

ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертационную работу П.А.Шайхуллиной
“Аналитическая классификация простейших ростков
полугиперболических отображений”,

представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 “дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление”

Работа П.А.Шайхуллиной относится к локальной голоморфной динамике: к исследованию проблемы классификации ростков голоморфных отображений в неподвижной точке с точностью до аналитической эквивалентности, другими словами, с точностью до голоморфного сопряжения. Случай ростков одномерных конформных отображений хорошо изучен. В гиперболическом случае, когда модуль производной отличен от единицы, одномерный росток аналитически эквивалентен своей линейной части. В случае, когда линейная часть - иррациональный поворот, это верно не всегда, и те линейные части, для которых это верно вне зависимости от рассматриваемого ростка, полностью описаны (теоремы А.Д.Брюно (достаточное условие) и Ж.-К.Йоккоза (о необходимости условия Брюно, медаль Филдса за 1994 г.). Аналитическая классификация параболических ростков, где линейная часть - поворот конечного порядка, была получена С.М.Ворониным и Ж.Экалем (знаменитые модули Экаля–Воронина). Аналог модулей Экаля–Воронина для седлоузловых ростков двумерных голоморфных векторных полей был построен Ж.Мартине и Ж.-П.Рамисом (модули Мартине–Рамиса). В случае многомерных ростков биголоморфных отображений имеются теорема Пуанкаре–Дюлака о голоморфном приведении к линейной части или к резонансной нормальной форме (в гиперболическом случае из области Пуанкаре) и аналог теоремы Брюно о приведении к линейной части для области Зигеля (малые знаменатели). Случай параболических многомерных ростков представляется довольно сложным и практически не исследован, за исключением некоторых частных результатов, полученных Л.Столовичем и Т.Уедой.

П.А.Шайхуллиной исследован случай типичных негиперболических двумерных ростков: полугиперболический случай, где одно собственное значение равно единице, а второе имеет модуль, отличный от единицы. При дополнительном предположении типичности 2-струи получена полная формальная классификация: явное семейство формальных нормальных форм, являющихся потоками простых голоморфных векторных полей. Доказана теорема единственности формальной нормальной формы и нормализующего ряда. Кроме того, показано, что если росток уже предварительно нормирован голоморфным сопряжением так, что его сильная голоморфная инвариантная кривая (касающаяся собственной прямой линейной части с не-единичным собственным значением) является координатной осью, то *формальный нормализующий ряд является полуформальным*. Это означает, что нормализующий ряд записывается как формальный ряд по "параболической переменной" с коэффициентами, являющимися функциями по "гиперболической переменной," голоморфными в некотором общем диске.

Основной результат П.А.Шайхуллиной – это полная аналитическая классификация так называемых простейших полугиперболических ростков. А именно, тех вышеупомянутых полугиперболических ростков, у которых формальная нормальная форма является прямым произведением двух одномерных отображений: параболического ростка

(в формальной нормальной форме, в виде потока одномерного векторного поля за единичное время) с единичным формальным инвариантом и линейного гиперболического ростка. Основная часть результата об аналитической классификации – это теорема о секториальной нормализации: о том, что рассматриваемый росток приводится к формальной нормальной форме аналитическим сопряжением в произведении подходящего сектора на диск, гладко продолжающимся на его замыкание. Асимптотический ряд Тейлора секториальной нормализации в неподвижной точке совпадает с формальной нормализацией. Инварианты аналитической классификации (инварианты Шайхуллиной) – это формальная нормальная форма и функциональные модули (константы и наборы из функций одной или двух переменных), получаемые из функций перехода между секториальными нормализующими картами. Доказана теорема о том, что это – полный набор инвариантов. Доказана теорема о реализации, полностью описывающая те наборы функций, которые можно получить как функциональные модули простейшего полугиперболического ростка с данной формальной нормальной формой. Она доказана с помощью почти комплексных структур и теоремы Ньюлендера–Ниренберга.

Доказательство теоремы о секториальной нормализации – это очень серьезный и нетривиальный результат. В предыдущих вышеупомянутых работах С.М.Воронина, Ж.Мартине и Ж.-П.Рамиса, где доказаны аналогичные теоремы для параболических ростков отображений и седлоузловых ростков векторных полей, были представлены "динамические" доказательства, основанные на том, что подходящие секториальные области инвариантны под действием динамики формальной нормальной формы либо "вперед," либо "назад". В данной ситуации полугиперболических ростков таких инвариантных множеств нет. П.А.Шайхуллина разработала совершенно новый метод доказательства, позволивший преодолеть эту трудность. Первый шаг – прямое решение промежуточной задачи, гомологического уравнения для подходящих одномерных отображений (явная формула в виде ряда из интегралов типа Коши), исследование ее асимптотики и ее оценки сверху. Второй шаг – исследование задачи о нахождении секториальной нормализации послойно, вдоль кривых уровня первого интеграла формальной нормальной формы. Эта задача решается послойным применением первого шага.

Считаю, что методы, разработанные П.А.Шайхуллиной, найдут важные применения в локальной динамике и в смежных вопросах анализа. В частности, по моему мнению, дальнейшее развитие и применение методов Шайхуллиной позволит решить и более общую задачу, об аналитической классификации типичных полугиперболических ростков, без ограничения классом простейших ростков.

Диссертация не свободна от опечаток, но они не влияют на научное содержание.

Ввиду вышесказанного, диссертация П.А.Шайхуллиной является законченным исследованием, результаты которого представляют существенный вклад в комплексную динамику и смежные вопросы комплексного анализа. Все основные результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и могут найти применения в исследованиях по динамическим системам, ведущихся в МИАН им. В.А.Стеклова, МГУ им. М.В.Ломоносова, СПбГУ, НИУ ВШЭ, ИППИ им. А.А.Харкевича, ЧелГУ, ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. Результаты своевременно опубликованы в 3 статьях, входящих в перечень ВАК (плюс 5 тезисов докладов на конференциях), и автореферат соответствует ее содержанию. Тема диссертации соответствует специальности 01.01.02 – "дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление". Диссертация удовлетворяет всем требованиям "Положения о порядке присуждения учёных

степеней”, предъявляемых к кандидатским диссертациям. Ее автор Полина Алексеевна Шайхуллина несомненно заслуживает присвоения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – “дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление”.

09.09.2020

Официальный оппонент

А.А.Глуцюк

Доктор физико-математических наук,
профессор Факультета математики
ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики"
119048, г. Москва, ул. Усачёва, д. 6, каб. 216
math@hse.ru
aglucyuk@hse.ru
+7 (495) 772-95-90

Подпись заверяю

09.09.2020



СПЕЦИАЛИСТ ПО КАДРАМ И МАРКЕТИНГУ

ИСХАКОВА Л.К.