ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Тельновой Марии Юрьевны
«Оценки первого собственного значения задачи Штурма – Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием»,

представленную на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление в диссертационный совет Д 212.025.08.

В диссертации рассматривается задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{gathered} y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \;\; x \in (0,1)\,, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ действительных неотрицательных локально интегрируемых на $(0,1)$ функций, удовлетворяющих интегральному условию

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x)dx = 1, \;\; \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R},\, \gamma \neq 0. \tag{2}$$

Целью автора диссертации является получение оценок первого (минимального) собственного значения

$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q) \quad \text{и} \quad M_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q)$$

при различных значениях параметров интегрального условия α, β, γ, и доказательство достижимости точных оценок.

Одной из наиболее известных задач такого рода является знаменитая задача Лагранжа о нахождении формы наиболее прочной колонны заданного объема. В безразмерных переменных эта задача сводится к нахождению такого неотрицательного потенциала $Q(x)$, удовлетворяющего условию нормировки

$$\int_0^1 \sqrt{Q(x)}dx = 1, \quad \text{(постоянство объёма колонны)} \tag{3}$$

при котором величина

$$\lambda_1(Q) = \min_{y \in Y \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 Q(x)y''(x)^2dx}{\int_0^1 y'(x)^2dx}, \tag{4}$$

$$Y = \left\{ y \in H^2(0,1) : y(0) = (Q(x)y'')_{x=0} = 0, \; y(1) = (Q(x)y'')_{x=1} = 0 \right\},$$

максимальна. Ю. В. Егоровым и В. А. Кондратьевым задача Лагранжа для $Y = H_0^2(0,1)$, что соответствует граничным условиям

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0,$$

рассматривалась для потенциалов, удовлетворяющих более общему условию нормировки

$$\int_0^1 Q^\gamma(x)dx = 1 \tag{5}$$

при произвольном значении $\gamma \neq 0$.

К задаче Лагранжа близка задача о нахождении оценок первого собственного значения задачи (1), а также первого собственного значения $\lambda_1(Q)$ задачи Штурма–Лиувилля

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \ \ x \in (0,1)\,, \ \ y(0) = y(1) = 0,$$

при выполнении условия (5). Экстремальные значения собственных значений этой задачи для положительного ограниченного отделённого от нуля потенциала при условии $\int_0^1 Q(x)dx = 1$ были найдены в работе М.Г. Крейна. Исследование первого собственного значения при условии (5) проведено в работе Ю.В. Егорова и В.А. Кондратьева. В работе К.З. Куралбаевой были получены оценки первого собственного значения при условии (2) и некотором дополнительном условии.

Оценки первого собственного значения задачи (1) при условии (5) рассматривались в работах А.Г. Рамма, Дж. Таленти, Х.Эгнелла, М. Эссена, Ю.В. Егорова, С. Караа, С.С. Ежак.

В. А. Винокуровым и В. А. Садовничим были получены оценки всех собственных значений $\lambda_n(Q)$ для задачи Штурма–Лиувилля

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \ \ x \in (0,\pi)\,, \ \ y(0) = y(\pi) = 0,$$

при условии на потенциал

$$\|Q\|_p \leqslant t, \quad t > 0, \quad p \in [1, +\infty].$$

С.С. Ежак изучала аналогичную задачу для неотрицательных ограниченных потенциалов Q, удовлетворяющих условию (5).

Таким образом, тема диссертации является актуальной. Новизна результатов диссертации по сравнению с предыдущими исследованиями заключается в том, что рассматриваются потенциалы, удовлетворяющие условию нормировки (2) вместо (5). Это условие позволяет учитывать потенциалы, имеющие степенные особенности или нули различных порядков на концах интервала.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 57 наименований, в том числе 25 ссылок на публикации автора.

Введение посвящено постановке задачи, обоснованию ее актуальности и научной ценности. Приведен обзор публикаций по теме диссертации, сформулирована цель исследования и привены основные результаты работы.

В первой главе диссертации приводятся основные определения и дается вариационная постановка задачи. Доказывается существование минимизанта функционала

$$R[Q, y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \int_0^1 Q(x) y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx},$$

для которого уравнение из (1) является уравнением Эйлера-Лагранжа. Показано, что минимум $R[Q, y]$ является искомым наименьшим собственным значением, а соответствующий минимизант является решением (1).

Вторая глава диссертации посвящена оценкам $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ при всех значениях параметров α, β, γ интегрального условия. В силу неотрицательности потенциала Q, всегда имеем $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geq \pi^2$. При этом, оказывается, что для $\gamma > 0$ выполняется $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi^2$. Достижимость нижней границы автор показывает с помощью рассмотрения последовательности потенциалов, концентрирующихся к одному из концов интервала — аналога дельта-образной последовательности для интегрального условия (2) вместо условия единичной массы. В случае $\gamma < 0$ автором получены разнообразные верхние оценки на $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ для различных диапазонов значений параметров.

Во втором параграфе второй главы диссертации автор приводит метод получения точного значения для $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ при $\gamma < 0$. Оказывается, что $m_{\alpha,\beta,\gamma}$ совпадает с инфимумом функционала

$$G[y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx + \left(\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} (1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}} |y|^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\int_0^1 y^2 dx}, \quad y \in C_0^\infty(0,1), \qquad (6)$$

который получается, если оценить в функционале $R[Q, y]$ второй член в числителе, пользуясь неравенством Гёльдера и условием (2).

Третья глава диссертации посвящена оценкам $M_{\alpha,\beta,\gamma}$, то есть оценкам первого собственного значения сверху. Показано, что $M_{\alpha,\beta,\gamma} = \infty$ при $\gamma < 1$. Для $\gamma \geq 1$ доказывается, что величина $M_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty$, и для неё выписываются оценки для различных диапазонов значений параметров.

Во втором параграфе третьей главы диссертации автор доказывает, что в случае $\gamma > 1$ величина $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ совпадает с инфимумом функционала $G[y]$, данного в (6).

Отмечу, что в случае $\alpha, \beta = 0$, то есть условия (5), уравнение Эйлера-Лагранжа для минимизанта функционала $G[y]$ из (6),

$$u'' + mu = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}|u|^{\frac{2}{\gamma-1}}u, \tag{7}$$

является автономным и поддаётся исследованию методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений, для него может быть выписано решение в виде $x = x(u, m)$. Это позволяет (хотя это и непростая задача) получить оценки для $M_{0,0,\gamma}$ при $\gamma > 1$ и $m_{0,0,\gamma}$ при $\gamma < -1$, что было проделано в исследованиях С.С. Ежак.

Приведу некоторые замечания к работе. Во-первых, полученные оценки в ряде случаев можно улучшить. Это можно показать на достаточно простых примерах. Например, рассмотрев постоянный потенциал $Q(x) \equiv \mathrm{const}$, можно уточнить ряд оценок Теоремы 2.1. Кроме того, даже прослеживая рассуждения автора, можно увидеть, что в них есть возможности для уточнения получающихся констант. В ряде случаев автор гонится за общностью рассуждений, которое для части значений параметров может быть существенно упрощено. Это бы облегчило читателям восприятие соответствующих мест доказательства. На странице 43 слово "положительной" лишнее. Далее, автор излишне подробно проводит доказательство неравенства треугольника для введённой на странице 40 нормы $\|y\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}}$. Это рассуждение можно было бы сделать намного короче, записав

$$\|y\|_{B_{\alpha,\beta,\gamma}} = \left(\|y'\|^2_{L^2(0,1)} + \|y\|^2_{L^{\gamma'}((0,1);\rho_{\alpha,\beta}dx)}\right)^{1/2},$$

где

$$\rho_{\alpha,\beta} = x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}, \quad \gamma' = \frac{\gamma}{\gamma-1},$$

и использовав то, что неравенство треугольника для лебеговых норм известно. Также следует отметить, что Замечание 2.1 на странице 31 написано неудачно. Непонятно, в каком смысле можно понимать выражение $Q_*(x) = x^{-\alpha/\gamma}(1-x)^{-\beta/\gamma}\delta(x)$. Лишь прочитав приведённое перед этим доказательство на странице 30, можно понять, что речь идёт о "дельтаобразной" последовательности, но нормированной условием (2) вместо обычного условия единичной массы.

Указанные замечания не снижают ценности работы.

В заключение отмечу, что диссертация М.Ю. Тельновой «Оценки первого собственного значения задачи Штурма — Лиувилля с условиями Дирихле и весовым интегральным условием» представляет собой самостоятельную законченную научно-квалификационную работу, содержащую новые результаты, полученные с помощью методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и функционального анализа. Все результаты диссертации являются новыми результатами по данной проблеме и сопровождаются строгими математическими доказательствами. Содержание и структура диссертации соответствуют поставленной цели исследования.

Основные результаты опубликованы в трёх работах в журналах из списка ВАК РФ, в статье в журнале Mathematica Bohemica, издаваемом Институтом Математики Академии Наук Республики Чехия, в одной главе монографии, а также в сборниках тезисов многочисленных конференций. Автореферат диссертации полностью отражает ее содержание.

Считаю, что рецензируемая работа удовлетворяет требованиям "Положения о порядке присуждения ученых степеней", предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям, и соответствует специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а ее автор, Тельнова Мария Юрьевна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент,

Кандидат физ.-мат. наук
научный сотрудник
Института прикладной математики
им М.В. Келдыша РАН М.Д. Сурначев

125047, Москва, Миусская пл. 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, лаборатория вычислительной аэроакустики, tel: +7 499 7912760, fax: +7 499 9720723, e-mail: peitsche@yandex.ru

Подпись М.Д. Сурначёва заверяю,

Кандидат физ.-мат. наук
учёный секретарь
Института прикладной математики
им М.В. Келдыша РАН А.И. Маслов

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М.В. КЕЛДЫША РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК • ОГРН 1037739189440 • МОСКВА