

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Воронежского государственного  
педагогического университета,  
профессор

Филоненко С.И.

31 мая 2016 года

## О Т З Ы В

ведущей организации о диссертации А. Х. Хаммади  
«Свойства характеристик множества достижимости  
различных управляемых систем», представленной на соискание  
ученой степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление.

### Актуальность темы диссертации

В диссертации А. Х. Хаммади рассмотрены задачи изучения характеристик равномерности пребывания множества достижимости управляемой системы в заданном множестве на отрезке фиксированной длины, непосредственно связанные с задачами существования инвариантных множеств. В ней также исследуются статистические характеристики множества достижимости и статистически инвариантные множества управляемых систем и отвечающих им дифференциальных включений.

Большое прикладное значение, которое имеет исследование инвариантных множеств в теории управления и теории дифференциальных игр, породило поток научных публикаций. Итоги этих исследований подведены в работах Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, Ж. П. Обена, А. И. Субботина, Е. Л. Тонкова, В. Н. Ушакова, Т. Ф. Филипповой, П. Хартмана и многих других авторов. Значительно меньше публикаций посвящено вопросам изучения множеств, не являющихся инвариантными (см. работы В. Н. Ушакова<sup>1</sup> и его учеников). В этих работах введено и исследовано понятие дефекта инвариантности для множеств, не обладающих свойством инвариантности. В работах Л. И. Родиной и Е. Л. Тонкова<sup>2</sup> также исследуются множества, не

<sup>1</sup> Ушаков В. Н., Латушкин Я. А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 2. — С. 178–194.

Ушаков В. Н., Зимовец А. А. Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — № 2. — С. 98–111.

<sup>2</sup> Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. — 2009. — Т. 5, № 2. — С. 265–288.

Родина Л. И., Тонков Е. Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2011. — Вып. 1. — С. 67–86.

являющиеся инвариантными в «классическом» смысле и для таких множеств изучается естественное обобщение понятия инвариантности, которое названо статистической инвариантностью. Важную роль в изучении статистически инвариантных множеств играют введенные в этих работах характеристики, такие как относительная частота поглощения множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t \sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости заданным множеством. Отметим, что подобные характеристики рассматривались в работах В. В. Немыцкого, В. В. Степанова, В. А. Рохлина, И. П. Корнфельда, Я. Г. Синяя, С. В. Фомина, А. Б. Катка и Б. Хасселблата в связи с задачами существования минимального центра притяжения движения и исследованием свойства возвращаемости областей.

В работе А. Х. Хаммади исследования Л. И. Родиной и Е. Л. Тонкова распространяются на управляемые системы со случайными параметрами. Для таких систем исследатель изучает свойства статистических характеристик множества достижимости, выполненные с вероятностью единица. Также А. Х. Хаммади рассматривает свойства новых характеристик, связанных с равномерностью пребывания множества достижимости управляемой системы в заданном множестве.

### Оценка содержания диссертации и ее завершенность

Целью диссертации является исследование характеристик множества достижимости детерминированных управляемых систем и систем со случайными параметрами, а также изучение статистически инвариантных множеств и статистических характеристик для систем со случайными параметрами. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих 9 параграфов, 10 рисунков, заключения и списка литературы, включающего 68 наименований. Общий объем диссертации — 100 страниц.

Во введении обоснована актуальность темы исследования,дается общая характеристика рассматриваемого в диссертации круга вопросов, приведен обзор работ предшественников по данной проблеме, определена цель работы и сформулированы основные полученные результаты.

В первой главе изучаются характеристики, которые отображают свойство равномерности пребывания множества достижимости  $D(t, X)$  управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x, u) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (2)$$

в заданном множестве  $\mathfrak{M} = \{(t, x) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}$  на отрезке фиксированной длины. Одна из этих характеристик — *относительная частота поглощения множества  $D(t, X)$  множеством  $\mathfrak{M}$  на отрезке  $[\tau, \tau + \vartheta]$*  равна отношению меры Лебега тех  $t$  из отрезка  $[\tau, \tau + \vartheta]$ , при которых  $D(t, X) \subseteq M(t)$ , к длине данного отрезка:

$$\text{freq}_{[\tau, \tau + \vartheta]}(D, M) \doteq \frac{\text{mes} \{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : D(t, X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta}. \quad (3)$$

Вторая характеристика —

$$\text{freq}_\vartheta(D, M) \doteq \inf_{\tau \geq 0} \frac{\text{mes} \{t \in [\tau, \tau + \vartheta] : D(t, X) \subseteq M(t)\}}{\vartheta} \quad (4)$$

отображает свойство равномерности пребывания множества достижимости управляемой системы (2) в множестве  $\mathcal{M}$  на отрезке заданной длины  $\vartheta > 0$ .

Получены основные свойства данных характеристик и приведены условия, при которых эти характеристики можно оценить или вычислить. Доказаны теоремы сравнения, сформулированные в терминах функций А.М. Ляпунова и производной в силу дифференциального включения. Приведены определения характеристик, которые целесообразно исследовать в различных прикладных задачах. Рассмотрен пример вычисления характеристики равномерности пребывания в заданном множестве численности популяции, динамика которой задана задачей Коши для уравнения Ферхюльста с периодическими коэффициентами.

Во второй главе проводится исследование множеств, которые не являются инвариантными в «классическом» смысле, но обладают свойством статистической инвариантности. Здесь рассматривается свойство статистической инвариантности и изучаются статистические характеристики множества достижимости управляемых систем со случайными параметрами (1), правая часть которых параметризована с помощью метрической динамической системы  $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ . Для таких систем исследуется свойство статистической инвариантности, выполненное с заданной вероятностью. Основным результатом второй главы являются оценки статистических характеристик, выполненные с вероятностью единица, для управляемой линейной системы с переключениями.

В третьей главе для системы со случайными параметрами получены оценки характеристик равномерности пребывания множества достижимости в заданном множестве, выполненные с вероятностью единица. В частности, получены оценки данных характеристик для управляемой системы с переключениями, для которой длины промежутков между моментами переключения с одного состояния на другое постоянные.

Большинство результатов, полученных в диссертации, проиллюстрировано на примерах.

В целом диссертация А.Х. Хаммади является вполне завершенным исследованием по ряду вопросов, касающихся изучения характеристик множества достижимости управляемых систем и дифференциальных включений различных типов, а также по связанными с этими характеристиками свойствами инвариантности и статистической инвариантности.

### Теоретическая и практическая ценность

Диссертантом рассмотрены новые характеристики множества достижимости управляемых систем и продолжено исследование свойства статистической инвариантности заданного множества относительно управляемой системы (1). Также показано, какую роль играет свойство инвариантности для решения различных задач математической теории управления. Несомненными достоинствами работы А.Х. Хаммади являются следующие:

1. Исследованы основные свойства характеристик (3), (4), доказаны теоремы сравнения для этих характеристик, сформулированные в терминах функций А.М. Ляпунова и производной Ф. Кларка.

2. Для управляемых систем со случайными параметрами получены оценки различных характеристик множества достижимости и достаточные условия существования статистически инвариантных множеств.

3. Получены оценки, выполненные с вероятностью единица, для характеристик множества достижимости управляемой системы с переключениями.

4. Приведено большое число примеров, иллюстрирующих основные результаты.

Работа имеет теоретический характер. Все основные утверждения сформулированы в виде теорем и строго доказаны. Результаты работы А.Х. Хаммади и примененные методы могут быть использованы при проведении исследований по математической теории управления и при чтении специальных курсов для студентов и магистров в Институте математики и механики УрО РАН, в Институте динамики систем и теории управления СО РАН, в Московском, Владимирском, Воронежском педагогическом, Пермском, Удмуртском и Ярославском государственных университетах.

### Критический анализ диссертации

Диссертация А.Х. Хаммади не содержит серьезных недостатков, а изложенные замечания можно рассматривать как пожелания для дальнейших исследований.

1. В формулировках теорем 2.1 и 2.2 (стр. 29–30) одним из условий, при которых справедливы данные утверждения, является условие продолжаемости на положительную полуось всех решений дифференциального включения. Думаю, что нужно было бы написать, когда это условие выполняется и, возможно, включить его в формулировки теорем (в диссертации приведена только ссылка, см. замечание 2.1).

2. В утверждении 3 теоремы 1.1 предполагается, что множество достижимости  $D(t, X)$  при всех  $t \geq 0$  и некотором  $T > 0$  удовлетворяет включению

$$D(t + T, X) \subseteq D(t, X).$$

Пример такого множества достижимости для управляемой системы первого порядка приведен в диссертации на стр. 41. Желательно было бы привести описание класса управляемых систем, множество достижимости которых обладает этим свойством.

3. Многие прикладные задачи, возникающие в последнее время в экономике и экологии, ставят нас перед необходимостью исследования характеристик, которые учитывали бы не только время, в течение которого заданное множество отклоняется от инвариантного, но и величину этого отклонения. Думаю, что методы исследования, разработанные в диссертации, позволят в дальнейшем изучить данные характеристики.

### Выводы

Диссертация А.Х. Хаммади посвящена актуальным в приложениях задачам исследования характеристик множества достижимости и статистически инвариантных множеств для детерминированных управляемых систем и систем со случайными параметрами.

Основные результаты диссертации оформлены в виде теорем, доказательства которых отвечают современным требованиям математической строгости. Теоретические результаты иллюстрируются многочисленными примерами. Работа обладает

внутренним единством и завершенностью. Оформление диссертации отвечает современным требованиям. Результаты диссертации опубликованы в полном объеме в статьях в ведущих научных изданиях.

Автореферат диссертации полностью и правильно отражает ее содержание.

Диссертация А. Х. Хаммади является законченным исследованием, содержащим ряд глубоких результатов по математической теории управления.

Считаю, что диссертация А. Х. Хаммади «Свойства характеристик множества достижимости различных управляемых систем» удовлетворяет всем требованиям п.9 Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.02 (дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), а ее автор А. Х. Хаммади заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв подготовил заведующий кафедрой высшей математики Воронежского государственного педагогического университета, доктор физико-математических наук. профессор В.В. Обуховский, Отзыв обсужден и утвержден 30 мая 2016 года (протокол № 11 от 30 мая 2016 года) на заседании кафедры высшей математики ВГПУ.

Заведующий кафедрой высшей математики Воронежского  
государственного педагогического университета,  
д.ф.-м.н., профессор

Обуховский Валерий Владимирович

e-mail: valerio-ob2000@mail.ru  
тел.: (473)-255-36-63  
394043 Воронеж,ул. Ленина 86

30 мая 2016



Подпись Обуховского В. В заверяю  
Начальник управления кадров  
ФГБОУ ВО «ВГПУ»

И.С. Полякова

30 мая

2016 года