Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Богаевский Илья Александрович

Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации

Специальность 01.01.02 — «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре теории динамических систем механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный консультант: **Давыдов Алексей Александрович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Аграчев Андрей Александрович**
доктор физико-математических наук;
Международная школа передовых исследований (SISSA), профессор

Назайкинский Владимир Евгеньевич
доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН;
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, ведущий научный сотрудник

Седых Вячеслав Дмитриевич
доктор физико-математических наук, доцент;
ФГАОУ ВО «РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М.Губкина», профессор кафедры высшей математики

Ведущая организация: **Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского**

Защита состоится 12 апреля 2019 г. в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете им. А. Г. и Н. Г. Столетовых по адресу: 600024, РФ, Владимир, проспект Строителей, 11, ауд. 230, 7-ой корпус ВлГУ, Педагогический институт.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых и на сайте http://diss.vlsu.ru/.

Автореферат разослан «____» марта 2019 г..

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08,
кандидат физико-математических наук,
доцент С. Б. Наумова

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Фронты лежандровых подмногообразий[1] применяются для описания многочисленных физических явлений и процессов, а исследование их особенностей очень важно для приложений. Возникающие в них лежандровы подмногообразия могут быть как гладкими[2], так и особыми или стратифицированными[3].

В гладком случае типичные особенности фронтов в пространствах низких размерностей[4] в настоящее время хорошо изучены, а их дискретная классификация во всех размерностях совпадает со ADE-списком групп, порождённых отражениями. А именно, дискриминант группы (т. е. многообразие её нерегулярных орбит) диффеоморфен особенности фронта с тем же названием. Например, в трёхмерном пространстве типичные неприводимые особенности фронта гладкой лежандровой поверхности исчерпываются полукубическими рёбрами возврата и ласточкиными хвостами. (Неприводимость исключает из рассмотрения три очевидные типичные особенности: двойное и тройное самопересечения гладких стратов, а также пересечение гладкого страта с ребром возврата.)

Однако, в приложениях встречаются стратифицированные лежандровы подмногообразия. Например, при исследовании особенностей систем лучей в задаче о скорейшем обходе препятствия появились раскрытые ласточкины хвосты и раскрытые зонтики Уитни, фронты которых тоже хорошо изучены в пространствах низких размерностей с помощью производящих семейств. Эти лежандровы подмногообразия универсальны — они появляются во многих задачах, друг с другом не связанных, и задаются алгебраическими уравнениями. Фронты раскрытых ласточкиных хвостов изучались О. П. Щербаком[5] и А. Б. Гивенталем[6].

Затем В. И. Арнольд[7] описал новое универсальное стратифициро-

[1] Необходимые определения даны на стр. 12.

[2] Термин «гладкий» здесь и далее означает «бесконечно гладкий».

[3] Во избежание недоразумений в дальнейшем мы говорим о *стратифицированных* подмногообразиях, а не об *особых*.

[4] *Низкие* размерности — это 4 или меньше, что наиболее интересно для приложений, в которых фронт лежит в физическом пространстве или пространстве–времени.

[5] *Щербак О. П.* Волновые фронты и группы отражений // УМН. 1988. Т. 43, 3(261). С. 125—160.

[6] *Гивенталь А. Б.* Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 33. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 55—112.

[7] *Arnold V. I.* Transformation of waves defined by hyperbolic variational principles // Singularities of Caustics and Wave Fronts. Dordrecht : Springer Netherlands, 1990. P. 219–240.

ванное лежандрово подмногообразие Λ_2, не являющееся алгебраическим, — в его уравнение входят логарифмы. Оно появляется при исследовании на уровне геометрической оптики волновых фронтов, распространяющихся в неоднородных анизотропных средах, в графене и в некоторых управляемых системах специального вида. В отличие от раскрытых ласточкиных хвостов и раскрытых зонтиков Уитни, это лежандрово подмногообразие не задаётся гладким производящим семейством, и поэтому особенности его фронтов не поддаются изучению традиционными методами.

Стратифицированные лежандровы подмногообразия, фронты которых не исследовались ранее, также возникают при исследовании особенностей выпуклых оболочек гладких подмногообразий. Последние встречаются в задачах выпуклого анализа и оптимизации. Например, в теории оптимального управления известна процедура релаксации, или замены множества допустимых скоростей управляемой системы на его выпуклую оболочку, особенности которой появляются при описании зоны локальной транзитивности исходной управляемой системы[8].

Фазовый портрет неявного обыкновенного дифференциального уравнения представляет собой семейство фронтов лежандровых кривых. В простейшем случае, исследованном М. Чибрарио[9], все эти лежандровы кривые имеют гладкие замыкания. Но уже для сложенных особых точек, нормальные формы которых были найдены А. А. Давыдовым[10], замыкания некоторых из них оказываются негладкими, но стратифицированными.

Таким образом, фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий возникают в различных задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации. Поэтому разработка методов их локального исследования и классификация особенностей представляются важными, и актуальность тематики диссертации не вызывает сомнений.

Степень разработанности темы

В настоящее время известны следующие классификационные результаты о типичных особенностях фронтов в пространствах низких размерностей для различных лежандровых подмногообразий. Индекс (в пункте 5 — сумма верхнего и нижнего индексов) в обозначении особенности

[8] *Давыдов А. А., Закалюкин В. М.* Управляемость нелинейных систем: типичные особенности и их устойчивость // УМН. 2012. Т. 67, № 2. С. 65—92.

[9] *Cibrario M.* Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto // Rendiconti del R. Insituto Lombardo, Ser. II. 1932. Vol. 65. P. 889–906.

[10] *Давыдов А. А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19, № 2. С. 1—10.

фронта — это её коразмерность в объемлющем пространстве; если она больше размерности базы проектирования, то указанная особенность не реализуется как типичная.

1. Исходное лежандрово подмногообразие гладкое. В этом хорошо известном классическом случае дискретная часть классификации особенностей фронтов совпадает с ADE-классификацией ростков функций, полученной В. И. Арнольдом[11], и типичные особенности фронтов исчерпываются с точностью до диффеоморфизмов следующими: A_1 (это просто точки гладкости), A_2 (кривая с полукубической точкой возврата или цилиндр над ней), A_3 (ласточкин хвост или цилиндр над ним), A_4, D_4^+ и D_4^-.

2. Исходное лежандрово подмногообразие диффеоморфно паре пересекающихся прямых или цилиндру над ней. В этом случае дискретная часть классификации особенностей фронтов совпадает с классификацией ростков функций на многообразии с краем и к особенностям пункта 1 добавляются следующие[12,13]: B_2 (пара касающихся парабол или цилиндр над ней), B_3, B_4 и F_4.

3. Исходное лежандрово подмногообразие диффеоморфно кривой с полукубической точкой возврата или цилиндру над ней. К особенностям пункта 1 добавляются следующие[5,6,14]: H_2 (кривая с точкой возврата $5/2$ или цилиндр над ней), H_3 и H_4.

4. Исходное лежандрово подмногообразие — раскрытый ласточкин хвост размерности 2, или цилиндр над ним, или раскрытый ласточкин хвост размерности 3. К особенностям пунктов 1 и 3 добавляются следующие[5,6]: Ξ_3 (фронт двумерного раскрытого ласточкина хвоста или цилиндр над ним), Ξ_4 (фронт трёхмерного раскрытого ласточкина хвоста) и Ω_4 (фронт цилиндра над двумерным раскрытым ласточкиным хвостом).

5. Исходное лежандрово подмногообразие — раскрытый зонтик Уитни размерности 2 или цилиндр над ним. К особенностям пункта 1 добавляются следующие[6]: S_2^1 (сложенный зонтик Уитни или цилиндр над ним) и S_3^1.

[11] *Арнольд В. И.* Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6, № 4. С. 3—25.

[12] *Арнольд В. И.* Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // УМН. 1978. Т. 33, 5(203). С. 91—105.

[13] *Nguyen huu Duc, Nguyen tien Dai.* Stabilité de l'interaction géométrique entre deux composantes holonomes simples // C. R. Acad. Sci. Paris, Série A. 1980. Vol. 291. P. 113–116.

[14] *Щербак О. П.* Особенности семейства эвольвент в окрестности точки перегиба кривой и группа H_3, порожденная отражениями // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, № 4. С. 70—72.

Раскрытые ласточкины хвосты[15,16,17,18,19] и раскрытые зонтики Уитни [20,21,22,23] — это серии особых алгебраических лежандровых подмногообразий, которые встречаются во многих задачах, в том числе о скорейшем обходе препятствия.

А. Б. Гивенталь[6] предложил критерий устойчивости ростка лежандрова (лагранжева) отображения исходного подмногообразия относительно возмущений проектирования и доказал теорему о его конечной определённости. Однако, нам развитой им техники недостаточно, поскольку не все ростки типичных лежандровых отображений устойчивы. Кроме того, в ней нет удобного критерия распознавания устойчивых ростков лежандровых отображений.

Лежандрово подмногообразие Λ_2 было описано В. И. Арнольдом[7,24] при изучении геометрической оптики внутреннего рассеяния коротких линейных волн. Внутреннее рассеяние наблюдается в неоднородных анизотропных средах, т. е. оптические свойства которых зависят и от точки, и от направления, например, при распространении звука в упругой среде с линейной зависимостью тензора напряжений от тензора деформаций достаточно общего вида. Внутреннее рассеяние происходит, если в данной точке при данной фазовой скорости возможны две линейно независимые поляризации волны. По этой же причине происходит коническая рефракция Гамильтона[25] в кристаллах — анизотропных, но однородных средах.

---

[15] *Арнольд В. И.* Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, № 4. С. 1—14.

[16] *Гивенталь А. Б.* Многообразия многочленов, имеющих корень фиксированной кократности, и обобщенное уравнение Ньютона // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 13—18.

[17] *Гивенталь А. Б.* Лагранжевы многообразия с особенностями и неприводимые sl_2-модули // УМН. 1983. Т. 38, 6(234). С. 109—110.

[18] *Арнольд В. И.* Особенности в вариационном исчислении // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 22. М. : ВИНИТИ, 1983. С. 3—55.

[19] *Janeczko S.* Generating families for images of Lagrangian submanifolds and open swallowtails // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1986. Vol. 100, no. 1. P. 91–107.

[20] *Закалюкин В. М.* Одно обобщение лагранжевых триад // УМН. 1986. Т. 41, 4(250). С. 180.

[21] *Гивенталь А. Б.* Лагранжевы вложения поверхностей и раскрытый зонтик Уитни // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20, № 3. С. 35—41.

[22] *Ishikawa G.* Symplectic and Lagrange stabilities of open Whitney umbrellas // Invent. math. 1996. Vol. 126, no. 2. P. 215–234.

[23] *Ishikawa G.* Determinacy, transversality and Lagrange stability // Banach Center Publ. 1999. Vol. 50. P. 123–135.

[24] *Арнольд В. И.* Особенности каустик и волновых фронтов. Москва : Фазис, 1996.

[25] *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика VIII. Электродинамика сплошных сред. Москва : Наука, 1992.

Выпуклая оболочка общей гладкой компактной поверхности без края в трёхмерном пространстве может иметь особенности лишь двух видов, которые были найдены В. М. Закалюкиным[26]. В. Д. Седых описал[27] стабилизации этих особенностей, появляющиеся у выпуклой оболочки гладкой гиперповерхности в четырёхмерном пространстве, и сформулировал[28] гипотезу об отсутствии функциональных модулей у всех её типичных особенностей.

Теорема об усилении контактной эквивалентности до орбитальной для ростка гладкого неявного дифференциального уравнения в точке складке доказана А. А. Давыдовым[10]. Топологическая классификация типичных морсовских перестроек неявного дифференциального уравнения получена в статье[29].

Цели и задачи

Целями проведённого в диссертации исследования являются разработка универсального метода приведения фронтов стратифицированных лежандровых подмногообразий к локальный нормальным формам и его применение к решению следующих конкретных задач теории дифференциальных уравнений и оптимизации:

- Классификация и изучение типичных особенностей фронтов конкретных лежандровых подмногообразий, встречающихся при описании коротковолновых и квазиклассических асимптотик решений систем линейных уравнений с частными производными, а также в некоторых задачах быстродействия оптимального управления.

- Классификация и изучение особенностей выпуклых оболочек гладких замкнутых трёхмерных гиперповерхностей.

- Получение новых общих результатов об усилении контактной эквивалентности до орбитальной для ростков неявных дифференциальных уравнений и их семейств.

[26] *Закалюкин В. М.* Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 3. С. 76—77.

[27] *Седых В. Д.* Стабилизация особенностей выпуклых оболочек // Мат. сб. 1988. Т. 135 (177), № 4. С. 514—519.

[28] *Седых В. Д.* Особенности выпуклых оболочек // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 3. С. 158—175.

[29] *Bruce J. W.*, *Fletcher G. J.*, *Tari F.* Bifurcations of implicit differential equations // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. 2000. Vol. 130, no. 3. P. 485–506.

- Изучение некоторых особенностей и перестроек, встречающихся в типичных однопараметрических семействах неявных дифференциальных уравнений и быстро-медленных систем.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Разработан оригинальный метод приведения фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия к локальной нормальной форме, основанный на представлении лежандрова расслоения с помощью семейства производящих функций, на пространстве которых действует группа контактных диффеоморфизмов, сохраняющих исходное стратифицированное лежандрово подмногообразие.

2. Получена классификация особенностей типичного фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия, описывающего геометрическую оптику внутреннего рассеяния волн в неоднородных анизотропных средах; фазу квазиклассической асимптотики решения уравнения Дирака для графена; решение задачи быстродействия для некоторых управляемых систем.

3. Завершена классификация особенностей выпуклой оболочки типичной гладкой замкнутой гиперповерхности в четырёхмерном пространстве. Доказана гипотеза, утверждающая отсутствие функциональных модулей в их нормальных формах. Найдены нормальные формы ростков стратифицированного лежандрова подмногообразия, фронтом которого является граница рассматриваемой выпуклой оболочки.

4. Доказана теорема об усилении контактной эквивалентности до орбитальной для особого ростка неявного дифференциального уравнения, квадратичного по производной, а также для ростка семейства таких уравнений. Как следствие, получена формальная орбитальная классификация конических точек неявных дифференциальных уравнений, встречающихся в их типичных однопараметрических семействах.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации носят теоретический характер. Её значимость заключается как в решении конкретных задач теории дифференциальных уравнений и оптимизации, так и в возможности дальнейшего применения её общих результатов к аналогичным задачам в вышеперечисленных и смежных областях. Например, разработанный в диссертации метод приведения фронтов к локальным нормальным формам универсален и эффективно работает для широкого класса стратифицированных лежандровых подмногообразий.

Методология и методы исследования

Результаты второй, третьей и четвёртой глав диссертации получены с помощью разработанного в первой главе оригинального метода приведения фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия к локальной нормальной форме.

Этот метод основан на представлении лежандрова расслоения с помощью семейства производящих функций, для которых по обычной схеме Мазера–Мартине строится теория особенностей относительно группы контактных диффеоморфизмов, сохраняющих исходное стратифицированное лежандрово подмногообразие. Основными техническими средствами являются стандартные в теории особенностей теоремы о конечной определённости и версальности.

При доказательстве некоторых результатов диссертации используются гомотопический метод и подготовительная теорема Мальгранжа–Вейерштрасса.

Результаты, выносимые на защиту

1. Метод приведения фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия к локальной нормальной форме, основанный на представлении лежандрова расслоения с помощью семейства производящих функций.

2. Классификация типичных особенностей фронтов некоторых лежандровых подмногообразий, встречающихся при описании коротковолновых и квазиклассических асимптотик решений систем линейных уравнений с частными производными, а также в некоторых задачах быстродействия оптимального управления.

3. Качественное исследование типичных перестроек мгновенных фронтов и особенностей каустик, проведённое с помощью полученной классификации.

4. Классификация типичных особенностей выпуклых оболочек гладких замкнутых трёхмерных гиперповерхностей и лежандровых подъёмов их границ.

5. Отсутствие функциональных модулей в нормальных формах всех типичных особенностей выпуклых оболочек гладких замкнутых трёхмерных гиперповерхностей.

6. Теорема об усилении контактной эквивалентности до орбитальной для особого ростка неявного дифференциального уравнения, квадратичного по производной, а также для ростка семейства таких уравнений.

7. Формальная орбитальная классификация конических точек неявных дифференциальных уравнений, встречающихся в их типичных однопараметрических семействах.

8. Нормальная форма взаимодействия сложенного зонтика и ласточкина хвоста на фронте раскрытого зонтика Уитни.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации прошли апробацию на многих международных конференциях и научных семинарах. В том числе за последние пять лет автором были сделаны по её теме следующие доклады:

1. «Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации», совместное заседание семинара по качественной теории дифференциальных уравнений и семинара “Математические методы экономики и естественных наук”, механико-математический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова, 14 декабря 2018 г.

2. «Фронты стратифицированных лежандровых подмногообразий в задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации», семинар “Динамические системы и дифференциальные уравнения”, механико-математический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова, 3 декабря 2018 г.

3. «Особенности подъёма фронта аффинной по управлению системы», семинар “Геометрическая теория оптимального управления”, механико-математический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова, 17 октября 2018 г.

4. «О локальной классификации неявных обыкновенных дифференциальных уравнений», международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 6–11 июля 2018 г.

5. «Arnold's interior scattering in graphene», международная конференция "Semi-classical and Geometric Asymptotics in Mathematical Physics", Toulon, Франция, 24–25 апреля 2018 г.

6. «Singularities of attainable sets and Arnold's interior scattering», международная конференция "Contemporary Mathematics 2017", посвящённая 80-летию со дня рождения В. И. Арнольда, Москва, Россия, 18–23 декабря 2017 г.

7. «Singularities of attainable sets of control-affine systems», международная конференция "Geometric and Algebraic Singularity Theory", Będlewo, Польша, 10–16 сентября 2017 г.

8. «Left-invariant sub-Lorentzian structures and control-affine systems», международная конференция по математической теории управления и механике, Суздаль, Россия, 7–11 июля 2017 г.

9. «Сублоренцевы структуры и аффинные по управлению системы», семинар "Геометрическая теория оптимального управления", механико-математический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова, 19 апреля 2017 г.

10. «Особые системы лучей математической физики и их каустики», семинар "Асимптотические методы в математической физике", ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН, 15 ноября 2016 г.

11. «Особые системы лучей и их каустики», международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 8–12 июля 2016.

12. «Особенности решений уравнения в частных производных», семинар "Динамические системы и дифференциальные уравнения", механико-математический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова, 23 мая 2016 г.

13. «Left-invariant relativistic sub-Riemannian structures», международная конференция "Метрические структуры и управляемые системы", Новосибирск, Россия, 17–21 декабря 2015 г.

14. «Релятивистские субримановы структуры: классификация и нормальные формы», научное совещание “Неголономные дни в Переславле”, Переславль-Залесский, Россия, 6-8 августа 2015 г.

15. «Implicit ordinary differential equations: transitions and strengthening equivalence», международная конференция “Singularities in Generic Geometry and its Applications”, Kobe, Kyoto, Япония, 3–10 июня 2015 г.

16. «Особенности и перестройки дифференциальных уравнений смешанного типа», международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 4–9 июля 2014 г.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность исследований, проведённых в диссертационной работе, дан краткий обзор результатов по её тематике, сформулированы её цели и задачи, показаны научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, описаны её методология и методы исследования, сформулированы научные результаты, выносимые на защиту, а также приведены сведения об их апробации.

В первой главе разработан метод приведения к локальной нормальной форме фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия, основанный на теории особенностей пары, состоящей из него самого и гладкого лежандрова подмногообразия.

Фронт лежандрова подмногообразия — это его образ в базе лежандрова расслоения при проектировании вдоль слоёв последнего. *Лежандрово* расслоение — это гладкое расслоение, пространство которого снабжено контактной структурой, а слои — лежандровы подмногообразия. *Лежандрово* подмногообразие — это подмногообразие наибольшей возможной размерности, касающееся контактной структуры. *Контактная структура* — это распределение гиперплоскостей, удовлетворяющее условию максимальной неинтегрируемости.

Стратифицированное подмногообразие — это замкнутое подмножество гладкого многообразия с фиксированным конечным неупорядоченным разбиением на попарно непересекающиеся гладкие подмногообразия, называемые *стратами*. Стратифицированное подмногообразие называется *лежандровым*, если оно является замыканием объединения всех своих стратов наибольшей размерности, каждый из которых является лежандровым подмногообразием.

Наш метод основан на следующем наблюдении. В терминах теории особенностей фронт исходного стратифицированного лежандрова подмногообразия представляет собой бифуркационную диаграмму семейства пар, состоящих из него самого и слоя лежандрова проектирования, который зависит от точки базы как от параметра. По определению, бифуркационная диаграмма в этой ситуации — это множество значений параметра, при которых указанные многообразия пересекаются. Но такие бифуркационные диаграммы можно приводить к локальным нормальным формам, действуя контактными диффеоморфизмами, сохраняющими исходное стратифицированное лежандрово подмногообразие, с помощью стандартных в теории особенностей теорем о конечной определённости и версальности.

При стандартном подходе лежандрово расслоение фиксировано, а исходное стратифицированное лежандрово подмногообразие задаётся с помощью производящего семейства функций. Мы поступаем наоборот — фиксируем стратифицированное лежандрово подмногообразие, а лежандрово расслоение задаём с помощью семейства производящих функций. Наш подход более универсален, поскольку далеко не всякое стратифицированное лежандрово подмногообразие можно задать гладким производящим семейством.

Основным техническим средством для приведения фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия к локальной нормальной форме является следующая теорема 1 о достаточной квазиструе гладкого лежандрова подмногообразия. Чтобы её сформулировать, введём необходимые определения и обозначения.

Выберем в окрестности точки $\ell \in E$ контактного пространства E локальные координаты $\mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^{m*}$, $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $u \in \mathbb{R}$ такие, что контактная структура в E задаётся контактной формой

$$\theta = \mathrm{p}\, d\mathrm{x} - du.$$

Алгебра ростков в ℓ гладких функций на E отождествляется с алгеброй $\mathcal{E}_{\mathrm{p,x},u}$ ростков в начале координат гладких функций от координат p, x и u. Элементы этой алгебры мы будем называть *гамильтонианами*. Обозначим через $\mathcal{E}_{\mathrm{x}}$ алгебру ростков в нуле гладких функций на $\mathbb{R}^m$, т. е. только от координат x. Элементы алгебры $\mathcal{E}_{\mathrm{x}}$ мы будем называть *производящими ростками*.

Зафиксируем у координат p, x и u натуральные веса так, чтобы контактная форма θ была квазиоднородной:

$$\deg u = \deg p_1 + \deg x_1 = \ldots = \deg p_m + \deg x_m,$$

$$\deg p_1, \ldots, \deg p_m, \deg x_1, \ldots, \deg x_m \geqslant 1, \quad \deg u \geqslant 2.$$

Обозначим через $\mathcal{E}^d_{\mathrm{p,x},u} \subset \mathcal{E}_{\mathrm{p,x},u}$ и $\mathcal{E}^d_{\mathrm{x}} \subset \mathcal{E}_{\mathrm{x}}$ идеалы, состоящие из ростков, в разложении Тейлора которых все ненулевые члены имеют квазистепени d или выше.

Производящие ростки из $\mathcal{E}^{\deg u}_{\mathrm{x}}$ и гамильтонианы из $\mathcal{E}^{\deg u}_{\mathrm{p,x},u}$ называются *правильными*. Элементы фактор-пространства $\mathcal{E}^{\deg u}_{\mathrm{x}}/\mathcal{E}^{k+1}_{\mathrm{x}}$, где $k \geqslant \deg u$ называются k-квазиструями правильных производящих ростков.

Правильный производящий росток определяет росток в ℓ лежандрова подмногообразия по формуле

$$\mathcal{L}[w] = \{(\mathrm{p}, \mathrm{x}, u) \in E \mid \mathrm{p} = \partial_{\mathrm{x}} w,\ u = w(\mathrm{x})\}, \quad w \in \mathcal{E}^{\deg u}_{\mathrm{x}},$$

а правильный гамильтониан действует на правильные производящие ростки и их k-квазиструи по формуле Гамильтона–Якоби:

$$h : \mathcal{E}^{\deg u}_{\mathrm{x}} \to \mathcal{E}^{\deg u}_{\mathrm{x}}, \quad h[w](\mathrm{x}) = h\left(\partial_{\mathrm{x}} w(\mathrm{x}), \mathrm{x}, w(\mathrm{x})\right), \quad h \in \mathcal{E}^{\deg u}_{\mathrm{p,x},u}$$

Это действие линейно по h, но нелинейно по w.

Пусть теперь $\Lambda \subset E$ — стратифицированное лежандрово подмногообразие, содержащее точку ℓ. Правильные производящие ростки $w, w' \in \mathcal{E}^{\deg u}_{\mathrm{x}}$ называются Λ-*эквивалентными*, что обозначается как $w \sim_\Lambda w'$, если ростки в ℓ лежандровых подмногообразий $\mathcal{L}[w]$ и $\mathcal{L}[w']$ переводятся друг в друга контактным диффеоморфизмом, сохраняющим Λ.

Обозначим через $\mathfrak{m}_{\mathrm{x}}$ максимальный идеал в $\mathcal{E}_{\mathrm{x}}$, а через $\mathfrak{h}'_\Lambda$ — идеал в $\mathcal{E}^{\deg u}_{\mathrm{p,x},u}$, состоящий из таких правильных гамильтонианов, что их контактные векторные поля касаются всех стратов Λ.

Теорема 1. *Если $\mathcal{E}^{k+1}_{\mathrm{x}} \subset \mathfrak{m}_{\mathrm{x}} \cdot \mathfrak{h}'_\Lambda[w_0]$ для некоторого $k \geqslant \deg u$, то k-квазиструя правильного производящего ростка $w_0 \in \mathcal{E}^{\deg u}_{\mathrm{x}}$ Λ-достаточна, т. е. $w_0 + \varphi \sim_\Lambda w_0$ для любого производящего ростка $\varphi \in \mathcal{E}^{k+1}_{\mathrm{x}}$.*

Разработанный в первой главе метод выносится на защиту под номером 1, а её результаты опубликованы в работе автора [6].

Во второй главе проведена классификация типичных особенностей фронтов стратифицированных лежандровых подмногообразий

$$\Lambda_2 = \left\{p = AB,\ q = A^2,\ x = -2AB \ln A^2,\ y = -B^2,\ v = -A^2B^2/2\right\},$$

и $\Lambda_2 \times \mathbb{R}$. Здесь Λ_2 задано параметрически с параметрами $A, B \in \mathbb{R}$, причём мы считаем, что $A \ln A^2 = 0$ при $A = 0$, и лежит в пятимерном пространстве с контактной формой $\theta = p\,dx/2 - x\,dp/2 + q\,dy/2 - y\,dq/2 - dv$.

Оказывается, что типичный фронт ростка лежандрова подмногообразия Λ_2 или $\Lambda_2 \times \mathbb{R}$ в его особой точке задаётся набором формул из следующего списка

Θ_2**:** $\xi_1 = -p^2 \ln p^2 - p^2,$

$\xi_2 = 2p \ln p^2,$

где p — вещественный параметр из окрестности нуля

и $p \ln p^2 = 0$ при $p = 0$;

Θ_3**:** $\xi_1 = 4\xi_3 p^2 \ln^2 p^2 + p^2 \ln p^2 - p^2 - 16p^3 \ln^3 p^2,$

$\xi_2 = 4\xi_3 p \ln p^2 + p - 12p^2 \ln^2 p^2,$

где p — вещественный параметр из окрестности нуля

и $p \ln p^2 = 0$ при $p = 0$;

$\Theta_4^{\pm}$**:** $\xi_1 = -p^2 \mp 48p^4 \ln^4 p^2 + p^2 \ln p^2 + 4\xi_3 p^2 \ln^2 p^2 - 16\xi_4 p^3 \ln^3 p^2,$

$\xi_2 = p \mp 32p^3 \ln^3 p^2 + 4\xi_3 p \ln p^2 - 12\xi_4 p^2 \ln^2 p^2,$

где p — вещественный параметр из окрестности нуля

и $p \ln p^2 = 0$ при $p = 0$;

Ξ_4**:** $\xi_1 = -p^2 \ln p^2 - p^2 + \xi_4 p y + 2y^3,$

$\xi_2 = 2p \ln p^2 - \xi_4 y,$

$\xi_3 = -\xi_4 p - 3y^2,$

где p и y — вещественные параметры из окрестности нуля

и $p \ln p^2 = 0$ при $p = 0$;

$\Pi_3^{\pm}$**:** $\xi_1 = -A^2 B^2 \ln A^2 \pm A^4/2 + \alpha A^3 B - A^2 B^2,$

$\xi_2 = 2AB \ln A^2 - \alpha A^2,$

$\xi_3 = \mp A^2 - \alpha AB + B^2,$

где A и B — вещественные параметры из окрестности нуля

и $A \ln A^2 = 0$ при $A = 0$;

Φ_4**:** $\xi_1 = -A^2 B^2 \ln A^2 + \xi_4 A^4 + A^3 B - A^2 B^2 + 2\alpha A^6,$

$\xi_2 = 2AB \ln A^2 - A^2,$

$\xi_3 = -2\xi_4 A^2 - AB + B^2 - 3\alpha A^4,$

где A и B — вещественные параметры из окрестности нуля

и $A \ln A^2 = 0$ при $A = 0$;

Ψ_4: $\xi_1 = -A^2B^2\ln A^2 - AB^3 + \xi_4 B^4 - 2\alpha B^6$,

$\xi_2 = 2AB\ln A^2 + B^2$,

$\xi_3 = A^2 - AB + 2\xi_4 B^2 - 3\alpha B^4$,

где A и B — вещественные параметры из окрестности нуля

и $A\ln A^2 = 0$ при $A = 0$.

Более точно, справедливы следующие теоремы 2 и 3, являющиеся основными результатами второй главы.

Теорема 2. *Если лежандрово расслоение — общего положения, то (двумерный) фронт ростка лежандрова подмногообразия Λ_2 в любой его особой точке в подходящих гладких координатах (ξ_1, ξ_2, ξ_3) на базе расслоения совпадает с ростком в нуле множества Θ_2, Θ_3, Π_3^+ или Π_3^- из вышеприведённого списка, причём в случаях $\Pi_3^\pm$: $\alpha = a + \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где $a > 0$, $a \neq 2$, $\bar{a}$ — гладкая функция и $\bar{a}(0) = 0$.*

Фронт Θ_2 представляет собой цилиндр над кривой, заданной параметрически:

$$\xi_1 = -p^2\ln p^2 - p^2, \quad \xi_2 = 2p\ln p^2,$$

вдоль которой

$$\xi_1 \sim -\frac{\xi_2^2}{4\ln\xi_2^2}, \quad \text{при} \quad \xi_2 \to 0.$$

Фронт Θ_3 мы называем *острым ласточкиным хвостом*. Он напоминает обычный ласточкин хвост A_3, но его ребро возврата состоит из двух касающихся друг друга гладких ветвей, все производные которых в точке касания совпадают (т. е. порядок их касания бесконечен) — именно поэтому мы и называем его «острым». Следуя О. П. Щербаку, на рисунках в исходных координатах мы реалистично изображаем эти ласточкины хвосты по-разному: в окрестности ласточкина хвоста A_3 ветви ребра возврата обращены выпуклостями в противоположные стороны, а в окрестности острого ласточкина хвоста Θ_3 — в одну и ту же.

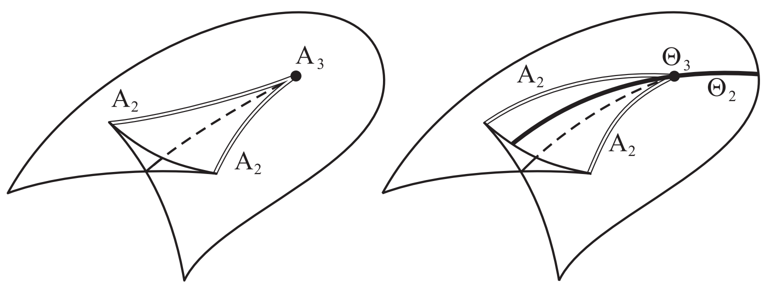

Рис. 1: Ласточкин хвост A_3 и острый ласточкин хвост Θ_3

На фронте Π_3^+ ребро возврата отсутствует, а на фронте Π_3^- оно состоит из двух ветвей, замыкание объединения которых является негладкой кривой, вдоль которой:

$$\xi_1 \sim -\frac{\xi_2^2}{2\ln\xi_2^2},\ \xi_3 \sim -\frac{2|\xi_2| + a\xi_2}{\ln\xi_2^2} \quad \text{при} \quad \xi_2 \to 0, \quad \text{где} \quad a > 0,\ a \neq 2.$$

Таким образом, при $\xi_2 \to 0$ кривизны рёбер возврата стремятся к бесконечности, а направления их выпуклостей противоположны при $a > 2$ и совпадают при $0 < a < 2$.

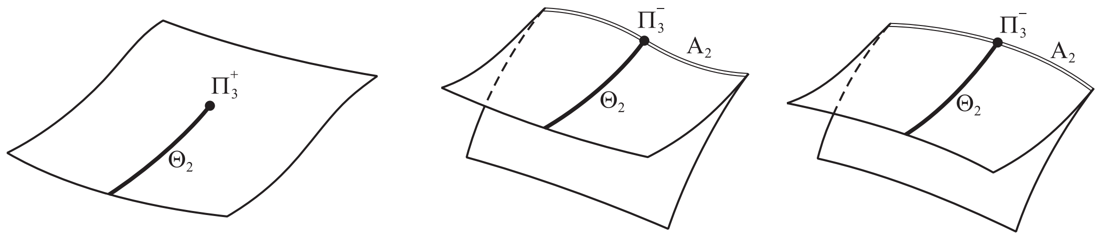

Рис. 2: Фронты Π_3^+, Π_3^- при $a > 2$ и Π_3^- при $0 < a < 2$

Теорема 3. *Если лежандрово расслоение — общего положения, то (трёхмерный) фронт ростка лежандрова подмногообразия $\Lambda_2 \times \mathbb{R}$ в любой его особой точке в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ на базе расслоения совпадает с ростком в нуле множества из вышеприведённого списка, причём в случаях*

$\Pi_3^\pm$*:* $\alpha = a + \xi_4$*,* $a \geqslant 0$ *или*

$\alpha = a + \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \pm \xi_4^2$*,* $a > 0$*,* $a \neq 2$*,* $\bar{a}(0) = 0$*;*

Φ_4*:* $\alpha = \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$*,* $\bar{a}(0) \neq 0$*;*

Ψ_4*:* $\alpha = \bar{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$*,* $\bar{a}(0) \neq 0$*.*

Пусть на базе лежандрова расслоения задана гладкая функция общего положения без критических точек (функция времени). Тогда двумерное сечение фронта, описываемого теоремой 3, типичной гиперповерхностью уровня времени может иметь лишь особенности, изображённые на рисунках 1 и 2. Однако, при изменении значения функции времени эти сечения могут испытывать перестройки, показанные на рисунках 3 и 4.

В течение этих перестроек линии особенностей A_2 и Θ_2 перестраивающегося двумерного сечения заметают *каустику* — поверхность в трёхмерном пространстве, состоящую из двух стратов A_2 и Θ_2. Страт A_2 состоит из точек повышенной освещённости, заметается ребрами возврата

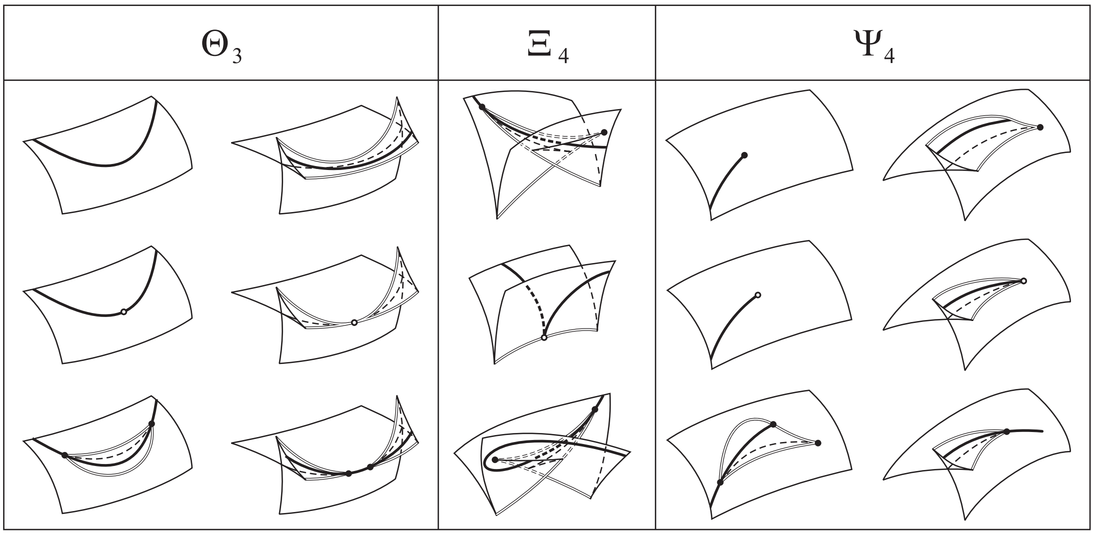

Рис. 3: Перестройки сечений трёхмерных фронтов I

перестраивающегося сечения и, собственно, является «настоящей» каустикой. На страте Θ_2, наоборот, лежат точки пониженной освещённости, а сам он заметается слабыми особенностями сечения (разрывами третьих производных). Наличие тёмного страта — новое явление по сравнению с обычными каустиками, которые состоят лишь из одного страта A_2.

На рис. 5 изображены типичные особенности каустик в трёхмерном пространстве, возникающие в изолированных особых точках лежандрова подмногообразия $\Lambda_2 \times \mathbb{R}$.

Результаты второй главы выносятся на защиту под номерами 2 и 3. Они опубликованы в работах автора [1], [2], [6], [7], [8], [11]. В первых пяти изучаются особенности фронтов и каустик внутреннего рассеяния волн, а в шестой — управляемых систем и сублоренцевых структур.

В третьей главе изучаются особенности выпуклой оболочки типичной гладкой замкнутой гиперповерхности в четырёхмерном пространстве. Оказывается, что они могут быть только следующих четырёх типов.

Простейшая особенность $\mathcal{R}_1$. Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность* $\mathcal{R}_1$, если в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ он совпадает с ростком в начале координат множества, заданного неравенством

$$\min_{x \geqslant 0} \left\{ x^2 + \xi_1 x \right\} \geqslant \xi_4.$$

Угловая особенность $\mathcal{R}_2$. Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность* $\mathcal{R}_2^0$, $\mathcal{R}_2^+$ или $\mathcal{R}_2^-$, если в подходящих

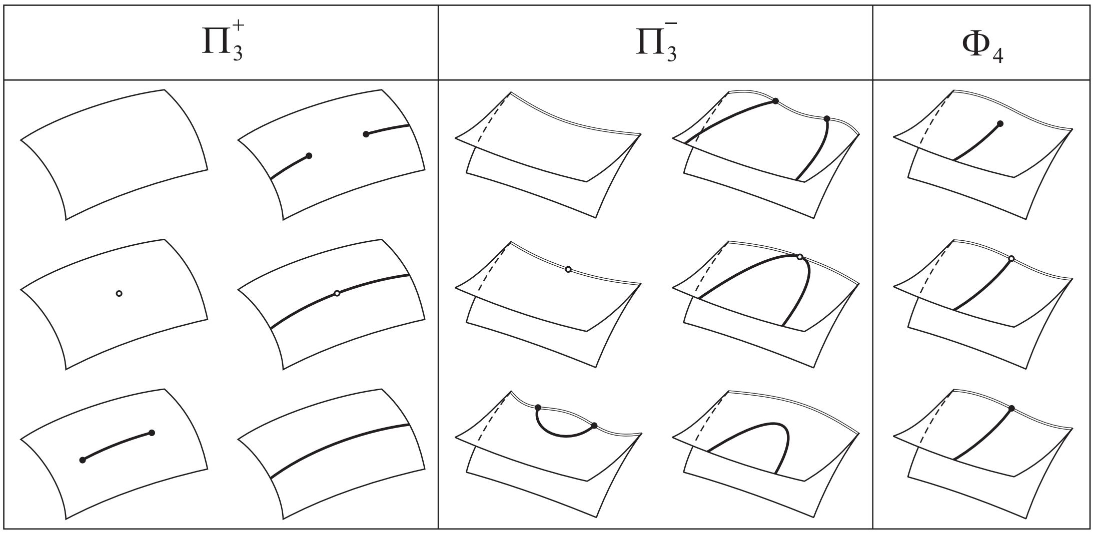

Рис. 4: Перестройки сечений трёхмерных фронтов II

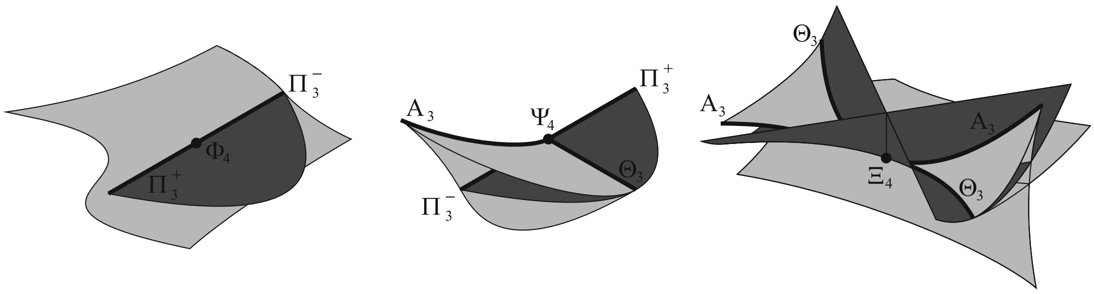

Рис. 5: Точечные особенности каустик в трёхмерном пространстве

гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ он совпадает с ростком в начале координат множества, заданного неравенством

$$\min_{x,y\geqslant 0} \left\{x^2 + y^2 + \bar{a}(\xi_3)xy + \xi_1 x + \xi_2 y\right\} \geqslant \xi_4,$$

где $\bar{a}(\xi_3) = a + \xi_3$, $a + \xi_3^2$ или $a - \xi_3^2$ соответственно и $|a| < 2$.

Особенность $\mathcal{R}_3^{\mathrm{d}}$. Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность* $\mathcal{R}_3^{\mathrm{d}}$, если в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ он совпадает с ростком в начале координат множества, заданного неравенством

$$\min_{x,y,z\geqslant 0} W(x, y, z; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \geqslant 0,$$

где

$$W = (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2 + \bar{a}_1 xy + \bar{a}_2 xz + \bar{a}_3 yz \pm xyz - \xi_4,$$

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ — многочлены от $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ такие, что квадратичная форма

$$x^2 + y^2 + z^2 + \bar{a}_1(0)xy + \bar{a}_2(0)xz + \bar{a}_3(0)yz$$

от переменных (x, y, z) положительно определена, а степень многочленов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ не превосходит натурального числа d.

Особенность $\mathcal{V}_3$. Росток выпуклой оболочки в четырёхмерном пространстве имеет *особенность* $\mathcal{V}_3$, если в подходящих гладких координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ он совпадает с ростком в начале координат множества, заданного неравенством

$$\min_{(x,y,z)\in V_3} \left\{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (z-\xi_3)^2\right\} \geqslant \xi_4$$

и являющегося подграфиком стандартного евклидова расстояния до тела

$$V_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid t^4 + xt^2 + yt + z + x^2/4 \geqslant 0 \ \forall\, t \in \mathbb{R}\right\},$$

ограниченного оборванным ласточкиным хвостом и состоящего из неотрицательных приведённых многочленов четвёртой степени.

Простейшие $\mathcal{R}_1$ и угловые $\mathcal{R}_2$ особенности были изучены В. М. Закалюкиным[26] и В. Д. Седых[27]. Основным результатом третьей главы является завершение классификации типичных особенностей выпуклой оболочки гладкой гиперповерхности в четырёхмерном пространстве.

Теорема 4. *При некотором натуральном* d *особенности выпуклой оболочки общей гладкой компактной гиперповерхности без края, лежащей в четырёхмерном аффинном пространстве, исчерпываются следующими:* $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3^{\mathrm{d}}$ *и* $\mathcal{V}_3$.

Доказательство проводится с помощью метода, разработанного в первой главе, и следующей теоремы.

Теорема 5. *Граница выпуклой оболочки общей гладкой компактной гиперповерхности без края, лежащей в четырёхмерном аффинном пространстве, является фронтом стратифицированного лежандрова подмногообразия, которое может иметь лишь определённые ниже особенности* R_1', R_2', R_3' *и* V_3'.

Чтобы определить особенности R_1', R_2', R_3' и V_3', рассмотрим в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, z) следующие подмножества:

- полупространство $R_1 = \{x \geqslant 0\}$;
- двугранный угол $R_2 = \{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$;

- октант $R_3 = \{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$;

- тело

  $$V_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid t^4 + xt^2 + yt + z + x^2/4 \geqslant 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}\right\},$$

  ограниченное оборванным ласточкиным хвостом ∂V_3 (ласточкиным хвостом без пирамиды) и состоящее из неотрицательных приведённых многочленов четвёртой степени.

Для каждого из этих подмножеств рассмотрим стратифицированное лежандрово подмногообразие в контактном пространстве $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, состоящее из 1-струй гладких функций, неотрицательных на данном подмножестве, причём струя берётся в точке этого подмножества, где функция принимает нулевое значение:

$$C' = \left\{j^1_{\mathrm{x}_0} f \in J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid \mathrm{x}_0 \in C,\ f(\mathrm{x}_0) = 0,\ f(\mathrm{x}) \geqslant 0\ \ \forall\, \mathrm{x} \in C\right\},$$

где $C = R_1$, R_2, R_3 или V_3.

Мы говорим, что трёхмерное лежандрово подмногообразие имеет в некоторой своей точке особенность R_1', R_2', R_3' или V_3', если его росток в этой точке с точностью до контактного диффеоморфизма является ростком в нуле стратифицированного лежандрова подмногообразия R_1', R_2', R_3' или V_3' соответственно.

Результаты третьей главы выносятся на защиту под номерами 4 и 5. Они опубликованы в работах автора [3] и [4].

В четвёртой главе изучаются *неявные* обыкновенные дифференциальные уравнения и их семейства, зависящие от параметра. А именно, мы рассматриваем уравнения вида $f = 0$, где вещественнозначная функция f определена на открытом подмножестве пространства направлений PTX, приложенных к двумерному многообразию X, называемому фазовым. Если вместо функции f берётся её росток в точке, где она обращается в нуль, то запись вида $f = 0$ называется ростком неявного обыкновенного дифференциального уравнения.

Два неявных обыкновенных дифференциальных уравнения $f_0 = 0$ и $f_1 = 0$ (или их ростки) называются *орбитально эквивалентными*, если функции f_0 и f_1 (или их ростки) переводятся друг в друга диффеоморфизмом (или его ростком) фазового многообразия X и умножением на всюду ненулевую функцию (или её росток). Если же они переводятся друг в друга диффеоморфизмом PTX (или его ростком), сохраняющем естественное поле контактных плоскостей в PTX, и умножением на всюду ненулевую функцию (или её росток), то уравнения называются *контактно* *эквивалентными*. В частности, орбитальная эквивалентность уравнений и ростков — это их контактная эквивалентность, сохраняющая естественное расслоение *забывания производной* $PTX \to X$.

В локальных координатах (x, y) на фазовом многообразии X в окрестности не параллельного оси y направления любое уравнение записывается в обычной форме $f(x, y, p) = 0$, где $p = dy/dx$. В этих координатах контактные плоскости записываются в хорошо известной канонической форме $dy = p\,dx$, а расслоение забывания производной $PTX \to X$ принимает вид $(x, y, p) \mapsto (x, y)$. Имея в виду локальную природу всех последующих теорем, в дальнейшем мы используем этот координатный подход.

Росток неявного дифференциального уравнения $f(x, y, p) = 0$ называется *квадратичным по производной*, если его ограничение на слой отображения забывания производной $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ имеет порядок 2 в его точке приложения a_0: $f(a_0) = \partial_p f(a_0) = 0$ и $\partial_p^2 f(a_0) \neq 0$.

В четвёртой главе доказан следующий результат об усилении контактной эквивалентности до орбитальной для квадратичных по производной ростков уравнений.

Теорема 6. *Линейно связная компонента пересечения множества квадратичных по производной ростков уравнений с классом их контактной эквивалентности лежит в одном и том же классе их орбитальной эквивалентности.*

Справедлив также сформулированный ниже аналогичный результат для семейств неявных уравнений $F(x, y, y', \lambda) = 0$, в которой уравнения и их эквивалентности предполагаются зависящими от параметров $\lambda \in \mathbb{R}^l$.

Два семейства неявных обыкновенных дифференциальных уравнения $F_0(x, y, p, \lambda) = 0$ и $F_1(x, y, p, \lambda) = 0$ (или их ростки) называются *орбитально эквивалентными*, если функции F_0 и F_1 (или их ростки) переводятся друг в друга заменами переменных $x \mapsto X(x, y, \lambda)$, $y \mapsto Y(x, y, \lambda)$, зависящими от параметров, и умножением на всюду ненулевую функцию (или её росток). Если же они переводятся друг в друга зависящими от параметров заменами переменных $x \mapsto X(x, y, p, \lambda)$, $y \mapsto Y(x, y, p, \lambda)$, $p \mapsto P(x, y, p, \lambda)$, сохраняющими поле контактных плоскостей, и умножением на всюду ненулевую функцию (или её росток), то семейства $F_0(x, y, p, \lambda) = 0$ и $F_1(x, y, p, \lambda) = 0$ (или их ростки) называются *контактно эквивалентными*.

Как и ранее, орбитальная эквивалентность семейств уравнений и ростков — это их контактная эквивалентность, сохраняющая расслоение $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ забывания производной.

Теорема 7. *Линейно связная компонента пересечения множества* *квадратичных по производной ростков семейств уравнений с классом их контактной эквивалентности лежит в одном и том же классе их орбитальной эквивалентности.*

Наша теорема 6 вместе с формальной контактной классификацией типичных конических точек неявных дифференциальных уравнений, полученной В. И. Арнольдом[30], даёт следующую их классификацию относительно формальной орбитальной эквивалентности.

Теорема 8. *Пусть f — типичная гладкая функция, a_0 — её невырожденная критическая точка, не являющаяся локальным экстремумом. Тогда росток в точке a_0 дифференциального уравнения $f(x, y, y') - f(a_0) = 0$ формально орбитально эквивалентен одной из 3-х нормальных форм*

$$\pm y'^2 + x^2 = z^2 + cz^3, \qquad y'^2 - x^2 = z^2 + cz^3, \quad \textit{где} \quad z = y - \frac{1}{2}xy'.$$

При замене $y \mapsto -y$ число c меняет знак, но его модуль является непрерывным инвариантом.

Теорема 8 останется верной, если в её нормальных формах z заменить на y. Нормальные формы с z хоть и несколько сложнее, чем с y, но зато легче интегрируются из-за наличия у них однопараметрических групп симметрий.

Кроме того, в четвёртой главе получена нормальная форма перестройки фронта S_3^1 цилиндра над раскрытым зонтиком Уитни, которая описывает взаимодействие ласточкиного хвоста и сложенного зонтика Уитни, изображённых на рис. 6. При перестройке S_3^1, изображённой на рис. 7, сло-

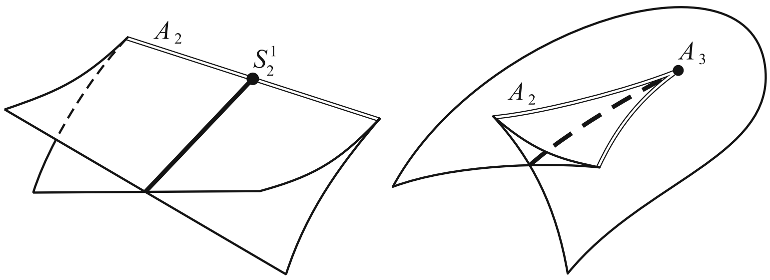

Рис. 6: Сложенный зонтик Уитни и ласточкин хвост

женный зонтик Уитни проходит через ласточкин хвост, который после этого переворачивается. В процессе участвует ещё одна точечная особенность — самопересечение ребра возврата A_2 с гладкой частью; правда, в отличие

[30] *Арнольд В. И.* О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями // Матем. заметки. 1988. Т. 44, № 1. С. 3—18.

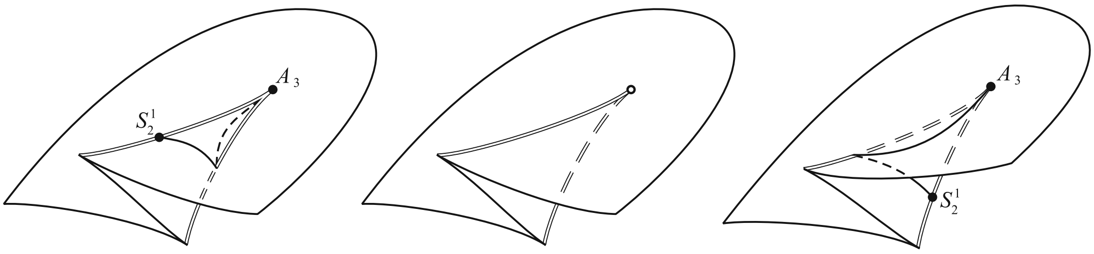

Рис. 7: Перестройка S_3^1 — взаимодействие ласточкина хвоста и сложенного зонтика Уитни

от ласточкиного хвоста и сложенного зонтика Уитни, эта особенность локально приводима.

Согласно результатам В. М. Закалюкина и А. О. Ремизова[31], эту перестройку испытывает график первого интеграла при изменении параметра в типичном однопараметрическом семействе быстро-медленных систем с двумя медленными переменными и одной быстрой.

Нормальная форма фронта S_3^1 цилиндра над раскрытым зонтиком Уитни задаётся уравнениями

$$\left\{(\lambda, x, y, u) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \exists\, s \in \mathbb{R} : s^3 + xs + y = 0,\ u = F_2\right\},$$

где

$$F_2 = \int (s^3 + xs + y)(s + \lambda)\, ds, \quad F_2(0) = 0.$$

В четвёртой главе доказан следующий результат.

Теорема 9. *Пусть $\tau : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ — гладкая функция такая, что $\tau(0) = 0$ и $\partial_\lambda \tau(0) \neq 0$. Тогда в окрестности начала координат она приводится к нормальной форме λ диффеоморфизмом, сохраняющим вышеуказанную нормальную форму фронта S_3^1 и начало координат.*

Результаты четвёртой главы выносятся на защиту под номерами 6, 7 и 8. Они опубликованы в работах автора [10] и [9], а в статье [5] дана классификация всех простых устойчивых проектирований лагранжева раскрытого зонтика Уитни и цилиндров над ним.

Заключение

В диссертации разработан оригинальный метод приведения фронта стратифицированного лежандрова подмногообразия к локальной нормаль-

[31] *Закалюкин В. М., Ремизов А. О.* Лежандровы особенности в системах неявных обыкновенных дифференциальных уравнений и быстро-медленных динамических системах // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 140—153.

ной форме, основанный на представлении лежандрова расслоения с помощью семейства производящих функций, на пространстве которых действует группа контактных диффеоморфизмов, сохраняющих исходное стратифицированное лежандрово подмногообразие.

С его помощью получены новые классификационные и общие результаты о фронтах, встречающихся в различных задачах теории дифференциальных уравнений и оптимизации. Этот метод может найти применение к аналогичным задачам и в других областях, поскольку он универсален и эффективно работает для широкого класса стратифицированных лежандровых подмногообразий.

Результаты диссертации о нормальных формах фронтов могут быть использованы при исследованиях распространения волн в неоднородных анизотропных средах и особенностей множеств достижимости управляемых систем. Классификация типичных особенностей выпуклых оболочек может найти применение для описания зон транзитивности в теории оптимального управления, а также в задачах оптимизации и выпуклого анализа.

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Алексею Александровичу Давыдову за постоянную поддержку и внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Богаевский И. А.* Особенности распространения коротких волн на плоскости // Матем. сб. 1995. Т. 186, № 11. С. 35—52. MR 1368785, zbMATH 0863.35102.

2. *Bogaevsky I. A.* Singularities of short linear waves on the plane // The Arnold–Gelfand Mathematical Seminars / ed. by V. I. Arnold [et al.]. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1997. P. 107–112. MR 1429888, zbMATH 0873.58011.

3. *Богаевский И. А.* Особенности выпуклых оболочек трёхмерных гиперповерхностей // Тр. МИАН. 1998. Т. 221. С. 81—100. MR 1683688, zbMATH 1048.58025.

4. *Bogaevsky I. A.* Singularities of convex hulls as fronts of Legendre varieties // Banach Center Publ. 1999. Vol. 50. P. 61–74. MR 1739655, zbMATH 0963.58016.

5. *Bogaevsky I. A.*, *Ishikawa G.* Lagrange mappings of the first open Whitney umbrella // Pacific J. Math. 2002. Vol. 203, no. 1. P. 115–138. MR 1895928, zbMATH 1065.58030.

6. *Bogaevsky I. A.* New singularities and perestroikas of fronts of linear waves // Moscow Math. J. 2003. Vol. 3, no. 3. P. 807–821. MR 2078561, zbMATH 1063.58028.

7. *Богаевский И. А.* Каустики внутреннего рассеяния // Тр. МИАН. 2009. Т. 267. С. 7—13. MR 2723936, zbMATH 1201.78002.

8. *Богаевский И. А.* Перестройки фронтов внутреннего рассеяния // Доклады Академии наук. 2011. Т. 436, № 2. С. 155—158. MR 2814807, zbMATH 1243.58013.

9. *Богаевский И. А.* Взаимодействие сложенного зонтика Уитни и ласточкина хвоста в быстро-медленных системах // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 29—33. MR 3058780, zbMATH 1323.34073.

10. *Богаевский И. А.* Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 6. С. 5—20. MR 3309410, zbMATH 1343.34033.

11. *Bogaevsky I. A.* Sub-Lorentzian structures in $\mathbb{R}^4$: left-invariance and conformal normal forms // J. Dyn. Control Syst. 2018. Vol. 24, no. 3. P. 371–389. MR 3799734, zbMATH 06909119.

В совместной статье [5] автору принадлежат формулировки и доказательства теорем 1, 3 и 4.