Усреднение и асимптотические свойства сингулярно возмущенных дифференциальных операторов.

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация посвящена разработке методов усреднение сингулярно возмущенных дифференциальных операторов. Различные классы эллиптических и параболических дифференциальных уравнений, сингулярно зависящих от малого параметра, представляют существенный интерес для математического исследования и имеют многочисленные приложения. Упомянем здесь задачи исследования различных процессов в пористых средах, изучение свойств композиционных материалов, описание эффективных свойств решетчатых и каркасных конструкций, антенн, армированных материалов. Отметим, что численное моделирование сред с микроструктурой является весьма трудоемким и затратным, в связи с чем эффективное описание таких сред становится важной в приложениях задачей.

Исследование диссертации начинается с задачи Коши для линейных параболических уравнения второго порядка с быстроосциллирующими периодическими коэффициентами и с малым параметром при старших производных, причем коэффициенты оператора зависят как от пространственных переменных, так и от времени. Показано, что такая задача допускает усреднение в следующем смысле: решения исходной задачи после факторизации на подходящую экспоненциальную функцию времени и периодическую функцию пространственных переменных в правильно выбранных движущихся координатах сходятся по норме к решению усредненной задачи с постоянными коэффициентами.

Для системы, состоящей из уравнения конвекции диффузии в среде с периодически расположенными включениями и обыкновенного дифференциального уравнения на поверхности включений, получен результат об усреднении в движущихся координатах.

При периодическом усреднении сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии в ограниченной области с однородным краевым условием Дирихле граница области существенно влияет на асимптотическое поведение решений. В случае, когда эффективная конвекция обращается в ноль, справедлив обычный в теории усреднения результат: решение исходной начально-краевой задачи сходится к решению аналогичной задачи для усредненного параболического оператора с постоянными коэффициентами. Если же эффективная конвекция нетривиальна, то решение экспоненциально быстро убывает на любом временном интервале. Для таких решений найдена скорость экспоненциального убывания и построен асимптотический профиль нормализованного решения. Для изучения предельного поведения решения используются экспоненциальные преобразования исходного оператора и факторизация.

Получены также результаты о периодическом усреднении для сингулярно возмущенных параболических нелинейных операторов. Рассматриваются уравнения с большим нелинейным потенциалом и уравнения конвекции-диффузии с большой нелинейной конвекцией. В обоих случаях при некоторых условиях на структуру нелинейности построены эффективные уравнения и доказана сходимость. Во втором случае сходимость справедлива в движущихся координатах. Отметим, что в обоих случаях возникает так называемый дисперсный эффект: предельное уравнение содержит нелинейные члены более высокого порядка, чем исходное уравнение.

Дано описание предельного поведения решений параболических уравнений с большими младшими членами и быстроосциллирующими коэффициентами, периодическими по пространственным переменным и случайными стационарными по времени. Отметим интересную особенность этих задач. Усредненное уравнение как правило является стохастическим уравнением с частными производными. Рассматриваем как начально-краевые задачи для упомянутых уравнений в ограниченных областях, так и задачу Коши во всем пространстве, доказывается(в подходящих функциональных пространствах) что решения этих задач сходятся по распределению к решению предельной начально-краевой задачи для усредненного стохастическим уравнением с частными производными.

Вопросы исследования дифференциальных операторов с быстро меняющимися коэффициентами долгое время были предметом изучения физиков и механиков и исследовались на физическом уровне строгости. Интерес математиков к этим задачам возник в 70-е годы 20-го века, начиная с работ В.Марченко и Е.Я.Хруслова , Е.Де Джорджи, С.Спаньоло ,

где исследовались эллиптические и параболические уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами. Прогресс, достигнутый в этих работах, положил начало новому разделу теории дифференциальных уравнений – математической теории усреднения и теории G-сходимости. Существенный вклад в эту теорию внесла Российская математическая школа. В частности, в работах Н.С.Бахвалова [?], В.В.Жикова, С.М.Козлова, О.А.Олейник был исследован широкий круг задач усреднения. В этой новой области математики были разработаны эффективные методы исследования. Наиболее значимые из них – это метод асимптотических разложений, предложенный Н.С.Бахваловым и Ж.-Л. Лионсом , методы компенсированной компактности Ф.Мюра и Л.Тартара , техника p-связности В.В.Жикова.
С конца 80-х годов активно используется концепция двухмасштабной сходимости, введенная Г.Нгуетсенгом и Г.Аллером . В.В.Жиков расширил эту концепцию, введя понятие двухмасштабной сходимости для произвольной периодической меры, и объединив тем самым технику двухмасштабной сходимости с техникой p-связности.
Весьма эффективным оказался также вариационный метод Гамма-сходимости, введенный Е. Де Джорджи и получивший дальнейшее развитие в работах Г. Дал Мазо, У.Моско, А.Брайдеса, В.В.Жикова и других математиков .
Первые результаты об усреднении операторов со случайными ститистически однородными коэффициентами были получены в работах С.М.Козлова , В.В.Жикова, Г.Папаниколау и С.Варадана в конце 70-х годов прошлого века.

Другой тип сингулярного возмущения – это наличие малого параметра при старших производных дифференциального уравнения. Активное исследование эллиптических операторов с малым параметром при старших производных началось с середины 20-ого века. Важную роль здесь сыграли работы М.И.Вишика и Л.А.Люстерника , где для широкого класса операторов была найдена асимптотика решений соответствующих краевых задач. Уравнения конвекции-диффузии с малым коэффициентом при вторых производных изучались А.Д.Вентцелем и М.И.Фрейдлиным с помощью техники больших уклонений для диффузионных процессов. Большой интерес представляет исследование дифференциальных операторов, содержащих как быстро осциллирующие коэффициенты, так и малый параметр при старших производных.

Они важны как с математической точки зрения, так и во многих прикладных задачах, где используются дифференциальные уравнения. Одно из важных приложений - это изучение различных эволюционных процессов при больших временах в средах с периодической, случайной статистически однородной или иной структурой, обладающей некоторой инвариантностью относительно пространственного сдвига. В этом случае естественным шагом является введение нового временного и пространственного масштабов, что приводит к быстрой осцилляции коэффициентов и одновременно появлению малого параметра при старших производных в соответствующих дифференциальных операторах. Другим естественным примером служит описание конвективных и транспортных процессов в присутствии малого шума.

Асимптотическое поведение при больших временах решений параболических уравнений изучались многими авторами. В работах В.В.Жикова была установлена связь стабилизации с усреднением, для периодических операторов с младшими членами были введены движущиеся координаты, с помощью которых дано асимптотическое представление решений задачи Коши. Другое изложение, а также доказательство сходимости в операторных нормах имеется в недавней работе В.В.Жикова и С.Е.Пастуховой .

В диссертации изложены разработанные автором методы исследования предельного поведения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, у которых оба типа сингулярности присутствуют одновременно, т.е. увеличение частоты осцилляции коэффициентов сопровождается вырождением коэффициентов при старших производных, что делает невозможным применение уже известных подходов.

Основной целью работы является изучение предельного поведения решений и собственных функций в перечисленных сингулярно возмущенных задачах. Для исследования сингулярно возмущенных операторов с периодическими коэффициентами был разработан метод двухмасштабной сходимости и асимптотических разложений в движущихся координатах. В движущихся координатах удается получить результаты о компактности, построить эффективную задачу и доказать сходимость решений. Для уравнений со случайными по времени стационарными быстро осциллирующими коэффициентами была создана техника усреднения семейства мер, порожденных решениями этих уравнений, и построения усредненного стохастического уравнения в частных производных. Для изучения первой собственной пары сингулярно возмущенного эллиптического оператора был развит подход, позволяющий описывать асимптотическое поведение этой собственной пары в терминах вязкостных решений вспомогательной усредненной задачи типа Гамильтона-Якоби.

В диссертации используются техники получения равномерных по параметру априорных оценок для решений краевых задач и для семейств мер, порожденных этими решениями, при изучении операторов со случайными коэффициентами.

Применяется также метод факторизации решений. Для факторизации выбирается специальное решение или собственная функция некоторой вспомогательной задачи на периоде.

Для описания предельного поведения решений задач, включающих операторы с большой конвекцией, вводится двухмасштабная сходимость в движущихся координатах. В движущихся координатах удается получить результаты о компактности, построить эффективную задачу и доказать сходимость решений.

Исследование предельного поведения решений уравнений со случайными коэффициентами опирается в частности на технику перехода к пределу в бесконечномерных мартингальных проблемах.

При усреднения нелинейных уравнений с осциллирующими коэффициентами используется также метод осциллирующих тестовых функций.

Диссертация состоит из пяти глав и введения, в котором дается обзор исследований, связанных с темой диссертации, и краткое изложение ее содержания, характеристика исследуемых задач, их актуальность и новизна. Список литературы содержит 93 наименования.

В первой главе изучаеится задача Коши для линейного параболического уравнения второго порядка с быстоосциллирующими периодическими коэффициентами и с малым положительным параметром при старших производных, причем коэффициенты оператора зависят как от пространственных переменных, так и от времени. Показано, что такая задача допускает усреднение в следующем смысле: после факторизации решения на подходящую экспоненциальную функцию времени в правильно выбранных движущихся координатах решения исходной задачи сходятся по норме к решению усредненной задачи с постоянными коэффициентами.

Интересные эффекты наблюдаются при усреднении нестационарных задач конвекции-диффузии в среде с периодически расположенными включениями в случае, когда на поверхности включений решение удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, так что в целом поведение процесса оптсывается системой уравнения конвекции-диффузии в области и обыкновенного уравнени на поверхности ключения, причем эти уравнения связаны между собой граничными условиями для уравнения конвекции-диффузии. Во второй главе показано, что такая модель допускает усреднение, и что эффективная конвекция(скорость) зависит от параметров юбыкновенных дифференциальных уравнений на границе. При периодическом усреднении сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии в ограниченной области с однородным краевым условием Дирихле граница области существенно влияет на асимптотическое поведение решений. Этим задачам посвящена третья глава. В случае, когда конвекция обращается в ноль, справедлив обычный в теории усреднения результат: решение исходной начально-краевой задачи сходится к решению аналогичной задачи для усредненного параболического оператора с постоянными коэжффициеентами.

Если же эффективная конвекция нетривиальная, то решение экспоненциально быстро убывает на любом временном интервале. Для изучения предельного поведения решения используются экспоненциальные преобразования исходного оператора и факторизация.

Четвертая глава посвящена периодическому усреднению сингулярно-возмущенных параболических нелинейных операторов. Рассматриваются уравнения с большим нелинейным потенциалом и уравнения конвекции-диффузии м ольшой нелинейной конвекцией. В обоих случаях построены эффективные уравнения и доказана сходимость. Во втором случае сходимость справедлива в движущихся координатах.

В пятой главе, рассматрены сингулярно возмущенные параболические операторы с быстро осциллирующими коэффициентами периодическими по пространственным переменным и случайными стационарными по времени. Изучены линейные и нелинейные операторы. Интереснаяособенность этих задач. Усредненное уравнение как правило является стохастическим уравнением с частными производными. Рассмотрена как начально-краевая задача для упомянутых уравнений в ограниченных областей, так и задача Коши во всем пространстве. Доказано, что в подходящем функциональном пространстве решения этих задач сходятся по распределению к решению предельной начально-краевой задачи.

В диссертации разработаны методы исследования асимптотического поведения решений и усреднения дифференциальных операторов с быстроосциллирующими коэффициентами, которые содержат большой параметр при старших производных. Объяснены границы применимости этих методов, и для широкого класса задач построены усредненные модели и доказаны результаты о сходимости.

При усреднении параболических уравнений типа конвекции диффузии с малым коэффициентом диффузии (либо с большими членами первого порядка) введено понятие двухмасштабной сходимости в движущихся координатах и показано, что сходимость справедлива в асимптотически быстро движущихся координатах.

Для линейных параболических задач, содержащих как большую конвекцию, так и большой потенциал, разработан метод введения движущихся координат, который комбинируется с факторизацией решения. При этом для факторизации используется собственная функция вспомогательной параболической задачи с условием периодичности по всем переменным, включая время. Отметим, что периодическое по времени краевое условие является нестандартным для параболических задач.

Для сингулярно возмущенных параболических задач с быстроосциллирующими коэффициентами, периодическими по пространственным переменным и случайными стационарными по времени, при условии хорошего перемешивания доказывается сходимость решений по распределению к решению стохастического уравнения в частных производных.

Это интересный пример того, как стохастическое уравнение в частных производных возникает в результате усреднения уравнений, не содержащих диффузионного члена.
Из сказанного выше бесспорно следует новизна полученных диссертантом результатов, которые представляют существенный вклад в анализе проблем математической физики, связанных с задачами с осреднения сингулярно-возмущенных задач. **Блестящая диссертация** Все основные результаты диссертации опубликованы, автореферат точно отражает содержание диссертации. Приятно отметить **читаемость** диссертации. Формулировки лаконичны и точны. Доказательства, при всей их содержательности и новизне, продуманно просты. Разработанные в диссертации методы будут полезны специалистам в математической физике.

Работа имеет теоретический характер. В ней разработаны методы, позволяющие исследовать асимптотическое поведение решений для широкого класса эллиптических и параболических уравнений, имеющих как быстроосциллирующие коэффициенты, так и малый параметр при старших производных. Позволяют иследовать асимптотическое поведение решений краевых задач для сингулярно-возмущенных диференциальных уравнений и собственных пар соответствующих спектральных задач.

Диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук ("Положения о порядке присуждения ученых степеней") и диссертант, Пятницкий Андрей Львович, заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

10 Октября, 2016

Профессор мех-мат. факультета МГУ, кафедры дифференциальных уравнений, д. ф.-м. н.

Е. В. Радкевич

Подпись официального оппонента Е. В. Радкевича удостоверяю

профессор, д. ф.-м. н. В. Н. Чубариков

Радкевич Евгений Владимирович
д. ф.-м. н. по специальности 01-01-02
evrad07@gmail.com
8 967 104 10 22