Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Удмуртский государственный университет

На правах рукописи

Лару

Ларина Яна Юрьевна

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
доцент Родина Людмила Ивановна

Ижевск — 2017

Оглавление

Список основных обозначений

$\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово простанство размерности n;

$\mathbb{R}_+ \doteq [0, +\infty)$;

$O_r(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$;

$\varrho(A, B) \doteq \inf\limits_{a \in A, b \in B} |a - b|$ — расстояние между замкнутыми множествами A и B в $\mathbb{R}^n$;

$d(A, B) \doteq \sup\limits_{a \in A} \varrho(a, B)$ — полуотклонение множества A от множества B;

$\operatorname{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$ — расстояние по Хаусдорфу между замкнутыми множествами A и B в пространстве $\mathbb{R}^n$;

$\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых *компактных* подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метиркой Хаусдорфа;

$D(t, X)$ — множество достижимости управляемой системы в момент времени t из начального множества X;

$V^o(t, x; p) \doteq \limsup\limits_{(\varepsilon, y) \to (0+0, x)} \dfrac{V(t + \varepsilon, y + \varepsilon p) - V(t, y)}{\varepsilon}$ — обобщенная производная (производная Ф. Кларка) локально липшицевой функции $V(t, x)$ в точке $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q = (1, p)$, $p \in \mathbb{R}^n$;

$V^o_{\min}(t, x) \doteq \inf\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; p)$, $V^o_{\max}(t, x) \doteq \sup\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; p)$ — нижняя и верхняя производные функции V в силу дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$;

mes — мера Лебега на числовой прямой.

Введение

В диссертационной работе изучается одна из важнейших задач математической теории управления — задача исследования инвариантности, устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости множеств относительно различных управляемых систем и дифференциальных включений. Данной тематике посвящены работы Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [14], А. Б. Куржанского и Т. Ф. Филипповой [16, 68, 69], Ж. П. Обена [63, 64], Е. А. Панасенко и Е. Л. Тонкова [39, 40], Л. И. Родиной [44]–[49], В. Н. Ушакова [6], [53]–[57], П. Хартмана [66] и многих других авторов.

В последние годы появились работы, связанные с исследованием множеств, которые немного отличаются от инвариантных или слабо инвариантных (см. работы В. Н. Ушакова и его учеников [53]–[57]), а именно — рассматривается инфинитезимальное представление свойства инвариантности и вычисляется дефект инвариантности, который оценивает степень несогласованности множества и динамики системы с точки зрения понятия инвариантности. В работах Л. И. Родиной и Е. Л. Тонкова [45]–[51] также исследуются множества, не являющиеся инвариантными в «классическом» смысле; для таких множеств вводится естественное расширение понятия инвариантности, которое названо статистической инвариантностью. Пусть $D(t,X)$ — множество достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{0.1}$$

в момент времени t из начального множества X. Множество

$$\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$$

называется *статистически инвариантным* относительно системы (0.1), если относительная частота пребывания множества достижимости $D(t,X)$ в множестве $\mathfrak{M}$ равна единице.

В моей диссертационной работе изучаются статистически инвариантные, статистически слабо инвариантные множества и статистические характеристики множества достижимости управляемой системы (0.1), а также управляемых систем с импульсным воздействием. Исследуются такие характеристики, как верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости системы заданным множеством $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}^*(X) &\doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \\ \operatorname{freq}_*(X) &\doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta}, \end{aligned} \tag{0.2}$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Если $\operatorname{freq}_*(X) = \operatorname{freq}^*(X)$, то общий предел

$$\operatorname{freq}(X) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : D(t,X)\subseteq M(t)\}}{\vartheta} \tag{0.3}$$

называется *относительной частотой поглощения множества достижимости* системы (0.1) множеством $\mathfrak{M}$.

Для непрерывной функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *верхнюю относительную частоту* попадания ее графика в множество $\mathfrak{M}$ определим равенством

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : \varphi(t)\in M(t)\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. *Нижнюю* относительную частоту $\operatorname{freq}_*(\varphi)$ определим тем же равенством, но с заменой в нем верхнего предела нижним, а если эти пределы совпадают $\operatorname{freq}^*(\varphi) = \operatorname{freq}_*(\varphi)$, то общий предел обозначим

$$\operatorname{freq}(\varphi) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : \varphi(t)\in M(t)\}}{\vartheta}$$

и назовем *относительной частотой попадания графика функции* φ в множество $\mathfrak{M}$.

Для двух непрерывных функций φ и ψ, для которых

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$$

получены условия равенства этих характеристик. Для непрерывной периодической функции получена формула вычисления относительной частоты попадания графика функции в заданное множество $\mathfrak{M}$. Для почти периодических функций определенного вида, которые зависят от конечного числа периодических функций, получены формулы для вычисления среднего значения и характеристики

$$\widetilde{\varkappa} \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Исследуются прикладные задачи, в которых вычисляются или оцениваются различные статистические характеристики. В частности, рассматривается следующая задача. Пусть задано число $\lambda_0 \in [0,1]$. Необходимо найти значение $c(\lambda_0)$ такое, чтобы верхнее решение $z(t)$ задачи Коши не превышало $c(\lambda_0)$ с относительной частотой, равной λ_0. В зависимости от постановки задачи значение $z(t)$ можно интерпретировать как размер популяции, энергию частицы, концентрацию вещества, величину производства или цену на продукцию.

Для систем с импульсным воздействием вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений и систем исследовались в работах О.В. Анашкина, Т.В. Довжик и О.В. Митько [1], Д.Д. Баинова [65], Р.И. Гладилиной и А.О. Игнатьева [5, 9], А.Д. Мышкиса [36], Н.А. Перестюка, В. И. Плотникова, А. М. Самойленко и Н.В. Скрипник [42], Н.А. Перестюка и О.С. Черниковой [70]. Отметим также, что системам с импульсным воздействием посвящены работы А.В. Арутюнова, В.И. Гурмана, В.А. Дыхты, С.Т. Завалищина, Д.Ю. Карамзина, Б.М. Миллера, Ф.Л. Перейра, И.В. Расиной, Е.Я. Рубиновича, О.Н. Самсонюк, А.Н. Сесекина и многих других.

Рассматривается управляемая система с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = g(x, w_i), \quad (t, x, u, w_i) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, \end{gathered} \tag{0.4}$$

где векторы w_i, $i = 1, 2, \ldots$, являются управляющими воздействиями, влияющими на поведение системы в моменты времени $t = \tau_i$, и принимают значения в заданном компактном множестве $W \subset \mathbb{R}^p$.

В данной диссертации получены условия положительной инвариантности заданного множества $\mathfrak{M}$ относительно управляемой системы с импульсным воздействием, условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости, выраженные в терминах функций А.М. Ляпунова и производной Ф. Кларка. Доказаны утверждения о слабой положительной инвариантности и получены условия слабой асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$. Отметим, что в этой работе рассматривается функция Ляпунова относительно заданного множества и ее определение отличается от общепринятых.

О п р е д е л е н и е 0.1 (см. [37, гл. 5, с. 349], [40]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *положительно инвариантным* относительно управляемой системы (0.4), если для любого $x_0 \in M(t_0)$ каждое решение $x(t, x_0)$ системы (0.4) с начальным условием $x(t_0, x_0) = x_0$ удовлетворяет включению $(t, x(t, x_0)) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \geqslant t_0$.

О п р е д е л е н и е 0.2 (см. [37, гл. 5, с. 444], [41]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *устойчивым по Ляпунову* относительно управляемой системы (0.4), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого решения $x(t, x_0)$ системы (0.4) из условия $x_0 \in N^{\delta}(t_0)$ следует, что $(t, x(t, x_0)) \in \mathfrak{M}^{\varepsilon}$ при всех $t \in [t_0, +\infty)$.

О п р е д е л е н и е 0.3 (см. [37, гл. 5, с. 444], [41]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *асимптотически устойчивым* относительно системы (0.4), если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое число $r > 0$, что для каждого решения $x(t, x_0)$ системы (0.4), удовлетворяющего начальному условию $x_0 \in N^r(t_0)$, имеет место равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho\big(x(t, x_0), M(t)\big) = 0$.

Отметим, что если положить множество $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t) = 0\big\}$, то получатся классические определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости.

О п р е д е л е н и е 0.4 (см. [41]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо положительно инвариантным* относительно системы (0.4), если для любой начальной точки $x_0 \in M(t_0)$ существует решение $x(t, x_0)$ системы (0.4), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, x_0) = x_0$ и включению $(t, x(t, x_0)) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \geqslant t_0$.

О п р е д е л е н и е 0.5 (см. [41]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо устойчивым по Ляпунову* относительно системы (0.4), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой начальной точки $x_0 \in N^\delta(t_0)$ найдется решение $x(t, x_0)$ системы (0.4), которое удовлетворяет включению $(t, x(t, x_0)) \in \mathfrak{M}^\varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

О п р е д е л е н и е 0.6 (см. [41]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо асимптотически устойчивым* относительно системы (0.4), если оно слабо устойчиво по Ляпунову и существует такое $r > 0$, что для любой начальной точки $x_0 \in N^r(t_0)$ найдется такое решение $x(t, x_0)$ системы (0.4), что $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho(x(t, x_0), M(t)) = 0$.

Также в работе доказаны теоремы сравнения для решений систем и уравнений с импульсным воздействием, в которых приведены условия существования инвариантных и устойчивых множеств. Получены оценки статистических характеристик решений систем и уравнений с импульсным воздействием.

Результаты работы проиллюстрированы на различных моделях математической биологии, таких как модель конкуренции двух видов и задача о динамике численности популяции вредителей при наличии биологического контроля.

* * *

Работа состоит из введения, трех глав, включающих восемь параграфов (нумерация параграфов сквозная), заключения и списка литературы.

В первой главе исследуются характеристики (0.2), (0.3) для управляемой системы (0.1). Предполагаем, что функция $f(t,x,u)$ непрерывна, управление u содержится в компактном множестве $U(t,x) \subset \mathbb{R}^m$ и функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$. Рассматривается множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\},$$

заданное функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа; предполагаем, что для каждого $t \in [0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно.

В первом параграфе исследованы статистические характеристики непрерывной функции, такие как верхняя и нижняя относительные частоты попадания графика данной функции в множество $\mathfrak{M}$. Получены условия равенства этих характеристик для двух функций φ и ψ, для которых $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$.

Обозначим через ∂M границу множества M, через $\mathrm{int} M$ — внутренность данного множества, $\varrho(x,M) \doteq \inf\limits_{y \in M} |x-y|$ — расстояние от точки x

до множества M. Рассмотрим функцию

$$R_\varphi(t) = \begin{cases} \varrho\big(\varphi(t), \partial M(t)\big), & \text{если} \quad \varphi(t) \notin M(t), \\ -\varrho\big(\varphi(t), \partial M(t)\big), & \text{если} \quad \varphi(t) \in M(t). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — сигма-алгебра всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Определим для каждого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ функции

$$\mu^*(B) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : R_\varphi(t) \in B\}}{\vartheta},$$

$$\mu_*(B) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : R_\varphi(t) \in B\}}{\vartheta}.$$

Основным утверждением первого параграфа является следующая теорема.

Теорема 0.1. (см. [32]) *Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и множество $\mathfrak{M}$ таковы, что $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$ и имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon\to0+0} \mu^*\big([-\varepsilon,\varepsilon]\big) \doteq \lim_{\varepsilon\to0+0} \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : |R_\varphi(t)| \leqslant \varepsilon\}}{\vartheta} = 0. \qquad (0.5)$$

Тогда $\operatorname{freq}_*(\varphi) = \operatorname{freq}_*(\psi) \leqslant \operatorname{freq}^*(\psi) = \operatorname{freq}^*(\varphi)$.

Следовательно, если один из пределов $\operatorname{freq}(\varphi)$ *или* $\operatorname{freq}(\psi)$ *существует, то другой предел также существует и* $\operatorname{freq}(\varphi) = \operatorname{freq}(\psi)$.

Приведены примеры вычисления статистических характеристик при помощи теоремы 0.1.

В первом параграфе также получено условие существования статистически слабо инвариантного множества.

Поставим в соответсвие управляемой системе (0.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad F(t,x) = \overline{\operatorname{co}}\, H(t,x), \qquad (0.6)$$

где $H(t,x)$ представляет собой множество всех предельных значений функции $f\big(t,x,U(t,x)\big)$ при $(t_i,x_i)\to(t,x)$, $\overline{\text{co}}\,H(t,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(t,x)$, то есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее множество $H(t,x)$.

Множество $\mathfrak{M}=\big\{(t,x)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n:\ x\in M(t)\big\}$ называется *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (0.1), если для любой точки $x\in M(0)$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t)$ включения (0.6), определенное при всех $t\geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0)=x$ и равенству $\operatorname{freq}^*(\varphi)=1$.

Теорема 0.2. (см. [32]) *Пусть для любой точки $x\in M(0)$ существует решение $\psi(t)$ включения* (0.6), *удовлетворяющее начальному условию $\psi(0)=x$ и равенству $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0$, где $\varphi(t)$ — решение данного включения, для которого*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\infty,-\varepsilon)\big)\doteq\lim_{\varepsilon\to 0+0}\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\,\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:R_\varphi(t)\leqslant-\varepsilon\}}{\vartheta}=1.$$

Тогда множество $\mathfrak{M}$ статистически слабо инвариантно относительно системы (0.1).

Во втором параграфе получены формулы для нахождения среднего значения и характеристики

$$\widetilde{\varkappa}=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:z(t)\leqslant 0\}}{\vartheta}$$

для почти периодических в смысле Бора функций $z(t)$, которые зависят от конечного числа периодических функций. Приведем основные утверждения.

Теорема 0.3. (см. [32]) *Пусть $z(t)=F\big(z_1(t),\ldots,z_k(t)\big)$, функции $z_i(t)$ — периодические с периодами T_i, $i=1,\ldots,k$, функция $F\big(z_1(x_1),\ldots,z_k(x_k)\big)$*

интегрируема по Риману на множестве $[0, T_1] \times \ldots \times [0, T_k]$. *Если числа* $T_1, \ldots, T_k$ *рационально независимы, то для среднего значения*

$$\overline{z} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau z(t) dt$$

функции $z(t)$ *выполнено равенство*

$$\overline{z} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F\big(z_1(t), \ldots, z_k(t)\big) dt =$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^{T_1} \ldots \int_0^{T_k} F\big(z_1(x_1), \ldots, z_k(x_k)\big) dx_1 \ldots dx_k}{T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_k}.$$

Следствие 0.1. (см. [32]) *Пусть* $z(t) = H\big(z_1(t), \ldots, z_k(t)\big)$, *функции* $z_i(t)$ — *периодические с периодами* T_i, $i = 1, \ldots, k$, *функция* $H\big(z_1(x_1), \ldots, z_k(x_k)\big)$ *интегрируема по Риману на множестве* $[0, T_1] \times \cdots \times [0, T_k]$. *Если числа* $T_1, \ldots, T_k$ *рационально независимы, то имеет место равенство*

$$\widetilde{\varkappa} = \frac{\operatorname{mes}\big\{x_1 \in [0, T_1], \ldots, x_k \in [0, T_k] :\ H\big(z_1(x_1), \ldots, z_k(x_k)\big) \leqslant 0\big\}}{T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_k},$$

где mes — k*-мерная мера Лебега.*

В третьем параграфе изучаются характеристики, возникающие в различных прикладных задачах естествознания. Для любого $c \in \mathbb{R}$ вводится характеристика

$$\varkappa_c \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta}.$$

Рассматривается следующая задача. Пусть задано число $\lambda_0 \in [0, 1]$ и функция $z(t)$ является размером популяции (или концентрацией веществ, или объемом производства). Необходимо найти значение $c = c\,(\lambda_0)$ такое, что величина $z(t)$ не превышает $c\,(\lambda_0)$ с относительной частотой, равной λ_0.

Пусть $z(t)$ — решение линейной задачи Коши

$$\dot{z} = a(t) z + b(t), \quad z(0) = z_0. \tag{0.7}$$

Лемма 0.1. (см. [18]) *Предположим, что функции $a(t)$, $b(t)$ почти периодические в смысле Бора, $a(t) = \alpha(t) + h$, где $h < 0$, функция $\int_0^t \alpha(s)ds$ ограниченная. Если для каждого $z \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : a(t)z + b(t) = 0\big\}}{\vartheta} = 0,$$

то имеют место следующие свойства:

1) *для каждого $c \in \mathbb{R}$ предел $\varkappa_c$ существует и выполнено равенство*

$$\varkappa_c = \widetilde{\varkappa}_c \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta};$$

2) *для любого $\lambda_0 \in [0, 1]$ найдется число $c = c(\lambda_0)$ такое, что*

$$\varkappa_c = \lambda_0.$$

Также в третьем параграфе вычисляются статистические характеристики $\varkappa_c$ и $\widetilde{\varkappa}_c$ для решения уравнения Ферхюльста:

$$\dot{z} = \big(\varepsilon(t) - \alpha(t)z\big)z,$$

где в правой части $\varepsilon(t)$ — удельная (средняя) скорость рождаемости, а $\alpha(t)z$ — удельная (средняя) смертность, которая пропорциональна размеру популяции. Предполагаем, что функции $\varepsilon(t)$ и $\alpha(t)$ положительные и почти периодические в смысле Бора.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости, слабой устойчивости и слабой асимптотической устойчивости множеств относительно управляемых систем с импульсным воздействием (0.4).

Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\},$$

заданное непрерывной в метрике Хаусдорфа функцией $t \mapsto M(t)$, где для каждого $t \in [t_0, +\infty)$ множество $M(t)$ непусто и замкнуто. Пусть $M^r(t)$ — замкнутая r-окрестность множества $M(t)$, то есть множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что $\varrho(x, M(t)) \leqslant r$, $N^r(t) = M^r(t) \backslash M(t)$ — внешняя r-окрестность границы множества $M(t)$ (здесь $\varrho(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$). Построим множества

$$\mathfrak{M}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M^r(t)\big\},$$

$$\mathfrak{N}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(t)\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 0.7 (см. [40]). Скалярная функция $V(t, x)$ переменных $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет условию Липшица по переменным (t, x) и следующим условиям:

1) $V(t, x) = 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}$;

2) $V(t, x) > 0$ для некоторого $r > 0$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$.

Функция $V(t, x)$ называется *определенно положительной* (относительно множества $\mathfrak{M}$), если для каждого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(t, x) \geqslant \delta$ для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}^r \setminus \mathfrak{M}^\varepsilon$.

Поставим в соответствие системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad F(t, x) = \overline{\operatorname{co}}\, H(t, x), \tag{0.8}$$

где для каждой фиксированной точки $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ множество $H(t, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, U(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$, $\overline{\operatorname{co}}\, H(t, x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(t, x)$.

У с л о в и е 0.1. Для любого $x_0 \in M^r(t_0)$ каждое решение $\varphi(t, x_0)$ включения (0.8), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0, x_0) = x_0$, определено при всех $t \geqslant t_0$.

В четвертом параграфе получены условия положительной инвариантности, устойчивости по Ляпунову, а также асимптотической устойчивости. Приведем основные утверждения этого параграфа.

Теорема 0.4. (см. [20]) *Пусть выполнено условие* 0.1 *и существует функция* $V(t,x)$ *— определенно положительная функция Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *такая, что неравенство* $V^o_{\max}(t,x) \leqslant 0$ *выполнено для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ *и*

$$\max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x,w)) - V(\tau_i, x) \leqslant -\psi\big(V(\tau_i, x)\big)$$

$$\text{для всех } x \in N^r(\tau_i), i = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi(s)$ *— непрерывная при* $s \geqslant 0$ *функция такая, что* $\psi(0) = 0$ *и* $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$. *Тогда множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно системы* (0.4).

Теорема 0.5. (см. [30]) *Пусть существуют функции* $V(t,x)$ *и* $q(t,z)$ *такие, что:*

1) $V(t,x)$ *— определенно положительная функция Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$;

2) *функция* $q(t,z)$ *локально липшицева по* z, $q(t,0) \equiv 0$ *и тривиальное решение уравнения* $\dot{z} = q(t,z)$ *асимптотически устойчиво (в классическом смысле)*;

3) $V^o_{\max}(t,x) \leqslant q\big(t, V(t,x)\big)$ *для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$;

4) $\max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x,w)) \leqslant V(\tau_i, x)$ *для всех* $x \in M^r(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Тогда множество $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво относительно управляемой системы* (0.4).

Теорема 0.6. (см. [30]) *Предположим, что существуют* $\alpha < 0$ *и функция Ляпунова* $V(t,x)$ *относительно множества* $\mathfrak{M}$ *такая, что неравенство* $V^o_{\max}(t,x) \leqslant \alpha < 0$ *выполнено для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ *и*

$$\max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x,w)) \leqslant V(\tau_i, x) \quad \textit{для всех } x \in M^r(\tau_i), \ i = 1, 2, \ldots .$$

Тогда для каждого решения $x(t, x_0)$ *системы* (0.4)*, удовлетворяющего начальному условию* $x_0 \in N^r(t_0)$*, существует момент времени* $t^* = t^*(x(t,x_0)) > t_0$ *такой, что точка* $(t, x(t,x_0))$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}$ *при всех* $t \in [t^*, +\infty)$.

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ *определенно положительная, то множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво относительно управляемой системы* (0.4).

В пятом параграфе приведены условия слабой положительной инвариантности, слабой устойчивочти по Ляпунову и слабой асимптотической устойчивости.

Основные результаты пятого параграфа:

Теорема 0.7. (см. [23]) *Пусть выполнено условие* 0.1 *и существует функция* $V(t,x)$ *— определенно положительная функция Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *такая, что для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ *выполнено неравенство* $V^o_{\min}(t,x) \leqslant 0$ *и найдутся такие* $\widehat{w}_i \in W$*, что*

$$V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w}_i)) - V(\tau_i, x) \leqslant -\psi\big(V(\tau_i, x)\big)$$
$$\textit{для всех } x \in N^r(\tau_i), i = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi(s)$ *— непрерывная при* $s \geqslant 0$ *функция такая, что* $\psi(0) = 0$ *и* $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$*. Также предполагаем, что если* $x \in M(\tau_i)$*, то* $x + g(x, \widehat{w}_i) \in M(\tau_i)$*. Тогда множество* $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно системы* (0.4).

Теорема 0.8. (см. [30]) *Пусть существуют функции* $V(t,x)$ *и* $q(t,z)$ *такие, что:*

1) $V(t,x)$ — *определенно положительная функция Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$;

2) *функция* $q(t,z)$ *локально липшицева по* z, $q(t,0)\equiv 0$ *и тривиальное решение уравнения* $\dot{z}=q(t,z)$ *асимптотически устойчиво* (*в классическом смысле*);

3) $V^o_{\min}(t,x)\leqslant q\big(t,V(t,x)\big)$ *для всех* $(t,x)\in\mathfrak{N}^r$;

4) *найдутся такие* $\widehat{w}_i\in W$, *что* $V(\tau_i,x+g(x,\widehat{w}_i))\leqslant V(\tau_i,x)$ *для всех* $x\in M^r(\tau_i)$, $i=1,2,\ldots$.

Тогда множество $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно системы* (0.4).

Теорема 0.9. (см. [30]) *Предположим, что существуют* $\alpha<0$ *и функция Ляпунова* $V(t,x)$ *относительно множества* $\mathfrak{M}$ *такая, что неравенство* $V^o_{\min}(t,x)\leqslant\alpha<0$ *выполнено для всех* $(t,x)\in\mathfrak{N}^r$ *и найдутся такие* $\widehat{w}_i\in W$, *что*

$$V(\tau_i,x+g(x,\widehat{w}_i))\leqslant V(\tau_i,x)\quad \text{для всех } x\in M^r(\tau_i),\ i=1,2,\ldots.$$

Тогда для каждой начальной точки $x_0\in N^r(t_0)$ *существует решение* $x(t,x_0)$ *системы* (0.4), *для которого найдется момент времени* $t^*=t^*(x(t,x_0))>t_0$ *такой, что точка* $(t,x(t,x_0))$ *принадлежит* $\mathfrak{M}$ *при всех* $t\in[t^*,+\infty)$.

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ *определенно положительная, то множество* $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно управляемой системы* (0.4).

Шестой парагаф посвящен практическому применению результатов предыдущих параграфов. Рассматриваются модель конкуренции двух видов и модель изменения численности популяции вредителей в условиях биологического контроля. Используются аналитические методы, при невозможности получения результата таким способом применяются численные методы пакета Mathematica версии 11.0.1.

В третьей главе получены теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием, а также изучаются статистические характеристики таких систем. В седьмом параграфе получены аналоги теоремы Ла Салля (см. [7, с. 276]) для управляемых систем с импульсным воздействием (0.4). Отметим, что для систем без импульсов $\dot{x} = f(t, x, u)$ подобные утверждения доказаны в работах [40, 45].

Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\dot{z} = q(t, z), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z|_{t=\tau_i} = l(z), \quad (t, z) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}, \tag{0.9}$$

где функция $q(t, z)$ локально липшицева по z, а функция $l(z)$ непрерывна. Введем в рассмотрение функцию $L(z) = l(z) + z$ в предположении, что $L(z)$ неубывающая для всех $z \in \mathbb{R}$.

Приведем основные теоремы седьмого параграфа.

Теорема 0.10. (см. [20]) *Пусть выполнено условие* 0.1 *и существуют функции* $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ *такие, что* $V(t, x)$ *является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и для всех* $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ *выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(t, x) \leqslant q(t, V(t, x)),$$
$$\max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Тогда если для решения $z(t)$ *уравнения* (0.9) *с начальным условием* $z(t_0) = \max\limits_{x_0 \in N^r(t_0)} V(t_0, x_0)$ *выполнено равенство* $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = 0$, *то множе-*

ство $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно системы* (0.4).

Теорема 0.11. (см. [23]) *Пусть существуют функции* $V(t,x)$, $q(t,z)$, $l(z)$ *такие, что* $V(t,x)$ *является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$, *для всех* $(t,x)\in\mathfrak{N}^r$ *выполнено неравенство* $V^{o}_{\min}(t,x)\leqslant q(t,V(t,x))$ *и найдутся такие* $\widehat{w}_i\in W$, *что*

$$V(\tau_i,x+g(x,\widehat{w}_i))\leqslant L\left(V(\tau_i,x)\right)\ \text{для всех}\ i=1,2,\ldots.$$

Тогда, если для решения $z(t)$ *уравнения* (0.9) *с начальным условием* $z(t_0)=\max\limits_{x_0\in N^r(t_0)}V(t_0,x_0)$ *выполнено равенство* $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=0$, *то множество* $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно системы* (0.4).

В восьмом параграфе получены оценки статистических характеристик управляемых систем с импульсным воздействием.

Определение 0.8 (см. [45]). *Верхней относительной частотой попадания* решения $x(t,x_0)$ системы (0.4) в множество $\mathfrak{M}$ называется следующий предел

$$\operatorname{freq}^*(x)\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:x(t,x_0)\in M(t)\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Аналогично определяется нижняя относительная частота $\operatorname{freq}_*(x)$ (с заменой верхнего предела на нижний предел). Если $\operatorname{freq}^*(x)=\operatorname{freq}_*(x)$, то существует предел

$$\operatorname{freq}(x)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\left\{t\in[0,\vartheta]:x(t,x_0)\in M(t)\right\}}{\vartheta},$$

который называется *относительной частотой* попадания решения $x(t,x_0)$ в множество $\mathfrak{M}$.

Также введем в рассмотрение характеристику

$$\varkappa \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z(t)\leqslant 0\}}{\vartheta},$$

где функция $z(t)$ является решением уравнения (0.9). Если данный предел не существует, то рассматриваются соответственно верхний и нижний пределы

$$\varkappa^* \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z(t)\leqslant 0\}}{\vartheta}, \quad \varkappa_* \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z(t)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Теорема 0.12. (см. [32]) *Предположим, что существуют функции $V(t,x)$, $q(t,z)$, $l(z)$ такие, что $V(t,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ и для всех $(t,x)\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(t,x)\leqslant q(t,V(t,x)),$$
$$\max_{w\in W} V(\tau_i, x+g(x,w))\leqslant L\left(V(\tau_i,x)\right), \quad i=1,2,\ldots.$$

Пусть $z(t)$ — решение уравнения (0.9), удовлетворяющее начальному условию $z(t_0)=V(t_0,x_0)$. Тогда для любого решения $x(t,x_0)$ системы (0.4) такого, что $x(t_0,x_0)=x_0$, имеют место неравенства

$$\operatorname{freq}_*(x)\geqslant \varkappa_*, \quad \operatorname{freq}^*(x)\geqslant\varkappa^*.$$

Теорема 0.13. (см. [32]) *Предположим, что существуют функции $V(t,x)$, $q(t,z)$, $l(z)$ такие, что $V(t,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ и для всех $(t,x)\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\min}(t,x)\leqslant q(t,V(t,x)),$$
$$\min_{w_i\in W} V(\tau_i, x+g(x,w_i))\leqslant L\left(V(\tau_i,x)\right), \quad i=1,2,\ldots.$$

Пусть $z(t)$ *— решение уравнения* (0.9), *удовлетворяющее начальному условию* $z(t_0) = V(t_0, x_0)$. *Тогда существует решение* $x(t, x_0)$ *системы* (0.4) *такое, что* $x(t_0, x_0) = x_0$ *и имеют место неравенства*

$$\operatorname{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*, \quad \operatorname{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*.$$

Результаты диссертации опубликованы в работах [17]–[32].

Автор диссертации выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Л. И. Родиной за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Глава I

Статистические характеристики непрерывных функций и статистически слабо инвариантные множества управляемой системы

Первая глава диссертационной работы посвящена изучению статистических характеристик множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x, u) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{0.1}$$

таких как верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости системы некоторым заданным множеством.

В первом параграфе определяются статистические характеристики непрерывных функции и для частных случаев приводятся способы их вычисления. Во втором параграфе находятся средние значения и статистические характеристики для периодических и почти периодических функций в смысле Бора.

В третьем параграфе исследуются прикладные задачи, в которых вычисляются или оцениваются различные статистические характеристики. В частности, рассматривается следующая задача. Пусть задано число $\lambda_0 \in [0, 1]$. Необходимо найти значение $c(\lambda_0)$ такое, чтобы верхнее решение $z(t)$ задачи Коши не превышало $c(\lambda_0)$ с относительной частотой, равной λ_0. В зависимости от постановки задачи значение $z(t)$ можно интерпретировать как размер популяции, энергию частицы, концентрацию вещества, величину производства или цену на продукцию.

§ 1. Статистические характеристики непрерывных функций

В этом параграфе исследованы статистические характеристики непрерывной функции, такие как верхняя и нижняя относительные частоты попадания графика данной функции в множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\},$$

заданное функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа; предполагаем, что для каждого $t \in [0,+\infty)$ множество $M(t)$ непусто и компактно. Получены условия равенства этих характеристик для двух функций φ и ψ, для которых $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$.

Рассмотрим управляемую систему (0.1) и отвечающее ей дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad F(t,x) = \mathrm{co}H(t,x), \tag{1.1}$$

где $H(t,x)$ представляет собой множество всех предельных значений функции $f\big(t,x,U(t,x)\big)$ при $(t_i,x_i) \to (t,x)$, $\mathrm{co}\,H(t,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(t,x)$. Предполагаем, что множество $F(t,x)$ непусто, ограничено, замкнуто и выпукло, функция $f(t,x,u)$ непрерывна по совокупности переменных, а функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху. Тогда функция $F(t,x)$ также полунепрерывна сверху, поэтому для каждой начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ локальное решение включения (1.1) существует (см. [59, с. 60]).

Под решением включения (1.1) на интервале $J \subset \mathbb{R}$ будем понимать всякую абсолютно непрерывную функцию $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$, которая при почти всех $t \in J$ удовлетворяет данному включению.

Приведем необходимые определения.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Допустимым процессом управляемой системы* (0.1) назовем функцию

$$t \mapsto (u(t), x(t)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) управление $u(t)$ определено на $I = [0, +\infty)$, ограничено и измеримо по Лебегу;

2) решение $x(t)$ в смысле Каратеодори системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)),$$

определено для всех $t \in I$;

3) имеет место включение $u(t) \in U(t, x(t))$.

Отвечающее допустимому процессу $(u(t), x(t))$ управление $u(t)$ называется *допустимым управлением* системы (0.1).

О п р е д е л е н и е 1.2. Для непрерывной функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *верхнюю относительную частоту* попадания ее графика в множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$$

определим равенством

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. *Нижнюю* относительную частоту $\operatorname{freq}_*(\varphi)$ определим тем же равенством, но с заменой в нем верхнего предела нижним, а если эти пределы совпадают $\operatorname{freq}^*(\varphi) = \operatorname{freq}_*(\varphi)$, то общий предел обозначим

$$\operatorname{freq}(\varphi) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta}$$

и назовем *относительной частотой попадания графика функции* φ в множество $\mathfrak{M}$.

Обозначим через ∂M границу множества M, через $\mathrm{int} M$ — внутренность данного множества, $\varrho(x, M) \doteq \inf\limits_{y \in M} |x - y|$ — расстояние от точки x до множества M. Рассмотрим функцию

$$R_{\varphi}(t) = \begin{cases} \varrho\big(\varphi(t), \partial M(t)\big), & \text{если} \quad \varphi(t) \notin M(t), \\ -\varrho\big(\varphi(t), \partial M(t)\big), & \text{если} \quad \varphi(t) \in M(t). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — сигма-алгебра всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Определим для каждого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ функции

$$\mu^*(B) \doteq \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0, \vartheta] : R_{\varphi}(t) \in B\}}{\vartheta},$$

$$\mu_*(B) \doteq \underline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0, \vartheta] : R_{\varphi}(t) \in B\}}{\vartheta}.$$

Теорема 1.1. (см. [32]) *Пусть функции* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *и множество* $\mathfrak{M}$ *таковы, что* $\lim\limits_{t \to \infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \mu^*\left([-\varepsilon, \varepsilon]\right) \doteq \lim_{\varepsilon \to 0+0} \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0, \vartheta] : |R_{\varphi}(t)| \leqslant \varepsilon\}}{\vartheta} = 0. \qquad (1.2)$$

Тогда $\mathrm{freq}_*(\varphi) = \mathrm{freq}_*(\psi) \leqslant \mathrm{freq}^*(\psi) = \mathrm{freq}^*(\varphi)$.

Следовательно, если один из пределов $\mathrm{freq}(\varphi)$ *или* $\mathrm{freq}(\psi)$ *существует, то другой предел также существует и* $\mathrm{freq}(\varphi) = \mathrm{freq}(\psi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (1.2) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \mu^*\big((0, \varepsilon]\big) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \mu^*\big((-\varepsilon, 0]\big) \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0+0} \mu^*\big((-\varepsilon, \varepsilon]\big) = 0,$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\infty,\varepsilon]\big)=\mu^*\big((-\infty,0]\big)+\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((0,\varepsilon]\big)=\mu^*\big((-\infty,0]\big),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\infty,-\varepsilon]\big)=\mu^*\big((-\infty,0]\big)-\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\varepsilon,0]\big)=\mu^*\big((-\infty,0]\big).$$

Для любого $\varepsilon>0$ определим замкнутое множество

$$M^{-\varepsilon}(t)\doteq M(t)-O_\varepsilon(0)=\{x\in\mathbb{R}^n : O_\varepsilon(x)\subseteq M(t)\}.$$

Так как $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0$, то из неравенства $|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant\varepsilon$, которое верно для всех $t\geqslant t_0=t_0(\varepsilon)$, следуют включения

$$\big\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{-\varepsilon}(t)\big\}\subseteq\big\{t\in[t_0,\vartheta]:\psi(t)\in M(t)\big\}\subseteq$$
$$\subseteq\big\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{\varepsilon}(t)\big\},$$

из которых получаем неравенства

$$\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{-\varepsilon}(t)\}\leqslant\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\psi(t)\in M(t)\}\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{\varepsilon}(t)\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{freq}^*(\psi)\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\psi(t)\in M(t)\}}{\vartheta}&=\\=\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\psi(t)\in M(t)\}}{\vartheta}&\leqslant\\\leqslant\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi(t)\in M^{\varepsilon}(t)\}}{\vartheta}&=\\=\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:R_\varphi(t)\leqslant\varepsilon\}}{\vartheta}&\doteq\mu^*\big((-\infty,\varepsilon]\big).\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0+0$ в неравенстве $\operatorname{freq}^*(\psi)\leqslant\mu^*\big((-\infty,\varepsilon]\big)$, получаем

$$\operatorname{freq}^*(\psi)\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0+0}\mu^*\big((-\infty,\varepsilon]\big)=\mu^*\big((-\infty,0]\big)\doteq\operatorname{freq}^*(\varphi).\tag{1.3}$$

Далее,

$$\mu^*\big((-\infty,-\varepsilon]\big) \doteq \overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\,\frac{\mathrm{mes}\{t\in[0,\vartheta]: R_\varphi(t)\leqslant-\varepsilon\}}{\vartheta} = \\ = \overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\,\frac{\mathrm{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]: \varphi(t)\in M^{-\varepsilon}(t)\}}{\vartheta} \leqslant \\ \leqslant \overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\,\frac{\mathrm{mes}\{t\in[t_0,\vartheta]: \psi(t)\in M(t)\}}{\vartheta} \doteq \mathrm{freq}^*(\psi).$$

В последнем неравенстве также перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0+0$, тогда

$$\mathrm{freq}^*(\varphi) = \mu^*\big((-\infty,0]\big) = \lim_{\varepsilon\to0+0}\mu^*\big((-\infty,-\varepsilon]\big) \leqslant \mathrm{freq}^*(\psi). \qquad (1.4)$$

Таким образом, из (1.3) и (1.4) получаем, что $\mathrm{freq}^*(\psi)=\mathrm{freq}^*(\varphi)$.

Отметим, что из (1.2) следует равенство

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\mu_*\big([-\varepsilon,\varepsilon]\big) \doteq \lim_{\varepsilon\to0+0}\underline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\,\frac{\mathrm{mes}\,\{t\in[0,\vartheta]: |R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{\vartheta} = 0.$$

Поэтому, проделывая аналогичные рассуждения (с заменой верхнего предела на нижний) для функции множеств μ_*, получим, что $\mathrm{freq}_*(\psi)=\mathrm{freq}_*(\varphi)$. □

Следствие 1.1. (см. [32]) *Пусть функции* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *и множество* $\mathfrak{M}$ *таковы, что* $\lim\limits_{t\to\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0$ *и функция* $R_\varphi(t)$ *периодическая с периодом* $T>0$. *Тогда, если* $\mathrm{mes}\,\{t\in[0,T]: R_\varphi(t)=0\}=0$, *то*

$$\mathrm{freq}(\psi)=\mathrm{freq}(\varphi)=\frac{\mathrm{mes}\{t\in[0,T]: \varphi(t)\in M(t)\}}{T}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что в силу периодичности функции $R_\varphi(t)$ выполняется равенство

$$\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\,\frac{\mathrm{mes}\,\{t\in[0,\vartheta]: |R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{\vartheta} = \frac{\mathrm{mes}\,\{t\in[0,T]: |R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{T}. \qquad (1.5)$$

Пусть $\vartheta=kT$, тогда, так как $R_\varphi(t)$ — периодическая с периодом T, получаем, что для любого натурального i выполняется равенство

$$\mathrm{mes}\,\{t\in[(i-1)T, iT]: |R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\} = \mathrm{mes}\,\{t\in[0,T]: |R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{mes}\{t\in[0,kT]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{mes}\{t\in[(i{-}1)T,iT]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}=k{\cdot}\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\},$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,kT]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{kT}=$$
$$=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{kT}=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{T}.$$

Далее, для любого $\vartheta>0$ найдется такое целое $k=k(\vartheta)$, что $(k-1)T<\vartheta\leqslant kT$. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{T}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{(k-1)\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{kT}=$$
$$=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,(k-1)T]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{kT}.$$

Учитывая, что $(k-1)T<\vartheta\leqslant kT$, получаем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,(k-1)T]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{kT}\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{\vartheta}\leqslant\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,kT]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{\vartheta}\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\cdot\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{(k-1)T}=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{T}.$$

Таким образом, равенство (1.5) верно.

Далее, в силу непрерывности меры Лебега (см. [12, с. 274])

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\mu^*\big([-\varepsilon,\varepsilon]\big)=\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:|R_\varphi(t)|\leqslant\varepsilon\}}{T}=$$
$$=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:R_\varphi(t)=0\}}{T}.$$

Таким образом, для периодической функции $R_\varphi(t)$ условия (1.2) и

$$\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:R_\varphi(t)=0\}=0$$

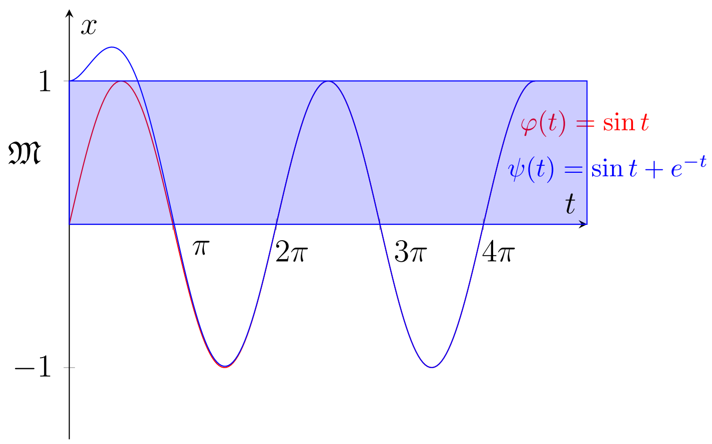

Рис. 1.1. Для функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ выполнено равенство $\operatorname{freq}(\varphi) = \operatorname{freq}(\psi) = \dfrac{1}{2}$.

равносильны. Из периодичности $R_\varphi(t)$ также следует, что предел $\operatorname{freq}(\varphi)$ существует и

$$\operatorname{freq}(\varphi) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : \varphi(t) \in M(t)\}}{T}.$$

В силу теоремы 1.1 имеет место равенство $\operatorname{freq}(\psi) = \operatorname{freq}(\varphi)$. $\square$

П р и м е р 1.1. Возьмем множество $\mathfrak{M} = \{(t, x) \in [0, \infty) \times [0, 1]\}$ и функции

$$\varphi(t) = \sin t, \quad \psi(t) = \sin t + e^{-t}.$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$. Так как часть графика $\varphi(t) = \sin t$ лежит в $M(t) = [0, 1]$, а другая – нет, то функция $R_\varphi(t) = |\sin t|$, следовательно,

$$\operatorname{mes}\{t \in [0, T] : R_\varphi(t) = 0\} = \operatorname{mes}\{t \in [0, 2\pi] : |\sin t| = 0\} = 0.$$

Все условия следствия 1.1 выполняются, следовательно,

$$\operatorname{freq}(\varphi) = \operatorname{freq}(\psi) = \frac{1}{2}.$$

П р и м е р 1.2. Покажем, что если равенство (1.2) не верно, то утверждение теоремы 1.1 может быть не выполнено. Рассмотрим множество

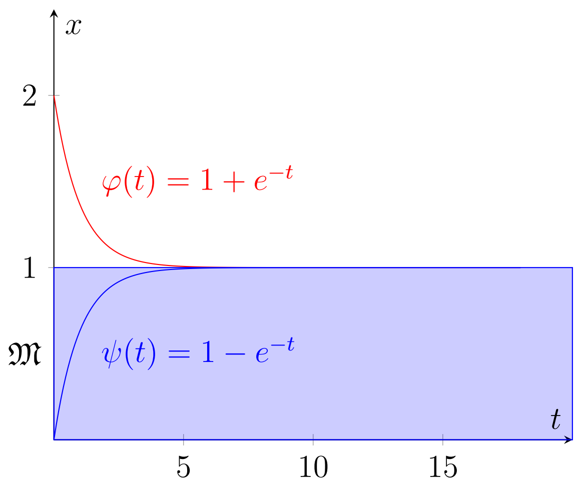

Рис. 1.2. Для функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ равенство (1.2) не выполнено.

$\mathfrak{M} = \{(t,x) \in [0,\infty) \times [0,1]\}$ и функции

$$\varphi(t) = 1 + e^{-t}, \quad \psi(t) = 1 - e^{-t}.$$

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = \lim\limits_{t\to\infty} 2e^{-t} = 0$. Так как $\varphi(t) \notin M(t) = [0,1]$, то функция $R_\varphi(t) = e^{-t}$ для всех $t \in [0,+\infty)$, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \mu^*\left([-\varepsilon,\varepsilon]\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \overline{\lim_{\vartheta\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : e^{-t} \leqslant \varepsilon\}}{\vartheta} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{\vartheta + \ln\varepsilon}{\vartheta} = 1.$$

График функции $\varphi(t)$ не пересекается с множеством $\mathfrak{M}$, поэтому $\operatorname{freq}(\varphi) = 0$; график $\psi(t)$ содержится в $\mathfrak{M}$ при $t \geqslant 0$, поэтому $\operatorname{freq}(\psi) = 1$.

Вернемся к рассмотрению управляемой системы (0.1):

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

и отвечающей ей дифференциального включения (1.1)

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad F(t,x) = \operatorname{co} H(t,x).$$

Приведем условия существования статистически слабо инвариантных множеств относительно данной системы.

О п р е д е л е н и е 1.3. (см. [50, 51]). Множество

$$\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$$

называется *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (0.1), если для любой точки $x \in M(0)$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t)$ включения (1.1), определенное при всех $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0) = x$ и равенству

$$\text{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\text{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta} = 1.$$

Следствие 1.2. (см. [32]) *Предположим, что существуют решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ включения* (1.1) *такие, что* $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$ *и выполнено равенство* (1.2). *Тогда*

$$\text{freq}_*(\varphi) = \text{freq}_*(\psi) \leqslant \text{freq}^*(\psi) = \text{freq}^*(\varphi).$$

Теорема 1.2. (см. [32]) *Пусть для любой точки $x \in M(0)$ существует решение $\psi(t)$ включения* (1.1), *удовлетворяющее начальному условию*

$\psi(0) = x$ и равенству $\lim\limits_{t\to\infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$, где $\varphi(t)$ — решение данного включения, для которого

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \mu^*\big((-\infty, -\varepsilon)\big) \doteq \lim_{\varepsilon\to 0+0} \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\text{mes}\,\{t \in [0, \vartheta] : R_\varphi(t) \leqslant -\varepsilon\}}{\vartheta} = 1. \quad (1.6)$$

Тогда множество $\mathfrak{M}$ статистически слабо инвариантно относительно системы (0.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (1.6) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \mu^*\big([-\varepsilon, \varepsilon]\big) \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0+0} \mu^*\big([-\varepsilon, +\infty)\big) = 0.$$

Далее, из (1.6) также получаем

$$\mathrm{freq}^*(\varphi) \doteq \mu^*\big((-\infty, 0]\big) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \mu^*\big((-\infty, -\varepsilon)\big) + \lim_{\varepsilon \to 0+0} \mu^*\big([-\varepsilon, 0]\big) = 1.$$

Таким образом, в силу теоремы 1.1 выполнено равенство

$$\mathrm{freq}^*(\psi) = \mathrm{freq}^*(\varphi) = 1,$$

которое и означает, что множество $\mathfrak{M}$ статистически слабо инвариантно.$\square$

Отметим, что в следствии 1.2 и теореме 1.2 для решений $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ включения (1.1) начальные точки $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ могут не совпадать.

§ 2. О вычислении средних значений и статистических характеристик для почти периодических функций

Первые примеры вычисления средних значений появились, по-видимому, в работах Лагранжа при создании теории движения больших планет. Важным инструментом вычисления средних является эргодическая теорема Биркгофа–Хинчина, из которой следует свойство асимптотической равнораспределенности траекторий (см., например, [3, с. 136], [13, с. 17–21]). Вопросам, связанным с исследованием средних значений, посвящено множество работ, среди которых [2], [3], [11], [13].

В этом разделе получено равенство, с помощью которого можно вычислять среднее значение функции $z(t)$, а также характеристику

$$\widetilde{\varkappa} = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}$$

для почти периодических функций $z(t)$, которые зависят от конечного числа периодических функций $z_i(t)$.

Приведем необходимые определения.

Определение 2.1. Функция $\varphi(t)$ называется *почти периодической в смысле Бора,* если она непрерывна и для всякого $\varepsilon > 0$ множество ε-почти периодов

$$\theta(\varepsilon) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\big| \leqslant \varepsilon\Big\}$$

относительно плотно на действительной оси $\mathbb{R}$, то есть существует число $l > 0$ такое, что каждый отрезок $[a, a+l]$ длины l содержит хотя бы один элемент данного множества (см., например, [7, с. 367-368], [34, с. 7]).

Определение 2.2. Числа $T_1, \ldots, T_k$ называются *рационально независимыми,* если $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i T_i \neq 0$ для любых целых чисел $n_1, \ldots, n_k$, одновременно не равных нулю.

Метрической динамической системой называется четверка $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, g^t)$, где Ω — фазовое пространство; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств Ω; g^t — однопараметрическая группа *измеримых* преобразований фазового пространства Ω в себя (измеримость означает, что $g^t A \in \mathfrak{A}$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$); μ — вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно потока g^t, то есть $\mu(g^t A) = \mu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ и любого $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.1. (см. [32]) *Пусть* $z(t) = F\big(z_1(t), \ldots, z_k(t)\big)$, *функции* $z_i(t)$ *— периодические с периодами* T_i, $i = 1, \ldots, k$, *функция* $F\big(z_1(x_1), \ldots, z_k(x_k)\big)$ *интегрируема по Риману на множестве* $[0, T_1] \times \ldots \times [0, T_k]$. *Если числа* $T_1, \ldots, T_k$ *рационально независимы, то для среднего значения*

$$\overline{z} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau z(t)dt$$

функции $z(t)$ выполнено равенство

$$\overline{z} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau F\big(z_1(t),\dots,z_k(t)\big)dt =$$
$$= \frac{\displaystyle\int_0^{T_1}\!\!\dots\int_0^{T_k} F\big(z_1(x_1),\dots,z_k(x_k)\big)dx_1\dots dx_k}{T_1\cdot T_2\cdot\ldots\cdot T_k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим метрическую динамическую систему $(\mathbb{T}^k,\mathfrak{A},\mu,g^t)$, где фазовое пространство $\mathbb{T}^k = S^{T_1}\times\ldots\times S^{T_k}$ — k-мерный тор, S^{T_i} — окружность длиной T_i, $i=1,\dots,k$; $\mathfrak{A}$ — сигма-алгебра всех борелевских подмножеств тора $\mathbb{T}^k$;

$$g^t(x_1,\dots,x_k) = \big(x_1+t\,(\mathrm{mod}\,T_1),\dots,x_k+t\,(\mathrm{mod}\,T_k)\big),\quad (x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{T}^k.$$

Определим нормированную меру $\mu(B) = \dfrac{\mathrm{mes}\,B}{T_1\cdot T_2\cdot\ldots\cdot T_k}$ для любого подмножества $B\in\mathfrak{A}$. Рассмотрим функцию

$$h(x_1,\dots,x_k) = F\big(z_1(x_1),\dots,z_k(x_k)\big).$$

В силу теоремы об усреднении (см., например, [2, с. 248]), если числа $T_1,\dots,T_k$ рационально независимы, то для каждой точки $x\in\mathbb{T}^k$ временное среднее функции $h(g^tx)$ равно пространственному среднему $\displaystyle\int_{\mathbb{T}^k} hd\mu$. Таким образом, для точки $x_0=(0,\dots,0)$ справедливо равенство

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau z(t)dt = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau h(g^tx_0)dt = \int_{\mathbb{T}^k} hd\mu,$$

которое равносильно утверждению теоремы. Отметим также, что для рационально независимых чисел $T_1,\dots,T_k$ динамическая система $(\mathbb{T}^k,\mathfrak{A},\mu,g^t)$ является *строго эргодической* (см., например, [13, с. 69]).

Следствие 2.1. (см. [32]) *Пусть $z(t) = H\big(z_1(t),\dots,z_k(t)\big)$, функции $z_i(t)$ — периодические с периодами T_i, $i=1,\dots,k$, функция $H\big(z_1(x_1),\dots,z_k(x_k)\big)$*

интегрируема по Риману на множестве $[0, T_1] \times \dots \times [0, T_k]$. *Если числа* $T_1, \dots, T_k$ *рационально независимы, то имеет место равенство*

$$\widetilde{\varkappa} = \frac{\operatorname{mes}\bigl\{x_1 \in [0, T_1], \dots, x_k \in [0, T_k] : \, H\bigl(z_1(x_1), \dots, z_k(x_k)\bigr) \leqslant 0\bigr\}}{T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_k},$$

где mes — k*-мерная мера Лебега.*

Следствие 2.2. (см. [32]) *Пусть* $z_i(t)$ — *интегрируемые периодические функции с периодами* T_i, $i = 1, \dots, k$. *Если числа* $T_1, \dots, T_k$ *рационально независимы, то среднее значение произведения* $z_1(t) \cdot z_2(t) \cdot \ldots \cdot z_k(t)$ *равно произведению средних значений данных функций:*

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau z_1(t) \cdot z_2(t) \cdot \ldots \cdot z_k(t) dt =$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau z_1(t) dt \cdot \ldots \cdot \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau z_k(t) dt = \frac{\displaystyle\int_0^{T_1} z_1(t) dt \cdot \ldots \cdot \int_0^{T_k} z_k(t) dt}{T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_k}.$$

П р и м е р 2.1. Найдем значение относительной частоты

$$\widetilde{\varkappa} = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}$$

для функции $z(t) = \sin t + 2\sin(\sqrt{2}t)$, которая равна сумме периодических функций $z_1(t) = \sin t$ и $z_2(t) = 2\sin(\sqrt{2}t)$ с периодами $T_1 = 2\pi$ и $T_2 = \sqrt{2}\pi$ соответственно. Рассмотрим множества $E = [0, 2\pi] \times [0, \sqrt{2}\pi]$ и

$$G = \bigl\{(x_1, x_2) \in E : \sin x_1 + 2\sin(\sqrt{2}\, x_2) < 0\bigr\} =$$
$$= \bigl\{(x_1, x_2) \in E : z_1(x_1) + z_2(x_2) < 0\bigr\}.$$

Покажем, что площадь множества G равна половине площади прямоугольника E. Действительно, если точка (x_1, x_2) принадлежит G, то точка $(T_1 - x_1, T_2 - x_2)$, симметричная ей относительно центра прямоугольника E, не содержится в множестве G, поскольку

$$z_1(T_1 - x_1) + z_2(T_2 - x_2) = z_1(-x_1) + z_2(-x_2) = -z_1(x_1) - z_2(x_2) > 0.$$

Аналогично, если $z_1(x_1)+z_2(x_2)=\sin x_1+2\sin(\sqrt{2}\,x_2)>0$, то $z_1(T_1-x_1)+z_2(T_2-x_2)<0$. Учитывая равенство

$$\operatorname{mes}\{(x_1,x_2)\in E: z_1(x_1)+z_2(x_2)=0\}=0,$$

получаем, что $\operatorname{mes} G=\dfrac{1}{2}\operatorname{mes} E$, следовательно, $\widetilde{\varkappa}=\dfrac{1}{2}$.

Рассуждая так же, как в примере 2.1, получим следующее утверждение.

Утверждение 2.1. (см. [32]) *Пусть $z(t)=z_1(t)+\ldots+z_k(t)$, функции $z_1(t),\ldots,z_k(t)$ интегрируемые, нечетные, периодические с периодами $T_1,\ldots,T_k$ соответственно. Если числа $T_1,\ldots,T_k$ независимы над полем рациональных чисел и*

$$\operatorname{mes}\big\{x_1\in[0,T_1],\ldots,x_k\in[0,T_k]:\ z_1(x_1)+\ldots+z_k(x_k)=0\big\}=0,$$

то выполнено равенство $\widetilde{\varkappa}=1/2$.

П р и м е р 2.2. Найдем характеристику $\widetilde{\varkappa}$ для функции

$$z(t)=\sin t+\{t\},$$

где $\{t\}$ означает дробную часть числа t. Построим множество

$$K=\big\{(x_1,x_2)\in[0,T_1]\times[0,T_2]:\ \sin x_1+x_2\leqslant 0\big\},\quad \text{где}\ \ T_1=2\pi, T_2=1.$$

Площадь данного множества равна 2, поэтому

$$\widetilde{\varkappa}=\frac{\operatorname{mes} K}{T_1T_2}=\frac{2}{2\pi}=\frac{1}{\pi}.$$

§ 3. Статистические характеристики, появляющиеся в различных моделях естествознания

Введем следующую характеристику, определенную для любого $c \in \mathbb{R}$:

$$\varkappa_c \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : z(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta}. \tag{3.1}$$

Отметим, что $\varkappa_c$ является относительной частотой события $\{z(t) \leqslant c\}$. Представляет также интерес нахождение относительных частот для событий $\{z(t) \geqslant c\}$ и $\{c_1 \leqslant z(t) \leqslant c_2\}$, где числа c_1 и c_2 можем интерпретировать как критически маленький и критически большой размер популяции.

В этом разделе мы рассматриваем следующую задачу. Пусть задано число $\lambda_0 \in [0,1]$ и функция $z(t)$ является размером популяции (или концентрацией веществ, или объемом производства). Необходимо найти значение $c = c\,(\lambda_0)$ такое, что величина $z(t)$ не превышает $c\,(\lambda_0)$ с относительной частотой, равной λ_0.

Обозначим через $\widetilde{z}(t)$ почти периодическое решение уравнения

$$\dot{z} = w(t,z)$$

(в предположении, что оно существует и единственно). Рассмотрим характеристику $\widetilde{\varkappa}_c$ — относительную частоту попадания решения $\widetilde{z}(t)$ в множество $(-\infty, c\,]$:

$$\widetilde{\varkappa}_c \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{z}(t) \leqslant c\}}{\vartheta}$$

и характеристику $\widetilde{\varkappa}$:

$$\widetilde{\varkappa} \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{z}(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}$$

В следующих леммах получены условия, при которых пределы $\varkappa_c$ и $\widetilde{\varkappa}_c$ равны.

Лемма 3.1. (см. [47]) *Предположим, что функция* $\widetilde{z}(t)$ *непрерывная периодическая с периодом* T *и не существует интервала числовой прямой, на котором* $\dot{\widetilde{z}}(t)=0$*. Если выполнено равенство*

$$\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\widetilde{z}(t)=c\}}{\vartheta}=0,$$

то имеют место следующие свойства:

1) *предел* $\widetilde{\varkappa}$ *существует и выполнено равенство*

$$\widetilde{\varkappa}=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{z}(t)\leqslant 0\}}{T};$$

2) *для любого* $\lambda_0\in[0,1]$ *найдется число* $c=c\,(\lambda_0)$ *такое, что*

$$\widetilde{\varkappa}_c=\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,T]:\widetilde{z}(t)\leqslant c\}}{T}=\lambda_0.$$

Лемма 3.2. (см. [49]) *Предположим, что функция* $\widetilde{z}(t)$ *почти периодическая в смысле Бора. Если* $\lim\limits_{t\to\infty}\big(z(t)-\widetilde{z}(t)\big)=0$ *и для каждого* $c\in\mathbb{R}$ *выполнено равенство*

$$\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\widetilde{z}(t)=c\}}{\vartheta}=0,$$

то имеют место следующие свойства:

1) *для каждого* $c\in\mathbb{R}$ *предел* $\varkappa_c$ *существует и справедливо равенство*

$$\varkappa_c=\widetilde{\varkappa}_c;$$

2) *для любого* $\lambda_0\in[0,1]$ *найдется число* $c=c\,(\lambda_0)$ *такое, что*

$$\varkappa_c=\lambda_0.$$

П р и м е р 3.1. Пусть функции $a(t)$ и $b(t)$ — почти периодические в смысле Бора, $z(t)$ — решение линейной задачи Коши

$$\dot{z}=a(t)z+b(t),\quad z(0)=z_0. \tag{3.2}$$

Лемма 3.3. *Предположим, что функции $a(t)$, $b(t)$ почти периодические в смысле Бора, $a(t) = \alpha(t) + h$, где $h < 0$, функция $\int_0^t \alpha(s)ds$ ограниченная. Если для каждого $z \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : a(t)z + b(t) = 0\big\}}{\vartheta} = 0,$$

то имеют место следующие свойства:

1) *для каждого $c \in \mathbb{R}$ предел $\varkappa_c$ существует и выполнено равенство*

$$\varkappa_c = \widetilde{\varkappa}_c;$$

2) *для любого $\lambda_0 \in [0,1]$ найдется число $c = c(\lambda_0)$ такое, что*

$$\varkappa_c = \lambda_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3.2, для доказательства утверждения достаточно показать, что существует единственное почти периодическое решение $\widetilde{z}(t)$ уравнения

$$\dot{z} = a(t)z + b(t) \tag{3.3}$$

и решение $z(t)$ задачи Коши (3.2) представимо в виде $z(t) = \widetilde{z}(t) + \psi(t)$, где $\psi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Общее решение уравнения (3.3) имеет вид

$$z_0(t) = \exp\left(\int_0^t a(v)dv\right)\left(c_0 + \int_0^t b(s)\exp\left(-\int_0^s a(v)dv\right)ds\right),$$

где c_0 — произвольная постоянная. Для ограниченности данного решения необходимо, чтобы

$$\lim_{t\to-\infty}\left(c_0 + \int_0^t b(s)\exp\left(-\int_0^s a(v)dv\right)ds\right) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$c_0 = \int_{-\infty}^0 b(s)\exp\left(-\int_0^s a(v)dv\right)ds. \tag{3.4}$$

Пусть $B = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\bigl|b(t)\bigr|$, $\left|\displaystyle\int_0^t \alpha(s)ds\right| \leqslant L$, тогда имеют место неравенства

$$\left|b(s)\exp\left(-\int_0^s a(v)dv\right)\right| \leqslant B\exp\left(-\int_0^s a(v)dv\right) = \\ = B\exp\left(-\int_0^s \bigl(\alpha(v)+h\bigr)dv\right) \leqslant B\exp\bigl(L-hs\bigr). \quad (3.5)$$

Поскольку $h<0$, то интеграл (3.4) сходится. Таким образом, ограниченное решение существует и имеет вид

$$\widetilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t b(s)\exp\left(\int_s^t a(v)dv\right)ds.$$

Покажем, что это решение почти периодическое.

Пусть τ – общий ε-почти период функций $a(t)$ и $b(t)$ (существование такого ε-почти периода доказано, например, в [7, с. 371]). Выберем ε из интервала $\left(0, -\dfrac{h}{2}\right)$ и рассмотрим

$$|\widetilde{z}(t+\tau)-\widetilde{z}(t)| = \\ = \left|\int_{-\infty}^t b(s+\tau)\exp\left(\int_s^t a(v+\tau)dv\right)ds - \int_{-\infty}^t b(s)\exp\left(\int_s^t a(v)dv\right)ds\right|.$$

Добавим и вычтем под знаком модуля $\displaystyle\int_{-\infty}^t b(s)\exp\left(\int_s^t a(v+\tau)dv\right)ds$, тогда $|\widetilde{z}(t+\tau)-\widetilde{z}(t)|$ можно оценить следующим образом

$$|\widetilde{z}(t+\tau)-\widetilde{z}(t)| \leqslant \sup_{s\in\mathbb{R}}\bigl|b(s+\tau)-b(s)\bigr|\int_{-\infty}^t \exp\left(\int_s^t a(v+\tau)dv\right)ds+ \\ +\left|\int_{-\infty}^t b(s)\left(\exp\left(\int_s^t a(v+\tau)dv\right)-\exp\left(\int_s^t a(v)dv\right)\right)ds\right|.$$

Далее, так как $a(t)$ и $b(t)$ почти периодические функции, $a(t)=\alpha(t)+h$ и

$B = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \big| b(t) \big|$, то

$$|\widetilde{z}(t+\tau) - \widetilde{z}(t)| \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} (\alpha(v+\tau)+h) dv\right) ds +$$
$$\left| \int_{-\infty}^{t} b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} a(v) dv\right) \left(\exp\left(\int_{s}^{t} \varepsilon dv\right) - 1\right) ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} (\alpha(v+\tau)+h) dv\right) ds +$$
$$+ B \int_{-\infty}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} (\alpha(v)+h) dv\right) (e^{\varepsilon(t-s)} - 1) ds.$$

Внутренние интегралы можно оценить, пользуясь неравенством (3.5), тогда

$$|\widetilde{z}(t+\tau) - \widetilde{z}(t)| \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{t} \exp\big(L + h(t-s)\big) ds +$$
$$+ B \int_{-\infty}^{t} \exp\big(L + h(t-s)\big) \left(e^{\varepsilon(t-s)} - 1\right) ds =$$
$$= (\varepsilon - B) \int_{-\infty}^{t} \exp\big(L + h(t-s)\big) ds + B \int_{-\infty}^{t} \exp\big(L + (h+\varepsilon)(t-s)\big) ds.$$

Вычисляя оставшиеся интегралы, получаем

$$|\widetilde{z}(t+\tau) - \widetilde{z}(t)| \leqslant -\frac{\varepsilon e^{L}}{h} + \frac{B \varepsilon e^{L}}{h(h+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon e^{L}(B-h-\varepsilon)}{h(h+\varepsilon)}.$$

Так как $\varepsilon > 0$, то $B - h - \varepsilon < B - h$, а из того, что $\varepsilon < -\dfrac{h}{2}$, следует $h(h-\varepsilon) > \dfrac{h^2}{2}$. Таким образом, окончательная оценка имеет вид

$$|\widetilde{z}(t+\tau) - \widetilde{z}(t)| < \frac{2\varepsilon e^{L}(B-h)}{h^2}.$$

Следовательно, функция $\widetilde{z}(t)$ — почти периодическая.

Решение задачи Коши (3.2)

$$z(t) = \exp\left(\int_{0}^{t} a(v) dv\right) \left(z_0 + \int_{0}^{t} b(s) \exp\left(-\int_{0}^{s} a(v) dv\right) ds\right)$$

представим в виде $z(t) = \widetilde{z}(t) + (z_0 - c_0) \exp\Big(\int_0^t a(v)dv\Big)$, где c_0 определяется равенством (3.4). Заметим, что для функции $\psi(t) = (z_0 - c_0) \exp\Big(\int_0^t a(v)dv\Big)$ выполнено неравенство

$$|\psi(t)| = |z_0 - c_0| \exp\Big(\int_0^t a(v)dv\Big) = |z_0 - c_0| \exp\Big(\int_0^t (\alpha(v) + h)dv\Big) \leqslant \leqslant |z_0 - c_0| e^L e^{ht},$$

поэтому из неравенства $h < 0$ следует, что $\psi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. $\square$

Лемма 3.4. *Предположим, что функции $a(t)$, $b(t)$ почти периодические в смысле Бора, $a(t) = \alpha(t) + h$, где $h > 0$, функция $\int_0^t \alpha(s)ds$ ограниченная. Если $z_0 > c_0$, то $\varkappa_c = 0$ для любого $c \in \mathbb{R}$; если $z_0 < c_0$, то $\varkappa_c = 1$ для любого $c \in \mathbb{R}$ (здесь c_0 определяется равенством (3.4)).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = z(t) - \widetilde{z}(t) = (z_0 - c_0) \exp\Big(\int_0^t a(v)dv\Big),$$

где $z(t)$ – решение задачи Коши (3.2), а $\widetilde{z}(t)$ – почти периодическое решение уравнения (3.3). Функцию $\psi(t)$ можно оценить следующим образом

$$|\psi(t)| = |(z_0 - c_0) \exp\Big(\int_0^t a(v)dv\Big)| = |z_0 - c_0| \exp\Big(\int_0^t (\alpha(v) + h)dv\Big) \geqslant \geqslant |z_0 - c_0| e^{-L} e^{ht}. \quad (3.6)$$

Рассмотрим случай, когда $z_0 > c_0$. Из неравенства (3.6) следует, что $\psi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Поэтому так как $\widetilde{z}(t)$ – почти периодическая функция ограничена, то $z(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Это значит, что для любого $\varepsilon > c$ найдется такое $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$, что для всех $t > t_0$ выполнено неравенство $z(t) > \varepsilon$. Тогда

$$\varkappa_c \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z(t)\leqslant c\}}{\vartheta} =$$
$$= \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,t_0) : z(t)\leqslant c\}}{\vartheta} + \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta] : z(t)>\varepsilon, z(t)\leqslant c\}}{\vartheta} =$$
$$= 0+0 = 0.$$

Пусть теперь $z_0 < c_0$, тогда исходя из неравенства (3.6) получим, что $\psi(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Из ограниченности $\widetilde{z}(t)$ следует, что $z(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Это означает, что для любого $\varepsilon \leqslant c$ найдется такое $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$, что для всех $t > t_0$ выполнено неравенство $z(t) < \varepsilon$. Следовательно,

$$\varkappa_c \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z(t)\leqslant c\}}{\vartheta} =$$
$$= \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,t_0) : z(t)\leqslant c\}}{\vartheta} + \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[t_0,\vartheta] : z(t)<\varepsilon\leqslant c\}}{\vartheta} =$$
$$= 0 + \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\vartheta - t_0}{\vartheta} = 1.$$

□

П р и м е р 3.2. Рассмотрим уравнение Ферхюльста (логистическое уравнение), которое описывает динамику роста численности популяции различных организмов. Это уравнение носит принципиальный характер, и предсказанные им сценарии были обнаружены при описании некоторых свойств турбулентного потока, а также в исследованиях по лазерной физике, гидродинамике и кинетике химических реакций (см., например, [38, с. 465-466]). Уравнение Ферхюльста описывает изменение численности популяции в зависимости от времени и выглядит следующим образом:

$$\dot z = \big(\varepsilon(t) - \alpha(t) z\big) z,$$

где в правой части $\varepsilon(t)$ — удельная (средняя) скорость рождаемости, а $\alpha(t)z$ — удельная (средняя) смертность, которая пропорциональна размеру популяции. Предполагаем, что функции $\varepsilon(t)$ и $\alpha(t)$ положительные и почти периодические в смысле Бора. Относительно функции $\varepsilon(t)$ также предполагаем, что $\varepsilon(t) = \delta(t) + h$, где $h > 0$ и функция $\displaystyle\int_0^t \delta(s)ds$ ограничена.

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{z} = \big(\varepsilon(t) - \alpha(t)z\big)z, \quad z(0) = z_0. \tag{3.7}$$

В этой задаче сделаем замену $y = \dfrac{1}{z}$ при условии, что $z \neq 0$ и перейдем к следующей задаче Коши

$$\dot{y} = -\varepsilon(t)y + \alpha(t), \quad y(0) = \frac{1}{z_0}.$$

Найдем общее решение этой задачи:

$$y(t) = \exp\left(-\int_0^t \varepsilon(v)dv\right)\left(\frac{1}{z_0} + \int_0^t \alpha(s)\exp\left(\int_0^s \varepsilon(v)dv\right)ds\right).$$

Тогда для ограниченности этого решения необходимо, чтобы

$$\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{z_0} + \int_0^t \alpha(s)\exp\left(\int_0^s \varepsilon(v)dv\right)ds\right) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{1}{z_0} = \int_{-\infty}^0 \alpha(s)\exp\left(\int_0^s \varepsilon(v)dv\right)ds. \tag{3.8}$$

Пусть $A = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\big|\alpha(t)\big|$, $\left|\displaystyle\int_0^t \delta(s)ds\right| \leqslant L$, тогда имеют место неравенства

$$\left|\alpha(s)\exp\left(-\int_0^s \varepsilon(v)dv\right)\right| \leqslant A\exp\left(-\int_0^s \varepsilon(v)dv\right) =$$
$$= A\exp\left(-\int_0^s \big(\delta(v) + h\big)dv\right) \leqslant A\exp\big(L + hs\big). \tag{3.9}$$

Так как $h > 0$, то интеграл (3.8) сходится. Следовательно, ограниченное решение существует и имеет вид

$$\widetilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(s) \exp\left(-\int_{s}^{t} \varepsilon(v)dv\right) ds.$$

Можно показать, что данное решение является почти периодическим, для этого нужно сделать выкладки аналогичные выкладкам доказательства леммы 3.3.

Согласно лемме 3.3, нужно чтобы для каждого $y \in \mathbb{R}$ было справедливо равенство

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : -\varepsilon(t)y + \alpha(t) = 0\big\}}{\vartheta} = 0. \qquad (3.10)$$

Вернемся к задаче (3.7), сделав обратную замену $z = \dfrac{1}{y}$ при условии, что $y \neq 0$. Тогда общим решением является функция

$$z(t) = \exp\left(\int_{0}^{t} \varepsilon(v)dv\right)\left(\frac{1}{z_0} + \int_{0}^{t} \alpha(s)\exp\left(\int_{0}^{s}\varepsilon(v)dv\right)ds\right)^{-1}$$

и при $z_0 = \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)\exp\left(\int_{0}^{s}\varepsilon(v)dv\right)ds\right)^{-1}$ мы получим почти периодическое решение уравнения Ферхюльста, которое обозначим $\widetilde{z}(t)$ (почти периодичность следует из того, что $\widetilde{y} = \dfrac{1}{\widetilde{z}}$ почти периодическая функция [7, с. 374]).

Из равенства (3.10) получаем равенство

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varepsilon(t) - \alpha(t)z = 0\}}{\vartheta} = 0.$$

Тогда выполнены все условия леммы 3.2 и можно сделать вывод, что для каждого $c > 0$ предел $\varkappa_c$ существует и $\varkappa_c = \widetilde{\varkappa}_c$. Кроме того, для любого $\lambda_0 \in [0,1]$ найдется значение $c = c(\lambda_0)$ такое, что размер популяции $z(t)$ не превышает $c(\lambda_0)$ с относительной частотой, равной λ_0 :

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : z(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : \widetilde{z}(t) \leqslant c\big\}}{\vartheta} = \lambda_0.$$

Глава II
Устойчивость множеств относительно управляемых систем с импульсным воздействием

Во второй главе в терминах функций А.М. Ляпунова и производной Ф. Кларка получены условия положительной инвариантности заданного множества $\mathfrak{M}$ относительно управляемой системы, устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Также доказаны утверждения о слабой положительной инвариантности и получены условия слабой асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$. Отметим, что в этой работе рассматривается функция Ляпунова относительно заданного множества и ее определение отличается от общепринятых.

Приводится практическое применение результатов этой главы. Рассматриваются модель конкуренции двух видов и модель изменения численности популяции вредителей в условиях биологического контроля. Используются аналитические методы, при невозможности получения результата таким способом применяются численные методы пакета Mathematica версии 11.0.1.

§ 4. Условия положительной инвариантности, устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости

Рассмотрим управляемую систему с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = g(x, w_i), \quad (t, x, u, w_i) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$; векторы w_i, $i = 1, 2, \ldots$, являются управляющими воздействиями, влияющими на поведение системы в моменты времени $t = \tau_i$, и принимают значения в заданном компактном множестве $W \subset \mathbb{R}^p$. Предполагаем, что функции $f(t, x, u)$ и $g(x, w)$ непрерывны для всех $(t, x, u) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и всех $(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ соответственно, решения системы (4.1) непрерывны справа. Относительно последовательности $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ полагаем, что

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{i \to \infty} \tau_i = +\infty.$$

О п р е д е л е н и е 4.1. *Допустимым процессом управляемой системы* (4.1) назовем функцию

$$t \to (u(t), w(t), x(t)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n,$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) управление $u(t)$ определено на $I = (t_0, \tau_1) \cup (\tau_1, \tau_2) \cup \ldots$, ограничено и измеримо по Лебегу;

2) $w(t) = 0$ при $t \in I$ и $w(\tau_i) = w_i$, $w_i \in W$,

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0) = g(x, w_i), \quad i = 1, 2, \ldots;$$

3) решение $x(t)$ в смысле Каратеодори системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u(t))$$

определено для всех $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$ и

$$x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) + g(x(\tau_i - 0), w_i), \quad i = 1, 2, \dots;$$

4) имеет место включение $u(t) \in U(t, x(t))$, где $U(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество и функция $(t, x) \mapsto U(t, x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Отвечающие допустимому процессу $(u(t), w(t), x(t))$ управления $u(t)$ и $w(t)$ называются *допустимыми управлениями* системы (4.1).

Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\},$$

заданное непрерывной в метрике Хаусдорфа функцией $t \mapsto M(t)$, где для каждого $t \in [t_0, +\infty)$ множество $M(t)$ непусто и замкнуто. Пусть $M^r(t)$ — замкнутая r-окрестность множества $M(t)$, то есть множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, что $\varrho(x, M(t)) \leqslant r$, $N^r(t) = M^r(t) \backslash M(t)$ — внешняя r-окрестность границы множества $M(t)$ (здесь $\varrho(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$). Построим множества

$$\mathfrak{M}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M^r(t)\big\},$$

$$\mathfrak{N}^r \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in N^r(t)\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 4.2 (см. [61, с. 13]). Функция $(t, x) \mapsto V(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица, если существует постоянная $l > 0$ такая, что для всех $(t, x) \in \mathfrak{M}^r$ выполнено неравенство

$$|V(t_1, x_1) - V(t_2, x_2)| \leqslant l(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|).$$

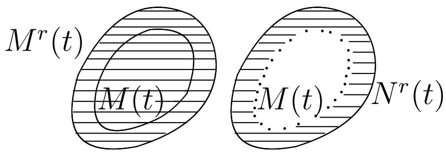

Рис. 4.1. Множества $M(t)$, $M^r(t)$, $N(t)$, $N^r(t)$.

О п р е д е л е н и е 4.3 (см. [40]). Скалярная функция $V(t,x)$ переменных $(t,x) \in [t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ называется *функцией Ляпунова* относительно множества $\mathfrak{M}$, если она удовлетворяет условию Липшица по переменным (t,x) и следующим условиям:

1) $V(t,x)=0$ для всех $(t,x)\in\mathfrak{M}$;

2) $V(t,x)>0$ для некоторого $r>0$ для всех $(t,x)\in\mathfrak{N}^r$.

Функция $V(t,x)$ называется *определенно положительной* (относительно множества $\mathfrak{M}$), если для каждого $\varepsilon\in(0,r)$ найдется такое $\delta>0$, что $V(t,x)\geqslant\delta$ для всех $(t,x)\in\mathfrak{M}^r\setminus\mathfrak{M}^\varepsilon$.

Поставим в соответствие системе $\dot{x}=f(t,x,u)$ дифференциальное включение

$$\dot{x}\in F(t,x),\quad F(t,x)=\overline{\mathrm{co}}\,H(t,x), \tag{4.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ множество $H(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i,x_i,U(t_i,x_i))$ при $(t_i,x_i)\to(t,x)$, $\overline{\mathrm{co}}\,H(t,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(t,x)$, то есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее множество $H(t,x)$. Поскольку функция $U(t,x)$ полунепрерывна сверху по (t,x), то функция $F(t,x)$ также полунепрерывна сверху, кроме того, множество $F(t,x)$ — непустое, ограниченное, замкнутое и выпуклое, поэтому для каждой начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ локальное решение включения (4.2) существует (см. [59, с. 60]).

У с л о в и е 4.1. Для любого $x_0 \in M^r(t_0)$ каждое решение $\varphi(t, x_0)$ включения (4.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0, x_0) = x_0$, определено при всех $t \geqslant t_0$.

Условия, при которых любое решение $\varphi(t_0, x_0)$ определено при всех $t \geqslant t_0$, сформулированы в теореме 10.2 работы [45].

О п р е д е л е н и е 4.4 (см. [10, с. 17]). Для липшицевой функции $V(t, x)$ *обобщенной производной* в точке $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q = (1, p)$, $p \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка) называется следующий предел

$$V^o(t, x; p) \doteq \limsup_{(\vartheta, y, \varepsilon) \to (t, x, +0)} \frac{V(\vartheta + \varepsilon, y + \varepsilon p) - V(\vartheta, y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(t, x) \doteq \inf\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; p)$, $V^o_{\max}(t, x) \doteq \sup\limits_{p \in F(t,x)} V^o(t, x; p)$ называются *нижней и верхней производной* функции V в силу включения (1.1).

О п р е д е л е н и е 4.5 (см. [37, гл. 5, с. 349], [40]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *положительно инвариантным* относительно управляемой системы (4.1), если для любого $x_0 \in M(t_0)$ каждое решение $x(t, x_0)$ системы (4.1) с начальным условием $x(t_0, x_0) = x_0$ удовлетворяет включению $(t, x(t, x_0)) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \geqslant t_0$.

О п р е д е л е н и е 4.6 (см. [37, гл. 5, с. 444], [41]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *устойчивым по Ляпунову* относительно управляемой системы (4.1), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого решения $x(t, x_0)$ системы (4.1) из условия $x_0 \in N^\delta(t_0)$ следует, что $(t, x(t, x_0)) \in \mathfrak{M}^\varepsilon$ при всех $t \in [t_0, +\infty)$.

Лемма 4.1. (см. [20]) *Пусть выполнено условие* 4.1. *Если существует функция Ляпунова* $V(t,x)$ *относительно множества* $\mathfrak{M}$ *такая, что неравенство* $V^o_{\max}(t,x) \leqslant 0$ *выполнено для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ *и*

$$\max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x,w)) \leqslant V(\tau_i, x) \quad \text{для всех } x \in M^r(\tau_i), i = 1, 2, \ldots, \tag{4.3}$$

то множество $\mathfrak{M}$ *положительно инвариантно относительно системы* (4.1). *Если, кроме того, функция Ляпунова* $V(t,x)$ *определенно положительная относительно множества* $\mathfrak{M}$, *то множество* $\mathfrak{M}$ *устойчиво по Ляпунову относительно системы* (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t,x_0)$ — произвольное решение системы (4.1), начинающееся в момент $t = t_0$ в множестве $M(t_0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t, x(t,x_0))$. Она является липшицевой на каждом интервале (τ_{i-1}, τ_i), $i = 1, 2, \ldots$. Действительно, при всех $t, t+\tau^* \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$, имеем

$$|v(t+\tau^*) - v(t)| = |V(t+\tau^*, x(t+\tau^*, x_0)) - V(t, x(t,x_0))| \leqslant$$

$$\leqslant l(|\tau^*| + \|x(t+\tau^*, x_0) - x(t,x_0)\|) \leqslant l\left(|\tau^*| + \left|\int\limits_t^{t+\tau^*} \dot{x}(s,x_0)ds\right|\right) =$$

$$= l\left(|\tau^*| + \left|\int\limits_t^{t+\tau^*} |f(s,x_0,u(s))|ds\right|\right) \leqslant l(|\tau^*| + k|\tau^*|) = l(1+k)|\tau^*|,$$

где l – константа Липшица функции $V(t, x(t,x_0))$, k – константа, ограничивающая $f(t,x,u)$. (Доказательство липшицевости функции $v(t)$ аналогично доказательству леммы 3 работы [40]). Тогда по теореме Радемахера (см. [58, с. 234]) функция $v(t)$ дифференцируема при почти всех t. Обозначим через $\operatorname{fr} M(t)$ границу множества $M(t)$. Пусть найдутся такие моменты времени t_1, t_2, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2$ и $x(t_1,x_0) \in \operatorname{fr} M(t_1)$, $x(t,x_0) \in N^r(t)$ при $t \in (t_1, t_2]$, тогда $v(t_2) = V(t_2, x(t_2, x_0)) > 0$. В точках дифференцируемости функции $v(t)$ выполнено следующее неравенство (см. [40]):

$$\dot{v}(t) \leqslant V^o_{\max}(t, x(t, x_0)),$$

поэтому, учитывая неравенство $V^o_{\max}(t, x) \leqslant 0$, имеем, что при почти всех $t \in (t_1, t_2]$ выполнено неравенство $\dot{v}(t) \leqslant 0$. Следовательно (см. [60, с. 133]), функция $v(t)$ является невозрастающей в тех промежутках интервала (t_1, t_2), на которых она непрерывна (точками разрыва $v(t)$ являются только точки τ_i). Далее рассмотрим функцию $v(t)$ в точках $\tau_i \in (t_1, t_2]$, тогда из неравенства (4.3) следует, что

$$\begin{gathered} v(\tau_i) = V(\tau_i, x(\tau_i, x_0)) = V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), w_i)\big) \leqslant \\ \leqslant \max_{w \in W} V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), w)\big) \leqslant \\ \leqslant V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\big) = v(\tau_i - 0). \end{gathered}$$

Таким образом, функция $v(t) = V(t, x(t, x_0))$ является невозрастающей вдоль любого решения системы (4.1), лежащего в $\mathfrak{N}^r$, поэтому справедливо $v(t_2) \leqslant v(t_1) = 0$. Получили противоречие с неравенством $v(t_2) > 0$.

Теперь покажем, что если $x(\tau_i - 0, x_0) \in M(\tau_i)$, то $x(\tau_i, x_0) \in M(\tau_i)$, то есть после момента скачка решение не выйдет из множества $\mathfrak{M}$. Пусть $x(\tau_i - 0, x_0) \in M(\tau_i)$, тогда

$$V(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)) = 0.$$

Из неравенства (4.3) следует, что

$$\begin{gathered} V(\tau_i, x(\tau_i, x_0)) = V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), \widehat{w}_i)\big) \leqslant \\ \leqslant V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\big) = 0, \end{gathered}$$

поэтому $V(\tau_i, x(\tau_i, x_0)) = 0$, что и означает, что $x(\tau_i, x_0) \in M(\tau_i)$.

Это доказывает положительную инвариантность множества $\mathfrak{M}$.

Покажем, что множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову. Выберем некоторое $\varepsilon \in (0, r)$ и обозначим

$$\alpha \doteq \alpha(\varepsilon) = \inf_{(t,x)} \{V(t,x) : (t,x) \in \operatorname{fr} \mathfrak{M}^{\varepsilon}\}.$$

Так как функция Ляпунова $V(t,x)$ определенно положительная относительно множества $\mathfrak{M}$, то $\alpha > 0$. По данному ε построим такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что $V(t_0, x) < \alpha$ для всех $x \in N^{\delta}(t_0)$ (так как, в силу того, что $V(t,x)$ липшицева, функция V равномерно непрерывна, такое δ существует). Предположим, что найдется t^* такое, что $(t^*, x(t^*, x_0)) \in \operatorname{fr} \mathfrak{M}^{\varepsilon}$. Так как $v(t_0) = V(t_0, x_0) < \alpha$, получаем противоречие

$$\alpha \leqslant v(t^*) \leqslant v(t_0) < \alpha,$$

которое доказывает, что множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову. $\square$

О п р е д е л е н и е 4.7 (см. [37, гл. 5, с. 444], [41]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *асимптотически устойчивым* относительно системы (4.1), если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое число $r > 0$, что для каждого решения $x(t, x_0)$ системы (4.1), удовлетворяющего начальному условию $x_0 \in N^r(t_0)$, имеет место равенство $\lim\limits_{t \to \infty} \varrho\big(x(t, x_0), M(t)\big) = 0$.

Отметим, что если положить множество $\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t) = 0\big\}$, то получатся классические определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости.

Теорема 4.1. (см. [20]) *Пусть выполнено условие* 4.1 *и существует функция* $V(t,x)$ — *определенно положительная функция Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *такая, что неравенство* $V^{o}_{\max}(t,x) \leqslant 0$ *выполне-*

но для всех $(t,x)\in\mathfrak{N}^r$ *и*

$$\max_{w\in W} V(\tau_i, x+g(x,w)) - V(\tau_i,x) \leqslant -\psi\big(V(\tau_i,x)\big)$$
$$\text{для всех } x\in N^r(\tau_i), i=1,2,\ldots, \tag{4.4}$$

где $\psi(s)$ *— непрерывная при* $s\geqslant 0$ *функция такая, что* $\psi(0)=0$ *и* $\psi(s)>0$ *при* $s>0$. *Тогда множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно системы* (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку из неравенства (4.4) следует неравенство (4.3), то в силу леммы 4.1 множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову; покажем, что оно асимптотически устойчиво по Ляпунову. Пусть $x(t,x_0)$ — решение системы (4.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0)=x_0\in M^r(t_0)$. Если $x_0\in M(t_0)$, то из леммы 4.1 следует, что $x(t,x_0)\in M(t)$ при всех $t\in[t_0,+\infty)$, поэтому равенство

$$\lim_{t\to\infty}\varrho(x(t,x_0),M(t))=0$$

выполнено. Пусть теперь $x_0\in N^r(t_0)$. Рассмотрим функцию

$$v(t)=V(t,x(t,x_0))$$

и докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)=0$. Неравенство $V^o_{\max}(t,x)\leqslant 0$, $(t,x)\in\mathfrak{N}^r$ гарантирует невозрастание функции $v(t)$ в промежутках ее непрерывности (или в промежутках непрерывности до момента, при котором точка $(t,x(t,x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, если такой момент времени существует). Далее рассмотрим функцию $v(t)$ в точках τ_i, для которых $v(\tau_i)>0$. Тогда из неравенства (4.4) следует, что для любого $w\in W$ выполняется

$$v(\tau_i)=V\big(\tau_i,x(\tau_i,x_0)\big)=V\big(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0)+g(x(\tau_i-0,x_0),w)\big)\leqslant$$
$$\leqslant V\big(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0)\big)-\psi\big(V(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0))\big)\leqslant v(\tau_i-0).$$

Следовательно, $v(t)$ является невозрастающей для всех $t \in [t_0, +\infty)$ (или до момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$). Отметим, что, начиная с момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, выполнено равенство $v(t) = 0$, поэтому в случае существования такого момента $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.

Пусть точка $(t, x(t, x_0))$ не принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Тогда для всех $t \in [t_0, +\infty)$ функция $v(t)$ является невозрастающей и удовлетворяет неравенству $v(t) > 0$. Таким образом, существует $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = a \geqslant 0$. Предположим, что $a > 0$. Пусть $c = \min\limits_{a \leqslant s \leqslant v(0)} \psi(s)$. В силу (4.4) имеем

$$v(\tau_i) - v(\tau_i - 0) \leqslant -\psi(v(\tau_i - 0))$$

при всех $i = 1, 2, \ldots$. Поскольку $a \leqslant v(\tau_i) \leqslant v(0)$, то $\psi(v(\tau_i - 0)) \geqslant c$, следовательно,

$$v(\tau_i) - v(\tau_i - 0) \leqslant -c.$$

Из невозрастания функции $v(t)$ следует, что $v(\tau_i) \geqslant v(\tau_{i+1} - 0)$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Отсюда для любого натурального k получаем

$$v(\tau_k) \leqslant v(\tau_k) + \sum_{i=0}^{k-1} (v(\tau_i) - v(\tau_{i+1} - 0)) = v(0) + \sum_{i=1}^{k} (v(\tau_i) - v(\tau_i - 0)) \leqslant v(0) - kc.$$

Правая часть последнего неравенства при больших значениях k становится отрицательной, что противоречит тому, что $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = a > 0$. Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.

Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho(x(t, x_0), M(t)) = 0$. Предположим противное, тогда существуют константа $\varepsilon \in (0, r)$ и последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $t_i \to \infty$ и $\varrho(x(t_i, x_0), M(t_i)) > \varepsilon$. Следовательно, $(t_i, x(t_i, x_0)) \notin \mathfrak{M}^{\varepsilon}$, и так как функция V определенно положительная, то найдется такое $\delta > 0$, что $V(t_i, x(t_i, x_0)) \geqslant \delta$. Это противоречит тому, что

$$\lim_{t\to\infty} V(t, x(t, x_0)) = \lim_{t\to\infty} v(t) = 0.$$

$\square$

В следующей теореме получены другие достаточные условия асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$. Здесь предполагаются более сильные ограничения на верхнюю производную $V^o_{\max}(t, x)$ в силу дифференциального включения, но ослабляется неравенство (4.4). Отметим, что подобное утверждение для систем без импульсного воздействия доказано в работе [41].

Теорема 4.2. (см. [30]) *Пусть существуют функции $V(t, x)$ и $q(t, z)$ такие, что:*

1) $V(t, x)$ — *определенно положительная функция Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$;

2) *функция $q(t, z)$ локально липшицева по z, $q(t, 0) \equiv 0$ и тривиальное решение уравнения $\dot{z} = q(t, z)$ асимптотически устойчиво (в классическом смысле)*;

3) $V^o_{\max}(t, x) \leqslant q\big(t, V(t, x)\big)$ *для всех* $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$;

4) $\max\limits_{w\in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant V(\tau_i, x)$ *для всех* $x \in M^r(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Тогда множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво относительно управляемой системы (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t, x_0)$ — решение системы (4.1), удовлетворяющее начальному условию $x_0 \in N^r(t_0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t, x(t, x_0))$. Функция $v(t)$ является липшицевой на каждом интервале (τ_{i-1}, τ_i), $i = 1, 2, \ldots$ в силу леммы 3 работы [40]; тогда по теореме

Радемахера (см. [58, с. 234]) она дифференцируема при почти всех t. В точках дифференцируемости функции $v(t)$ выполнено следующее неравенство (см. [40]):

$$\dot{v}(t) \leqslant V^o_{\max}\bigl(t, x(t, x_0)\bigr);$$

поэтому из $V^o_{\max}(t, x) \leqslant q\bigl(t, V(t, x)\bigr)$ получаем, что $\dot{v}(t) \leqslant q(t, v(t))$ на каждом интервале (τ_{i-1}, τ_i), $i = 1, 2, \ldots$.

Пусть $z(t)$ является решением уравнения $\dot{z} = q(t, z)$, удовлетворяющим начальному условию $z(t_0) = v(t_0)$, тогда $v(t) \leqslant z(t)$ для всех $t \in [\tau_0, \tau_1)$ по теореме С.А. Чаплыгина [62]. В силу условия 4) данной теоремы, для любого $w \in W$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} v(\tau_i) = V\bigl(\tau_i, x(\tau_i, x_0)\bigr) = V\bigl(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), w)\bigr) \leqslant \\ \leqslant V\bigl(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\bigr) = V\bigl(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0, x_0)\bigr) = v(\tau_i - 0),\ i = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

поэтому $v(\tau_1) \leqslant v(\tau_1 - 0) \leqslant z(\tau_1 - 0) = z(\tau_1)$. Применяя далее теорему Чаплыгина на каждом из отрезков $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 2, 3, \ldots$, получаем, что $v(t) \leqslant z(t)$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательтву теоремы 4.1. □

Теорема 4.3. (см. [30]) *Предположим, что существуют $\alpha < 0$ и функция Ляпунова $V(t, x)$ относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что неравенство $V^o_{\max}(t, x) \leqslant \alpha < 0$ выполнено для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ и*

$$\max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant V(\tau_i, x) \quad \textit{для всех } x \in M^r(\tau_i),\ i = 1, 2, \ldots. \tag{4.5}$$

Тогда для каждого решения $x(t, x_0)$ системы (4.1), удовлетворяющего начальному условию $x_0 \in N^r(t_0)$, существует момент времени $t^* =$

$t^*(x(t,x_0)) > t_0$ *такой, что точка* $(t, x(t,x_0))$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}$ *при всех* $t \in [t^*, +\infty)$.

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ *определенно положительная, то множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво относительно управляемой системы* (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t,x_0)$ — решение системы (4.1), удовлетворяющее начальному условию $x_0 \in N^r(t_0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t, x(t,x_0))$ и покажем, что для каждой начальной точки $x_0 \in N^r(t_0)$ существует такой момент времени $t^* = t^*(x(t,x_0)) > t_0$, что $v(t) = 0$ при всех $t \geqslant t^*$. Так же, как при доказательстве теоремы 4.2, из неравества $V^o_{\max}(t,x) \leqslant \alpha < 0$ получаем, что $\dot{v}(t) \leqslant \alpha < 0$ на каждом интервале (τ_{i-1}, τ_i), $i = 1, 2, \ldots$ (до момента, при котором точка $(t, x(t,x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$).

В силу (4.5), для любого $w \in W$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} v(\tau_i) = V\big(\tau_i, x(\tau_i, x_0)\big) = V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), w)\big) \leqslant \\ \leqslant V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\big) = V\big(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0, x_0)\big) = v(\tau_i - 0), \ i = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Так как $x_0 \in N^r(t_0)$, то по определению функции Ляпунова

$$v(t_0) = V(t_0, x_0) > 0.$$

Из неравенства $\dot{v}(t) \leqslant \alpha < 0$ следует, что $v(t) \leqslant \alpha(t - t_0) + v(t_0)$ для всех $t \in [t_0, \tau_1)$. Далее,

$$v(\tau_1) \leqslant v(\tau_1 - 0) \leqslant \alpha(\tau_1 - t_0) + v(t_0),$$

$v(t) \leqslant \alpha(t - \tau_1) + v(\tau_1)$ для всех $t \in [\tau_1, \tau_2)$; поэтому $v(t) \leqslant \alpha(t - t_0) + v(t_0)$ для всех $t \in [t_0, \tau_2)$. Аналогично, $v(t) \leqslant \alpha(t - t_0) + v(t_0)$ для всех $t \geqslant t_0$, для которых $v(t) > 0$. Следовательно, $t^* \leqslant t_0 - \alpha^{-1} v(t_0)$ и $v(t) = 0$ при всех

$t \geqslant t^*$. Это означает, что точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ при всех $t \geqslant t^*$.

Если функция Ляпунова $V(t, x)$ определенно положительная, то в силу леммы 4.1 множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову относительно управляемой системы (4.1). Отсюда, с учетом доказанного выше, следует, что $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно управляемой системы (4.1). $\square$

§ 5. Условия слабой положительной инвариантности, слабой устойчивости по Ляпунову и слабой асимптотической устойчивости

Продолжаем рассматривать управляемую систему с импульсным воздействием

$$
\begin{gathered}
\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_i, \\
\Delta x|_{t=\tau_i} = g(x, w_i), \quad (t, x, u, w_i) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p.
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

О п р е д е л е н и е 5.1 (см. [41]). Множество

$$
\mathfrak{M} \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}
$$

называется *слабо положительно инвариантным* относительно системы (5.1), если для любой начальной точки $x_0 \in M(t_0)$ существует решение $x(t, x_0)$ системы (5.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, x_0) = x_0$ и включению $(t, x(t, x_0)) \in \mathfrak{M}$ при всех $t \geqslant t_0$.

О п р е д е л е н и е 5.2 (см. [41]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо устойчивым по Ляпунову* относительно системы (5.1), если для любого

$\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой начальной точки $x_0 \in N^\delta(t_0)$ найдется решение $x(t, x_0)$ системы (5.1), которое удовлетворяет включению $(t, x(t, x_0)) \in \mathfrak{M}^\varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

Лемма 5.1. (см. [23]) *Пусть выполнено условие* 4.1. *Если существует функция Ляпунова $V(t,x)$ относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ выполнено неравенство $V^o_{\min}(t,x) \leqslant 0$ и найдутся такие $\widehat{w}_i \in W$, что*

$$V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w}_i)) \leqslant V(\tau_i, x) \quad \text{для всех } x \in M^r(\tau_i), i = 1, 2, \ldots, \tag{5.2}$$

то множество $\mathfrak{M}$ слабо положительно инвариантно относительно системы (5.1).

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ определенно положительная, то множество $\mathfrak{M}$ слабо устойчиво по Ляпунову относительно системы (5.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ определим множество

$$\overline{U}(t,x) \doteq \begin{cases} u \in U(t,x) : V^o(t,x; f(t,x,u)) \leqslant 0, & \text{если } (t,x) \in \mathfrak{N}^r, \\ U(t,x), & \text{если } (t,x) \in \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Из неравенства $V^o_{\min}(t,x) \leqslant 0$ следует, что данное множества непусто. Множество $\overline{U}(t,x)$ ограничено для каждого $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$, поскольку $\overline{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$. Покажем, что это множество замкнуто. Действительно, если последовательность $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ такова, что $u_i \in \overline{U}(t,x)$ и $u_i \to u$, то $f(t,x,u_i) \to f(t,x,u)$ и в силу липшицевости функции $f \to V^o(t,x;f)$ [10, с. 32] выполнено неравенство

$$V^o(t,x; f(t,x,u)) = \lim_{i\to\infty} V^o(t,x; f(t,x,u_i)) \leqslant 0.$$

Поставим в соответствие множеству $\overline{U}(t,x)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \overline{F}(t,x), \quad \overline{F}(t,x) = \overline{\mathrm{co}}\,\overline{H}(t,x), \tag{5.3}$$

где $\overline{H}(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i,x_i,\overline{U}(t_i,x_i))$ при $(t_i,x_i) \to (t,x)$, $\overline{\mathrm{co}}\,\overline{H}(t,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $\overline{H}(t,x)$, то есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее $\overline{H}(t,x)$.

Функции $(t,x) \mapsto \overline{H}(t,x)$ и $(t,x) \mapsto \overline{F}(t,x)$ полунепрерывны сверху по лемме 10.1 работы [45]. Тогда в силу теоремы 2 работы [4, с. 213] существуют решения $\overline{\varphi}_i(t,x_i)$ дифференциального включения (5.3), удовлетворяющие начальному условию $\overline{\varphi}_i(\tau_i,x_i) = x_i$, $i = 0,1,2,\ldots$. Из определения множества $\overline{U}(t,x)$ следует, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ имеет место включение $\overline{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$, поэтому $\overline{F}(t,x) \subseteq F(t,x)$. Следовательно, $\overline{\varphi}_i(t,x_i)$ — решения дифференциального включения (5.3) также являются решениями исходного дифференциального включения (4.2) и каждое из них, в силу условия 4.1 о нелокальной продолжаемости всех решений вправо, определено при всех $t \geqslant t_0$.

Определим решение $x(t,x_0)$ системы (5.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0) = x_0 \in M(t_0)$, которое на $[t_0,\tau_1)$ совпадает с $\overline{\varphi}_0(t,x_0)$ и на каждом из промежутков $[\tau_i,\tau_{i+1})$ совпадает с решением $\overline{\varphi}_i(t,x_i)$, где

$$x_i = \overline{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1}) + g\big(\overline{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1}),\widehat{w}_i\big), \quad \widehat{w}_i \in W, \quad i = 1,2,\ldots.$$

Для этого решения построим функцию $v(t) = V(t,x(t,x_0))$, тогда в силу леммы 9 работы [50] из $V^o_{\min}(t,x) \leqslant 0$ следует, что неравенство $\dot{v}(t) \leqslant 0$ выполнено при почти всех $t \geqslant t_0$, для которых $x(t,x_0) \in N^r(t)$. Следовательно (см. [60, с. 133]), функция $v(t)$ является невозрастающей в точках непрывности промежутка $[t_0,+\infty)$, при которых $x(t,x_0) \in N^r(t)$ (точками разрыва $v(t)$ являются только точки τ_i). Обозначим через $\operatorname{fr} M(t)$ границу множества $M(t)$. Предположим, что найдутся такие моменты времени t_1, t_2, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2$ и $x(t_1, x_0) \in \operatorname{fr} M(t_1)$, $x(t, x_0) \in N^r(t)$ при $t \in (t_1, t_2]$, тогда $v(t_2) = V(t_2, x(t_2, x_0)) > 0$.

Рассмотрим функцию $v(t)$ в точках $\tau_i \in (t_1, t_2]$, тогда из того, что неравенство (5.2) верно для любых $x \in N^r(\tau_i), i = 1, 2, \ldots$ получаем

$$v(\tau_i) = V(\tau_i, x(\tau_i, x_0)) = V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), \widehat{w}_i)\big) \leqslant$$
$$\leqslant V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\big) = v(\tau_i - 0).$$

Таким образом, функция $v(t) = V(t, x(t, x_0))$ является невозрастающей вдоль любого решения системы (5.1), лежащего в $\mathfrak{N}^r$, поэтому

$$v(t_2) \leqslant v(t_1) = 0.$$

Получили противоречие с неравенством $v(t_2) > 0$. Это доказывает, что решение $x(t, x_0)$ не покидает множество $\mathfrak{M}$ при $t \neq \tau_i$.

Теперь покажем, что если $x(\tau_i - 0, x_0) \in M(\tau_i)$, то $x(\tau_i, x_0) \in M(\tau_i)$, то есть после момента скачка решение не выйдет из множества $\mathfrak{M}$. Пусть $x(\tau_i - 0, x_0) \in M(\tau_i)$, тогда $V(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)) = 0$.

Из неравенства (5.2) следует, что

$$V(\tau_i, x(\tau_i, x_0)) = V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), \widehat{w}_i)\big) \leqslant$$
$$\leqslant V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0)\big) = 0,$$

поэтому $V(\tau_i, x(\tau_i, x_0)) = 0$, что и означает, что $x(\tau_i, x_0) \in M(\tau_i)$. Таким образом, множество $\mathfrak{M}$ слабо положительно инвариантно.

Покажем, что множество $\mathfrak{M}$ слабо устойчиво по Ляпунову. Для этого построим решение $x(t, x_0)$ системы (5.1) так же, как в предыдущем абзаце, но с начальным условием $x(t_0, x_0) = x_0 \in N^\delta(t_0)$. Выберем $\varepsilon \in (0, r)$ и обозначим

$$\alpha \doteq \alpha(\varepsilon) = \inf_{(t,x)} \{V(t,x) : (t,x) \in \operatorname{fr} \mathfrak{M}^{\varepsilon}\}.$$

Так как функция Ляпунова $V(t,x)$ определенно положительная, то $\alpha > 0$. По данному ε построим такое $\delta \in (0,\varepsilon)$, что $V(t,x) < \alpha$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^{\delta}$ (так как функция V равномерно непрерывна, такое δ существует). Предположим, что найдется t^* такое, что $(t^*, x(t^*, x_0)) \in \operatorname{fr} \mathfrak{M}^{\varepsilon}$. Так как $v(t_0) = V(t_0, x_0) < \alpha$, получаем противоречие

$$\alpha \leqslant v(t^*) \leqslant v(t_0) < \alpha,$$

которое доказывает, что множество $\mathfrak{M}$ слабо устойчиво по Ляпунову. □

О п р е д е л е н и е 5.3 (см. [41]). Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо асимптотически устойчивым* относительно системы (5.1), если оно слабо устойчиво по Ляпунову и существует такое $r > 0$, что для любой начальной точки $x_0 \in N^r(t_0)$ найдется такое решение $x(t, x_0)$ системы (5.1), что $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho(x(t,x_0), M(t)) = 0$.

Теорема 5.1. (см. [23]) *Пусть выполнено условие* 4.1 *и существует функция $V(t,x)$ — определенно положительная функция Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ выполнено неравенство $V^{o}_{\min}(t,x) \leqslant 0$ и найдутся такие $\widehat{w}_i \in W$, что*

$$\begin{gathered} V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w}_i)) - V(\tau_i, x) \leqslant -\psi\big(V(\tau_i, x)\big) \\ \textit{для всех } x \in N^r(\tau_i), i = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{5.4}$$

где $\psi(s)$ — непрерывная при $s \geqslant 0$ функция такая, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(s) > 0$ при $s > 0$. Также предполагаем, что если $x \in M(\tau_i)$, то $x + g(x, \widehat{w}_i) \in M(\tau_i)$. Тогда множество $\mathfrak{M}$ слабо асимптотически устойчиво относительно системы (5.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $(t,x)\in\mathfrak{N}^r$ определим множество

$$\overline{U}(t,x)\doteq\begin{cases}u\in U(t,x):V^o(t,x;f(t,x,u))\leqslant 0, & \text{если } (t,x)\in\mathfrak{N}^r,\\ U(t,x), \quad \text{если } (t,x)\in\mathfrak{M}.\end{cases}$$

Согласно доказательству предыдущей леммы существуют решения $\overline{\varphi}_i(t,x_i)$ дифференциального включения (4.2), удовлетворяющие начальному условию $\overline{\varphi}_i(\tau_i,x_i)=x_i$, $i=0,1,2,\ldots$. Определим решение $x(t,x_0)$ системы (5.1) с начальным условием $x(t_0,x_0)=x_0\in M(t_0)$, которое на $[t_0,\tau_1)$ совпадает с $\overline{\varphi}_0(t,x_0)$ и на каждом из промежутков $[\tau_i,\tau_{i+1})$ совпадает с решением $\overline{\varphi}_i(t,x_i)$, где

$$x_i=\overline{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1})+g\big(\overline{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1}),\widehat{w}_i\big),\quad \widehat{w}_i\in W,\quad i=1,2,\ldots.$$

Если $x_0\in M(t_0)$, то из леммы 5.1 следует, что $x(t,x_0)\in M(t)$ при всех $t\in[t_0,+\infty)$, поэтому равенство $\lim\limits_{t\to\infty}\varrho(x(t,x_0),M(t))=0$ выполнено. Пусть теперь для начального условия x_0 имеет место включение

$$x_0\in N^r(t_0)=M^r(t_0)\setminus M(t_0).$$

Рассмотрим функцию $v(t)=V(t,x(t,x_0))$ и докажем, что $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=0$.

Неравество $V^o_{\min}(t,x)\leqslant 0$ гарантирует невозрастание функции $v(t)$ в промежутках ее непрерывности (или в промежутках непрерывности до момента, при котором точка $(t,x(t,x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, если такой момент времени существует). Далее рассмотрим функцию $v(t)$ в точках τ_i, для которых $v(\tau_i)>0$. Тогда из неравенства (5.4) следует, что существует такое $\widehat{w}\in W$, для которого

$$v(\tau_i)=V\big(\tau_i,x(\tau_i,x_0)\big)=V\big(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0)+g(x(\tau_i-0,x_0),\widehat{w})\big)\leqslant$$
$$\leqslant V\big(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0)\big)-\psi\big(V(\tau_i,x(\tau_i-0,x_0))\big)\leqslant v(\tau_i-0).$$

Отсюда следует, что функция $v(t)$ является невозрастающей для любого $t \in [t_0, +\infty)$ (или до момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$). Отметим, что, начиная с момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит $\mathfrak{M}$, выполнено равенство $v(t) = 0$, поэтому в случае существования такого момента $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.

Пусть точка $(t, x(t, x_0))$ не принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Тогда для всех $t \in [t_0, +\infty)$ функция $v(t)$ является невозрастающей и удовлетворяет неравенству $v(t) > 0$. Таким образом, существует $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = a \geqslant 0$. Предположим, что $a > 0$. Пусть $c = \min\limits_{a \leqslant s \leqslant v(0)} \psi(s)$. В силу (5.4) имеем

$$v(\tau_i) - v(\tau_i - 0) = V\big(\tau_i, x(\tau_i, x_0)\big) - V\big(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0, x_0)\big) =$$
$$= V\big(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0) + g(x(\tau_i - 0, x_0), \widehat{w})\big) - V\big(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0, x_0)\big) \leqslant$$
$$\leqslant -\psi\big(V(\tau_i, x(\tau_i - 0, x_0))\big) \leqslant -\psi(v(\tau_i - 0))$$

при всех $i = 1, 2, \ldots$. Поскольку $a \leqslant v(\tau_i) \leqslant v(0)$, то $-\psi(v(\tau_i - 0)) \leqslant -c$, следовательно,

$$v(\tau_i) - v(\tau_i - 0) \leqslant -c.$$

Из невозрастания функции $v(t)$ следует, что $v(\tau_i) \geqslant v(\tau_{i+1} - 0)$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Отсюда для любого натурального k получаем

$$v(\tau_k) \leqslant v(\tau_k) + \sum_{i=0}^{k-1} (v(\tau_i) - v(\tau_{i+1} - 0)) = v(0) + \sum_{i=1}^{k} (v(\tau_i) - v(\tau_i - 0)) \leqslant v(0) - kc.$$

Правая часть последнего неравенства при больших значениях k становится отрицательной, что противоречит тому, что $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = a > 0$. Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.

Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho(x(t, x_0), M(t)) = 0$. Предположим противное, тогда существуют константа $\varepsilon \in (0, r)$ и последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $t_i \to \infty$ и $\varrho(x(t_i, x_0), M(t_i)) > \varepsilon$. Следовательно, $(t_i, x(t_i, x_0)) \notin \mathfrak{M}^{\varepsilon}$, и так как функция V определенно положительная, то найдется такое $\delta > 0$, что $V(t_i, x(t_i, x_0)) \geqslant \delta$. Это противоречит тому, что

$$\lim_{t\to\infty} V(t, x(t, x_0)) = \lim_{t\to\infty} v(t) = 0.$$

$\square$

Далее сформулированы другие достаточные условия слабой асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$. Здесь предполагаются более сильные ограничения на нижнюю производную в силу дифференциального включения, но ослабляется неравенство (5.4).

Теорема 5.2. (см. [30]) *Пусть существуют функции $V(t, x)$ и $q(t, z)$ такие, что:*

1) $V(t, x)$ *— определенно положительная функция Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$;*

2) *функция $q(t, z)$ локально липшицева по z, $q(t, 0) \equiv 0$ и тривиальное решение уравнения $\dot{z} = q(t, z)$ асимптотически устойчиво (в классическом смысле);*

3) $V^o_{\min}(t, x) \leqslant q\big(t, V(t, x)\big)$ *для всех $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$;*

4) *найдутся такие $\widehat{w}_i \in W$, что $V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w}_i)) \leqslant V(\tau_i, x)$ для всех $x \in M^r(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.*

Тогда множество $\mathfrak{M}$ слабо асимптотически устойчиво относительно системы (5.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $(t, x) \in \mathfrak{M}^r$ определим множество

$$\widehat{U}(t, x) \doteq \begin{cases} u \in U(t, x) : V^o(t, x; f(t, x, u)) \leqslant q\big(t, V(t, x)\big), & \text{если } (t, x) \in \mathfrak{N}^r, \\ U(t, x), & \text{если } (t, x) \in \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Множество $\widehat{U}(t,x)$ непусто в силу условия 3) теоремы и ограничено, так как $\widehat{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$ при всех $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$. Замкнутость $\widehat{U}(t,x)$ доказана в лемме 1 работы [18]. Поставим в соответствие множеству $\widehat{U}(t,x)$ дифференциальное включение (5.3).

Поскольку $\widehat{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$, то $\widehat{F}(t,x) \subseteq F(t,x)$ также для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$. Следовательно, $\widehat{\varphi}_i(t,x_i)$ — решения дифференциального включения (5.3) являются решениями исходного дифференциального включения (4.2) и каждое из них, в силу условия 4.1 о нелокальной продолжаемости всех решений вправо, определено при всех $t \in [t_0, +\infty)$. Пусть $\widehat{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют четвертому условию теоремы. Определим решение $x(t,x_0)$ системы (4.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0) = x_0 \in N^r(t_0)$, которое на $[t_0,\tau_1)$ совпадает с $\widehat{\varphi}_0(t,x_0)$ и на каждом из промежутков $[\tau_i,\tau_{i+1})$ совпадает с решением $\widehat{\varphi}_i(t,x_i)$, где

$$x_i = \widehat{\varphi}_{i-1}(\tau_i, x_{i-1}) + g\big(\widehat{\varphi}_{i-1}(\tau_i, x_{i-1}), \widehat{w}_i\big), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Для этого решения построим функцию $v(t) = V(t, x(t,x_0))$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 4.2. $\square$

Доказательство следующего утверждения комбинирует доказательства теорем 4.3 и 5.2.

Теорема 5.3. (см. [30]) *Предположим, что существуют $\alpha < 0$ и функция Ляпунова $V(t,x)$ относительно множества $\mathfrak{M}$ такая, что неравенство $V^o_{\min}(t,x) \leqslant \alpha < 0$ выполнено для всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ и найдутся такие $\widehat{w}_i \in W$, что*

$$V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w}_i)) \leqslant V(\tau_i, x) \quad \text{для всех } x \in M^r(\tau_i), \ i = 1, 2, \ldots.$$

Тогда для каждой начальной точки $x_0 \in N^r(t_0)$ существует решение $x(t,x_0)$ системы (5.1), для которого найдется момент времени $t^* =$

$t^*(x(t,x_0)) > t_0$ *такой, что точка* $(t, x(t,x_0))$ *принадлежит* $\mathfrak{M}$ *при всех* $t \in [t^*, +\infty)$.

Если, кроме того, функция Ляпунова $V(t,x)$ *определенно положительная, то множество* $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно управляемой системы* (5.1).

§ 6. Аналитические и компьютерные исследования устойчивости множеств относительно управляемых систем с импульсным воздействием

П р и м е р 6.1. Рассмотрим модель конкуренции двух видов, численности которых равны x_1, x_2. Каждый из видов размножается в соответствии с логистическим законом, а при встрече численность как одного, так и другого вида уменьшается. В моменты времени τ_i на систему оказывается внешнее воздействие, в результате которого численности обоих видов сокращаются. Предполагаем, что данная модель задана следующей системой с импульсным управлением:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1^2 - a x_1 x_2, \quad t \neq \tau_i, \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_2^2 - b x_1 x_2, \quad t \neq \tau_i, \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1|_{t=\tau_i} = w_1 x_1 \doteq g_1(x_1, x_2, w_1, w_2), \\ \Delta x_2|_{t=\tau_i} = w_2 x_2 \doteq g_2(x_1, x_2, w_1, w_2). \end{cases} \tag{6.2}$$

Здесь $\tau_i = ih$, $i = 1, 2, \ldots$, $h > 0$; $a > 0$, $b > 0$ — константы взаимодействия видов, w_1, w_2 — параметры управления,

$$w = (w_1, w_2) \in W \doteq [w_{11}, w_{12}] \times [w_{21}, w_{22}], -1 < w_{12} < 0, -1 < w_{22} < 0.$$

Оба вида могут сосуществовать, если произведение коэффициентов межпопуляционного взаимодействия $ab < 1$ (см. [43, с. 147]).

Обозначим $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$ и

$$f_1(t, x_1, x_2) \doteq x_1 - x_1^2 - ax_1x_2, \quad f_2(t, x_1, x_2) \doteq x_2 - x_2^2 - bx_1x_2.$$

О п р е д е л е н и е 6.1 (см. [48]). Будем говорить, что функции $f_1(t, x_1, x_2), f_2(t, x_1, x_2), g_1(x_1, x_2, w_1, w_2)$ и $g_2(x_1, x_2, w_1, w_2)$ удовлетворяют *условию квазиположительности*, если для любых $(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2_+$ и любых допустимых управлений имеют место неравенства

$$f_1(t, 0, x_2) \geqslant 0, \quad f_2(t, x_1, 0) \geqslant 0,$$

$$x_1 + g_1(x_1, x_2, w_1, w_2) \geqslant 0, \quad x_2 + g_2(x_1, x_2, w_1, w_2) \geqslant 0.$$

Если выполнены условия квазиположительности, то решения системы с импульсным воздейсвием (4.1) неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях (см. [48]). Покажем, что для системы (6.1), (6.2) условия квазиположительности выполняются. Действительно, так как $f_1(t, 0, x_2) = 0, f_2(t, x_1, 0) = 0$ и

$$x_1 + w_1x_1 = (1 + w_1)x_1 \geqslant 0, \quad x_2 + w_2x_2 = (1 + w_2)x_2 \geqslant 0$$

для всех $t \geqslant 0, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$, то условия квазиположительности выполняются. Тогда решения заданной системы неотрицательны.

Пусть M — треугольник, заданный следующим образом:

$$M = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 \leqslant C\big\},$$

где $C > 0$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^3 : x \in M\}$ и функцию

$$V(t, x_1, x_2) = V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \ \text{ если } \ (x_1, x_2) \in M, \\ x_1 + x_2 - C, \ \text{если } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M, \end{cases}$$

которая является функцией Ляпунова относительно данного множества. Найдем ее производную в силу системы (6.1) при $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M$:

$$V^o(x_1, x_2) = x_1 - x_1^2 - ax_1x_2 + x_2 - x_2^2 - bx_1x_2.$$

Найдем максимум функции $V^o(x_1, x_2)$ в области $\mathbb{R}^2_+ \setminus M$. Если

$$(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \left(\frac{1}{a+b+2}, \frac{1}{a+b+2}\right) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M,$$

то максимальное значение $V^o(x_1, x_2)$ в $\mathbb{R}^2_+ \setminus M$ равно

$$\frac{1}{a+b+2} > 0,$$

то есть неравенство $V^o(x_1, x_2) \leqslant 0$ не может выполняться для всех точек из $\mathbb{R}^2_+ \setminus M$. Отметим, что $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M$ при $C < \dfrac{2}{a+b+2}$.

Несложно показать, что если $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in M$, то максимальное значение $V^o(x_1, x_2)$ достигается на отрезке $x_1 + x_2 = C, x_1 \in [0, C]$. Вычисляя

$$V^o(x_1, C - x_1) = x_1 - x_1^2 - ax_1(C - x_1) + C - x_1 - (C - x_1)^2 - bx_1(C - x_1) =$$
$$= (a + b - 2)x_1^2 - C(a + b - 2)x_1 + C - C^2,$$

находим, что условный максимум функции $V^o(x_1, x_2)$ достигается в точке $(x_1^*, x_2^*) = \left(\dfrac{C}{2}, \dfrac{C}{2}\right)$ и его значение равно

$$V^o(x_1^*, x_2^*) = C - \frac{(a+b+2)C^2}{4}.$$

Найдем условие, при котором $V^o(x_1^*, x_2^*) \leqslant 0$, то есть

$$C - \frac{(a+b+2)C^2}{4} \leqslant 0.$$

Решая это неравенство, получим следующее ограничение

$$C \geqslant \frac{4}{a+b+2}.$$

При этом вторая производная функции $h(x_1) \doteq V^o(x_1, C-x_1)$ должна быть отрицательной, отсюда получим условие на коэффициенты системы (6.1): $a + b < 2$.

Если $x = (x_1, x_2) \in M$, то $x_1 + x_2 \leqslant C$. Тогда

$$x + g(x, w) = (x_1 + w_1 x_1, x_2 + w_2 x_2) = ((1 + w_1)x_1, (1 + w_2)x_2) \in M,$$

так как $(1 + w_1)x_1 + (1 + w_2)x_2 \leqslant C$. Таким образом, решение остается в M, поэтому множество $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно.

Далее, согласно теореме 4.1, рассмотрим разность

$$V(x + g(x, w)) - V(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M.$$

Здесь возможны два случая:

1) Точка $x + g(x, w) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M$, тогда

$$\begin{aligned} V(x + g(x, w)) - V(x) &= V(x_1 + w_1 x_1, x_2 + w_2 x_2) - V(x_1, x_2) = \\ &= x_1 + w_1 x_1 + x_2 + w_2 x_2 - x_1 - x_2 = w_1 x_1 + w_2 x_2 \leqslant \alpha(x_1 + x_2) \leqslant \\ &\leqslant \alpha(x_1 + x_2 - C) = \alpha V(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где $\alpha = \max\{w_1, w_2\}$. Следовательно, функция $\psi(s)$ из теоремы 4.1 равна $\psi(s) = -\alpha s$. Эта функция непрерывна при $s \geqslant 0$, $\psi(0) = 0$ и $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, так как $\alpha < 0$.

2) Точка $x + g(x, w) \in M$, тогда

$$V(x + g(x, w)) - V(x) = 0 - V(x_1, x_2) = -V(x).$$

Следовательно, функция $\psi(s)$ из теоремы 4.1 равна $\psi(s) = s$. Эта функция также удовлетворяет всем условиям теоремы 4.1.

Таким образом, если исходная система (6.1) удовлетоворяет условию $a + b < 2$ и множество $M = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 \leqslant C\right\}$ такое, что

$$C \geqslant \frac{4}{a + b + 2},$$

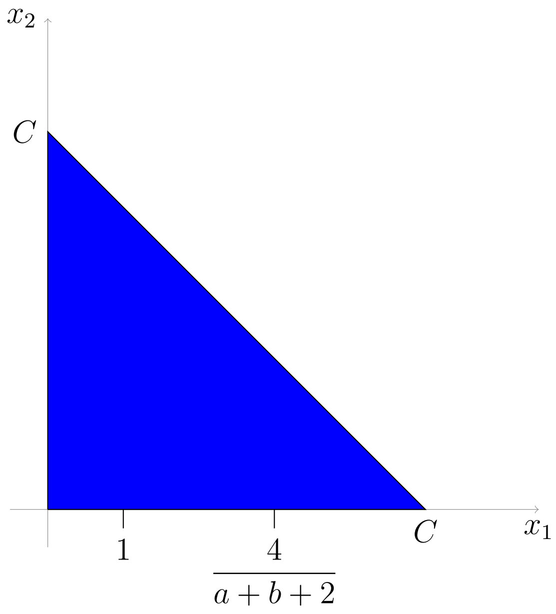

Рис. 6.2. Множество $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 \leqslant C\}$.

то применима теорема 4.1, из которой следует, что заданное множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво относительно системы (6.1).

П р и м е р 6.2. Рассмотрим задачу о динамике численности популяции вредителей при наличии биологического контроля (см. [43, с. 157]). Пусть $y_1(s)$ характеризует размер популяции вредителей в момент времени s, $y_2(s)$ — численность биоагентов (природных врагов рассматриваемых вредителей) в момент s. С учетом влияния биоагентов на популяцию вредителей, динамика популяции вредителей и биоагентов описывается следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \ell y_1 \left(1 - \dfrac{y_1}{K}\right) - L(y_1) y_2, \\ \dot{y}_2 = kL(y_1)y_2 - \mu y_2, \end{cases}$$

где ℓ — естественный темп прироста популяции вредителей при отсутствии внутривидовой конкуренции, K — емкость среды, то есть некоторое стабильное значение числа особей, способных обитать на одной единице территории, $L(y_1)$ — трофическая функция, которая характеризует количество вредителей, потребляемых в среднем одним биоагентом за единицу времени, причем k-я часть полученной с этой биомассой энергии расходуется на воспроизводство, а остальная энергия тратится на поддержание основного обмена, μ — коэффициент естественной смертности биоагентов. Предполагаем, что функция $L(y_1)$ является трофической функцией Холлинга типа II [67], то есть

$$L(y_1) = \frac{cy_1}{1 + cdy_1},$$

где c — коэффициент эффективности поиска вредителей биоагентом, количественно характеризующий интенсивность его атак, d — величина, обратная максимальному индивидуальному рациону. Все указанные выше коэффициенты положительные.

Иногда для достижения результата биоконтроля требуются дополнительные вбросы биоагентов в определенные моменты времени $s_i = ip$, $p > 0$, $i = 1, 2, \dots$. В этом случае математическая модель дополнится соотношением, отражающим скачкообразное увеличение численности биоагентов:

$$y_2(s_i) = y_2(s_i-) + \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где коэффициент управления γ_i равен количеству биоагентов, распространяемых в момент s_i. Предполагаем, что $s_0 = 0$, $y_2(0) \geqslant \gamma_-$ и $\gamma_i \in [\gamma_-, \gamma_+]$, где $0 < \gamma_- < \gamma_+$, $i = 1, 2, \dots$.

Избавимся от некоторых параметров в модели и произведем замену переменных:

$$t = \ell s,\ x_1 = \frac{y_1}{K},\ x_2 = \frac{y_2}{kK},$$
$$a = \frac{ckK}{\ell},\ b = \frac{\ell d}{k},\ m = \frac{\mu}{\ell}.$$

Получаем новую систему:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1(1 - x_1) - \dfrac{ax_1x_2}{1 + abx_1}, \\ \dot{x_2} = \dfrac{ax_1x_2}{1 + abx_1} - mx_2, \quad t \neq \tau_i, \end{cases} \tag{6.3}$$

$$x_2(\tau_i) = x_2(\tau_i-) + w_i, \quad i = 1, 2, \dots . \tag{6.4}$$

Здесь $\tau_i = ih$, $h = \ell p$, $w_i = \dfrac{\gamma_i}{kK}$ — показатели управления, $w_i \in W = [w_-, w_+]$, где $w_- = \dfrac{\gamma_-}{kK}$, $w_+ = \dfrac{\gamma_+}{kK}$, $0 < w_- < w_+$, $i = 1, 2, \dots$. Отметим, что $x_2(\tau_0) = \dfrac{y_2(s_0)}{kK} \geqslant w_-$, где $\tau_0 = s_0 = 0$.

Лемма 6.1. *Имеют место следующие свойства:*

1) *решения системы* (6.3), (6.4) *неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях и если* $x_2(0) \geqslant w_-$, *то* $x_2(t) \geqslant w_- e^{-mh}$ *для всех* $t \geqslant 0$;

2) *решения системы* (6.3), (6.4) *определены при всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Для того, чтобы решения системы (6.3) (без импульсного воздействия) были неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях, необходимо и достаточно, чтобы функции

$$f_1(t, x_1, x_2) = x_1(1 - x_1) - \frac{ax_1x_2}{1 + abx_1}, \quad f_2(t, x_1, x_2) = \frac{ax_1x_2}{1 + abx_1} - mx_2$$

удовлетворяли *условию квазиположительности* (см. [15, с. 34]):

$$f_1(t, 0, x_2) \geqslant 0 \text{ для всех } x_2 \geqslant 0 \text{ и } f_2(t, x_1, 0) \geqslant 0 \text{ для всех } x_1 \geqslant 0.$$

Так как $f_1(t, 0, x_2) \equiv 0$, $f_2(t, x_1, 0) \equiv 0$, условие квазиположительности выполнено. Поэтому $x_i(t) \geqslant 0$ при всех $t \in [0, h)$ для любых $x_i(0) \geqslant 0$,

$i = 1, 2$. Далее, $x_1(h) = x_1(h-0)$, $x_2(h) = x_2(h-0) + w_1$, $w_1 > 0$, поэтому $x_i(h) \geqslant 0$, $i = 1, 2$. Для следующих промежутков $[ih, (i+1)h)$, $i = 1, 2, \ldots$ рассуждения аналогичны.

Пусть $x_2(0) \geqslant w_-$. Из второго уравнения системы (6.3) получаем, что $\dot{x_2} \geqslant -mx_2$ для всех $t \geqslant 0$, $t \neq \tau_i$. Следовательно, в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [62], $x_2(t) \geqslant w_- e^{-mt}$ для всех $t \in [\tau_0, \tau_1) = [0, h)$; тогда $x_2(h) \geqslant w_- e^{-mh} + w_- > w_-$. Применяя теорему Чаплыгина на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}) = [ih, (i+1)h)$,
$i = 1, 2, \ldots$ и учитывая, что $x_2(\tau_i) = x_2(\tau_i - 0) + w_- > w_-$, получаем, что $x_2(t) \geqslant w_- e^{-mh}$ для всех $t \geqslant 0$.

Докажем, что решения системы (6.3) определены при всех $t \geqslant 0$. Для этого достаточно показать [45, с. 62], что существуют функции $V(x)$ и $\beta(z)$ переменных $x \in \mathbb{R}^2$ и $z \in \mathbb{R}$ такие, что:

1) $V(x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова относительно некоторого множества $\mathfrak{M}_0 = \big\{(t, x) \in [0, +\infty) \times M\big\}$, где $M \subset \mathbb{R}^2$ — непусто и компактно;

2) функция $\beta(z)$ непрерывна и $\overline{\lim\limits_{|z|\to\infty}} \dfrac{|\beta(z)|}{|z|} < \infty$;

3) неравенство $V^o_{\max}(t, x) \leqslant \beta(V(x))$ выполнено для всех $x \in \mathbb{R}^2$, для которых $\|x\| > \varrho > 0$.

Напомним, что функция Ляпунова $V(x)$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} V(x) = +\infty$. Поскольку решения системы (6.3) неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях, неравенство

$$V^o_{\max}(t, x) \leqslant \beta(V(x))$$

достаточно проверить для всех

$$x \in \mathbb{R}^2_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\},$$

для которых $\|x\| > \varrho > 0$. Функциями, удовлетворяющими всем перечисленным выше условиям являются, например, функции $V(x) = x_1 + x_2$, $x \in \mathbb{R}^2_+$ и $\beta(z) = z$, так как неравенство

$$V^o_{\max}(t,x) = V^o(x_1,x_2) = x_1 - x_1^2 - mx_2 \leqslant x_1 + x_2 = \beta(V(x))$$

справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^2_+$ и функция $V(x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}_0 = \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \{(0,0)\}\big\}$. Таким образом, решения системы (6.3) определены при всех $t \geqslant 0$, поэтому решения системы (6.3), (6.4) также определены при всех $t \geqslant 0$. $\square$

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 \leqslant C_1\big\}$, где $C_1 > 0$. Функция

$$V(t,x_1,x_2) = V(x_1) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 \leqslant C_1, \\ x_1 - C_1, & \text{если } x_1 > C_1 \end{cases}$$

является функцией Ляпунова относительно данного множества. Заметим, что для этой функции для всех $x \in \mathbb{R}^2$ и всех $w \in W$ справедливо равенство

$$V(\tau_i, x + g(x,w)) = V(\tau_i, x_1, x_2 + w_i) = V(\tau_i, x_1, x_2) = V(\tau_i, x), \quad i = 1,2,\ldots,$$

поэтому условие (4.5) выполнено.

Производная функции V в силу системы (6.3) при $x_1 > C_1$ равна

$$V^o(x_1,x_2) = x_1(1-x_1) - \frac{ax_1x_2}{1+abx_1} = \frac{x_1(g(x_1) - ax_2)}{1+abx_1},$$

где $g(x_1) = -abx_1^2 + abx_1 - x_1 + 1$. Поскольку $x_2(t) \geqslant C_2 = w_- e^{-mh}$ для всех $t \geqslant 0$, достаточно оценить $V^o(x_1,x_2)$ при $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$.

Рассмотрим два случая, в первом из которых предположим, что $ab \leqslant 1$. Отметим, что функция $g(x_1)$ достигает наибольшего значения при $x_1^* = \dfrac{ab-1}{2ab} \leqslant 0$ и убывает при $x_1 > x_1^*$. Поэтому, если $C_2 > a^{-1}$, то

$$g(x_1) - ax_2 < g(C_1) - aC_2 < g(C_1) - 1 < g(0) - 1 = 0$$

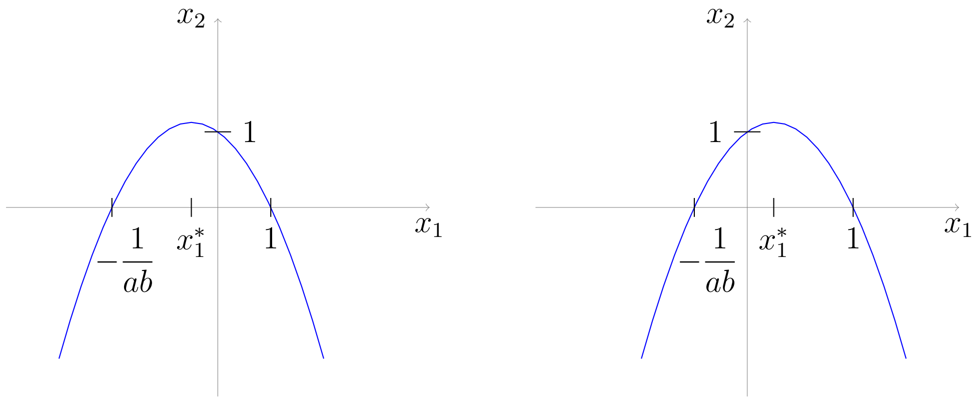

Рис. 6.3. Возможные случаи расположения графика функции $g(x_1)$.

при $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$. Далее, функция $\dfrac{x_1}{1+abx_1}$ возрастает при $x_1 > C_1$, поэтому

$$V^o_{\max}(t,x) = V^o(x_1,x_2) = \frac{x_1(g(x_1)-ax_2)}{1+abx_1} < \frac{C_1\big(g(C_1)-1\big)}{1+abC_1} < 0$$

для всех $t \geqslant 0$, $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$.

Пусть $C_2 \leqslant a^{-1}$. Тогда уравнение $g(x_1) = aC_2$ имеет решения

$$x_1^- = \frac{ab-1-\sqrt{D}}{2ab}, \quad x_1^+ = \frac{ab-1+\sqrt{D}}{2ab}, \tag{6.5}$$

$$\text{где } D = (ab+1)^2 - 4a^2bC_2, \; C_2 = w_-e^{-mh}, \tag{6.6}$$

причем $x_1^- \leqslant 0$, $x_1^+ \geqslant 0$. Следовательно, если $C_1 > x_1^+$, то $g(C_1) - aC_2 < 0$; поэтому, учитывая неравенство $g(x_1) - ax_2 < g(C_1) - aC_2$, получаем

$$V^o_{\max}(t,x) = \frac{x_1(g(x_1)-ax_2)}{1+abx_1} < \frac{C_1\big(g(C_1)-aC_2\big)}{1+abC_1} < 0 \tag{6.7}$$

для всех $t \geqslant 0$, $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$, где $C_1 > x_1^+$.

Рассмотрим второй случай, когда $ab > 1$. Функция $g(x_1)$ достигает наибольшего значения $\dfrac{(ab+1)^2}{4ab}$ при $x_1^* = \dfrac{ab-1}{2ab} > 0$. Пусть

$$C_2 > \frac{(1+ab)^2}{4a^2b},$$

тогда

$$V^o_{\max}(t,x) < \frac{C_1}{1+abC_1}\Big(\frac{(ab+1)^2}{4ab} - aC_2\Big) < 0$$

для всех $t \geqslant 0$, $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$.

Если $C_2 \in \Big(\dfrac{1}{a}, \dfrac{(1+ab)^2}{4a^2b}\Big]$, то $0 < x_1^- < x_1^+$. Возьмем $C_1 < x_1^-$, тогда для всех $t \geqslant 0$, $x_1 \in \Big(C_1, \dfrac{x_1^- + C_1}{2}\Big)$, $x_2 \geqslant C_2$ выполнено неравенство

$$V^o_{\max}(t,x) < \frac{C_1}{1+abC_1}\Big(g\Big(\frac{x_1^- + C_1}{2}\Big) - aC_2\Big) < \frac{C_1(g(x_1^-) - aC_2)}{1+abC_1} = 0.$$

Если $C_1 > x_1^+$, то справедлива оценка (6.7). Далее, если $C_2 \leqslant a^{-1}$, здесь также получаем оценку (6.7), которая верна для всех $t \geqslant 0$, $x_1 > C_1$, $x_2 \geqslant C_2$, где $C_1 > x_1^+$.

Таким образом, функция $V(x_1)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.3.

Итогом проделанных вычислений является следующее утверждение об асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M} = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 \leqslant C_1\big\}$, где $C_1 > 0$. Здесь x_1^-, x_1^+ задаются равенством (6.5).

Утверждение 6.1. *Если выполнено одно из условий:*

1) $ab \leqslant 1$ *и* $w_- > a^{-1}e^{mh}$;

2) $ab > 1$ *и* $w_- > \dfrac{(1+ab)^2 e^{mh}}{4a^2b}$;

3) $ab > 1$, $w_- \in \Big(a^{-1}e^{mh}, \dfrac{(1+ab)^2 e^{mh}}{4a^2b}\Big]$, $C_1 < x_1^-$ *и* $x_1(0) < x_1^-$ *или* $C_1 > x_1^+$;

4) $w_- \leqslant a^{-1}e^{mh}$, $C_1 > x_1^+$,

то для каждого решения $x(t,x_0)$ *системы* (6.3), (6.4), *удовлетворяющего начальному условию*

$$x_0 = (x_1(0), x_2(0)) \in N^r(0) = \big\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 \in (C_1, C_1 + r]\big\},$$

существует момент времени $t^* = t^*(x(t,x_0)) > 0$ *такой, что точка* $(t, x(t,x_0))$ *принадлежит множеству* $\mathfrak{M}$ *при всех* $t \geqslant t^*$. *Множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво относительно данной системы.*

Как следует из утверждения 6.1, при указанных ограничениях на w_- и C_1 доля вредителей x_1 будет уменьшена до величины C_1 и найдется такой момент времени $t^* = t^*(x(t,x_0)) > 0$, что неравенство $x_1(t) \leqslant C_1$ выполнено при всех $t \geqslant t^*$.

Утверждение 6.2. *Если* $w_- > a^{-1}e^{mh}$, *то множества*

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 = 0\right\} \quad \textit{и} \quad \mathfrak{M}_2 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 \leqslant x_1^+\right\}$$

асимптотически устойчивы относительно управляемой системы (6.3), (6.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}_1$ является функция $V(t,x) = V(x_1) = x_1$. Если $w_- > a^{-1}e^{mh}$, то есть $C_2 > a^{-1}$, то $g(0) - aC_2 = 1 - aC_2 < 0$, поэтому существуют такие $r > 0$ и $\alpha < 0$, что $g(x_1) - aC_2 < \alpha < 0$ для всех $x_1 \in [0,r]$. Следовательно,

$$g(x_1) - ax_2 \leqslant g(x_1) - aC_2 < \alpha < 0,$$

$$V^o_{\max}(t,x) = \frac{x_1(g(x_1) - ax_2)}{1 + abx_1} \leqslant \frac{x_1\big(g(x_1) - ax_2\big)}{1 + abr} \leqslant \frac{\alpha x_1}{1 + abr} = \frac{\alpha}{1 + abr} V(t,x)$$

для всех $x_1 \in [0,r]$, $x_2 \geqslant C_2$. Для функций $V(t,x)$ и $g(t,z) = \dfrac{\alpha}{1+abr} z$ выполнены все условия теоремы 4.2, действительно, тривиальное решение $\dot{z} = g(t,z)$ асимптотически устойчиво, так как $\alpha < 0$, остальные условия также несложно проверяются. Поэтому множество $\mathfrak{M}_1$ асимптотически устойчиво.

Для доказательства асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}_2$ рассмотрим функцию Ляпунова относительно этого множества

$$V(t,x_1,x_2) = V(x_1) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } x_1 \leqslant x_1^+, \\ x_1 - x_1^+, \quad \text{если } x_1 > x_1^+. \end{cases}$$

Если $w_- > a^{-1}e^{mh}$, то $x_1^+ > 0$. Оценим верхнюю производную функции V при $x_1 > x_1^+$, $x_2 \geqslant w_- e^{-mh}$:

$$V^o_{\max}(t,x) = \frac{x_1(g(x_1) - ax_2)}{1 + abx_1} \leqslant \frac{x_1^+\big(g(x_1) - aw_- e^{-mh}\big)}{1 + abx_1^+} =$$
$$= -\frac{abx_1^+}{1 + abx_1^+}(x_1 - x_1^+)(x_1 - x_1^-) < -\frac{x_1^+\sqrt{D}}{1 + abx_1^+}V(x_1).$$

Следовательно, множество $\mathfrak{M}_2$ асимптотически устойчиво в силу теоремы 4.2. $\square$

П р и м е р 6.3. Рассмотрим модель (6.1), (6.2), описанную в примере 6.1:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - x_1^2 - ax_1x_2, \quad t \neq \tau_i, \\ \dot{x_2} = x_2 - x_2^2 - bx_1x_2, \quad t \neq \tau_i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1|_{t=\tau_i} = w_1x_1 \doteq g_1(x_1,x_2,w_1,w_2), \\ \Delta x_2|_{t=\tau_i} = w_2x_2 \doteq g_2(x_1,x_2,w_1,w_2). \end{cases}$$

Здесь $\tau_i = ih$, $i = 1,2,\ldots$, $h > 0$; $a > 0$, $b > 0$ — константы взаимодействия видов, w_1, w_2 — параметры управления,

$$w = (w_1,w_2) \in W \doteq [w_{11}, w_{12}] \times [w_{21}, w_{22}], -1 < w_{12} < 0, -1 < w_{22} < 0.$$

Также накладываем условие на коэффициенты межпопуляционного взаимодействия $ab < 1$, чтобы виды могли сосуществовать.

Пусть M — четверть круга, заданная следующим образом:

$$M = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1^2 + x_2^2 \leqslant C^2\big\},$$

где $C > 0$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^3 : x \in M\}$ и функцию

$$V(t, x_1, x_2) = V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \ \ (x_1, x_2) \in M, \\ x_1^2 + x_2^2 - C^2, \ \text{если} \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus M, \end{cases}$$

которая является функцией Ляпунова относительно данного множества.

Найдем ее производную в силу системы (6.1) при $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus M$:

$$V^o(x_1, x_2) = 2x_1(x_1 - x_1^2 - ax_1x_2) + 2x_2(x_2 - x_2^2 - bx_1x_2).$$

Аналитическое нахождение максимума функции $V^o(x_1, x_2)$ в области $\mathbb{R}_+^2 \setminus M$ в данном примере будет затрудительно. Поэтому найдем его численными методами. Будем пользоваться методами пакета Wolfram Mathematica версии 11.0.1. Возьмем $a = 0.5, b = 0.7, C = 1.5$. При таких начальных данных максимум функции $V^o(x_1, x_2)$ в $\mathbb{R}_+^2 \setminus M$ достигается в точке

$$(x_1^*, x_2^*) = (1.5, 2.15729 \times 10^{-8})$$

и равен -2.25.

Если $x = (x_1, x_2) \in M$, то $x_1^2 + x_2^2 \leqslant C^2$. Тогда

$$x + g(x, w) = (x_1 + w_1x_1, x_2 + w_2x_2) = ((1 + w_1)x_1, (1 + w_2)x_2) \in M,$$

так как $(1 + w_1)^2x_1^2 + (1 + w_2)^2x_2^2 \leqslant C^2$. Таким образом, решение остается в M, поэтому множество $\mathfrak{M}$ положительно инвариантно.

Далее, согласно теореме 4.1, рассмотрим разность

$$V(x + g(x, w)) - V(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus M.$$

Здесь возможны два случая:

```
ContourPlot[2*x*(x-x^2-a*x*y)+2*y*(y-y^2-b*x*y), {x, -0.5, c^2+1},
 {y, -0.5, c^2+1}, RegionFunction → ((#1)^2 + (#2)^2 ≥ c^2 &), Contours → 15,
 Epilog → ({Red, PointSize[.02], Text["local maximum", {x1, y1 - 0.2}], Point[{x1, y1}]}),
 ContourLabels → True]
```

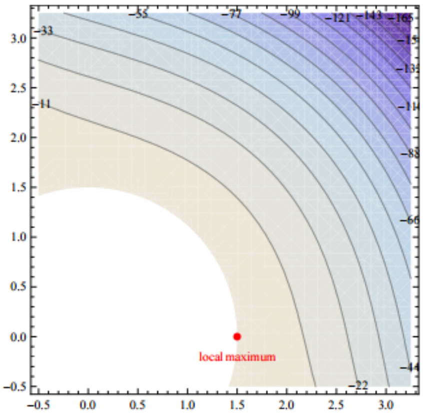

Рис. 6.4. Линии уровня функции $V^o(x_1, x_2)$, построенные в Mathematica с помощью функции ContourPlot.

1) Точка $x + g(x, w) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus M$, тогда

$$V(x + g(x, w)) - V(x) = V(x_1 + w_1 x_1, x_2 + w_2 x_2) - V(x_1, x_2) =$$
$$= (x_1 + w_1 x_1)^2 + (x_2 + w_2 x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 = (2w_1 + w_1^2)x_1^2 + (2w_2 + w_2^2)x_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant \alpha(x_1^2 + x_2^2) \leqslant \alpha(x_1^2 + x_2^2 - C^2) = \alpha V(x_1, x_2),$$

где $\alpha = \max\{2w_1 + w_1^2, 2w_2 + w_2^2\} < 0$. Следовательно, функция $\psi(s)$ из теоремы 4.1 равна $\psi(s) = -\alpha s$. Эта функция непрерывна при $s \geqslant 0$, $\psi(0) = 0$ и $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, так как $\alpha < 0$.

2) Точка $x + g(x, w) \in M$, тогда

$$V(x + g(x, w)) - V(x) = 0 - V(x_1, x_2) = -V(x).$$

Следовательно, функция $\psi(s)$ из теоремы 4.1 равна $\psi(s) = s$. Эта функция также удовлетворяет всем условиям теоремы 4.1.

Таким образом, применима теорема 4.1, из которой следует, что заданное множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво относительно системы (6.1).

Глава III
Теоремы сравнения и статистические характеристики управляемых систем с импульсным воздействием

Получены теоремы сравнения для систем с импульсным воздействием. Здесь исследуются такие статистические характеристики как верхняя и нижняя относительные частоты попадания решения данной системы в множество $\mathfrak{M}$. Пусть $x(t,x_0)$ — решение системы, тогда $\mathrm{freq}(x)$ — относительная частота попадания этого решения в множество $\mathfrak{M}$ определяется как предел при $\vartheta \to \infty$ отношения меры Лебега тех точек отрезка $[0,\vartheta]$, для которых решение $x(t,x_0)$ содержится в множестве $M(t)$, к длине этого отрезка. Если такого предела не существует, то рассматриваются верхний и нижний пределы и, соответственно, верхняя и нижняя относительные частоты $\mathrm{freq}^*(x)$, $\mathrm{freq}_*(x)$. Для диффереренциального уравнения с импульсным воздействием исследуются характеристики $\varkappa^*$ и $\varkappa_*$, которые определяются, соответственно, как верхний и нижний пределы при $\vartheta \to \infty$ отношения меры тех точек отрезка $[0,\vartheta]$, для которых решение данного уравнения неположительно, к длине этого отрезка. Получены условия, при которых выполнены неравенства $\mathrm{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*$ и $\mathrm{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*$.

§ 7. Теоремы сравнения для решений систем и уравнений с импульсами

В этом параграфе получены аналоги теоремы Ла Салля (см. [7, с. 276]) для управляемых систем с импульсным воздействием (4.1). Отметим, что для систем без импульсов $\dot{x} = f(t, x, u)$ подобные утверждения доказаны в работах [40, 45].

Напомним определение системы (4.1):

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = g(x, w_i), \quad (t, x, u, w_i) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p.$$

Будем предполагать, что для этой системы справедливы все требования и условие параграфа 5.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\dot{z} = q(t, z), \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta z|_{t=\tau_i} = l(z), \quad (t, z) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

где функция $q(t, z)$ локально липшицева по z, а функция $l(z)$ непрерывна. Введем в рассмотрение функцию $L(z) = l(z) + z$ в предположении, что $L(z)$ неубывающая для всех $z \in \mathbb{R}$.

Теорема 7.1. *Пусть выполнено условие* 4.1 *и существуют функции* $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ *такие, что* $V(t, x)$ *является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и для всех* $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ *выполнены неравенства*

$$\begin{gathered} V^o_{\max}(t, x) \leqslant q(t, V(t, x)), \\ \max_{w \in W} V(\tau_i, x + g(x, w)) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right), \quad i = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Тогда если для решения $z(t)$ уравнения (7.1) *с начальным условием* $z(t_0) = \max\limits_{x_0 \in N^r(t_0)} V(t_0, x_0)$ *выполнено равенство* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$, *то множество* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову относительно системы* (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t, x_0)$ — одно из решений системы (4.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, x_0) = x_0 \in M^r(t_0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t, x(t, x_0))$. В точках дифференцируемости этой функции выполнено неравенство $\dot{v}(t) \leqslant V^o_{\max}(t, x(t, x_0))$. Отсюда и из (7.2) следует, что неравенство $\dot{v}(t) \leqslant q(t, v(t))$ выполнено в промежутках непрерывности функции $v(t)$ (или в промежутках непрерывности до момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, если такой момент времени существует). Отметим, что, начиная с момента, при котором точка $(t, x(t, x_0))$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, выполнено равенство $v(t) = 0$, поэтому в случае существования такого момента $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$. Далее рассмотрим случай, когда $(t, x(t, x_0))$ не принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ для всех t. Так как

$$v(t_0) = V(t, x(t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) \leqslant \max_{x_0 \in M^r(t_0)} V(t_0, x_0) = z(t_0),$$

то в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (см. [62, с. 15]) неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно при всех $t \in [t_0, \tau_1)$. Из второго неравенства (7.2) следует, что

$$v(\tau_1) = V(\tau_1, x(\tau_1, x_0)) = V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0) + g(x(\tau_1 - 0, x_0), w_1)) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{w \in W} V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0) + g(x(\tau_1 - 0, x_0), w)) \leqslant L\left(V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0))\right) =$$
$$= L\left(v(\tau_1 - 0)\right).$$

Тогда $v(\tau_1) \leqslant L\left(v(\tau_1 - 0)\right) \leqslant L(z(\tau_1 - 0))$, так как функция $L(z)$ не убывает. Из равенства $z(\tau_1) = L(z(\tau_1 - 0))$ следует, что $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$. Рассуждая подобным образом, т.е. применяя далее теорему Чаплыгина на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$, получаем, что неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Поскольку функция $V(t, x)$ является функцией Ляпунова, то

$$0 \leqslant v(t) \leqslant z(t). \tag{7.3}$$

Из условия $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$ и неравенства (7.3) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} V(t, x(t, x_0)) = 0.$$

Так же, как в доказательстве теоремы 4.1, из положительной определенности функции $V(t, x)$ и равенства $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$ следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \varrho(x(t_0, x), M(t)) = 0.$$

$\square$

Положим теперь $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t) = 0\big\}$. Тогда для этого множества справедливо утверждение о асимптотической устойчивости по Ляпунову, которое является следствием теоремы 7.1.

Следствие 7.1. *Пусть существуют функции* $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ *такие, что* $V(t, x)$ *является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и для всех*

$$(t, x) \in \mathfrak{N}^r = \{(t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant r\}$$

выполнены неравенства (7.2). *Тогда если для решения* $z(t)$ *уравнения* (7.1) *с начальным условием* $z(t_0) = \max\limits_{\|x_0\|\leqslant r} V(t_0, x_0)$ *выполнено равенство* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$, *то для любого решения* $x(t, x_0)$ *системы* (4.1) *такого, что* $\|x_0\| \leqslant r$, *имеет место равенство* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t, x_0) = 0$.

Теорема 7.2. *Пусть существуют функции* $V(t,x)$, $q(t,z)$, $l(z)$ *такие, что* $V(t,x)$ *является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$, *для всех* $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$ *выполнено неравенство* $V^o_{\min}(t,x) \leqslant q(t, V(t,x))$ *и найдутся такие* $\widehat{w}_i \in W$, *что*

$$V(\tau_i, x + g(x, \widehat{w}_i)) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right) \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots. \tag{7.4}$$

Тогда, если для решения $z(t)$ *уравнения* (7.1) *с начальным условием* $z(t_0) = \max\limits_{x_0 \in N^r(t_0)} V(t_0, x_0)$ *выполнено равенство* $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$, *то множество* $\mathfrak{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно системы* (4.1).

Доказательство. Для каждого $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$ определим множество

$$\widetilde{U}(t,x) \doteq \begin{cases} u \in U(t,x) : V^o(t,x; f(t,x,u)) \leqslant g\big(t, V(t,x)\big), & \text{если } (t,x) \in \mathfrak{N}^r, \\ U(t,x), \quad \text{если } (t,x) \in \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Из неравенства $V^o_{\min}(t,x) \leqslant q(t, V(t,x))$ следует, что это множество непустое. Множество $\widetilde{U}(t,x)$ ограничено, поскольку $\widetilde{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$. Также, как в лемме 5.1 доказывается, что множество $\widetilde{U}(t,x)$ замкнуто.

Поставим в соответствие множеству $\widetilde{U}(t,x)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \widetilde{F}(t,x), \quad \widetilde{F}(t,x) = \overline{\mathrm{co}}\, \widetilde{H}(t,x), \tag{7.5}$$

где $\widetilde{H}(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i, x_i, \widetilde{U}(t_i, x_i))$ при $(t_i, x_i) \to (t,x)$, функция $(t,x) \mapsto \widetilde{F}(t,x)$ полунепрерывна сверху (см. лемму 10.1 работы [45]). Обозначим через $\widetilde{\varphi}_i(t, x_i)$ решения включения (7.5), удовлетворяющие начальным условиям $\widetilde{\varphi}_i(\tau_i, x_i) = x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Поскольку $\widetilde{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$ для всех $(t,x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, то $\widetilde{F}(t,x) \subseteq F(t,x)$. Следовательно, $\widetilde{\varphi}_i(t, x_i)$ — решения дифференциального включения (7.5), также являются и решениями исходного включения (7.5).

Определим решение $x(t, x_0)$ системы (4.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, x_0) = x_0 \in N^r(t_0)$, которое на промежутке $[t_0, \tau_1)$ совпадает с $\widetilde{\varphi}_0(t, x_0)$ и на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$ совпадает с решением $\widetilde{\varphi}_i(t, x_i)$, где

$$x_i = \widetilde{\varphi}_{i-1}(\tau_i, x_{i-1}) + g\big(\widetilde{\varphi}_{i-1}(\tau_i, x_{i-1}), \widehat{w}_i\big), \quad \widehat{w}_i \in W, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Для этого решения построим функцию $v(t) = V(t, x(t, x_0))$, в точках дифференцируемости которой выполнено неравенство $\dot{v}(t) \leqslant V^o_{\max}(t, x(t, x_0))$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 7.1. $\square$

Положим теперь $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x \in M(t) = 0\big\}$. Тогда для этого множества справедливо утверждение о слабой асимптотической устойчивости, которое является следствием теоремы 7.2.

Следствие 7.2. *Пусть существуют функции* $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ *такие, что* $V(t, x)$ *является определенно положительной функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и для всех* $(t, x) \in \mathfrak{N}^r$ *выполнены неравенства* (7.4). *Тогда, если для решения* $z(t)$ *уравнения* (7.1) *с начальным условием* $z(t_0) = \max\limits_{\|x_0\| \leqslant r} V(t_0, x_0)$ *выполнено равенство* $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = 0$, *то для любого* $\|x_0\| \leqslant r$ *существует решение* $x(t, x_0)$ *системы* (4.1), *для которого справедливо равенство* $\lim\limits_{t \to \infty} x(t, x_0) = 0$.

§ 8. Об оценках статистических характеристик управляемых систем с импульсным воздействием

О п р е д е л е н и е 8.1 (см. [45]). *Верхней относительной частотой* *попадания* решения $x(t, x_0)$ системы (4.1) в множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\}$$

называется следующий предел

$$\mathrm{freq}^*(x) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : x(t, x_0) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Аналогично определяется нижняя относительная частота $\mathrm{freq}_*(x)$ (с заменой верхнего предела на нижний предел). Если $\mathrm{freq}^*(x) = \mathrm{freq}_*(x)$, то существует предел

$$\mathrm{freq}(x) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\,\{t \in [0, \vartheta] : x(t, x_0) \in M(t)\}}{\vartheta},$$

который называется *относительной частотой* попадания решения $x(t, x_0)$ в множество $\mathfrak{M}$.

Также введем в рассмотрение характеристику

$$\varkappa \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

где функция $z(t)$ является решением уравнения (7.1). Если данный предел не существует, то рассматриваются соответственно верхний и нижний пределы

$$\varkappa^* \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \quad \varkappa_* \doteq \varliminf_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Отметим, что определения и оценки статистических характеристик, а также условия статистической инвариантности множеств для систем без импульсного воздействия получены в работах [45, 50, 51]. Приведенные ниже результаты распространяют утверждения работ [45, 50, 51] на управляемые системы с импульсами.

Теорема 8.1. *Предположим, что существуют функции* $V(t,x)$, $q(t,z)$, $l(z)$ *такие, что* $V(t,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* $\mathfrak{M}$ *и для всех* $(t,x)\in[t_0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ *выполнены неравенства*

$$\begin{gathered} V^o_{\max}(t,x)\leqslant q(t,V(t,x)),\\ \max_{w\in W}V(\tau_i,x+g(x,w))\leqslant L\left(V(\tau_i,x)\right),\quad i=1,2,\ldots. \end{gathered}\tag{8.1}$$

Пусть $z(t)$ *— решение уравнения* (7.1), *удовлетворяющее начальному условию* $z(t_0)=V(t_0,x_0)$. *Тогда для любого решения* $x(t,x_0)$ *системы* (4.1) *такого, что* $x(t_0,x_0)=x_0$, *имеют место неравенства*

$$\operatorname{freq}_*(x)\geqslant\varkappa_*,\quad \operatorname{freq}^*(x)\geqslant\varkappa^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t,x_0)$ — одно из решений системы (4.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0)=x_0$ и продолжаемое на полуинтервал $[t_0,+\infty)$. Рассмотрим функцию $v(t)=V(t,x(t,x_0))$, для которой, в силу леммы 5 работы [40], в точках дифференцируемости имеет место неравенство

$$\dot v(t)\leqslant V^o_{\max}\left(t,x(t,x_0)\right),$$

из которого и (8.1) следует, что неравенство $\dot v(t)\leqslant q(t,v(t))$ выполнено в промежутках непрерывности функции $v(t)$. Поскольку

$$v(t_0)=V(t,x(t_0,x_0))=V(t_0,x_0)=z_0,$$

то в силу теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (см. [62, с. 15]), неравенство $v(t)\leqslant z(t)$ верно при всех $t\in[t_0,\tau_1)$. Из второго неравенства (8.1) следует, что

$$\begin{gathered} v(\tau_1)=V(\tau_1,x(\tau_1,x))=V(\tau_1,x(\tau_1-0,x_0)+g(x(\tau_1-0,x_0),w_1))\leqslant\\ \leqslant\max_{w\in W}V(\tau_1,x(\tau_1-0,x_0)+g(x(\tau_1-0,x_0),w))\leqslant L\left(V(\tau_1,x(\tau_1-0,x_0))\right)=\\ =L\left(v(\tau_1-0)\right). \end{gathered}$$

Тогда $v(\tau_1) \leqslant L\left(v(\tau_1 - 0)\right) \leqslant L(z(\tau_1 - 0))$, так как функция $L(z)$ не убывает. Из равенства $z(\tau_1) = L(z(\tau_1 - 0))$ следует, что $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$. Рассуждая подобным образом, т. е. применяя далее теорему Чаплыгина на каждом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$, получаем, что неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Тогда

$$\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : v(t) \leqslant 0\} \geqslant \operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{freq}^*(x) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : x(t, x_0) \in M(t)\}}{\vartheta} =$$
$$= \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : v(t) \leqslant 0\}}{\vartheta} \geqslant \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta} = \varkappa^*.$$

Таким образом, $\operatorname{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*$, аналогично получаем $\operatorname{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*$. □

Теорема 8.2. *Предположим, что существуют функции $V(t, x)$, $q(t, z)$, $l(z)$ такие, что $V(t, x)$ является функцией Ляпунова относительно множества $\mathfrak{M}$ и для всех $(t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$\begin{gathered} V^o_{\min}(t, x) \leqslant q(t, V(t, x)), \\ \min_{w_i \in W} V(\tau_i, x + g(x, w_i)) \leqslant L\left(V(\tau_i, x)\right), \quad i = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{8.2}$$

Пусть $z(t)$ — решение уравнения (7.1), удовлетворяющее начальному условию $z(t_0) = V(t_0, x_0)$. Тогда существует решение $x(t, x_0)$ системы (4.1) такое, что $x(t_0, x_0) = x_0$ и имеют место неравенства

$$\operatorname{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*, \quad \operatorname{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим непустое множество

$$\widehat{U}(t, x) \doteq \begin{cases} u \in U(t, x) : V^o(t, x; f(t, x, u)) \leqslant g\big(t, V(t, x)\big), & \text{если } (t, x) \in \mathfrak{N}^r, \\ U(t, x), & \text{если } (t, x) \in \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Множество $\widehat{U}(t,x)$ ограничено для каждого $(t,x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, поскольку $\widehat{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$. Покажем, что множество $\widehat{U}(t,x)$ замкнуто. Действительно, если последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $u_i \in \widehat{U}(t,x)$ и $u_i \to u$, то $f(t,x,u_i) \to f(t,x,u)$ и в силу липшицевости функции $f \mapsto V^o(t,x;f)$ [10, с. 32] выполнено неравенство

$$V^o(t,x;f(t,x,u)) = \lim_{i\to\infty} V^o(t,x;f(t,x,u_i)) \leqslant 0.$$

Поставим в соответствие множеству $\widehat{U}$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x), \quad \widehat{F}(t,x) = \mathrm{co}\widehat{H}(t,x), \tag{8.3}$$

где $\widehat{H}(t,x)$ состоит из всех предельных значений функции $f(t_i,x_i,\widehat{U}(t_i,x_i))$ при $(t_i,x_i) \to (t,x)$, функции $(t,x) \mapsto \widehat{H}(t,x)$ и $(t,x) \mapsto \widehat{F}(t,x)$ полунепрерывны сверху. Обозначим через $\widehat{\varphi}_i(t,x_i)$ решения включения (8.3), удовлетворяющие начальным условиям $\widehat{\varphi}_i(\tau_i,x_i) = x_i$, $i = 0,1,2,\ldots$.

Поскольку для всех $(t,x) \in [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ имеет место включение $\widehat{U}(t,x) \subseteq U(t,x)$, то $\widehat{F}(t,x) \subseteq F(t,x)$. Следовательно, $\widehat{\varphi}_i(t,x_i)$ — решения дифференциального включения (8.3), также являются и решениями исходного дифференциального включения (4.2) и каждое из них, в силу условия (4.1) о нелокальной продолжаемости всех решений вправо, определено при всех $t \geqslant t_0$. Определим решение $x(t,x_0)$ системы (4.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,x_0) = x_0$, которое на промежутке $[t_0,\tau_1)$ совпадает с решением $\widehat{\varphi}_0(t,x_0)$, и на каждом промежутке $[\tau_i,\tau_{i+1})$ совпадает с решением $\widehat{\varphi}_i(t,x_i)$, где

$$x_i = \widehat{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1}) + g\big(\widehat{\varphi}_{i-1}(\tau_i,x_{i-1}),w_i\big), \quad w_i \in W, \quad i = 1,2,\ldots,$$

w_i такие, что

$$V(\tau_i, x + g(x,w_i)) \leqslant L\left(V(\tau_i,x)\right).$$

Такие w_i существуют в силу второго неравенства (8.2). Для этого решения построим функцию $v(t) = V(t, x(t, x_0))$, для которой, учитывая (8.2), неравенство $\dot{v}(t) \leqslant q(t, v(t))$ выполнено в промежутках ее непрерывности (см. лемму 9 работы [51]). Далее рассмотрим функцию $v(t)$ в точке τ_1. Из второго неравенства (8.2) следует, что

$$v(\tau_1) = V(\tau_1, x(\tau_1, x_0)) = V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0) + g(x(\tau_1 - 0, x_0), w_1)) \leqslant$$
$$\leqslant L\left(V(\tau_1, x(\tau_1 - 0, x_0))\right) = L\left(v(\tau_1 - 0)\right).$$

Тогда $v(\tau_1) \leqslant L\left(v(\tau_1 - 0)\right) \leqslant L(z(\tau_1 - 0))$, так как функция $L(z)$ не убывает. Из равенства $z(\tau_1) = L(z(\tau_1 - 0))$ следует, что $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$. Рассуждая аналогичным образом для всех точек $\tau_i, i = 2, 3, \ldots$ и применяя теорему о дифференциальных неравенствах, получаем, что неравенство $v(t) \leqslant z(t)$ верно для всех $t \in [t_0, +\infty)$. Тогда

$$\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : v(t) \leqslant 0\} \geqslant \operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t) \leqslant 0\}.$$

Следовательно, $\operatorname{freq}_*(x) \geqslant \varkappa_*$ и $\operatorname{freq}^*(x) \geqslant \varkappa^*$. $\square$

Заключение

В работе исследовались различные статистические характеристики непрерывной функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, среди которых относительная частота попадания ее графика в заданное множество

$$\mathfrak{M} \doteq \big\{(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\big\},$$

определенная равенством

$$\operatorname{freq}(\varphi) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t) \in M(t)\}}{\vartheta}. \tag{9.1}$$

Для почти периодических функций исследовались среднее значение функции и характеристика

$$\widetilde{\varkappa} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t) \leqslant 0\}}{\vartheta}. \tag{9.2}$$

Также получено условие существования статистически слабо инвариантного множества относительно управляемой системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad (t,x,u) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{9.3}$$

Другими задачами, которым посвящена работа, являются задачи исследования свойств инвариантности, статистической инвариантности, устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости для управляемой системы с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(t,x,u), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = g(x,w_i), \quad (t,x,u,w_i) \in [t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p. \end{gathered} \tag{9.4}$$

Для данной системы также доказаны утверждения о слабой положительной инвариантности и получены условия слабой асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$.

Получены следующие основные результаты:

1) исследованы основные свойства характеристики (9.1), получены оценки этой характеристики для различных непрерывных функций, в частности, для периодических и почти периодический функций; приведены условия, при которых можно найти значения (9.1);

2) для почти периодических функций определенного вида, которые зависят от конечного числа периодических функций, получены формулы для среднего значения и характеристики $\widetilde{\varkappa}$;

3) получены условия существования положительно инвариантного, устойчивого по Ляпунову и асимптотически устойчивого множеств относительно управляемой системы (9.4);

4) получены условия существования слабо положительно инвариантного, слабо устойчивого по Ляпунову и слабо асимптотически устойчивого множеств относительно управляемой системы (9.4);

5) получены теоремы сравнения для решений систем и уравнений с импульсным воздействием;

6) получены теоремы сравнения для характеристик (9.1) и (9.2) для функций, являющихся решениями системы и уравнения с импульсным воздействием соответственно;

7) для модели конкуренции двух видов и модели изменения численности популяции вредителей в условиях биологического контроля получены условия существования асимпотически устойчивых множеств с использованием аналитических и численных методов.

Результаты работы могут быть полезными при анализе моделей различных систем с импульсами, возникающих в экономике, технике, популяционной динамике, а также при чтении специальных курсов для студентов математических и естественно-научных специальностей университетов.

Список литературы

1. Анашкин О.В., Довжик Т.В., Митько О.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий // Динамические системы. 2010. Вып. 28. С. 3–10.

2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

3. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск. Регулярная и хаотическая динамика, 1999.

4. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194–252.

5. Гладилина Р.И., Игнатьев А.О. Об устойчивости периодических систем с импульсным воздействием // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 1. С. 44–51.

6. Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н. Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения, их производные и применение к задачам управления // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 11. С. 1888—1894.

7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

8. Жиков В.В. К проблеме почти-периодичности для дифференциальных и операторных уравнений// Сборник научных трудов ВПИ. 1969. Т. 8. С. 94–188.

9. Игнатьев А.О. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Матем. сборник. 2003. Т. 194. № 10. С. 117–132.

10. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.

11. Козлов В.В. Усреднение в окрестности устойчивых инвариантных торов // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. Т. 2. № 3/4. С. 41–46.

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

13. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 384 с.

14. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

15. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 2007. 324 с.

16. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Оптимальное управление и дифференц. ур-ния. Тр. МИ РАН. М.. 1995. Т. 211. С. 304–315.

17. Ларина Я.Ю. Условия статистической инвариантности для управляемых систем с периодическими коэффицентами // Современные методы

прикладной математики, теория управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013): сб. тр. 6 Междунар. конф., г. Воронеж. 10-16 сент. 2013 г. Воронеж: Издат.-полиграф. центр Воронеж. гос. ун-та, 2013. С. 136–138.

18. Ларина Я.Ю. Статистические характеристики систем с почти периодическими коэффициентами // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: сб. науч. тр. по материалам междунар. заоч науч.-практ. конф. Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях: Междунар. открытая конф., 18-19 июня 2014 г. Воронеж: ФГБОУ ВПО «ВГЛТА», 2014. - № 4, ч. 2 (9-2). С. 417–420.

19. Ларина Я.Ю. Статистически инвариантные множества для периодических систем // Современные проблемы математики и её приложений: тр. 45-й Междунар. молодеж. шк.-конф., посв. 75-лет. В. И. Бердышева, 2 - 8 февр. 2014 г. Ин-т математики и механики УрО РАН, Урал. фед. ун-т, Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УрФУ, 2014. С. 81–83.

20. Ларина Я.Ю. Функции Ляпунова и теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2015. Т.25. Вып. 1. С. 51–59.

21. Ларина Я.Ю. Об асимптотическом поведении решений управляемых систем с импульсным воздействием // Теория управления и математическое моделирование: тезисы докладов Всерос. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Рос-

сия, 9-11 июня 2015 г. М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО «УдГУ», Ижевск: Удмуртский университет, 2015. С. 180–182.

22. Ларина Я.Ю. Статистические характеристики управляемых систем с импульсным воздействием // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2015. Вып. 2 (46). С. 99—105.

23. Ларина Я.Ю. О слабой асимпотической устойчивости управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2016. Т.26. Вып. 1. С. 68–78.

24. Ларина Я.Ю. Слабо асимптотически устойчивые множества относительно управляемых систем с импульсным воздействием // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тез. докл.: Суздаль, 8-12 июля 2016 г. Суздаль, 2016. С. 118–119.

25. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Статистические характеристики управляемых систем, возникающие в различных моделях естествознания // Моделирование и анализ информационных систем, 2013. Т. 20, № 5. С. 62–77.

26. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. О статистически слабой инвариантности множеств относительно управляемых систем // Теория управления и математическое моделирование: тезисы докладов Всерос. конф. с междунар. участием «Теория управления и математическое моделирование», посвящ. памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова, Ижевск, Россия, 9-11 июня 2015 г. М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО «УдГУ», Ижевск: Удмуртский университет, 2015. С. 182–184.

27. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. О существовании статистически слабо инвариантных множеств управляемых систем // Динамика систем и процессы управления: труды Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Красовского, Екатеринбург, Россия, 15-20 сент. 2014 г. Ин-т математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. С. 236–242.

28. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. О расширении понятия инвариантности множеств относительно управляемых систем // Международная конференция по математической теории управления и механике: тез. докл.: Суздаль, 3-7 июля 2015 г. Суздаль, 2015. С. 83–85.

29. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Об оценках относительных частот и статистически слабо инвариантных множествах управляемых систем // Материалы симпозиума «Дифференциальные уравнения – 2016», проводимого в рамках форума «Математика и глобальные вызовы XXI века» и посвященного столетию Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, 16-21 мая 2016 г. Пермь, 2016. С. 55–57.

30. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Асимптотически устойчивые множества управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2016. Вып. 4. С. 490–502.

31. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Расширение понятия инвариантности и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры», 2017. Вып. 132. С. 57—60.

32. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Статистические характеристики непрерывных функций и статистически слабо инвариантные множества управляемой системы // Известия вузов. Математика, 2017, № 2. С. 34–43.

33. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Об асимптотической устойчивости множеств относительно управляемых систем // Тезисы докладов XVII международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2017», 16-20 мая 2017 года, Минск, 2017. С.81.

34. Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Издательство Московского университета, 1978.

35. Лейхтвейс К. Выпуклые множества М.: Наука, 1985.

36. Мышкис А. Д. Устойчивость решений дифференциальных уравнений при обобщенных импульсных возмущениях // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 125-–133.

37. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехтеориздат, 1949. 550 с.

38. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979.

39. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 6. С. 859-–860.

40. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.

41. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.

42. Перестюк Н.А., Плотников В.И., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. 428 с.

43. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 236 с.

44. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем / Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук / УдГУ. Ижевск, 2011. 246 с.

45. Родина Л.И. Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 2 (40). С. 3–164.

46. Родина Л.И. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и статистически инвариантные множества управляемых систем // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 278. С. 217–226.

47. Родина Л.И. Статистические характеристики множества достижимости и периодические процессы управляемых систем // Вестник Удмуртско-

го университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 2. С. 34–43.

48. Родина Л.И. О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 109–124.

49. Родина Л.И. Оценка статистических характеристик множества достижимости управляемых систем // Известия вузов. Математика. 2013. № 11. С. 20–32.

50. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.

51. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.

52. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 288 с.

53. Ушаков В.Н., Латушкин Я.А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 178-–194.

54. Ушаков В.Н., Малёв А.Г. К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 199-–222.

55. Ушаков В.Н., Зимовец А.А. Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения // Вестник Удмуртского уни-

верситета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 98—111.

56. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В., Паршиков Г.В. Инвариантность множеств при конструировании решений задачи о сближении в фиксированный момент времени // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 264—283.

57. Ушаков В.Н., Котельникова А.Н., Малёв А.Г. Об оценке дефекта слабой инвариантности множеств с кусочно-гладкой границей // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 250—266.

58. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 761 с.

59. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.

60. Филиппов В.В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993. 336 с.

61. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

62. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М., Л.: Гостехиздат, 1950. 102 с.

63. Aubin J. P. Viability Theory. Boston, Birkhäuser. 1991. 543 p.

64. Aubin J.P., Cellina A. Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag. 1984. 342 p.

65. Bainov D.D., Simeonov P.S. Systems with impulse effect: stability, theory and applications. N.-Y.: Halsted Press, 1989. 255 p.

66. Hartman P. On invariant sets and on a theorem of Wazewski // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 32. P. 511—520.

67. Holling C.S. The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly // The Canadian Entomologist. 1959. Vol. 91. № 5. P. 293–320.

68. Kurshanski A. B., Filippova T. F. Dynamics of the set of viable trajectories to a differential inclusion: the evolution equation // Probl. Contr. Inform. Theory. 1988. Vol. 17. № 3. P. 137–144.

69. Kurshanski A. B., Filippova T. F. Pertubation technicues for viability and control // Lect. Notes in Control, Inform. Sci. 1992. Vol. 180. P. 394–403.

70. Perestyuk M.O., Chernikova O.S. On the Stability of Invariant Sets of Discontinuous Dynamical Systems // Ukrainian Mathematical Journal. 2001. Vol. 53, № 1. P. 91–98.