \tag{2.46}$$

Подчеркнем, что (2.46) равносильно задаче Коши для функций $X(t) \in C_b([0,\infty);\mathcal{E}_{-\beta})$. Поэтому решение $X(t)$ задается в виде

$$\tilde{X}(\lambda) = -(A-\lambda)^{-1}X_0, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

если резольвента $R(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}$ существует при $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Стратегия доказательства убывания (2.41) следующая. Во-первых, мы построим резольвенту $R(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и докажем, что она является непрерывным оператором на $\mathcal{E}$. Тогда $\tilde{X}(\lambda) \in \mathcal{E}_{-\beta}$ и является аналитической функцией при $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Во-вторых, мы должны обосновать, что существует (единственная) функция $X(t) \in C([0, \infty); \mathcal{E}_{-\beta})$, удовлетворяющая (2.45).

Аналитичность $\tilde{X}(\lambda)$ и аргументы типа Пэли-Винера обеспечивают существование $\mathcal{E}_{-\beta}$-значной обобщенной функции $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с носителем в $[0, \infty)$. Формально,

$$\Lambda^{-1}\tilde{X} = X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t}\tilde{X}(i\omega + 0)d\omega, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.47}$$

Однако, чтобы проверить непрерывность $X(t)$ при $t \geq 0$, нам нужна дополнительная оценка для $\tilde{X}(i\omega + 0)$ при больших $|\omega|$. Наконец, для доказательства временнóго убывания $X(t)$ нам нужна дополнительная информация о гладкости и убывании $\tilde{X}(i\omega + 0)$. Точнее, нам следует доказать, что функция $\tilde{X}(i\omega + 0)$

1) гладкая вне точек $\omega = 0$ и $\omega = \pm\mu$, где $\mu = \mu(v) > 0$,

2) имеет определенное убывание при $|\omega| \to \infty$.

3) допускает разложение Пюизо в точках $\omega = \pm\mu$.

4) аналитична при $\omega = 0$, если $X_0 \in \mathcal{Z}_v := \boldsymbol{P}_v\mathcal{E}$ и $X_0 \in \mathcal{E}_\beta$.

Тогда убывание (2.41) будет следовать из представления (2.47).

Мы подробно проверим свойства 1)-4) только для двух последних компонент $\tilde{Q}(\lambda)$ и $\tilde{P}(\lambda)$ вектора $\tilde{X}(\lambda) = (\tilde{\Psi}(\lambda), \tilde{\Pi}(\lambda), \tilde{Q}(\lambda), \tilde{P}(\lambda))$. Эти свойства обеспечивают убывание (2.39) для векторных компонент $Q(t)$ и $P(t)$ решения $X(t)$.

Однако, мы не будем проверять 1)-4) для полевых компонент $\Psi(x, \lambda)$ и $\Pi(x, \lambda)$. Мы докажем убывание (2.39) для полевых компонент непосредственно из неавтономных полевых уравнений системы (2.40), используя убывание компоненты $Q(t)$ и версию строгого принципа Гюйгенса для уравнения Клейна-Гордона. Соответственно, в случае волнового уравнения и уравнения Максвелла, мы также установим убывание полей на основании убывания векторных компонент с использованием строгого принципа Гюйгенса для волнового уравнения.

В **Приложении** проверена невырожденность матрицы $\Omega(\tau_l, \tau_j)$, выявлена структура матриц, необходимых для построения резольвент линеаризованных систем, а также получена оценка скорости убывания некоторых матричных элементов.

Публикации автора по теме диссертации

1. V. Imaikin, A. Komech, H. Spohn. Soliton-like asymptotics and scattering for coupled Maxwell-Lorenz equations, в: Bermuder A. et al (eds) "Math. and Num. aspects of waves propagation", 329-333. Philadelfia, PA: SIAM (2000).

2. V. Imaikin et al. Long-time asymptotic behavior and attractors of wave processes, Transactions of French-Russian A.M. Lyapunov Institute, MSU 2 (2001), 105-112.

3. V. Imaikin, A. Komech, H. Spohn. Soliton-like asymptotics and scattering for a particle coupled to Maxwell field, Russian Journal of Mathematical Physics, 9:4 (2002), 428-436.

4. V. Imaikin, A. Komech, P. Markovich. Scattering of solitons of the Klein-Gordon equation coupled to a classical particle, Journal of Mathematical Physics, 44:3 (2003), 1202-1217.

5. V. Imaikin, A. Komech, H. Spohn. Scattering theory for a particle coupled to a scalar field, Journal of Discrete and Continuous Dynamical Systems, 10:1/2 (2003), 387-396.

6. V. Imaikin, A. Komech, N. Mauser. Soliton-type asymptotics for the coupled Maxwell-Lorentz equations, Ann. Inst. Poincaré, Phys. Theor., 5 (2004), 1117-1135.

7. V. Imaikin, A. Komech, H. Spohn. Rotating charge coupled to the Maxwell field: scattering theory and adiabatic limit, Monatshefte für Mathematik, 142 (2004), no. 1-2, 143-156.

8. V. Imaikin, A. Komech, B. Vainberg. On scattering of solitons for the Klein-Gordon equation coupled to a particle, Comm. Math. Phys., 268 (2006), 321-367.

9. V. Imaykin, A. Komech, B. Vainberg. On scattering of solitons for wave equation coupled to a particle, CRM Proceedings and Lecture Notes, 42 (2007).

10. V. Imaykin, A. Komech, B. Vainberg. Scattering of solitons for coupled wave-particle equations, J. Math. Anal. Appl., 389:2 (2012), 713-740.

11. V. Imaykin, A. Komech, H. Spohn. Scattering asymptotics for a charged particle coupled to the Maxwell field, J. Math. Phys., 52:4 (2011), 042701-042701-33.

12. V. Imaikin, G. Burlak, A. Merzon. Long-time decay for the linearized system of a charged particle in the Klein-Gordon field, Comm. Math. Anal., 14, no.2 (2012), 13-24.

13. Имайкин В.М. Солитонные асимптотики для систем типа "поле-частица", УМН, 2013, 68:2(410), 33-90. Английский перевод: Soliton asymptotics for systems of "field-particle" type, Russ. Math. Surv., 68, no.2, 33-90.

14. Имайкин В.М. Солитонные асимптотики решений гиперболических уравнений с конечномерными нелинейными возмущениями, Труды МФТИ, 2016, 8:4, 35-70.

Литература

[1] H.A. Lorentz, Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden – E.J. Brill (1895); H.A. Lorentz, Theory of Electrons, 2nd edition 1915, reprinted by Dover, New York (1952).

[2] J.C. Maxwell, A dynamical theory of the electromagnetic field, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 155 (1865), 459-512.

[3] E. Wiechert, Arch. neerl., livre jubilaire dedie a H. A. Lorentz (1900).

[4] M. Abraham, Theorie der Elektrizitat, Band 2: Elektromagnetische Theorie der Strahlung, Teubner, Leipzig (1905).

[5] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. – М.: Наука, 1969.

[6] A. Komech, M. Kunze, H. Spohn, Long-time asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field, Comm. Partial Differential Equations, 22 (1997), 307-335.

[7] A. Komech, H. Spohn, Long time asymptotics for the coupled Maxwell-Lorentz equations, Comm. Partial Diff. Eqs., 25:3/4 (2000), 559-584.

[8] A. Komech, H. Spohn, Soliton-like asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field, Nonlin. Analysis, 33 (1998), 13-24.

[9] D. Bambusi, L. Galgani, Some rigorous results on the Pauli-Fierz model of classical electrodynamics, Ann. Inst. H. Poincré, Phys. Theor., 58 (1993), 155-171.

[10] V. Buslaev, G. Perelman, On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations, Trans. Amer. Math. Soc., 164 (1995), 75-98;

[11] V. Buslaev, C. Sulem, On asymptotic stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire, 20:3 (2003), 419-475.

[12] S. Cuccagna, Stabilization of solutions to nonlinear Schrödinger equations, Commun. Pure Appl. Math., 54:9 (2001), 1110-1145.

[13] S. Cuccagna, On asymptotic stability of ground states of NLS, Rev. Math. Phys., 15:8 (2003), 877-903.

[14] J. Miller, M. Weinstein, Asymptotic stability of solitary waves for the regularized long-wave equation, Comm. Pure Appl. Math., 49:4 (1996), 399-441.

[15] A. Soffer, M. Weinstein, Resonances, radiation damping and instability in Hamiltonian nonlinear wave equations, Invent. Math., 136:1 (1999). 9-74;

[16] A. Soffer, M. Weinstein, Selection of the ground state for nonlinear Schrödinger equations, Reviews in Mathematical Physics, 16:8 (2004), 977-1071.

[17] A. Soffer, M. Weinstein, Theory of nonlinear dispersive waves and selection of the ground state, Phys. Rev. Lett., (2005), 95:213905.