ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Закоры Дмитрия Александровича **«Спектральный анализ и асимптотика решений задач механики вязкоупругих сред»,** представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Колоссальные (без преувеличения) успехи, достигнутые механикой сплошных сред (включая гидромеханику) в прошлом веке, не в последнюю очередь обусловлены определенным упрощением применяемых математических моделей. Иными словами, если считать жидкость идеальной (в крайнем случае — изотропной и с не слишком большой вязкостью), а скорость ее движения малой — вот тогда классическая гидродинамика работает превосходно. На практике же приходится иметь дело со случаями, когда жидкость (более широко — среда) может быть вязкоупругой, релаксирующей, сжимаемой, анизотропной, может принимать форму эмульсий и суспензий, может представлять собой смесь жидкостей (соответственно — сред) с качественно различными свойствами и т. д. Когда мы переходим к таким более сложным (но более реалистичным) задачам, то выясняется, что классического аппарата *дифференциальных* уравнений для их адекватного математического описания уже недостаточно — нужно применять *функционально-дифференциальные* уравнения. В частности, обширный класс задач механики вязкоупругих сред описывается *интегродифференциальными* уравнениями, изучаемыми в диссертации Д. А. Закоры. Это — уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \int\limits_0^t g(t,s)\Delta u(x,s)ds = f(x,t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - \frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \int\limits_0^t g(t,s)\Delta u(x,s)ds = f(x,t),$$

системы вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla\rho + \displaystyle\int\limits_0^t e^{-b(t-s)}\nabla\rho(x,s)ds = \vec{f}(x,t), \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{u} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla\rho - \displaystyle\int\limits_0^t e^{-b(t-s)}\Big[\Delta\vec{u}(x,s) + \nabla\mathrm{div}\vec{u}(x,s)\Big]ds = \vec{f}(x,t), \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{u} = 0, \end{cases}$$

а также их операторные обобщения. Разумеется, в приведенной выше (модельной) форме, эти уравнения и системы исследовались и раньше (хотя даже и для этих модельных случаев диссертанту удалось получить ряд новых результатов), однако отнюдь не в рамках какого-либо единого подхода, а именно как отдельные задачи математической физики. Поэтому, изучая любое существенное обобщение любой из них, пришлось бы начинать исследование с самого начала. Операторный подход, применяемый диссертантом, устраняет это неудобство — весьма разнородные (не только с точки зрения механики, но и с точки зрения теории дифференциальных уравнений) результаты удается объединить в стройную теорию, естественным образом открытую и для дальнейших обобщений. На этом пути Д. А. Закоре удалось найти классы краевых (начально-краевых) задач, естественных для исследуемых уравнений и систем, доказать теоремы об их однозначной разрешимости, получить асимптотические представления их решений.

Основные результаты диссертации не только представляют собой весьма нетривиальные утверждения — они еще и очень непросто доказываются. Все те свойства уравнений (систем), задач и решений, которые в теории дифференциальных уравнений можно считать общеизвестными, для функционально-дифференциальных приходится доказывать заново, и далеко не всегда то или иное свойство сохраняется в функционально-дифференциальном случае. Вообще, о существовании какой-либо общей теории функционально-дифференциальных уравнений в настоящее время говорить не приходится — она находится только в процессе своего становления, и рассматриваемая диссертация вносит в этот процесс достойный вклад. Так, пока остается открытым и вопрос о классификации указанных уравнений по типам. Бесспорно, это не редкость для современной математической литературы, когда какое-либо функционально-дифференциальное уравнение называют эллиптическим, параболическим или гиперболическим, но надо понимать, что, строго говоря, эта терминология однозначно введена только только для *дифференциальных* уравнений. Каждый раз, когда мы пытаемся распространить ее на более широкий случай, нам надо внимательно следить, чтобы такое обобщение было, во-первых, непротиворечивым (в контексте рассматриваемой диссертации это означает, что обнуление коэффициентов при всех интегральных членах уравнения не должно изменить тип оставшегося *дифференциального* уравнения), а во-вторых, адекватным (концептуальная разница между, например, гиперболическим и параболическим случаями отчетливо видна уже на линейных дифференциальных уравнениях второго порядка, и вот эта разница должна сохраняться и на всех обобщениях). В своем исследовании Д. А. Закора основывает такую классификацию на спектральных свойствах интегродифференциальных операторов, входящих в изучаемые уравнения, и я считаю такой выбор абсолютно обоснованным, поскольку и в классическом случае линейных дифференциальных уравнений второго порядка мы, по сути, делаем то же самое — рассматриваем матрицу старших коэффициен-

тов и определяем, какие знаки имеют ее собственные значения. Однако этот совершенно обоснованный выбор ставит перед диссертантом очень большие аналитические трудности. Проанализировать собственные значения квадратной симметричной матрицы — не такая уж сложная задача. Но в данной диссертации приходится постоянно иметь дело с операторами, у которых структура спектра очень сложна. Например, может наличествовать существенный спектр плюс несколько ветвей изолированных комплексных собственных значений с весьма нетривиальной асимптотикой. Эти значения могут лежать в пределах сектора, а могут (в зависимости от конкретной задачи) лежать в пределах полосы. А могут — только в пределах полуплоскости. Каждому собственному значению может, кроме собственного элемента, соответствовать и цепочка присоединенных элементов. При определенных условиях эти собственные и присоединенные элементы образуют базис Рисса, а при их отсутствии — нет. Все это (включая асимптотику ветвей изолированных собственных значений, границы секторов и полос, критерии базисности по Риссу для собственных и присоединенных элементов) тщательно исследовано диссертантом. И, несмотря на указанные выше трудности, строгость и полнота доказательств не вызывают никаких сомнений. Вызывает одобрение последовательность и отчетливость изложения.
Результат этого спектрального анализа подтверждает концептуальную правоту диссертанта: так, задача о вязкой релаксирующей жидкости и баротропная гидромеханическая модель Олдройта оказываются параболическими, а задача об идеальной релаксирующей жидкости и баротропная гидромеханическая модель Максвелла — гиперболическими. На мой взгляд, так и должно быть.
Бесспорно, обширное функционально-аналитическое исследование, выполненное диссертантом, не исчерпывает своей целью только разделение изучаемых задач математической физики на параболические и гиперболические — на его результаты диссертант опирается, доказывая однозначную разрешимость этих задач и получая асимптотические представления их решений. Более того, ряд этих (вспомогательных в рамках данной диссертации) результатов представляет и несомненный самостоятельный интерес для специалистов в области функционального анализа. Это — равномерная экспоненциальная устойчивость полугрупп, возникающих в данных задачах, спектральные свойства их генераторов, локализация существенного спектра и асимптотика дискретного спектра этих генераторов, свойства его корневых элементов.

Несомненно, однако, что *основная* тематика настоящей диссертации — дифференциальные уравнения. Более конкретно — их глубокие обобщения, имеющие (помимо чисто теоретической ценности) важные и актуальные приложения в современной математической физике.

К недостаткам работы можно отнести следующее:

- В некоторых случаях было бы полезно выразить полученный результат в терминах *исходной* задачи, а не (или кроме) терминов *преобразованной* задачи. Например, теорема 2.13 — это утверждение о задаче (2.114). Но к задаче (2.114) мы свели задачу (2.102). А задача (2.102) — это преобразованная задача (2.95). А к ней мы переходим от задачи (2.92). И получается, что нас интересует задача (2.92) о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающуюся ограниченную область, а вот ответ мы получаем в терминах задачи (2.114). Поэтому имело бы смысл, завершив доказательство теоремы 2.13, пояснить — а что же этот только что полученный результат означает для исходной задачи (2.92).

- Некоторые обозначения весьма неудачны. Для примера укажем $u_0(t)$ в задаче (1.56). Рассматривается система из двух дифференциальных уравнений — соответственно, с двумя неизвестными функциями. Если одна из них обозначена через $u(t)$, то понятно, что обозначение $u_0(t)$ для второй из них может запутать читателя. Мотивация диссертанта абсолютна понятна: одна неизвестная функция действует в пространство H, и ее мы обозначим через u, а вторая действует в пространство H_0, вот и обозначим ее через u_0. Звучит логично и последовательно, но для восприятия читателя — плохо. Особенно с учетом того, что в этой задаче ставится еще и начальное условие.

- Нигде не дано определение релаксирующей жидкости. В отличие от понятий «вязкая», «вязкоупругая» и «сжимаемая», этот термин не является настолько общепринятым, чтобы оставить его без пояснений.

Однако ни один из перечисленных недостатков (равно как и все они в совокупности) не снижает ценности полученных результатов и не меняет безусловно положительной оценки диссертации.

В целом совокупность теоретических положений, разработанных в рецензируемой диссертации, можно квалифицировать как новое крупное научное достижение. Тема диссертации является актуальной, методы исследования — современными: теория C_0-полугрупп, спектральная теория операторов и операторных пучков. Более того, чтобы применить эти методы к рассматриваемым задачам, диссертанту пришлось существенно и творчески их развить, поэтому есть все основания утверждать, что Д. А. Закора не только решил ряд существенных задач известными методами, но и внес существенный вклад в разработку самих этих методов.

Результаты диссертации могут быть использованы в МГУ имени М. В. Ломоносова, Институте гидродинамики имени М. А. Лаврентьева и ряде других научных учреждений, исследования которых связаны с проблемами динамики вязкоупругих сред.

Результаты диссертации опубликованы в 13 статьях в журналах, включенных в перечень ведущих рецензируемых научных изданий ВАК.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа «Спектральный анализ и асимптотика решений задач механики вязкоупругих сред» отвечает всем требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям по математике, а ее автор Закора Дмитрий Александрович безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент — Муравник Андрей Борисович,
доктор физико-математических наук по специальности
01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
руководитель проекта аппарата научного руководителя
АО «Концерн «Созвездие»
394018, Воронеж, ул. Плехановская, 14
тел.: 8(473)2525252 (доб. 131-38)
email: amuravnik@yandex.ru

21.04.2021

А. Б. Муравник

Подпись Муравника А. Б. удостоверяю:
Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Д. В. Костин

Акционерное общество «Концерн «Созвездие» * Joint Stock Company «Concern «Sozvezdie» * Россия * Воронеж * ОГРН 1053600445337