МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи
УДК 517.957

Кисатов Марат Александрович

О ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ МАРАНГОНИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители
д.ф.-м.н., профессор Самохин Вячеслав Николаевич
д.ф.-м.н., профессор Чечкин Григорий Александрович

Москва 2022

Оглавление

Введение

Известно, что при достаточно большой скорости течения жидкости можно выделить пограничный слой Прандтля (см. [1], [2], [3], [4]) вблизи твердой стенки и слой Марангони (см. [5], [6], [7]) вблизи свободной границы. Пограничные слои Марангони начали изучаться во второй половине XX века. Явление переноса жидкости вдоль границы двух фаз, которое возникает из-за наличия градиента поверхностного натяжения, называется конвекцией Марангони (или эффектом Марангони-Гиббса). Это явление впервые было качественно описано Джеймсом Томсоном в 1855 году при исследовании причин возникновения так называемых «слез» в вине или любого другого крепкого спиртного [8]. Поэтому эффект Марангони иногда называют эффектом Томпсона. Только в 1865 году Карло Джузеппе Маттео Марангони провел подробное исследование описанного эффекта в своей докторской диссертации [9]. Полное теоретическое описание эффекта Марангони на основе уравнений Навье-Стокса и уравнений термодинамики опубликовано Чандрасекаром в 1961 году. Первые результаты расчетов пограничного слоя Марангони, опубликованые в 1979 году, принадлежат итальянскому инженеру-физику Луиджи Джерардо Наполитано [10].

Среди явлений, которые инициируют движение жидкости вблизи свободной границы, выделяют следующие: неравномерное распределение температуры (термокапиллярность), поток газа вдоль свободной поверхности; добавление поверхностно активных веществ (солености морской воды, масло, жидкое мыло,...); массоперенос, конвекция и другие типы принудительного течения. Все эти эффекты вызывают неравномерность в поверхностном натяжении, что приводит к возникновению движения на границе раздела фаз.

В последнее время в связи с развитием космических технологий именно термокапиллярный эффект Марангони стал предметом большого научного интереса. Явление термокапиллярного движения подробно изучено в работе [11]. Граница раздела фаз (граница раздела между двумя жидкостями или жидкостью и газом) имеет свободную энергию E, которая может быть определена введением коэффициента поверхностного натяжения σ и площади свободной границы S:

$$E = \sigma S.$$

Коэффициент поверхностного натяжения σ зависит от температуры T. Эта зависимость аппроксимируется линейной функцией

$$\sigma = \sigma_0 - k(T - T_0),$$

где σ_0, T_0 и k — положительные постоянные. Значение поверхностного натяжения уменьшается с увеличением температуры, поэтому тонкий слой жидкости вблизи свободной поверхности имеет тенденцию перетекать в направлении областей с наибольшим поверхностным натяжением (или, что то же самое, более низкой температурой, то есть «от горячего к холодному»).

При описании в жидкости конвективных движений, вызванных неравномерным распределением в температурном поле, наряду с числом Ra (число Рэлея) полезно рассматривать безразмерную величину Ma – чисо Марангони. В работе [12] сравниваются влияние величин Ra и Ma на возникновение движения жидкости в пограничных слоях. Температурные градиенты, отвечающие за градиенты поверхностного натяжения, также способны вызывать градиенты плотности. Таким образом, вместе с конвекцией Марангони возникает плавучесть (или конвекция Рэлея). Число Ma будет преобладать над числом Ra в двух случаях: если ускорение свободного падения g стремится к нулю или толщина пограничного слоя очень мала (< 1 мм). Изучить картину течения в слоях такой маленькой толщины не представляется возможным. Поэтому единственный способ изучения течений Марангони независимо от плавучести – это эксперименты в условиях пониженной гравитации. Этим и объясняются исследования слоев Марангони в космическом пространстве.

В ходе экспериментов в условиях невесомости на борту полета «Spacelab D1» в 1986 году был поставлен вопрос о том, важна ли кривизна границы раздела фаз при определении критериев неустойчивости в задаче о конвекции Марангони. Эксперименты доказали, что важно различать микро- и макроконвекцию. В работе [13] изучено возникновение неустойчивости Марангони в жидкости, находящейся в состоянии невесомости в контейнере цилиндрической формы, подогреваемом снизу. Аналогичные работы по исследованию неустойчивости Марангони в контейнерах конечных размеров можно посмотреть в [14], [15]. Влияние числа Марангони на межфазную неустойчивость показано в работе [16]. Установлено, что если число Ma достигает некоторого критического значения, то система становится неустойчивой. Линейная теория устойчивости в задаче о конвекции Марангони в условиях силы тяжести рассмотрена в работах [17], [18].

Инетерес к экспериментам по микрогравитации с участием эффектов Марангони в большей степени обусловлен желанием выращивать идеальные кристаллы. Эффект Марангони (или конвекция Марангони) играет большую роль при выращивании желаемых видов кристаллов[19]. Были отмечены случаи, когда в невесомости удавалось получать монокристаллы вместо их аналогов в наземных условиях [20]. Влиянию конвекции Марангони на рост кристаллов посвящено большое количество работ (см. например [21], [22], [23], [24], [25]).

Движение жидкости в пограничном слое Марангони описывается теми же уравнениями, что и движение жидкости в слое Прандтля.

Эти уравнения в двумерном стационарном случае имеют вид

$$\begin{cases} \nu \dfrac{\partial u^2}{\partial y^2} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — продольная и поперечная компоненты скорости, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости, ρ — плотность жидкости, p — давление, которое связано со скоростью внешнего течения $U(x)$ при помощи интеграла Бернулли $U^2(x) + 2p(x) = const$. Краевые условия для пограничного слоя Марангони могут быть записаны в виде (см. [26])

$$u\Big|_{x=0} = u_0(y), \quad \rho\nu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = f(x), \quad v\Big|_{y=0} = v_0(x),$$
$$u(x, y) \to U(x) \quad \text{равномерно при} \quad y \to \infty.$$

Функция $f(x)$ характеризует касательное напряжение вдоль свободной поверхности, которое может быть результатом термокапиллярного эффекта. Если $f(x) \leq 0$, то направление касательного напряжения вдоль свободной поверхности совпадает с направлением тока основного объема жидкости, если же $f(x) > 0$, то касательное напряжение направлено против тока основного объема течения. Известная функция $v_0(x)$ задает режим впрыска ($v_0(x) > 0$) или отсоса ($v_0(x) \leq 0$) жидкости и, тем самым, позволяет управлять пограничным слоем (см. работы [27], [28], [29], [30]). В работе [31] изучена зависимость решения уравнений пограничного слоя от профиля начальных скоростей $u_0(y)$.

Возможна постановка задачи, в которой область движения жидкости имеет твердую и свободную границы, пересекающиеся под некоторым углом. Возникает задача переменного типа: с одной стороны с условием первого рода (для твердой стенки), с другой — второго (для свободной границы). Описанная ситуация является задачей перехода слоя Прандтля в слой Марангони и наоборот. Задача перехода слоя Марангони в слой Прандтля (когда жидкость набегает на твердую стенку) исследована в работе [32].

Пограничный слой Прандтля изучен достаточно хорошо. Основы теории пограничного слоя, заложенные Л. Прандтлем, позже активно развивались и были неоднократно использованы в работах [33], [34], [35], [36], [37]. Большое число работ по пограничному слою принадлежит О. А. Олейник [2], [3], [38], [39], [40], [4]. Задачи о просачивании жидкости через перфорированную преграду рассмотрены в работах [41], [42], [43], [44]. Целый ряд трудов посвящен изучению пограничных слоев нелинейно вязких жидкостей. Среди этих работ, например [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51]. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя изучены в работах [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58]. Системы уравнений пограничного слоя дилатантных сред рассмотрены в [59], [60]. Задачи дифракции для пограничного слоя изучены в [61], [62], [63], [64], [65], [66].

Данная диссертация посвящена продолжению и обобщению результатов, полученных в работах [5], [67], [66]. В первой главе установлена теорема существования единственного решения для задачи продолжения пограничного слоя Марангони на интервал произвольной протяженности. При этом предполагается, что реологическая среда в пограничном слое подчинена закону О. А. Ладыженской (см. [45]). Приведен ряд следствий из этой теоремы, а также установлена корректность постановки задачи в случае, когда жидкость сопрягается с состоянием покоя. Во второй главе установлена теорема существования и единственности решения температурного пограничного слоя (см. [67]) в случае слоя Марангони для нелинейно вязкой жидкости. В третьей главе рассмотрена задача Стефана (см. [61], [62], [66]) для магнитогидродинамического пограничного слоя реологически сложных сред.

Целью работы является получение условий существования единственного решения задачи продолжения пограничного слоя Марангони для реологической среды Ладыженской, а также установление условий для существования единственного решения температурного слоя в случае слоя Марангони.

Также целью является изучение задачи Стефана для магнитогидродинамического пограничного слоя с инъекцией жидкости, подчиненной закону Ладыженской.

Методы исследования. В работе используется замена переменных фон Мизеса, которая позволяет перевести систему уравнений стационарного пограничного слоя к квазилинейному параболическому уравнению с вырождающимся коэффициентом. Применяется принцип максимума, справедливый для уравнений параболического типа. Также применяются методы функционального анализа и метод последовательных приближений.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные научные результаты:

- исследована корректная разрешимость задачи о продолжении пограничного слоя Марангони жидкости О.А. Ладыженской;
- обобщена теорема существования и единственности для температурного пограничного слоя в случае слоя Марангони с жидкостью, подчиненной реологическому закону О.А. Ладыженской;
- изучен случай жидкости с реологией Ладыженской в задаче Стефана для системы уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя.

Теоретическая и практическая значимость. Предлагаемая работа носит теоретический характер и может быть использована в различных разделах качественной теории дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, механики сплошных сред.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара под руководством Чечкина Г.А., на спецсеминаре «Вопросы математического моделирования критических явлений» под руководством Е.В. Радкевича, С.А. Степина, А.В. Боровских и В.В. Палина, на спецсеминаре под руководством В.И. Данченко во ВлГУ, на семинаре «Прикладная гидродинамика» под руководством В.В. Пухначева и Е.В. Ерманюка в Институте гидродинамики им. Лаврентьева.

Также результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

1. XXVII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», г. Москва, Россия, (10-27 ноября 2020);

2. Всероссийская научно-практическая конференция, Московский Политех, Москва (17 июня 2021 г.);

3. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (24 сессия совместных заседаний ММО и семинара им. И.Г. Петровского) (26-30 декабря 2021);

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 публикациях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в прочих научных журналах и материалах конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы и списка литературы, включающего 73 наименований. Общий объем диссертации составляет 117 страниц.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Кисатов М.А. Система уравнений пограничного слоя Марангони в среде с реологическим законом О.А.Ладыженской // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2021, т. 498, с. 41–44

2. Кисатов М.А., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. О температурном пограничном слое в вязкой неньютоновской среде // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, т. 502, с. 28–33

3. Кисатов М.А. О задаче Стефана для системы уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя с инъекцией среды с реологическим законом О.А.Ладыженской // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2022, т. 503, с. 58–62

4. Kisatov M.A., Samokhin V.N., Chechkin G.A. On Solutions to Equations of Magnetohydrodynamic Boundary Layer with Injection of a Medium Obeying the Ladyzhenskaya Rheological Law // Journal of Mathematical Sciences. Plenum Publishers (United States). 2022. Т. 260, № 6, P. 774-797

Остальные публикации автора по теме диссертации

5. Кисатов М.А. О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности для жидкости Ладыженской // Математика: теоретические и прикладные исследования: материалы Всероссийской научно-практической конференции (Москва, 17 июня 2021 г.), Московский Политех, Москва, с. 101-103

6. Кисатов М. А. О задаче Стефана для магнитогидродинамической среды с реологическим законом О. А. Ладыженской. // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная выдающемуся математику И. Г. Петровскому (XXIV-е совместное заседание Московского математического общества и Семинара имени И. Г. Петровского. Москва, 26-30 декабря 2021 г.): Тезисы докладов.-240,-М.: ЛЕНАНД, 2022- 370 с. ISBN 978-5-9710-9783-9.

Глава 1

Задача для пограничного слоя Марангони

§ 1.1. Постановка задачи о пограничном слое Марангони

Рассматривается модифицированная стационарная система уравнений двумерного движения вязкой несжимаемой жидкости вида (см. [54])

$$
\begin{gathered}
-\nu \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\big(1+kB^2(u)\big)B_{ij}(u)\Big) + \sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i=1,2, \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \\
B_{ij}(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \qquad B^2(u) = \sum_{i,j=1}^{2} B_{ij}^2(u),
\end{gathered}
\tag{1.1.1}
$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости, k — малая положительная постоянная, p — давление, ρ — плотность; x_1, x_2 — координаты, а u_1 и u_2 — соответствующие этим направлениям компоненты скорости.

Пусть жидкость обтекает плоскую область (см. рис. 1.1)

$$\{0 < x < X,\ -\infty < z < +\infty\},$$

а набегающий поток имеет скорость $(U, 0)$, где $U(x)$ — скорость внешнего течения жидкости. Далее компоненты скорости для удобства обозначим следующим образом:

$$u_1(x, y) = u(x, y), \quad u_2(x, y) = v(x, y).$$

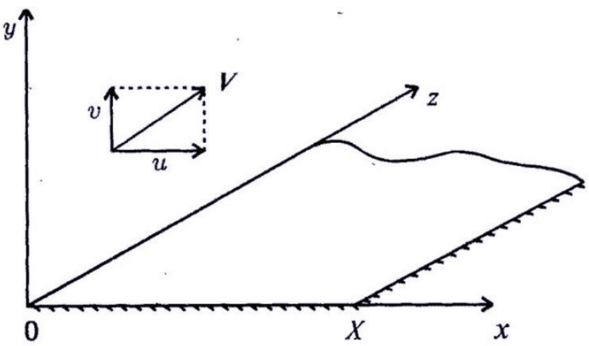

Рис. 1.1: Обтекаемая область

Далее будем рассматривать несжимаемую жидкость, поэтому плотность ρ положим равной единице. Основным безразмерным параметром, характеризующим движение жидкости, называется число Рейнольдса

$$Re = \frac{UX}{\nu}.$$

Теория Прандтля справедлива при больших числах Рейнольдса. В этом случае для толщины h пограничного слоя и компонент скорости u и v имеют место следующие соотношения порядков:

$$h \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}, \qquad v \sim \frac{u}{\sqrt{Re}}.$$

Чтобы выделить в системе уравнений (1.1.1) наиболее существенные для пограничного слоя члены, вводится малый параметр $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{Re}}$, новые независимые переменные

$$x' = x, \qquad y' = \frac{y}{\varepsilon}$$

и новые неизвестные функции

$$\widetilde{u}(x', y') = u(x', \varepsilon y'), \qquad \widetilde{v}(x', y') = \frac{v(x', \varepsilon y') - v_0(x')}{\varepsilon}.$$

Перепишем частные производные, участвующие в уравнениях (1.1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y'};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x'};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = \varepsilon\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y'} = \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y'};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x'};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y'}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y'}\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y'^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x'}\right) = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x'}\right) = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x'^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y'}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y'}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x' \partial y'};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x'}\right) = \varepsilon\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x'}\right) = \varepsilon\frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial x'^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y'}\right) = \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y'}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial y'^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y'}\right) = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial x' \partial y'}.$$

Рассмотрим сперва выражение

$$\frac{\partial}{\partial x}[(1 + kB^2(u))B_{ij}(u)],$$

где

$$B_{11}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$B_{22}(u) = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$B_{12}(u) = B_{21}(u) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$B^2(u) = B_{11}^2 + 2B_{12}^2 + B_{22}^2 = 4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Имеем,

$$\frac{\partial}{\partial x}[(1 + kB^2(u))B_{11}(u)] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 + k\left(4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\right)2\frac{\partial u}{\partial x}\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[2\frac{\partial u}{\partial x} + 4k\frac{\partial u}{\partial x}\left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\right] =$$
$$= 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) +$$
$$+ 4k\frac{\partial u}{\partial x}\left(4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + 4\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) =$$
$$= 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4k\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right.$$
$$+ 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} +$$
$$\left. + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right] =$$
$$= 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4k\left[6\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right.$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\Bigg].$$

После подстановки новых переменных выражение $\frac{\partial}{\partial x}[(1+kB^2(u))B_{ij}(u)]$ принимает вид

$$2\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'^2}+4k\left[6\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x'}\right)^2\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'^2}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y'}\right)^2\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'^2}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x'}\right)^2\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'^2}+\right.$$

$$+2\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y'}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x'}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'^2}+2\left(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y'}\right)^2\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'^2}+\frac{2}{\varepsilon^2}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x'}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y'}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'\partial y'}+2\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x'}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y'}\frac{\partial^2\widetilde{v}}{\partial x'^2}+$$

$$\left.+2\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x'}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x'}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'\partial y'}+2\varepsilon^2\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x'}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x'}\frac{\partial^2\widetilde{v}}{\partial x'^2}+\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x'}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y'}\frac{\partial^2\widetilde{v}}{\partial x'\partial y'}\right].$$

Последнее выражение стремится к $2\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'^2}$ при $\varepsilon\to 0$, причем имеет место следующее соотношение порядков

$$\nu\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'^2}\sim\varepsilon^2\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x'^2}.$$

Аналогично рассмотрим второе слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial y}[(1+kB^2(u))B_{12}(u)]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+k\left(4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+4\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+2k\left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+2k\left\{\left[4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\right.\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+4\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+$$

$$+\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\Bigg\}.$$

В этом равенстве не обращаются в нуль только те слагаемые, которые после умножения на ε^2 и перехода к пределу при $\varepsilon\to 0$, содержат член $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Эти слагаемые имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2k\Bigg\{2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)\Bigg\}=$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2k\Bigg\{3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\Bigg\}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2k\Bigg\{3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\Bigg\}.$$

Последнее выражение при $\varepsilon\to 0$ эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y'^2}+\varepsilon^2\Bigg\{\frac{3}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y'^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y'}\right)^2+\frac{6}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y'^2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y'}\varepsilon\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x'}+$$

$$+\frac{3}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y'^2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x'}\right)^2+\frac{2}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x'}\right)^2+\frac{2}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial y'}\right)^2\Bigg\}.$$

Следовательно, при $\varepsilon\to 0$ данная сумма имеет вид:

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial y'^2}\left(1+3k\left(\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y'}\right)^2\right),$$

причем имеет место соотношение

$$k\sim\varepsilon^2.$$

Второе уравнение в (1.1) при замене $v = \varepsilon\widetilde{v}$, где $\varepsilon \to 0$, переходит в равенство

$$\frac{\partial p}{\partial y'} = 0,$$

откуда можно сделать важный вывод, что давление не зависит от y и равно давлению во внешнем потоке.

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая связь между давлением $p(x)$ и скоростью внешнего течения $U(x)$, которая определяется уравнением Бернулли

$$U^2(x) + 2p(x) = const$$

или

$$\frac{dp(x)}{dx} = -U(x)\frac{dU(x)}{dx},$$

получаем систему уравнений стационарного пограничного слоя

$$\begin{aligned} \nu\left(1 + 3k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} + U(x)\frac{dU(x)}{dx} = 0,\\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

которая выполняется в области $D = \{0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$. К уравнениям (1.1.2) присоединяются граничные условия вида

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = u_0(y), \quad v|_{y=0} = v_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \widehat{A}(x),\\ u(x,y) \rightrightarrows U(x) \quad \text{при} \quad y \to +\infty. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Заданные функции $u_0(y)$, $v_0(x)$, $\widehat{A}(x)$ в условиях (1.1.3) обозначают, соответственно, начальный профиль скоростей, скорость всасывания (или вдува) жидкости из потока (в поток) через свободную границу $\{y = 0\}$ и поверхностное натяжение вдоль свободной границы $\{y = 0\}$.

Дадим определение классического решения задачи (1.1.2), (1.1.3).

Определение 1.1.1. *Классическим решением задачи* (1.1.2), (1.1.3) *называются функции* $u(x, y)$, $v(x, y)$, *которые обладают следующими свойствами:*

- $u(x, y)$, $v(x, y)$ *непрерывны в* $\overline{D}$, *имеют в* D *непрерывные производные, входящие в* (1.1.2)*;*
- $u(x, y)$, $v(x, y)$ *удовлетворяют поточечно уравнениям* (1.1.2) *и условиям* (1.1.3)*.*

§ 1.2. Переход к переменным Мизеса

Для доказательства теорем существования и единственности задачи (1.1.2), (1.1.3) сведем систему уравнений (1.1.2) к одному квазилинейному параболическому уравнению. С этой целью введем новые независимые переменные (см. [54]):

$$x = x, \quad \psi = \psi(x, y), \tag{1.2.1}$$

и неизвестную функцию

$$w(x, \psi) = u^2(x, y), \tag{1.2.2}$$

где

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v - v_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi|_{y=0} = 0,$$

$$u = \sqrt{w}, \quad y = \int\limits_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{w(x, \psi)}}.$$

Далее, с учетом указанной замены, перепишем частные производные, входящие в уравнение (1.1.2)

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{\partial(\sqrt{w})}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{w}}\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial \psi}=\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial \psi};$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \sqrt{w}}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{w}}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right);$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}.$$

В результате преобразования (1.2.1), (1.2.2) и подстановки производных, входящих в уравнение (1.1.2), получаем одно квазилинейное параболическое уравнение

$$\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}-\frac{\partial w}{\partial x}-v_0\frac{\partial w}{\partial \psi}-2\frac{dp(x)}{dx}=0. \qquad (1.2.3)$$

В уравнении (1.2.3) давление $p(x)$ связано со скоростью внешнего течения $W(x)$ уравнением Бернулли, который в переменных Мизеса (1.2.1), (1.2.2) имеет вид:

$$W(x)+2p(x)=const$$

или

$$\frac{dW(x)}{dx}=-2\frac{dp(x)}{dx}.$$

Таким образом, уравнение (1.2.3) может быть переписано в эквивалентном виде

$$\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}-\frac{\partial w}{\partial x}-v_0\frac{\partial w}{\partial \psi}+W'(x)=0. \qquad (1.2.4)$$

Под действием замены (1.2.1), (1.2.2) граничные условия (1.1.3) переходят в условия

$$\begin{gathered}w|_{x=0}=w_0(\psi), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \psi}\right|_{\psi=0}=A(x),\\ w(x,\psi)\rightrightarrows W(x) \quad \text{при} \quad \psi\to+\infty,\end{gathered} \qquad (1.2.5)$$

а прямоугольная область D — в область

$$G = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < \infty\}, \quad X > 0$$

Приведем определение классического решения задачи (1.2.4), (1.2.5).

Определение 1.2.1. *Классическим решением задачи* (1.2.4), (1.2.5) *называется неотрицательная функция* $w(x, \psi)$, *которая обладают следующими свойствами:*

- $w(x, \psi)$ *— непрерывна в* $\overline{G}$, *имеют в* G *непрерывные производные* $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial \psi}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$;
- $w(x, \psi)$ *удовлетворяют уравнению* (1.2.4) *и условиям* (1.2.5).

Выясним, как связаны между собой функции $\widehat{A}(x)$ и $A(x)$. Согласно замене (1.2.1), (1.2.2), справедлива цепочка равенств:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = \sqrt{w}.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial(\sqrt{w})}{\partial \psi}\sqrt{w} = \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial \psi} = \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial \psi}.$$

Поскольку замена Мизеса переводит прямую $y = 0$ в прямую $\psi = 0$, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial \psi}\right|_{\psi=0}.$$

Из последнего равенства вытекает, что отношение между $\widehat{A}(x)$ и $A(x)$ имеет вид

$$A(x) = 2\widehat{A}(x).$$

§ 1.3. Существование единственного решения задачи о продолжении пограничного слоя Марангони в переменных Мизеса

Установим теорему существования и единственности решения задачи продолжения пограничного слоя Марангони на интервал произвольной длины. Предположим, что в области

$$G = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < \infty\}, \quad X > 0,$$

выполняется уравнение (1.2.4) вместе с граничными условиями (1.2.5). Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнены следующие условия*

$$\begin{aligned} A(x),\ W(x),\ v_0(x) \in C^1[0,X],\ w_0(\psi) \in C^{2+\beta}[0,\infty),\\ \beta > 0,\ A(x) \le 0,\ W(x) \ge 0\ \forall x \in [0,X],\\ w_0(\psi) > W(0)\ \forall \psi \in [0,\infty),\ w_0'(0) = A(0),\\ w_0(\psi) \to W(0) \quad \text{при} \quad \psi \to \infty \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

и пусть существует постоянная $C > 0$, такая что

$$\left|\nu\sqrt{w_0}\left(1 + \frac{3}{4}k(w_0')^2\right)w_0'' - v_0 w_0'\right| \le C\left(w_0(\psi) - W(0)\right). \tag{1.3.2}$$

Тогда существует единственное решение $w(x,\psi)$ задачи (1.2.4), (1.2.5), *такое что $w(x,\psi)$ непрерывно и ограничено в $\overline{G}$, а частные производные $\frac{\partial w}{\partial \psi}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ непрерывны и ограничены в G.*

Если ввести обозначения

$$\tau(x,\psi) = w(x,\psi) - W(x),$$

$$z(\psi) = w_0(\psi) - W(0),$$

то задача (1.2.4), (1.2.5) перепишется в виде

$$\tau_x = \nu\sqrt{\tau + W(x)}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial \tau}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 \tau}{\partial \psi^2} - v_0\frac{\partial \tau}{\partial \psi}, \tag{1.3.3}$$

$$\begin{gathered} \tau(0,\psi) = z(\psi), \quad \left.\frac{\partial \tau}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} = A(x),\\ \tau \to 0 \quad \text{равномерно при} \quad \psi \to \infty, \end{gathered} \tag{1.3.4}$$

а условия (1.3.1), (1.3.2) примут вид

$$z \in C^{2+\beta}[0,\infty),\ \beta > 0, \qquad z(\psi) > 0,\ 0 \le \psi < \infty, \tag{1.3.5}$$

$$z'(0) = A(0), \qquad z \to 0 \quad \text{при} \quad \psi \to \infty, \tag{1.3.6}$$

$$\left|\nu\sqrt{z + W(0)}\left(1 + \frac{3}{4}k(z')^2\right)z'' - v_0 z'\right| \le Cz. \tag{1.3.7}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать однозначную разрешимость в G задачи (1.3.3), (1.3.4) с непрерывными и ограниченными в замкнутой области $\overline{G}$ функциями τ, $\frac{\partial\tau}{\partial\psi}$, $\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2}$, $\frac{\partial\tau}{\partial x}$.

Решение $\tau(x,\psi)$ задачи (1.3.3), (1.3.4) приближается некоторой последовательностью решений $\{\tau(x,\psi,\varepsilon)\}$ уравнения (1.3.3) при $\varepsilon \to 0$ в области

$$G_\varepsilon = \left\{0 < x < X,\ 0 < \psi < \frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

удовлетворяющих на границе

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{x = 0,\ \psi = 0,\ \psi = \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

области G_ε регуляризованным краевым условиям

$$\begin{aligned} \tau(0,\psi,\varepsilon) &= z(\psi), \\ \left.\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\right|_{\psi=0} &= A(x), \\ \left.\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\right|_{\psi=\frac{1}{\varepsilon}} &= z'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\alpha x}, \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

где $\alpha \ge C$ — не зависящая от ε постоянная.

Для каждого ε аналогично тому, как это было сделано в [5], мы строим функции $f(\psi)$, $g(\psi)$ со свойствами

$$\begin{gathered} f(\psi),\ g(\psi) \in C^2\left[0,\frac{1}{\varepsilon}\right],\ f(\psi) \ge z(\psi) \ge g(\psi) > 0, \\ 0 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon}, \end{gathered} \tag{1.3.9}$$

$$g'(0) > 0,\ f'(0) < -\sup\{|A(x)|,\ 0 \le x \le X\}, \tag{1.3.10}$$

$$f'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) > \left|z'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right|, \quad g'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < z'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{1.3.11}$$

Для функций f и g имеют место аналоги свойства (1.3.7) функции $z(\psi)$, то есть существует положительная постоянная C, не зависящая от ε, такая что

$$\left|\nu\sqrt{f+W(0)}\left(1+\frac{3}{4}k(f')^2\right)f'' - v_0 f'\right| \le Cf, \tag{1.3.12}$$

$$\left|\nu\sqrt{g+W(0)}\left(1+\frac{3}{4}k(g')^2\right)g'' - v_0 g'\right| \le Cg. \tag{1.3.13}$$

Пусть

$$g(\psi) = \begin{cases} z(\psi), & 1 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon} - 1, \\ z(\psi) - \delta(\psi + 1 - \frac{1}{\varepsilon})^3, & \frac{1}{\varepsilon} - 1 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon}, \end{cases}$$

где

$$\delta = \frac{1}{2}\inf\left\{z(\psi),\ \frac{1}{\varepsilon} - 1 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Положив $g(0) = \frac{1}{2}s(0)$, можно доопределить функцию g на отрезке $[0,1]$ один раз для всех достаточно малых ε. Свойство (1.3.13) для g выполняется, так как при $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon}$ будет

$$\delta''(\psi) = z''(\psi) - 6\delta\left(\psi + 1 - \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

причем

$$\psi + 1 - \frac{1}{\varepsilon} \le 1, \qquad \delta \le \frac{1}{2}z(\psi).$$

Для определения функции f построим функцию $l(\psi)$ по следующиму правилу:

$$l(\psi) = z(\psi), \quad 1 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon}, \qquad l(0) = 2z(0).$$

Далее функция $l(\psi)$ доопределяется на отрезке $[0,1]$ так, чтобы

$$l(\psi) \ge z(\psi),$$

$$l'(0) = -\sup\{|A(x)|,\ 0 \le x \le X\} - 1.$$

Функция f выражается через $l(\psi)$ по формуле

$$f(\psi) = l(\psi) + 3\left|\frac{1}{\varepsilon}\right| e^{\psi - \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Здесь свойства (1.3.9), (1.3.11) выполняются для f.

Для доказательства теоремы 1.3.1 необходимо установить ряд утверждений.

1.3.1 Вспомогательные утверждения

Лемма 1.3.1. *Пусть в области G_ε существует решение задачи* (1.3.3), (1.3.8), *тогда в G_ε выполняется цепочка неравенств*

$$f(\psi)e^{\alpha x} \ge \tau(x, \psi, \varepsilon) \ge g(\psi)e^{-\alpha x}.$$

Доказательство. Пусть оператор $L(s)$ имеет следующий вид:

$$L(s) = \nu\sqrt{s + W}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial s}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 s}{\partial \psi^2} - v_0\frac{\partial s}{\partial \psi} - \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Тогда для оператора, определяемого равенством

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}_1(s) = \\
&= \nu\sqrt{fe^{\alpha x}}\left(1 + \frac{3}{4}k(f'e^{\alpha x})^2\right)\frac{\partial^2 s}{\partial \psi^2} + \frac{\nu}{\sqrt{fe^{\alpha x}} + \sqrt{\tau}}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial \tau}{\partial \psi}\right)^2\right)\times \\
&\times \frac{\partial^2 \tau}{\partial \psi^2}s + \left(\frac{3\nu k\sqrt{fe^{\alpha x}}}{4}\left(f'e^{\alpha x} + \frac{\partial \tau}{\partial \psi}\right)\frac{\partial^2 \tau}{\partial \psi^2} - v_0(x)\right)\frac{\partial s}{\partial \psi} - \frac{\partial s}{\partial x},
\end{aligned}$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}_1(fe^{\alpha x} - \tau) = L(fe^{\alpha x}) - L(\tau) = \\
&= e^{\alpha x}\left[\nu\sqrt{fe^{\alpha x} + W}\left(1 + \frac{3}{4}k(f'e^{\alpha x})^2\right)f'' - v_0 f' - \alpha f\right] \le 0,
\end{aligned}$$

Аналогично, для оператора

$$\widetilde{L}_2(s) =$$
$$= \nu\sqrt{\tau}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2}+\frac{\nu}{\sqrt{\tau}+\sqrt{ge^{-\alpha x}}}\left(1+\frac{3}{4}k(g'e^{-\alpha x})^2\right)\times$$
$$\times g''e^{-\alpha x}s+\left(\frac{3\nu k\sqrt{\tau}}{4}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}+g'e^{-\alpha x}\right)g''e^{-\alpha x}-v_0(x)\right)\frac{\partial s}{\partial\psi}-\frac{\partial s}{\partial x}$$

имеет место оценка

$$\widetilde{L}_2(\tau-ge^{-\alpha x}) = L(\tau)-L(ge^{-\alpha x}) =$$
$$= -e^{-\alpha x}\left[\nu\sqrt{ge^{-\alpha x}+W}\left(1+\frac{3}{4}k(g'e^{-\alpha x})^2\right)g''-v_0g'+\alpha g\right]\leq 0,$$

если взять α достаточно большим и учесть (1.3.12) и (1.3.13).

Поскольку $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$ — линейные параболические операторы, то по принципу максимума функции $(fe^{\alpha x}-\tau)$ и $(\tau-ge^{-\alpha x})$ принимают свои наименьшие значения на границе Γ_ε области G_ε. Но из (1.3.9), (1.3.11) следует, что (аналогично см. [5])

$$\left.\frac{\partial(fe^{\alpha x}-\tau)}{\partial\psi}\right|_{\psi=0} = f'(0)e^{\alpha x}-A(x)\leq f'(0)-A(x)<0;$$
$$\left.\frac{\partial(fe^{\alpha x}-\tau)}{\partial\psi}\right|_{\psi=\frac{1}{\varepsilon}} = f'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{\alpha x}-z'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\alpha x}>0;$$
$$\left.\frac{\partial(\tau-ge^{-\alpha x})}{\partial\psi}\right|_{\psi=0} = A(x)-g'(0)e^{-\alpha x}\leq f'(0)-A(x)<0;$$
$$\left.\frac{\partial(\tau-ge^{-\alpha x})}{\partial\psi}\right|_{\psi=\frac{1}{\varepsilon}} = z'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\alpha x}-g'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\alpha x}>0.$$

Таким образом, функции $(fe^{\alpha x}-\tau)$ и $(\tau-ge^{-\alpha x})$ могут принимать свои наименьшие значения только на границе $x=0$. Учитывая (1.3.8) и (1.3.9), заключаем, что справедливы неравенства

$$(fe^{\alpha x}-\tau)|_{x=0}\geq 0,$$

$$(\tau - ge^{-\alpha x})|_{x=0} \geq 0,$$

а поскольку эти неравенства верны на границе $x = 0$, то по принципу максимума они остаются верными во всей рассматриваемой области. Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.3.2. *Существует независимая от ε постоянная $M > 0$, такая что в G_ε выполняются неравенства*

$$0 < \tau < M, \qquad \left|\frac{\partial \tau}{\partial \psi}\right| < M, \qquad \left|\frac{\partial^2 \tau}{\partial \psi^2}\right| < M, \qquad \left|\frac{\partial \tau}{\partial x}\right| < M. \quad (1.3.14)$$

Доказательство. Первое из неравенств в (1.3.14) следует из леммы 1.3.1. Для получения второго неравенства уравнение (1.3.3) дифференцируется по ψ. Имеем

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \psi \partial x} = \frac{\nu}{2\sqrt{\tau + W}} \frac{\partial \tau}{\partial \psi}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial \tau}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 \tau}{\partial \psi^2} + \frac{3\nu k\sqrt{\tau + W}}{2}\frac{\partial \tau}{\partial \psi}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \psi^2}\right)^2 + \nu\sqrt{\tau + W}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial \tau}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^3 \tau}{\partial \psi^3} - v_0\frac{\partial^2 \tau}{\partial \psi^2}.$$

Полагая $q = \frac{\partial \tau}{\partial \psi}$, последнее уравнение переписываем в виде

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\nu q}{2\sqrt{\tau + W}}\left(1 + \frac{3}{4}kq^2\right)\frac{\partial q}{\partial \psi} + \frac{3}{2}k\nu\sqrt{\tau + W}q\left(\frac{\partial q}{\partial \psi}\right)^2 +$$
$$+ \nu\sqrt{\tau + W}\left(1 + \frac{3}{4}kq^2\right)\frac{\partial^2 q}{\partial \psi^2} - v_0\frac{\partial q}{\partial \psi}. \quad (1.3.15)$$

Используя это уравнение, вводим оператор $L_1(q)$ по формуле

$$L_1(q) = \nu\sqrt{\tau + W}\left(1 + \frac{3}{4}kq^2\right)\frac{\partial^2 q}{\partial \psi^2} + \frac{3}{2}k\nu\sqrt{\tau + W}q\left(\frac{\partial q}{\partial \psi}\right)^2 +$$
$$+ \left[\frac{\nu q}{2\sqrt{\tau + W}}\left(1 + \frac{3}{4}kq^2\right) - v_0\right]\frac{\partial q}{\partial \psi} - \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (1.3.16)$$

Полученное уравнение (1.3.15) является однородным квазилинейным параболическим, следовательно q достигает своего максимума и минимума на границе Γ_ε области G_ε. При этом:

$$q(0,\psi) = z'(\psi),$$
$$q(x,0) = A(x),$$
$$q\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) = z'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\alpha x},\ \alpha \geq C = const$$

равномерно ограниченные функции. Таким образом, справедливость второго неравенства в (1.3.14) установлена.

Для доказательства неравенства $\frac{\partial\tau}{\partial x} < M$ уравнение (1.3.3) дифференцируется по x. Имеем

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} = \frac{\nu}{2\sqrt{\tau+W}}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x} + W'\right)\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2} - v_0\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial\psi} +$$
$$+\nu\sqrt{\tau+W}\left[\left(\frac{3}{2}k\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial\psi}\right)\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2} + \left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^3\tau}{\partial x\partial\psi\partial\psi}\right].$$

Далее, уравнение (1.3.3) может быть переписано в эквивалентном виде

$$\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2} = \frac{1}{\nu\sqrt{\tau+W}}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x} + v_0\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\right).$$

Учитывая последнее выражение и полагая $r = \frac{\partial\tau}{\partial x}$, $q = \frac{\partial\tau}{\partial\psi} \leq M$, получаем окончательно:

$$L_2(r) = \nu\sqrt{\tau+W}\left(1+\frac{3}{4}kq^2\right)\frac{\partial^2 r}{\partial\psi^2} + \left[\frac{6kq(r+v_0q)}{4+3kq^2} - v_0\right]\frac{\partial r}{\partial\psi} -$$
$$-\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{(r+v_0q)(r+W')}{2(\tau+W)}.$$

Таким образом, r достигает экстремума на границе Γ_ε области G_ε. При $x = 0$ выражение

$$r = \nu\sqrt{z+W(0)}\left(1+\frac{3}{4}(z')^2\right)z'' - v_0z'$$

ограничено сверху и снизу. Итак, равномерная ограниченность для $\frac{\partial\tau}{\partial x}$ установлена.

Для доказательства равномерной ограниченности $\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2}$ достаточно показать ее равномерную ограниченность при $\psi = 0$ и $\psi = \frac{1}{\varepsilon}$.

Для начала устанавливается, что в полосе

$$\Omega = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < 1\}$$

выполнено неравенство

$$\frac{\partial\tau}{\partial\psi} \geq A(x) - M\ln(1+\psi). \tag{1.3.17}$$

Неравенство (1.3.17) выполняется на границе $\{x = 0,\ \psi = 0,\ \psi = 1\}$ полосы Ω. В самом деле, при $\psi = 0$ величина $\frac{\partial\tau}{\partial\psi} = A(x)$ ограничена сверху и снизу; при $\psi = 1$ неравенство (1.3.17) принимает вид

$$\frac{\partial\tau}{\partial\psi} \geq A(x) - \ln 2$$

и выполняется при достаточно больших M. При $x = 0$ справедливо

$$\frac{\partial\tau}{\partial\psi} \geq \int\limits_0^\psi z''(\xi)d\xi + A(0) = z''(\xi)\psi + A(0) \geq$$

$$\geq A(0) - M\ln(1+\psi),$$

где $0 \leq \xi \leq 1$, откуда (3.16) следует из свойств (3.5), (3.6) и функции $z(\psi)$.

Рассмотрим оператор $L_1\big(A(x) - M\ln(1+\psi)\big)$, определенный в (1.3.16). Имеем

$$L_1\big(A(x) - M\ln(1+\psi)\big) =$$

$$= \frac{M\nu\sqrt{\tau+W}}{(1+\psi)^2}\left[1 + \frac{3}{4}k\Big(A(x) - M\ln(1+\psi)\Big)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3kM}{2}\Big(A(x) - M\ln(1+\psi)\Big)\right] - \frac{M}{1+\psi}\frac{\nu(A(x) - M\ln(1+\psi))}{2\sqrt{\tau+W}}\times$$

$$\times\left(1 + \frac{3}{4}k\Big(A(x) - M\ln(1+\psi)\Big)^2\right) + \frac{M}{1+\psi}v_0 - A'(x) \geq 0,$$

поскольку, согласно лемме 1.3.1, имеем $\tau \geq \tau_0 > 0$ в полосе Ω, где τ_0 не зависит от ε. Тогда выполняется неравенство

$$\widetilde{L}_1\left(\frac{\partial \tau}{\partial \psi} - A(x) + M\ln(1+\psi)\right) = L_1\left(\frac{\partial \tau}{\partial \psi}\right) - L_1(A(x) - M\ln(1+\psi)) \leq 0.$$

Поэтому неравенство (1.3.17) выполнено во всей полосе Ω. Оценка снизу для $\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2}\big|_{\psi=0}$ вытекает из (1.3.17); оценка сверху доказывается аналогично. Для доказательства равномерной ограниченности $\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2}$ при $\psi = \frac{1}{\varepsilon}$ в полосе $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq \psi \leq \frac{1}{\varepsilon}$ проверяется выполнение неравенств:

$$z'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\alpha x} + M\ln\left(\psi + 2 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \geq \frac{\partial \tau}{\partial \psi} \geq z'\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)e^{-\alpha x} - M\ln\left(\psi + 2 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.3.3. *Решение задачи* (1.2.4), (1.2.5), *обладающее свойствами* (1.3.1), (1.3.2), *единственно.*

Доказательство. Предположим, что $w_1(x,\psi)$, $w_2(x,\psi)$ — два решения задачи (1.2.4), (1.2.5). Тогда разность $w_1 - w_2$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial x} &= \nu\sqrt{w_1}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_1}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2(w_1 - w_2)}{\partial \psi^2} + \\ &+ \frac{\nu}{\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2}}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2}(w_1 - w_2) + \\ &+ \left(\frac{3\nu k\sqrt{w_1}}{4}\left(\frac{\partial w_1}{\partial \psi} + \frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} - v_0(x)\right)\frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial \psi}\end{aligned}$$

и условиям

$$\begin{gathered}(w_1 - w_2)\big|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial(w_1 - w_2)}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} = 0, \\ w_1 - w_2 \to 0 \quad \text{при} \quad \psi \to \infty.\end{gathered} \tag{1.3.18}$$

В силу леммы 1.3.2 и предыдущих предположений имеют место оценки:

$$\frac{1}{\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2}}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} \leq M_1 k_1\left(1 + \frac{1}{\psi}\right), \tag{1.3.19}$$

$$\frac{1}{\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2(w_2)}{\partial\psi^2}|w_1-w_2|<k_2, \qquad (1.3.20)$$

где M_1, k_1, k_2 — некоторые положительные константы.

Применить непосредственно здесь принцип максимума нельзя, так как коэффициент при w_1-w_2 не является знакоопределенным и не ограничен в окрестности точки $\psi=0$.

Введем вспомогательную функцию $C_\delta(x,\psi)$, определенную равенствами

$$C_\delta(x,\psi)=\frac{\nu}{\sqrt{w_1}+\sqrt{w_2}}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial\psi^2}\ \text{ при }\ \psi\ge\delta,$$

$$C_\delta(x,\psi)=0\ \text{ при }\ \psi<\delta.$$

Рассматриваем функцию $\Phi(x,\psi)=e^{\alpha x}\varphi(\psi)$, где $\alpha>0$ — некоторая постоянная, $\varphi(\psi)=2\psi-\psi^{\frac{4}{3}}$ при $\psi\le 1$, $1\le\varphi(\psi)\le 2$ при $\psi>1$, причем производные $\varphi'(\psi)$ и $\varphi''(\psi)$ ограничены.

Для оператора

$$L_\delta(\Phi)=\nu\sqrt{w_1}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2}+ \\ +\left(\frac{3\nu k\sqrt{w_1}}{4}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}+\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial\psi^2}-v_0(x)\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}+C_\delta(x,\psi)\Phi(x,\psi)$$

и введенной функции $\Phi(x,\psi)$ при $\psi\le\psi_0<1$ получаем

$$L_\delta(\Phi)=\nu\sqrt{w_1}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\right)^2\right)\left(-\frac{4}{9}\psi^{-\frac{2}{3}}\right)e^{\alpha x}-\alpha e^{\alpha x}(2\psi-\psi^{\frac{4}{3}})- \\ -\left(\frac{3\nu k\sqrt{w_1}}{4}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}+\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial\psi^2}-v_0(x)\right)e^{\alpha x}\left(2\psi-\frac{4}{3}\psi^{\frac{1}{3}}\right)+ \\ +C_\delta(x,\psi)e^{\alpha x}(2\psi-\psi^{-\frac{4}{3}}).$$

Учитывая (1.3.19), при $\psi\le\psi_0<1$ выводим неравенство

$$L_\delta(\Phi)\le\nu M_1k_1\left(1+\frac{1}{\psi}\right)(2\psi-\psi^{\frac{4}{3}})-k_3\psi^{-\frac{1}{6}}+k_4\le -k_5^{-\frac{1}{6}}<0, \quad (1.3.21)$$

где ψ_0 — достаточно малая не зависящая от δ величина, а k_3, k_4, k_5 — произвольные положительные постоянные.

При $\psi \geq \psi_0$ выполняются неравенства $\varphi(\psi) \geq a_0 > 0$, и поэтому $L_\delta(\Phi) < 0$, если $\alpha > 0$ достаточно велико.

Введем функции

$$W_\pm(x,\psi) = \varepsilon_1\Phi \pm (w_1 - w_2), \qquad \varepsilon_1 > 0.$$

Пусть число $N = \frac{1}{\varepsilon}$ достаточно велико. Тогда $W_\pm(x,\psi) \geq 0$ при $\psi \geq N$, поскольку $w_1 - w_2 \to 0$ при $\psi \to +\infty$.

Справедливо следующее неравенство

$$W_+(x,\psi) \geq 0 \ \text{ при } \ 0 \leq \psi \leq N.$$

В самом деле, это неравенство выполняется на границе Γ_ε области G_ε. Функция $W_+(x,\psi)$ может принимать отрицательные значения только внутри области G_ε в тех точках (x,ψ), в которых $w_1(x,\psi) - w_2(x,\psi) < 0$. Будем рассматривать именно эти точки. При $\delta \leq \psi_0$, учитывая (1.3.20), (1.3.21), имеем неравенства

$$\begin{aligned}
L_\delta(W_+) &= \varepsilon_1 L_\delta(\Phi) + L_\delta(w_1 - w_2) = \\
&= \varepsilon_1 L_\delta(\Phi) - \frac{\nu(w_1 - w_2)}{\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2}}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} < \\
&< -\varepsilon_1 k_5 \psi^{-\frac{1}{6}} + \frac{\nu|w_1 - w_2|}{\sqrt{w_1} + \sqrt{w_2}}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} < \\
&< -\varepsilon_1 k_5 \psi^{-\frac{1}{6}} + \nu k_2 < 0,
\end{aligned}$$

если $\psi \leq \delta$ и δ достаточно мало.

При соответствующем выборе α так же, как было указано выше, для $\psi \geq \delta$ выполняется неравенство $L_\delta(W_+) = \varepsilon_1 L_\delta(\Phi) < 0$.

Итак, установлено, что $L_\delta(W_+) < 0$ в тех точках (x,ψ) области G_ε, где $w_1(x,\psi) - w_2(x,\psi) < 0$. Перейдя от функции W_+ к функции R_+ по формуле $R_+ = W_+ e^{-\beta x}$, где β — некоторая постоянная, получается следующее неравенство

$$L_\delta(W_+) = L_\delta(e^{\beta x}R_+) = \Bigg[\nu\sqrt{w_1}\left(1+\frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 R_+}{\partial\psi^2} - \frac{\partial R_+}{\partial x} + \\ + \left(\frac{3\nu k\sqrt{w_1}}{4}\left(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}+\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\right)\frac{\partial^2 w_2}{\partial\psi^2} - v_0(x)\right)\frac{\partial R_+}{\partial\psi} + \\ + (C_\delta(x,\psi)-\beta)R_+\Bigg]e^{\beta x} < 0. \tag{1.3.22}$$

Значение β в (1.3.22) выбирается так, чтобы выполнялось неравенство:

$$\beta > \max_{(x,\psi)} C_\delta(x,\psi).$$

В этом случае $C_\delta(x,\psi) - \beta < 0$.

Согласно принципу максимума неравенство (1.3.22) не может выполняться в точке отрицательного минимума цункции $W_+(x,\psi)$ в области G_ε. Значит, в области G_ε выполняется неравенство $W_+(x,\psi) \geq 0$.

Аналогично можно доказать, что $W_-(x,\psi) \geq 0$ в области G_ε. Следовательно, при достаточно большом $N = \frac{1}{\varepsilon}$ в области G_ε выполняется неравенство $|w_1 - w_2| \leq \varepsilon_1$. Отсюда, в силу произвольности ε_1, $|w_1 - w_2| \equiv 0$, то есть $w_1 \equiv w_2$. Лемма доказана. □

1.3.2 Доказательство теоремы

Доказательство теоремы 1.3.1. Леммы 1.3.1 и 1.3.2 позволяют из семейства решений $\{\tau(x,\psi,\varepsilon)\}$ выбрать последовательность, сходящуюся равномерно при $0 \leq \psi \leq N$, $\forall N > 1$. Предельная функция $\tau(x,\psi)$ оказывается решением уравнения (1.3.3). Более того, частные производные этой последовательности по переменным x, ψ, а так же вторая производная по ψ, равномерно сходятся при $0 \leq \psi \leq N$, $N > 1$.

Выполнение первых двух граничных условий в (1.3.4) ясно из построения решения; выполнение последнего следует из леммы 1.3.1 и свойств функции $f(\psi)$. Непрерывность функции $A(x)$ обеспечивает непрерывность $\frac{\partial\tau}{\partial\psi}$ при $\psi = 0$; ограниченность $\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2}$ при $\psi = 0$ устанавливает непрерывность $\frac{\partial\tau}{\partial x}$ при $\psi = 0$.

Таким образом, леммы 1.3.1 и 1.3.2 доказывают первую часть утверждения теоремы, а именно — существование решения $w(x,\psi)$ задачи (1.2.4), (1.2.5). Лемма 1.3.3 завершает доказательство теоремы о существовании и единственности решения $w(x,\psi)$ пограничного слоя Марангони. Теорема доказана.

$\square$

§ 1.4. Эквивалентность решений задач о пограничном слое Марангони в переменных Мизеса и в декартовых переменных

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.4.1. *Пусть в области* $G = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < +\infty\}$ *существует решение* $w(x,\psi)$ *задачи* (1.2.4), (1.2.5) *со свойствами, указанными в теореме 1.3.1. Тогда в области*

$$D = \{0 < x < X,\ 0 < y < +\infty\}$$

существует решение $u(x,y)$, $v(x,y)$ *задачи* (1.1.2), (1.1.3), *обладающее следующими свойствами:*

- $u(x,y)$ *— непрерывна и ограничена в* $\overline{D}$*,*
- $u(x,y) > 0$ *при* $y > 0$*,*
- $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *— непрерывны и ограничены в* D*;* $\frac{\partial u}{\partial x}$, v, $\frac{\partial v}{\partial y}$ *— непрерывны и ограничены в любой конечной части* $\overline{D}$*.*

Доказательство. Продифференцируем уравнение (1.2.4) по переменной ψ. Имеем

$$\frac{\nu}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\left(1+\frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}+\frac{3\nu k}{2}\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}\Big)^2+$$
$$+\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^3 w}{\partial\psi^3}-\frac{\partial^2 w}{\partial\psi\partial x}-v_0(x)\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}=0.$$

Обозначим $s(x,\psi)=\frac{\partial w}{\partial\psi}$ и рассмотрим уравнение на $s(x,\psi)$

$$L_3(s)\equiv\left[\frac{\nu}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\left(1+\frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)-v_0(x)\right]\frac{\partial s}{\partial\psi}+$$
$$+\frac{3\nu k}{2}\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}\frac{\partial s}{\partial\psi}+\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)\frac{\partial^2 s}{\partial\psi^2}-\frac{\partial s}{\partial x}=0.$$

Далее, воспользуемся принципом максимума в неограниченной области. Положим

$$a(x,\psi)=\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right),$$

$$b(x,\psi)=\frac{3\nu k}{2}\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}+\frac{\nu}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\left(1+\frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)-v_0(x).$$

Заметим, что $a(x,\psi)\geq 0$ и ограничено; $b(x,\psi)$ ограничено в силу предположений леммы при $\psi\geq\psi_1$ для некоторой постоянной ψ_1.

Пусть

$$S_\pm=C_1e^{-C_2\psi+C_3x}\pm s(x,\psi),$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные. Тогда выполнено неравенство

$$L_3(S_\pm)=C_1e^{-C_2\psi+C_3x}\left[C_2^2\nu\sqrt{w}\left(1+\frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)-\right.$$
$$\left.-C_2^2\left(\frac{3\nu k}{2}\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial\psi}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}+\frac{\nu}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\left(1+\frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2\right)-v_0\right)-C_3\right]$$
$$<0$$

при достаточно больших значениях постоянной C_3 и при $\psi\geq\psi_1$.

Согласно принципу максимума $S_{\pm} \geq 0$ в области

$$\{0 \leq x \leq X,\ \psi_1 \leq \psi < +\infty\}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{\partial w}{\partial \psi}\right| \leq C_4 e^{-C_2\psi}, \quad \psi \geq \psi_1,$$

для некоторой постоянной C_4. Кроме того, функция $\frac{\partial u}{\partial x}$ ограничена в области D, поскольку при $\psi \geq \psi_1$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leq \left|\frac{1}{2\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial x}\right| + \left|\frac{1}{2\sqrt{w}}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial w}{\partial \psi}\right| \leq$$

$$\leq C_5 + \frac{1}{2}\left|\int\limits_0^{\psi} w^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial w}{\partial x}\,d\psi\right| C_4 e^{-C_2\psi} \leq C_5 + C_6\psi e^{-C_2\psi} \leq C_7,$$

где C_5, C_6, C_7 — некоторые постоянные.

Ограниченность функции $\frac{\partial u}{\partial y}$ вытекает из ограниченности $\frac{\partial u}{\partial x}$ и уравнения $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ в (1.1.2). Лемма доказана. □

Произведя обратное преобразование переменных (1.2.1), (1.2.2) (это возможно в силу свойств решения задачи (1.2.4), (1.2.5)), получаем основной результат о существовании единственного решения задачи (1.1.2), (1.1.3) в смысле определения 1.1.1.

§ 1.5. Существование решения задачи о продолжении пограничного слоя Марангони в декартовых переменных

Справедливо следующее утверждение относительно существования решения задачи о продолжении пограничного слоя Марангони в исходных переменных на интервал произвольной протяженности.

Теорема 1.5.1 (Существования). *Пусть выполнены следующие условия*

$$\begin{aligned}\widehat{A}(x),\ U(x),\ v_0(x) \in C^1[0,X],\ u_0(y) \in C^{2+\beta}[0,\infty),\ \beta > 0,\\ \widehat{A}(x) \le 0,\ U(x) \ge 0\ \forall x \in [0,X],\\ u_0(y) > U(0)\ \forall y \in [0,\infty),\ u_0'(0) = \widehat{A}(0),\\ u_0(y) \to U(0) \quad \text{при} \quad y \to \infty\end{aligned}$$

и пусть существует постоянная $C > 0$, такая что выполнено условие (1.3.2). *Тогда в области $D = \{0 < x < X,\ 0 < y < +\infty\}$ существует решение $u(x,y)$, $v(x,y)$ системы* (1.1.2) *с условиями* (1.1.3), *обладающее следующими свойствами:*

- *$u(x,y)$ — непрерывна и ограничена в $\overline{D}$,*
- *$u(x,y) > 0$ при $y > 0$,*
- *$\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ — непрерывны и ограничены в D; $\frac{\partial u}{\partial x}$, v, $\frac{\partial v}{\partial y}$ — непрерывны и ограничены в любой конечной части $\overline{D}$.*

Доказательство. Справедливость теоремы 1.5.1 вытекает из леммы 1.4.1 и теоремы 1.3.1. □

§ 1.6. Единственность решения задачи о продолжении пограничного слоя Марангони в декартовых переменных

Справедливо следующее утверждение относительно единственности решения задачи о продолжении пограничного слоя Марангони в исходных переменных на интервал произвольной протяженности.

Теорема 1.6.1 (Единственности). *Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют системе* (1.1.2) *в области*

$$D = \{0 < x < X,\ 0 < y < \infty\},$$

непрерывны в $\overline{D}$ *и удовлетворяют условиям* (1.1.3)*; пусть, кроме того, выполняются неравенства*

$$0 < u < M_2, \qquad \psi > 0,$$

$$M_3 y \le u \le M_4 y, \qquad 0 < y < y_0, \tag{1.6.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \le M_5, \qquad (x, y) \in D, \tag{1.6.2}$$

где M_2*,* M_3*,* M_4*,* M_5 *и* y_0 *— некоторые положительные постоянные. Тогда* u*,* v *— единственное решение задачи* (1.1.2), (1.1.3) *с указанными свойствами.*

Доказательство. Замена переменных Мизеса

$$u^2(x, y) = w(x, \psi), \qquad \psi(x, y) = -\int\limits_{x_0}^{x} (v(\xi, y) - v_0(\xi))\, d\xi + u(x_0, y)$$

осуществляет переход системы (1.1.2) к уравнению (1.2.4). Следовательно, производные $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ непрерывны в D и из (1.6.2) следует, что имеет место неравенство

$$\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \le 2M_5.$$

Поскольку $\psi = \int\limits_0^y u(x, \zeta)\, d\zeta$, то из (1.6.1) вытекают оценки

$$M_3 y^2 \le \psi \le M_4 y^2, \qquad M_3^2 y^2 \le u^2 = w \le M_4^2 y^2.$$

Поэтому

$$\frac{M_3^2}{M_4}\psi \le w(x, \psi) \le \frac{M_4^2}{M_3}\psi.$$

Из последнего неравенства следут единственность решения $w(x, \psi)$ задачи (1.2.4), (1.2.5), то есть $w_1(x, \psi) \equiv w_2(x, \psi)$ для решений $w_1(x, \psi)$

и $w_2(x,\psi)$. Пусть u_1, v_1 и u_2, v_2 — два решения задачи (1.1.2), (1.1.3). Так как

$$\sqrt{w_1} = \frac{\partial w_1}{\partial y}, \quad \sqrt{w_2} = \frac{\partial w_2}{\partial y},$$

то $y = \zeta(x,\psi_1) \equiv \zeta(x,\psi_2)$ и $u_1^2(x,y) \equiv u_2^2(x,y)$. Теорема доказана. □

§ 1.7. Некоторые свойства решений задачи для пограничного слоя Марангони

Задача (1.2.4), (1.2.5) для пограничного слоя Марангони отличается от задачи для пограничного слоя вблизи твердой стенки (см. [54]) постановкой граничного условия при $\psi = 0$. Корректность постановки задачи о продолжении пограничного слоя вблизи твердой стенки существенно зависит от градиента давления, в то время как в пограничном слое Марангони главную роль играет касательное напряжение, задаваемое на границе раздела между двумя жидкостями или жидкостью и газом.

Заданное вблизи твердой стенки условие прилипания выражает тот факт, что продольная составляющая вектора скорости вблизи этой стенки равна нулю. В пограничном слое Марангони вдоль границы $\psi = 0$ задается касательное напряжение, которое характеризуется условием второго рода. В отличие от задачи обтекания твердой стенки продольная составляющая вектора скорости в случае слоя Марангони вблизи границы раздела $\psi = 0$ не обращается, вообще говоря, в нуль. Более того, для пограничного слоя Марангони в качестве исходного профиля скоростей $w_0(\psi)$ характерно задавать убывающие функции. В этом случае из теоремы 1.3.1 о продолжении пограничного слоя Марангони вытекает, что скорость движения жидкости вблизи границы раздела $\psi = 0$ является наиболее интенсивной и уменьшается при $\psi \to +\infty$.

Другой отличительной особенностью пограничного слоя Марангони от пограничного слоя вблизи твердой стенки является то, что теорема 1.3.1 существования и единственности решения справедлива в частном случае, когда скорость внешнего течения тождественно равна нулю. В этом случае должно выполняться условие $w_0(\psi) > 0\ \forall\psi \geq 0$. Возникает вопрос о корректности постановки задачи (1.2.4), (1.2.5), когда

$$W(x) \equiv 0, \qquad \begin{array}{ll} w_0(\psi) > 0 & \text{при} \quad 0 \leq \psi < N, \\ w_0(\psi) = 0 & \text{при} \quad \psi \geq N, \end{array}$$

где N — некоторая постоянная. Поскольку выполнено неравенство $w(x,0) \geq w_* > 0$, в уравнении (1.2.4) при $W(x) \equiv 0$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \nu\sqrt{w}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - v_0\frac{\partial w}{\partial \psi} \tag{1.7.1}$$

можно сделать обратное преобразование Мизеса. Имеем

$$w = u^2, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial w}{\partial \psi} = \frac{\partial (u^2)}{\partial \psi}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial \psi^2}. \tag{1.7.2}$$

Далее, уравнение (1.7.1) переписывается в терминах замен (1.7.2) следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left[\frac{\nu}{2}\frac{\partial (u^2)}{\partial \psi}\left(1 + \frac{k}{4}\left(\frac{\partial (u^2)}{\partial \psi}\right)^2\right) - \frac{v_0}{2}u\right]. \tag{1.7.3}$$

Краевые условия при этом принимают вид

$$u(0,\psi) = \sqrt{w_0(\psi)}, \qquad \frac{\partial (u^2)}{\partial \psi} = 2\widehat{A}(x) \equiv A(x). \tag{1.7.4}$$

Определение 1.7.1. *Неотрицательную, непрерывную и ограниченную в G функцию u назовем обобщенным решением задачи* (1.7.3), (1.7.4), *если существует ограниченная в G обобщенная производная $\frac{\partial (u^2)}{\partial \psi}$ и для любой непрерывно дифференцируемой в G функции $f(x,\psi)$, равной нулю при $x = X$ и вне некоторой конечной области выполняется равенство*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial f}{\partial x}u - \frac{\partial f}{\partial \psi}\left(\frac{\nu}{2}\frac{\partial (u^2)}{\partial \psi}\left(1 + \frac{k}{4}\left(\frac{\partial (u^2)}{\partial \psi}\right)^2\right) - \frac{v_0}{2}u\right)\right) dx d\psi +$$

$$+ \int\limits_0^\infty f(0,\psi)\sqrt{w_0(\psi)}\, d\psi + \nu\int\limits_0^X f(x,0)\widehat{A}(x)(1 + k\widehat{A}^2(x))\, dx = 0.$$

Замечание 1.7.1. *Обобщенное решение задачи* (1.7.3), (1.7.4) *получено при помощи интегрирования по часятм уравнения* (1.7.3), *умноженного на непрерывно дифференцируемую функцию* $f(x, \psi)$, *а так же соблюдении условий* (1.7.4).

Замечание 1.7.2. *Обобщенное решение задачи* (1.7.3), (1.7.4) *существует, единственно, а так же удовлетворяет уравнению* (1.7.3) *в обычном смысле.*

Из теоремы 1.3.1 вытекают следующие следствия.

Следствие 1.7.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.3.1 *и, кроме того,*

$$w_0'(\psi) \leq 0 \qquad \forall \psi \in (0, \infty).$$

Тогда всюду в G *выполнено неравенство*

$$\frac{\partial w}{\partial \psi} \leq 0.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить выполнение в G_ε неравенства $\frac{\partial v}{\partial \psi} \leq 0$ для решения задачи (1.3.3)–(1.3.8). Но его выполнение сразу следует из условий $A(x) \leq 0$ и $u'(\psi) \leq 0$. □

Следствие 1.7.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.3.1, *тогда существуют постоянные* K, $k > 0$, *зависящие лишь от данных задачи* (1.2.3), (1.2.5) *и такие, что в* G *выполнена цепочка неравенств*

$$K[w_0(\psi) - W(0)] \geq w(x, \psi) - W(x) \geq k[w_0(\psi) - W(0)]. \tag{1.7.5}$$

Доказательство. Для доказательства этих неравенств проверяется выполнение в области G_ε неравенств

$$k_\varepsilon u(\psi) \geq \tau(x, \psi, \varepsilon) \geq K_\varepsilon u(\psi). \tag{1.7.6}$$

для решения задачи (1.3.3), (1.3.8) с константами такими, что $K_\varepsilon \to K$, $k_\varepsilon \to k$ при $\varepsilon \to 0$, где k, $K > 0$. Тогда (1.7.5) получается из (1.7.6) предельным переходом $\varepsilon \to 0$. Выполнение (1.7.6) следует из леммы 1.3.1 при выборе констант K_ε, k_ε вида

$$k_\varepsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\alpha a}, \qquad K_\varepsilon = \frac{\lambda_3}{\lambda_4} e^{\alpha a},$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \inf\{g(\psi),\ 0 \le \psi \le 1\}, \qquad \lambda_2 = \sup\{u(\psi),\ 0 \le \psi \le 1\},$$
$$\lambda_3 = 2 \sup\{f(\psi),\ 0 \le \psi \le 1\}, \qquad \lambda_4 = \inf\{u(\psi),\ 0 \le \psi \le 1\}.$$

Определенные таким образом K_ε, k_ε удовлетворяют требуемым свойствам. □

§ 1.8. Асимптотическое поведение продольной компоненты скорости

Рассмотрим задачу о продолжении стационарного пограничного слоя на произвольный интервал для системы (1.1.2) с условиями (1.1.3) в области

$$D_\infty = \{0 < x < +\infty,\ 0 < y < +\infty\}.$$

Ранее была установлена однозначная разрешимость задачи (1.1.2), (1.1.3) при любом $X > 0$ (см. теорему 1.5.1). Исследуем теперь поведение решений задачи (1.1.2), (1.1.3) при $x \to +\infty$. Для этой цели получим сперва автомодельные решения задачи (1.1.2), (1.1.3).

1.8.1 Автомодельные решения уравнений пограничного слоя Марангони

Перепишем систему уравнений (1.1.2) в виде

$$\begin{gathered} Pu \equiv u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(1 + 3k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) - U(x)U'(x) = 0, \\ v(x,y) = v_0(x) - \int\limits_0^y \frac{\partial u(x,s)}{\partial x}\, ds, \end{gathered} \tag{1.8.1}$$

Предполагается, что профили скорости вдоль обтекаемой пластины подобны при любом x, тогда компонента $u(x,y)$ решения системы (1.8.1) согласно Блазиусу имеет следующий вид:

$$u(x,y) = U(x)\frac{\partial\sigma(\eta,\lambda(x))}{\partial\eta}, \quad \eta = \frac{y}{\mu(x)}. \tag{1.8.2}$$

Функции $\mu(x)$ и $\lambda(x)$ будут определены ниже после подстановки продольной компоненты скорости $u(x,y)$ вида (1.8.2) в систему (1.8.1). Для краткости вводятся обозначения:

$$\sigma_0 \equiv \sigma(0,\lambda), \quad \sigma \equiv \sigma\big(\eta,\lambda(x)\big), \quad U \equiv U(x), \quad \mu \equiv \mu(x).$$

Из (1.8.2) находим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{\mu}\sigma'',\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U}{\mu^2}\sigma''',\\
&\frac{\partial u}{\partial x} = U'\sigma' + U\lambda'\frac{\partial\sigma'}{\partial\lambda} - \frac{U}{\mu}\eta\mu'\sigma'',\\
&v(x,y) = v_0(x) - \delta U'(\sigma-\sigma_0) - U\delta\lambda'\frac{\partial(\sigma-\sigma_0)}{\partial\lambda} + U\eta\delta'\sigma' - U\mu'\sigma'.
\end{aligned} \tag{1.8.3}$$

Подставляя выражения (1.8.3) в уравнение $Pu = 0$ в (1.8.1), получаем:

$$\begin{aligned}
Pu = U\sigma'\left(U'\sigma' + U\lambda'\frac{\partial\sigma'}{\partial\lambda} - \frac{U}{\mu}\eta\mu'\sigma''\right) + \\
+\frac{U}{\mu}\sigma''\left(v_0 - \mu U'(\sigma-\sigma_0) - U\mu\lambda'\frac{\partial(\sigma-\sigma_0)}{\partial\lambda} + U\eta\mu'\sigma' - U\mu'\sigma'\right) - \\
-\nu\frac{U}{\mu^2}\sigma'''\left(1 + 3k\frac{U^2}{\mu^2}\sigma''^2\right) - UU' = 0.
\end{aligned} \tag{1.8.4}$$

Далее, уравнение (1.8.4) преобразуем к следующему виду:

$$Pu = -\frac{\nu U}{\mu^2}\left[\left(1 + 3k\frac{U^2}{\mu^2}\sigma''^2\right)\sigma''' + \frac{\mu(\mu U)'}{\nu}\left(\sigma - \sigma_0 - \frac{v_0}{(\mu U)'}\right)\sigma'' + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu^2 U'}{\nu}(1 - \sigma'^2)\right] + U^2\lambda'\left(\sigma'\frac{\partial\sigma'}{\partial\lambda} - \frac{\partial(\sigma - \sigma_0)}{\partial\lambda}\sigma''\right) = 0. \qquad (1.8.5)$$

Введем для равенства (1.8.5) следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{\mu^2 U'}{\nu}, \quad \theta = \frac{U^2}{\mu^2} = \frac{\nu U^2}{\mu^4 U'}\gamma \qquad (1.8.6)$$

и сделаем следующие предположения:

$$\frac{\mu(\mu U)'}{\nu} = 1, \quad \sigma_0 = -\frac{v_0}{(\mu U)'}. \qquad (1.8.7)$$

Далее найдем вид функции $\mu(x)$, которая удовлетворяет первому равенству в (1.8.7). Это равенство может быть писано в виде

$$\mu U(\delta U)' = \nu U$$

или в виде

$$\frac{1}{2}((\mu U)^2)' = \nu U.$$

Интегрируя последнее равенство от 0 до x, имеем:

$$\mu^2(x)U^2(x) - \mu^2(0)U^2(0) = 2\nu\int\limits_0^x U(s)\,ds.$$

Отсюда выражается функция $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \frac{1}{U(x)}\left(\mu^2(0)U^2(0) + 2\nu\int\limits_0^x U(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Принимая во внимание предположения относительно функции $\mu(x)$, обозначения (1.8.6) и предположения (1.8.7), получим представление для (1.8.5):

$$Pu=-\frac{\nu U}{\delta^2}\Big[(1+3k\sigma''^2)\sigma'''+\sigma\sigma''+\gamma(1-\sigma'^2)\Big]+\\ +U^2\lambda'\left(\sigma'\frac{\partial\sigma'}{\partial\lambda}-\frac{\partial(\sigma-\sigma_0)}{\partial\lambda}\sigma''\right)=0. \tag{1.8.8}$$

Далее $\lambda(x)$ выбирается так, чтобы $\lambda\equiv\gamma(x)$. Из (1.8.8) вытекает, что для того, чтобы функции

$$u(x,y)=U(x)\sigma'\big(\eta,\gamma(x)\big),\quad v(x,y)=v_0(x)-\int\limits_0^y\frac{\partial u(x,s)}{\partial x}\,ds$$

были решениями задачи (1.1.2), (1.1.3) при условиях

$$u_0(y)=U(0)\sigma'\Big(\mu(0)^{-1}y,\gamma(0)\Big),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)\equiv\widehat{A}(x)=\frac{U(x)}{\mu(x)}\sigma''\Big(0,\gamma(x)\Big),$$

достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$U^2(x)\frac{d\gamma(x)}{dx}\left(\sigma'\frac{\partial\sigma'}{\partial\gamma}-\frac{\partial(\sigma-\sigma_0)}{\partial\gamma}\sigma''\right)\equiv0, \tag{1.8.9}$$

а функция $\sigma\big(\eta,\gamma(x)\big)$ для любого x была решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1+3k\theta\sigma''^2)\sigma'''+\sigma\sigma''+\gamma(1-\sigma'^2)=0, \tag{1.8.10}$$

обобщающее уравнение Фолкнера-Скэн, с граничными условиями

$$\sigma(0)=\sigma_0,\quad \sigma'(0)=\sigma_1<0,\quad \sigma'(\eta)\to1 \text{ при } \eta\to\infty, \tag{1.8.11}$$

где σ_1 – некоторая положительная постоянная, а производная $'$ в (1.8.9)–(1.8.11) понимается как производная по переменной η.

Решение $\sigma(\eta)$ задачи (1.8.10), (1.8.11) определяет автомодельные решения задачи (1.1.2), (1.1.3), если $\gamma(x)\equiv const$. При этом профиль продольной компоненты u вектора скорости жидкости в пограничном слое имеет вид $U(x)\sigma'(\eta)$ в системе координат x, η, u, т. е. получается при любом x из профиля $\sigma'(\eta)$ посредством преобразования подобия с коэффициентом $U(x)$.

Частным случаем уравнения (1.8.10) является ситуация, когда скорость внешнего течения $U(x)$ есть постоянная положительная функция. В этом случае функция $\sigma(x)$ тождественно равна нулю и тождество (1.8.9) удовлетворяется, а уравнение (1.8.10) принимает следующий вид:

$$(1 + 3k\theta\sigma''^2)\sigma''' + \sigma\sigma'' = 0.$$

Последнее уравнение является обобщением уравнения Блазиуса на случай модификации жидкости с реологическим законом О. А. Ладыженской.

1.8.2 Аттрактор решений системы уравнений пограничного слоя Марангони

Предположим, что для задачи (1.1.2), (1.1.3) при любом $X > 0$ выполняется теорема существования и единственности решения. Докажем, что решения уравнений пограничного слоя Марангони стремятся к автомодельному решению независимо от начального профиля скоростей. Рассмотрим частный случай, когда скорость внешнего течения $U(x)$ — постоянная функция.

Теорема 1.8.1. *Пусть $U(x) \equiv U_1 = const$, $w_1(x,\psi)$, $w_2(x,\psi)$ — два различных решения задачи* (1.2.4), (1.2.5) *с начальными условиями $w_1(0,\psi) = w_{10}(\psi)$ и $w_2(0,\psi) = w_{20}(\psi)$ соответственно. Если*

$$\int\limits_0^\infty \left|\sqrt{w_{10}(\psi)} - \sqrt{w_{20}(\psi)}\right| d\psi < \infty,$$

то

$$\left(\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}\right)^2 \le \frac{M_6}{(1+x)^{\frac{1}{4}}}$$

при $0 < \psi_* \le \psi \le \psi^* < \infty$, *где выбор постоянной* M_6 *зависит от* ψ_* *и* ψ^*.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \nu\left(1 + 3k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{1.8.12}$$

в области

$$D_\infty = \{0 < x < +\infty,\ 0 < y < +\infty\}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u\Big|_{x=0} = u_0(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \widehat{A}(x), \quad v\Big|_{y=0} = v_0(x),\\ u(x,y) \to U_1 \quad \text{при} \quad y \to +\infty. \end{aligned} \tag{1.8.13}$$

Автомодельные решения системы (1.8.12) имеют вид:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= U_1\sigma'\big(\eta\big),\\ v(x,y) &= v_0(x) - \int\limits_0^y \frac{\partial u(x,s)}{\partial x}\,ds, \end{aligned} \tag{1.8.14}$$

где

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_1}{2\nu(1+x)}},$$

а функция $\sigma(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(1 + \frac{3kU_1^3}{2\nu(1+x)}\sigma''^2\right)\sigma''' + \sigma\sigma'' = 0$$

с граничными условиями

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = \sigma_1 < 0, \quad \sigma'(\eta) \to 1 \text{ при } \eta \to +\infty.$$

Автомодельное решение системы (1.8.12), задаваемое формулами (1.8.14), соответствует некоторому решению $w(x,\psi)$ уравнения (1.2.4) с условиями

$$w\Big|_{x=0} = w_0(\psi), \quad \frac{\partial w}{\partial \psi}\Big|_{\psi=0} = A(x),$$
$$w(x,\psi) \to U^2(x) \quad \text{при} \quad \eta \to +\infty.$$

Поскольку

$$u(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_1 \sigma'(\eta),$$

то

$$\psi = U_1 \int\limits_0^y \sigma'\big(\eta(s)\big)\, ds = U_1 \int\limits_0^y \frac{\sigma'\big(\eta(s)\big)\eta'(s)\sqrt{2\nu(1+x)}}{\sqrt{U_1}}\, ds =$$
$$= \sqrt{2\nu U_1(1+x)}\sigma(\eta).$$

Следовательно,

$$\eta = \sigma^{-1}\bigg(\frac{\psi}{\sqrt{2\nu U_1(1+x)}}\bigg),$$

то есть

$$w(x,\psi) = U_1^2\Big(\sigma'(\eta)\Big)^2 = U_1^2\Bigg(\sigma'\bigg(\sigma^{-1}\Big(\frac{\psi}{\sqrt{2\nu U_1(1+x)}}\Big)\bigg)\Bigg)^2.$$

Из результатов работы [47] вытекает, что при больших значениях x и малых значениях ψ решения $w(x,\psi)$ уравнения (1.2.4), соответствующие различным начальным профилям скоростей $w_0(\psi)$, могут быть оценены сверху и снизу при помощи неравенства

$$C_8 \frac{\psi}{\sqrt{1+x}} \le w(x,\psi) \le C_9 \frac{\psi}{\sqrt{1+x}}, \tag{1.8.15}$$

где C_8 и C_9 — некоторые постоянные.

Учитывая, что $U(x) = const$ и принимая во внимание соотношение $2p(x) + U^2(x) = const$, получаем $p(x) = const$. Тогда из результатов работы [31] вытекает оценка

$$\int\limits_0^\infty \left|\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}\right| d\psi \le P_1 = const.$$

Отсюда получаем, что при $\psi \ge \psi_* > 0$ и $X > 0$

$$\begin{aligned}
&\Big(\sqrt{w_1(X,\psi_*)} - \sqrt{w_2(X,\psi_*)}\Big)^2 = \\
&= -\int\limits_{\psi_*}^\infty \frac{\partial}{\partial\psi}\Big(\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}\Big)^2\Big|_{x=X} d\psi \le \\
&\le \max_{x=X,\psi\ge\psi_*}\left(\frac{1}{\sqrt{w_1(x,\psi)}}\left|\frac{\partial w_1(x,\psi)}{\partial\psi}\right| + \frac{1}{\sqrt{w_2(x,\psi)}}\left|\frac{\partial w_2(x,\psi)}{\partial\psi}\right|\right)\times \\
&\times\int\limits_{\psi_*}^\infty \left|\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}\right| d\psi \le \\
&\le P_1 \max_{\psi\ge\psi_*}\left(\frac{1}{\sqrt{w_1(x,\psi)}}\left|\frac{\partial w_1(x,\psi)}{\partial\psi}\right| + \frac{1}{\sqrt{w_2(x,\psi)}}\left|\frac{\partial w_2(x,\psi)}{\partial\psi}\right|\right).
\end{aligned} \tag{1.8.16}$$

В силу оценок (1.8.15) имеем

$$\left|\frac{\partial w_{1,2}}{\partial\psi}\right| \le \frac{C_{10}}{\sqrt{1+x}}$$

при $\psi \ge \psi_* > 0$. Отсюда и из неравенства (1.8.16) получаем, что при $\psi \ge \psi_* > 0$ имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned}
&\Big(\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}\Big)^2 \le \\
&\le P_1\left(\frac{C_{10}(1+x)^{\frac14}}{\sqrt{C_8\psi_*(1+x)}} + \frac{C_{10}(1+x)^{\frac14}}{\sqrt{C_9\psi_*(1+x)}}\right) \le \frac{M_6}{(1+x)^{\frac14}}.
\end{aligned} \tag{1.8.17}$$

Терема доказана. $\square$

Глава 2

Система уравнений температурного пограничного слоя

§ 2.1. Постановка задачи для температурного пограничного слоя

В первой главе диссертации была установлена теорема существования единственного решения задачи о продолжении пограничного слоя Марангони на интервал произвольной длины. В данной главе изучается тепловой пограничный слой в случае слоя Марангони.

Рассмотрим систему уравнений температурного пограничного слоя для плоскопараллельного течения жидкости с реологическим законом Ладыженской

$$\nu\left(1+3k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=-UU_x,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\tag{2.1.1}$$

$$a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-u\frac{\partial T}{\partial x}-v\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{\nu}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.\tag{2.1.2}$$

Система уравнений (2.1.1), (2.1.2) выполняется в области

$$D=\{0<x<X,\ 0<y<\infty\},\quad X>0.$$

Вместе с уравнениями (2.1.1), (2.1.2) рассмотрим граничные условия вида:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \widehat{A}(x), \quad u|_{x=0} = u_0(y), \quad v|_{y=0} = v_0(x),$$
$$u(x,y) \to U(x) \quad \text{равномерно по } x \in [0,X] \text{ при } y \to +\infty, \tag{2.1.3}$$

$$T|_{y=0} = T_w(x),$$
$$T(x,y) \to T_\infty \quad \text{равномерно по } x \in [0,X] \text{ при } y \to +\infty. \tag{2.1.4}$$

В задаче (2.1.1)–(2.1.4) неизвестными являются продольная и поперечная компоненты скорости $u(x,y)$, $v(x,y)$ течения в точке (x,y), а также температура $T(x,y)$ среды в этой точке. Постоянные ν, k, a и c, являющиеся физическими параметрами рассматриваемой жидкости, считаются заранее известными. Постоянная T_∞ является температурой внешнего потока. Также заранее известными считаются функции $U(x)$, $\widehat{A}(x)$, $v_0(x)$, $T_w(x)$, которые, соответственно, обозначают скорость внешнего течения жидкости, поверхностное натяжение на границе $\{y = 0\}$, скорость впрыска (отсоса) жидкости в поток (из потока) в точке x нижней стенки области, температуру стенки в точке x.

Поскольку функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ в задаче (2.1.1), (2.1.3) не зависят от температуры $T(x,y)$, то задача (2.1.1), (2.1.3) может быть решена отдельно.

Существование единственного решения $u(x,y)$, $v(x,y)$ системы (2.1.1), (2.1.3), которая описывает динамический пограничный слой Марангони, уже установлено (см. [68]). В случае динамического пограничного слоя Марангони приведем доказательство теоремы существования и единственности классического решения $T(x,y) \in C^2(D) \cup C(\overline{D})$ задачи (2.1.2), (2.1.4) для температурного пограничного слоя.

§ 2.2. Существование единственного решения температурного пограничного слоя для нелинейно вязкой жидкости

Без ограничения общности будем предполагать, что коэффициент a в уравнении (2.1.2) равен единице. Для удобства обозначим правую часть уравнения (2.1.2) через $f(x,y)$, где функция $f(x,y)$ предполагается заданной в области D.

Имеет место утверждение.

Теорема 2.2.1. *Пусть функции* $u(x,y), v(x,y) \in C(\overline{D})$ *удовлетворяют системе уравнений* (2.1.1), *условиям* (2.1.3) *и условиям теоремы существования и единственности решения. Пусть, кроме того, функция* $f(x,y) \in C(D)$ *локально Гельдерова в* D *с некоторым показателем Гельдера* $0 < \gamma \leq 1$, *функция* T_w *является дифференцируемой на* $[0,X]$ *и ее производная ограничена на* $[0,X]$. *Пусть также*

$$\int_0^{+\infty} \exp\Big(\int_0^t \beta(\tau)d\tau\Big)dt < \infty,$$

где $\beta(y) = \max\limits_{0\leq x\leq X} v(x,y)$, *а для функции* $g(y) = \max\limits_{0\leq x\leq X} |f(x,y)|$ *выполнено*

$$\int_0^{+\infty} g(\tau)\exp\Big(-\int_0^\tau \beta(s)ds\Big)d\tau < \infty.$$

Тогда задача (2.1.2), (2.1.4) *имеет в* D *единственное классическое ограниченное решение* $T(x,y)$.

2.2.1 Доказательство теоремы

Доказательство. С помощью замены

$$x = x, \quad \eta = 1 - \frac{1}{1+y} \tag{2.2.1}$$

область $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$ переходит в открытый прямоугольник $D = \{(x,\eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < X,\ 0 < \eta < 1\}$.

Перепишем задачу (2.1.2), (2.1.4) в терминах замены (2.2.1). Для этого выпишем частные провзодные, входящие в уравнение (2.1.2):

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{(1+y)^2} = (1-\eta)^2,$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = -\frac{2}{(1+y)^3} = -2(1-\eta)^3,$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = (1-\eta)^2\frac{\partial T}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \Big(\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big)^2\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\frac{\partial T}{\partial \eta} = (1-\eta)^4\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - 2(1-\eta)^3\frac{\partial T}{\partial \eta}.$$

Далее всюду будем предполагать, что $u = u(x, y(\eta))$, $v = v(x, y(\eta))$, $f = f(x, y(\eta))$. С учетом последних вычислений и замены (2.2.1) уравнение (2.1.2) принимает вид:

$$L(T) \equiv \Big((1-\eta)^4\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - 2(1-\eta)^3\frac{\partial T}{\partial \eta}\Big) - u\frac{\partial T}{\partial x} - v(1-\eta)^2\frac{\partial T}{\partial \eta} = f.$$

Группируя слагаемы в последнем уравнении, имеем окончательно задачу в терминах замены (2.2.1):

$$L(T) \equiv c(\eta)\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - u\frac{\partial T}{\partial x} + b(x,\eta)\frac{\partial T}{\partial \eta} = f, \tag{2.2.2}$$
$$T|_{\eta=0} = T_w, \quad T|_{\eta=1} = T_\infty. \tag{2.2.3}$$

Здесь

$$c(\eta) = (1-\eta)^4, \quad b(x,\eta) = -(1-\eta)^2\Big(2(1-\eta) + v\Big).$$

Приведем доказательство единственности решения задачи (2.2.2), (2.2.3). Пусть $T_1(x,\eta)$, $T_2(x,\eta)$ — два решения задачи (2.2.2), (2.2.3). Обозначим разность этих решений за $T(x,\eta) = T_1(x,\eta) - T_2(x,\eta)$.

По произвольному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $x \in [0, X]$, $\eta = 1 - \delta(\varepsilon)$ было выполнено $|T(x,\eta)| \le \varepsilon$. Тогда функция $V(x,\eta) = T(x,\eta) - \varepsilon$ удовлетворяет уравнению $L(V) = 0$ в области D, и неравенству $V(x,\eta) \le 0$ при $x \in [0,X]$, $\eta = 0$, $\eta = 1-\delta(\varepsilon)$. Покажем, что $V \le 0$ в прямоугольнике

$$D_\varepsilon = \{(x,\eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < X, 0 < \eta < 1-\delta(\varepsilon)\}.$$

Положим

$$V(x,\eta) = H(\eta)R(x,\eta),$$

где функция $H(\eta)$ предполагается положительной и из класса $C^1([0,1-\delta(\varepsilon)])$. Далее будем предполагать $H = H(\eta)$, $R = R(x,\eta)$. Рассмотрим оператор $L(V)$. Выпишем частные производный, входящие в уравнение $L(v) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial \eta} = H'R + H\frac{\partial R}{\partial \eta}\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = H''R + 2H'\frac{\partial R}{\partial \eta} + H\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2},\\
&\frac{\partial V}{\partial x} = H\frac{\partial R}{\partial x}.
\end{aligned}$$

С учетом вычисленных производных имеем следующий вид оператора $L(V)$:

$$L(V) \equiv c\Big(H''R + 2H'\frac{\partial R}{\partial \eta} + H\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}\Big) - uH\frac{\partial R}{\partial x} + b\Big(H'R + H\frac{\partial R}{\partial \eta}\Big) = 0.$$

Преобразовав слагаемые в последнем уравнении, имеем:

$$L(V) \equiv cH\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} + \Big(2cH' + bH\Big)\frac{\partial R}{\partial \eta} - uH\frac{\partial R}{\partial x} + \Big(bH' + cH''\Big)R = 0.$$

Поделив обе части уравнения $L(V) = 0$ на функцию $H(\eta)$, получим следующее уравнение:

$$L_1(R) \equiv c\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} - u\frac{\partial R}{\partial x} + B\frac{\partial R}{\partial \eta} + FR = 0,$$

где

$$B(x,\eta) = \frac{2cH'}{H} + b, \quad F(x,\eta) = \frac{bH' + cH''}{H}.$$

Функция $H(\eta) > 0$ выбирается так, чтобы для некоторой постоянной $F_0 < 0$ при всех $\eta \in [0, 1-\delta(\varepsilon)]$ выполнялось неравенство $F(x,\eta) \le F_0$.

Далее рассматривается новая функция

$$\Phi(x) = \int\limits_x^X \frac{dt}{U(t)}, \quad 0 < x < X.$$

Тогда, учитывая вид функции $\Phi(x)$ и условия, наложенные на $u(x, y(\eta))$, имеем в D_ε неравенство

$$L_1(\Phi) = F(x,\eta)\Phi(x) + \frac{u(x,y(\eta))}{U(x)} \le F_0\Phi(x) + 1.$$

Так как $F_0 < 0$ и $\Phi(x) \to +\infty$ при $x \to 0+0$, то найдется число $0 < x_0 < X$ такое, что при всех $0 < x \le x_0$, $0 < \eta < 1-\delta(\varepsilon)$ будет выполнено $L_1(\Phi) \le 0$. Тогда при любом $\lambda > 0$ для линейного оператора L_1 выполняется неравенство:

$$L_1\big(\lambda\Phi(x) - R(x,\eta)\big) =$$

$$= L_1\big(\lambda\Phi(x)\big) - L_1\big(R(x,\eta)\big) \le 0, \quad 0 < x \le x_0,\ 0 < \eta < 1-\delta(\varepsilon).$$

Далее, для каждого $\lambda > 0$ находится число $0 < x_1(\lambda) < x_0$ такое, чтобы $\lambda\Phi(x) - R(x,\eta) \ge 0$ при $0 \le \eta \le 1-\delta(\varepsilon)$, $0 < x \le x_1$. Кроме того, $\lambda\Phi(x) - R(x,\eta) \ge 0$ при $\eta = 0$, $0 < x \le X$ и при $\eta = 1-\delta(\varepsilon)$, $0 < x \le X$. По принципу максимума $\lambda\Phi(x) - R(x,\eta) \ge 0$ при $0 < x \le x_0$, $0 \le \eta \le 1-\delta(\varepsilon)$. В силу произвольности $\lambda > 0$ получаем $R(x,\eta) \le 0$ при $0 \le x \le x_0$, $0 \le \eta \le 1-\delta(\varepsilon)$. Снова применяя принцип максимума, получаем $R(x,\eta) \le 0$ в $\overline{D_\varepsilon}$. Значит $T(x,\eta) \le \varepsilon$ в $\overline{D_\varepsilon}$. В силу симметрии между T_1 и T_2 получим $|T(x,\eta)| \le \varepsilon$ в $\overline{D_\varepsilon}$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $T_1 = T_2$ в $\overline{D}$. Единственность решения установлена.

Рассмотрим теперь доказательство существования решения задачи (2.2.2), (2.2.3).

При каждом $0 < \delta < \frac{1}{4}$ уравнение (2.2.2) рассмотрим в прямоугольнике

$$D_\delta = \{(x,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \delta < x \le X, \delta < \eta < 1-\delta\}$$

со следующими граничными условиями:

$$T|_{\eta=\delta} = T_w(x), \quad T|_{\eta=1-\delta} = T_\infty, \quad T|_{x=\delta} = T_1^\delta(\eta), \tag{2.2.4}$$

где непрерывная на отрезке $[\delta, 1-\delta]$ функция $T_1^\delta(\eta)$ удовлетворяет свойствам

$$T_1^\delta(\eta) = T_w(\delta) \quad \text{при } \eta \le \frac{1}{3}, \quad T_1^\delta(\eta) = T_\infty \quad \text{при } \eta \ge \frac{2}{3},$$
$$|T_1^\delta(\eta)| \le M = \max\{|T_\infty|, \max_{0\le x\le X} |T_w(x)|\} \quad \text{при } \delta \le \eta \le 1-\delta.$$

Решение $T^\delta(x,\eta)$ задачи (2.2.2), (2.2.4) существует и, согласно принципу максимума для невырожденных параболических уравнений [69]

$$|T^\delta(x,\eta)| \le M, \tag{2.2.5}$$

где M не зависит от δ. В силу оценок типа Шаудера [69] в любом фиксированном прямоугольнике D_δ при каждом $0 < \delta < \frac{1}{4}$ Гельдеровские нормы решения T^δ и производных $\frac{\partial T^\delta}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 T^\delta}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial T^\delta}{\partial x}$ удовлетворяют оценке:

$$\|T^\delta\|_{2+\alpha} \le \overline{K}\Big(\|\psi\|_{2+\alpha} + \|f\|_\alpha\Big), \quad \overline{K} = const, \tag{2.2.6}$$

где для произвольной непрерывной по Гельдеру функции $\varphi(x,\eta)$ нормы $\|\varphi\|_\alpha$ и $\|\varphi\|_{2+\alpha}$ в (2.2.6) определяются следующим образом [69]:

$$\|\varphi\|_\alpha = \sup_{(x,\eta)\in D_\delta} |\varphi| + \sup_{P_1,P_2\in D_\delta,\, P_1\ne P_2} \frac{|\varphi(P_1)-\varphi(P_2)|}{|P_1-P_2|^\alpha},$$
$$P_1 = (x,\eta),\ P_2 = (\overline{x},\overline{\eta}),$$
$$\|\varphi\|_{2+\alpha} = \|\varphi\|_\alpha + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\|_\alpha + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right\|_\alpha + \left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right\|_\alpha.$$

Функция ψ в (2.2.6) обозначает граничные условия (2.2.4).

На основании оценок (2.2.6) выделяется подпоследовательность T^{δ_m}, $m = 1, 2, ...$, сходящаяся при $m \to \infty$ равномерно вместе с производными, входящими в уравнение (2.2.2), в каждой замкнутой области, лежащей строго внутри D. Переходя к пределу в уравнении для T^{δ_m} при $m \to \infty$, получаем, что предельная функция $T(x, \eta)$ удовлетворяет уравнению (2.2.2) в прямоугольнике D.

Для доказательства выполнения условия $T(x, 0) = T_w(x)$ оценивается разность

$$S^{\delta}(x, \eta) = T^{\delta}(x, \eta) - T_w(x)$$

при малых η. Рассмотрим в области

$$D'_{\delta} = \{\delta \le x \le X,\ \delta < \eta < \frac{1}{3}\}$$

уравнение

$$L(S^{\delta}) = f(x, \eta) + u(x, \eta) T'_w(x),$$

которому удовлетворяет функция $S^{\delta}(x, \eta)$. Пусть в области D'_{δ} выполняются следующие неравенства:

$$|f(x, \eta)| \le M_1, \quad u(x, \eta)|T'_w(x)| \le M_2.$$

Далее вводится вспомогательная функция $Y(\eta) = K(1 - e^{-N\eta})$. Постоянная $N > 0$ выбирается из условия $c(\eta)N \ge |b(x, \eta)| + 1$. Это возможно, так как коэффициент $v(x, y)$ ограничен при ограниченных y или, согласно замене (2.2.1) при $\eta \le \eta_0 < 1$. Постоянная $K > 0$ выбирается так, чтобы

$$K \ge \max\Big\{\frac{2M}{1 - e^{\frac{-N}{3}}}, \frac{M_1 + M_2}{Ne^{-N}}\Big\}, \tag{2.2.7}$$

где M – то же, что в неравенстве (2.2.5). По выбранному $N > 0$ вычислим $L(Y)$:

$$L(Y) = -KN\Big(c(\eta)N - b(x, \eta)\Big)e^{-N\eta} \le -KNe^{-N} < 0.$$

Вводится в рассмотрение новая функция $Y \pm S^\delta(x,\eta)$. Принимая во внимание (2.2.7), вычислим $L(Y \pm S^\delta)$ в D'_δ:

$$L(Y \pm S^\delta) \le -KNe^{-N} \pm f(x,\eta) \pm u(x,\eta)T'_w(x) \le \\ \le -KNe^{-N} + M_1 + M_2 \le 0.$$

Из граничных условий (2.2.4) и неравенств (2.2.5), (2.2.7) вытекает, что функция $Y \pm S^\delta \ge 0$ на границе области D'_δ, лежащей на прямых $x = \delta$, $\eta = \delta$, $\eta = \frac{1}{3}$. По принципу максимума отсюда вытекает, что $Y \pm S^\delta \ge 0$ всюду в D'_δ. Следовательно, справедлива оценка

$$|S^\delta(x,\eta)| \le Y(\eta),$$

равномерная по δ и x. Отсюда, переходя к пределу при $\delta \to 0$ и $\eta \to 0$, получается условие $T(x,0) = T_w(x)$.

Для доказательства выполнения второго граничного условия в (2.2.3) оценивается разность

$$J^\delta(x,\eta) = T^\delta(x,\eta) - T_\infty$$

при малых $1-\eta$. Уравнение $L(J^\delta) = f(x,\eta)$, которому удовлетворяет функция $J^\delta(x,\eta)$, рассматривается в области

$$D''_\delta = \left\{\delta < x \le X,\ \frac{2}{3} \le \eta < 1-\delta\right\}.$$

Далее вводится в рассмотрение новая функция

$$Z(\eta) = K_1 \int\limits_\eta^1 G(t)G_1(t)\,dt, \tag{2.2.8}$$

где

$$G(t) = \frac{1}{(1-t)^2}\exp\left\{\int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)\,d\tau}{(1-\tau)^2}\right\}, \quad G_1(t) = 1 + \int\limits_0^t \frac{g(\tau)\,d\tau}{(1-\tau)^4 G(\tau)},$$

а функции $\beta(\tau)$, $g(\tau)$ — те же, что и в утверждении теоремы. Интеграл (2.2.8) существует в силу условий теоремы и определяет положительную функцию при $\eta < 1$. Постоянная $K_1 \geq 1$ выбирается из условия $Z(\frac{2}{3}) \geq 2M$, где M — постоянная из неравенства (2.2.5). Вычислим функцию $L(Z)$:

$$L(Z) = -K_1 G_1(\eta)\Big[c(\eta)G'(\eta) + b(x,\eta)G(\eta)\Big] - K_1 g(\eta). \tag{2.2.9}$$

Так как

$$c(\eta)G'(\eta) + b(x,\eta)G(\eta) = \exp\left\{\int\limits_0^\eta \frac{\beta(\tau)\,d\tau}{(1-\tau)^2}\right\}\Big[\beta(\eta) - v(x,\eta)\Big] \geq 0$$

по определению функции $\beta(\eta)$, то из (2.2.9) получим неравенство

$$L(Z) \leq -K_1 g(\eta).$$

На границе D''_δ, лежащей на прямых $x = \delta$, $\eta = \frac{2}{3}$, $\eta = 1 - \delta$, выполняется неравенство

$$Z(\eta) \pm J^\delta(x,\eta) \geq 0.$$

Внутри D''_δ, в силу выбора $K_1 \geq 1$, имеем

$$L(Z \pm J^\delta) \leq -K_1 g(\eta) \pm f(x,\eta) \leq -K_1 g(\eta) + g(\eta) \leq 0.$$

Отсюда, согласно принципу максимума, получаем, что неравенство $Z \pm J^\delta \geq 0$ выполняется всюду в области D''_δ, или $|J^\delta(x,\eta)| \leq Z(\eta)$ в этой области. Переходя к пределу при $\delta \to 0$ в последнем неравенстве получим, что $T(x,\eta) \to T_\infty$ при $\eta \to 1$ равномерно, что и требовалось доказать.

□

2.2.2 Замечания к теореме

Замечание 2.2.1. *При постановке задачи* (2.1.2), (2.1.4) *предполагалось, что температура внешнего потока* T_∞ *является постоянной. Оказывается, что для ограниченного в полосе* D *решения* $T(x,y)$

уравнения (2.1.2) *нельзя задавать на бесконечности значение, отличное от постоянного.*

Доказательство. Предположим, что решение $T(x,y)$ задачи (2.1.2), (2.1.4) таково, что $\lim\limits_{y\to\infty} T(x,y) = T_\infty(x)$. В силу замены (2.2.1) это равносильно условию $T(x,\eta)|_{\eta=1} = T_\infty(x)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что будет выполнено неравенство

$$|T(x, 1-\delta) - T_\infty(x)| < \varepsilon.$$

Положим $J^\delta(x,\eta) = T^\delta(x,\eta) - T_\infty(\delta)$. Уравнение (2.2.2), которому удовлетворяет функция $J^\delta(x,\eta)$, рассмотрим в области

$$D''_\delta = \Big\{\delta < x \leq X,\ \frac{2}{3} \leq \eta < 1 - \delta(\varepsilon)\Big\}.$$

Далее, рассматривая новую функцию $Z(\eta) + \varepsilon \pm J^\delta(x,\eta)$, где $Z(\eta)$ определена равенством (2.2.8), и повторяя дословно весь ход рассуждений, проведенных при доказательстве выполнения второго условия из (2.1.4), получим в области $\overline{D}''_\delta$ равномерную по δ и x оценку:

$$|J^\delta(x,\eta)| \leq \varepsilon + Z(\eta).$$

Отсюда, устремляя δ к нулю и замечая, что $Z(\eta) \to 0$ при $\eta \to 1$, имеем:

$$|T(x,1) - T_\infty(0)| \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора ε получим $T(x,1) \equiv T_\infty(0)$, т.е. $T_\infty(x) \equiv T_\infty(0) = const.$ $\square$

Замечание 2.2.2. *Если задать только первое условие в* (2.1.4), *а второе условие опустить, то ограниченное решение уравнения* (2.1.2) *с граничным условием* $T|_{y=0} = T_0(x)$, *где* $T_0(x)$ *— заданная в* $0 \leq x \leq X$ *непрерывная функция, может оказаться неединственным.*

Доказательство. Уравнению (2.1.2) при $a = 1$, $u = x^k$, $v = \lambda y$, $f \equiv 0$ $(k \geq 1,\ \lambda = const < 0)$ и граничному условию $T|_{y=0} = 0$ удовлетворяет ограниченная и отличная от нуля в полосе D функция

$$T(y) = \int\limits_0^y \exp\left\{\frac{\lambda}{2}t^2\right\} dt.$$

Отсюда следует, что решение задачи (2.1.2), (2.1.4) при рассмотренных условиях неединственно. $\square$

Глава 3

Задача Стефана для магнитогидродинамического пограничного слоя

§ 3.1. Постановка задачи Стефана

В данной главе рассматривается система уравнений ламинарного магнитогидродинамического пограничного слоя на проницаемой твердой поверхности, через которую производится инъекция в пограничный слой жидкости, подчиненной реологическому закону Ладыженской. При этом возникает задача типа Стефана с неизвестной границей (см. [70]).

Предположим, что область $D = \{0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$ разделена непрерывной кривой $\gamma = \{(x, y) :\ y = y_*(x) > 0,\ 0 \le x \le X\}$ на области

$$D_1 = \{0 < x < X,\ 0 < y < y_*(x)\}$$

и

$$D_2 = \{0 < x < X,\ y_*(x) < y < \infty\}.$$

В области D_1 рассматривается система уравнений

$$\nu_1\left(1+3k\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}-u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}-v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{1}{\rho_1}\frac{dp(x)}{dx}-$$
$$-\frac{\sigma_1}{\rho_1}B(x)\Big(u_1B(x)+E(x)\Big)=0, \qquad (3.1.1)$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=0,$$

описывающая движение в пограничном слое электропроводной жидкости с реологией, предложенной О. А. Ладыженской, а в области D_2 – система уравнений

$$\nu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}-u_2\frac{\partial u_2}{\partial x}-v_2\frac{\partial u_2}{\partial y}-\frac{1}{\rho_2}\frac{dp(x)}{dx}-\frac{\sigma_2}{\rho_2}B(x)\Big(u_2B(x)+E(x)\Big)=0,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}=0. \qquad (3.1.2)$$

В уравнениях (3.1.1) k – малая положительная постоянна, $\nu_1>0$ — вязкость, $\rho_1>0$ — плотность, $\sigma_1>0$ — электропроводность среды с реологией Ладыженской, $B(x)$ — y-компонента вектора магнитной индукции, $E(x)$ — компонента вектора напряженности электрического поля, ортогональная плоскости XOY, $p(x)$ — давление. В уравнениях (3.1.2) $\nu_2>0$, $\rho_2>0$, $\sigma_2>0$ — соответственно вязкость, плотность и проводимость ньютоновской жидкости. Значение $y_*(0)$ предполагается заданным.

Вместе с уравнениями (3.1.1), (3.1.2) рассматриваются граничные условия

$$u_1(0,y)=u_{10}(y)\ \text{ при }\ 0\le y\le y_*(0);\ \ u_1(x,0)=0,\ \ v_1(x,0)=v_0(x),$$
$$u_2(0,y)=u_{20}(y)\ \text{ при }\ y_*(0)\le y<\infty;\ \ u_2(x,y)\to U(x)\ \text{ при }\ y\to\infty, \qquad (3.1.3)$$

где заранее известная функция $U(x)>0$ представляет собой скорость внешнего течения, которая связана с давлением $p(x)$ соотношением

$$-\frac{dp(x)}{dx}-\sigma_2B(x)E(x)=\rho_2U(x)\frac{dU(x)}{dx}+\sigma_2B^2(x)U(x).$$

Функции $u_{10}(y)$, $u_{20}(y)$, $v_0(x)$ в условиях (3.1.3) также считаются заданными, причем предполагается, что выполняются неравенства

$$u_{i0}(y) \leq U(0), \quad i = 1, 2.$$

Зададим на кривой γ условия сопряжения, выражающие непрерывность скоростей и вязких напряжений на границе раздела двух контактирующих сред:

$$u_1(x, y_*(x)) = u_2(x, y_*(x)), \tag{3.1.4}$$

$$\nu_1\rho_1\frac{\partial u_1(x, y_*(x))}{\partial y}\left(1+k\left(\frac{\partial u_1(x, y_*(x))}{\partial y}\right)^2\right) = \nu_2\rho_2\frac{\partial u_2(x, y_*(x))}{\partial y}. \tag{3.1.5}$$

Кривую γ, разделяющую области D_1 и D_2, будем считать гладкой линией тока. В силу этого выполняются равенства

$$\frac{dy_*(x)}{dx} = \frac{v_1(x, y_*(x))}{u_1(x, y_*(x))} = \frac{v_2(x, y_*(x))}{u_2(x, y_*(x))}. \tag{3.1.6}$$

В задаче (3.1.1)–(3.1.6) неизвестными являются функции $u_i(x, y)$, $v_i(x, y)$, $y_*(x)$, $i = 1, 2$. Граница

$$\gamma = \{(x, y):\ y = y_*(x) > 0,\ 0 \leq x \leq X\}$$

считается неизвестной, поэтому рассматриваемая задача является задачей типа Стефана.

Введем новые функции

$$u_0(y) = \begin{cases} u_{10}(y), & 0 \leq y \leq y_*(0) \\ u_{20}(y), & y_*(0) < y < \infty \end{cases}, \quad \nu(y) = \begin{cases} \nu_1, & 0 < y \leq y_*(x) \\ \nu_2, & y_*(x) < y < \infty \end{cases}$$

и приведем определение обобщенного решения задачи (3.1.1)–(3.1.6).

Определение 3.1.1. *Обобщенным решением задачи* (3.1.1)–(3.1.6) *в области D называются функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, $y_*(x)$, $(x, y) \in D$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *$u(x,y)$ положительна при $y>0$, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, ограничена; $v(x,y)$ принадлежит пространству $L_2^{loc}(D)$ и непрерывна по y при $y=0$;*

2) *существуют обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ ограничена, производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ принадлежат пространству $L_2^{loc}(D)$;*

3) *$u(0,y)=u_0(y)$, $u(x,0)=0$, $u(x,y)\to U(x)$ при $y\to\infty$, $v(x,0)=v_0(x)$;*

4) *для любой непрерывной функции $\varphi(x,y)$, имеющей непрерывную производную $\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}$ и равной нулю при $y=0$ и при достаточно больших y, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют интегральному тождеству*

$$\iint\limits_D \Bigg[\Bigg(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho(x,y)}\frac{dp(x)}{dx}+\frac{\sigma(x,y)}{\rho(x,y)}B(x)\Big(uB(x)+E(x)\Big)\Bigg)\varphi+$$

$$+\nu(y)\left(1+k\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Bigg]\,dxdy=0,$$

где $\rho(x,y)\equiv\rho_i$, $\sigma(x,y)\equiv\sigma_i$ при $(x,y)\in D_i$, $i=1,2$;

5) *справедливо равенство*

$$\frac{dy_*(x)}{dx}=\frac{v(x,y_*(x))}{u(x,y_*(x))};$$

6) *почти всюду в области D выполняется равенство*

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

§ 3.2. Сведение задачи с неизвестной границей к задаче дифракции. Замена Мизеса

Сведем задачу (3.1.1)–(3.1.6) с неизвестной границей к задаче дифракции. Для этой цели используем замену переменных Мизеса:

$$x = x, \quad \psi = \psi(x, y), \tag{3.2.1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = u(x, y), \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = v_0(x) - v(x, y), \quad \psi(x, 0) = 0, \tag{3.2.2}$$

$$w_i(x, \psi) = u_i^2(x, y), \quad i = 1, 2, \tag{3.2.3}$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$, $y_*(x)$ – обобщенное решение задачи (3.1.1)–(3.1.6). Под действием замены (3.2.1), (3.2.2) область D переходит в область

$$\Omega = \{(x, \psi) : \ 0 < x < X, \ 0 < \psi < \infty\},$$

а неизвестная граница γ – в границу

$$\Gamma = \{(x, y) : \ \psi = \psi_*(x) \equiv \psi(x, y_*(x)), \ 0 \le x \le X\}.$$

Найдем вид функции $\psi_*(x)$. Для этого вычислим полную производную этой функции:

$$\frac{d\psi_*(x)}{dx} = \frac{\partial\psi(x, y_*(x))}{\partial x} + \frac{\partial\psi(x, y_*(x))}{\partial y}\frac{dy_*(x)}{dx} =$$

$$= v_0(x) - v_1(x, y_*(x)) + u_1(x, y_*(x))\frac{v_1(x, y_*(x))}{u_1(x, y_*(x))} = v_0(x).$$

Из последнего равенства следует, что

$$\psi_*(x) = \psi_*(0) + \int\limits_0^x v_0(s)\, ds, \quad \psi_*(0) = \int\limits_0^{y_*(0)} u_{10}(\tau)\, d\tau, \quad 0 \le x \le X. \tag{3.2.4}$$

Таким образом, замена Мизеса (3.2.1), (3.2.2) позволила перевести неизвестную границу γ в известную границу Γ. Если функции $w_i(x, \psi)$,

$i = 1, 2$ обладают нужными свойствами, то возможна обратная к (3.2.1)–(3.2.3) замена:

$$y = \begin{cases} \int\limits_0^{\psi} \frac{ds}{\sqrt{w_1(x,s)}}, & 0 \le \psi \le \psi_*(x), \\ \int\limits_0^{\psi_*(x)} \frac{ds}{\sqrt{w_1(x,s)}} + \int\limits_{\psi_*(x)}^{\psi} \frac{ds}{\sqrt{w_2(x,s)}}, & \psi_*(x) \le \psi < \infty. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Исходная задача в переменных Мизеса (3.2.1)–(3.2.3) переходит в задачу дифракции для квазилинейных уравнений

$$\nu_1 \left(1 + \frac{3}{4} k \left(\frac{\partial w_1}{\partial \psi}\right)^2\right) \sqrt{w_1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_1}{\partial x} - v_0(x) \frac{\partial w_1}{\partial \psi} - \frac{2\sigma_1 B^2(x)}{\rho_1} \sqrt{w_1} - \\ - \frac{2}{\rho_1} \left(\frac{dp(x)}{dx} + \sigma_1 B(x) E(x)\right) = 0 \tag{3.2.6}$$

в области $\Omega_1 = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < \psi_*(x)\}$ и

$$\nu_2 \sqrt{w_2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_2}{\partial x} - v_0(x) \frac{\partial w_2}{\partial \psi} - \frac{2\sigma_2 B^2(x)}{\rho_2} \sqrt{w_2} - \\ - \frac{2}{\rho_2} \left(\frac{dp(x)}{dx} + \sigma_2 B(x) E(x)\right) = 0 \tag{3.2.7}$$

в области $\Omega_2 = \{0 < x < X,\ \psi_*(x) < \psi < \infty\}$. Под действием замены Мизеса граничные условия (3.1.3) переходят в условия

$$w_1(0, \psi) = w_{10}(\psi), \quad 0 \le \psi \le \psi_*(0); \quad w_1(x, 0) = 0, \\ w_2(0, \psi) = w_{20}(\psi), \quad \psi_*(0) \le \psi < \infty, \quad w_2(x, \psi) \to U^2(x) \ \text{ при } \ \psi \to \infty, \tag{3.2.8}$$

а условия сопряжения (3.1.4), (3.1.5) переходят при $\psi = \psi_*(x)$, $0 \le x \le X$ в условия

$$w_1(x, \psi_*(x)) = w_2(x, \psi_*(x)), \\ \nu_1 \rho_1 \frac{\partial w_1(x, y_*(x))}{\partial \psi} \left(1 + \frac{k}{4} \left(\frac{\partial w_1(x, \psi_*(x))}{\partial \psi}\right)^2\right) = \nu_2 \rho_2 \frac{\partial w_2(x, \psi_*(x))}{\partial \psi}. \tag{3.2.9}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)=\begin{cases}\nu_1\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big(1+\frac{k}{4}\big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\big)^2\Big), & 0<\psi\le\psi_*(x),\\ \nu_2\frac{\partial w}{\partial\psi}, & \psi_*(x)<\psi<\infty,\end{cases}$$

$$\rho\equiv\rho(x,\psi)=\begin{cases}\rho_1, & 0<\psi\le\psi_*(x),\\ \rho_2, & \psi_*(x)<\psi<\infty,\end{cases}$$

$$\sigma\equiv\sigma(x,\psi)=\begin{cases}\sigma_1, & 0<\psi\le\psi_*(x),\\ \sigma_2, & \psi_*(x)<\psi<\infty,\end{cases}$$

и приведем определение обобщенного решения задачи (3.2.6)–(3.2.9) в переменных Мизеса.

Определение 3.2.1. *Обобщенным решением задачи* (3.2.6)–(3.2.9) *называется неотрицательная, ограниченная, непрерывная в* $\overline{\Omega}$ *функция* $w(x,\psi)$, *имеющая ограниченную обобщенную производную* $\frac{\partial w}{\partial\psi}$, *производную* $\frac{\partial w}{\partial x}\in L_2^{loc}(\Omega)$, *которая удовлетворяет граничным условиям*

$$w(0,\psi)=w_0(\psi),\quad w(x,0)=0,\quad w(x,\psi)\to U^2(x)\ \ \text{при}\ \ \psi\to\infty, \tag{3.2.10}$$

где

$$w_0\Big(\int\limits_0^y u_0(s)\,ds\Big)\equiv u_0^2(y),$$

и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\iint\limits_\Omega\Big[\Big(\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{v_0(x)}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}+\frac{2}{\rho\sqrt{w}}\frac{dp(x)}{dx}+\frac{2\sigma B(x)}{\rho}\Big(\frac{E(x)}{\sqrt{w}}+B(x)\Big)\Big)\varphi+ +\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\Big]\,dxd\psi=0 \tag{3.2.11}$$

для любой непрерывной функции $\varphi(x,\psi)$, *имеющей ограниченную производную* $\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}$ *и равной нулю при* $\psi=0$ *и при достаточно больших* ψ.

§ 3.3. Существование решения вспомогательной задачи в терминах замен Мизеса

Решение $w(x,\psi)$ задачи (3.2.6)–(3.2.9) получим как предел последовательности решений семейства граничных задач для квазилинейных параболических уравнений.

Введем функцию

$$\Lambda_\varepsilon(s) = \begin{cases} \nu_1\big(1 + \frac{k}{4}s^2\big), & s > 2\varepsilon, \\ \nu_1\big(1 + \frac{k}{4}\varepsilon^2\big), & s < \varepsilon, \end{cases}$$

которая гладко продолжается при $\varepsilon \le |s| \le 2\varepsilon$ так, что она является равномерно ограниченной относительно ε и имеет производную второго порядка, удовлетворяющую условию Гельдера. Введем также функцию переменных s и $\tau = \psi - \psi_*(x)$, $\varepsilon < \psi_*(0)$,

$$\Phi_\varepsilon(\tau, s) = \begin{cases} \Lambda_\varepsilon(s), & \tau \le -\varepsilon, \\ \nu_2, & \tau \ge \varepsilon, \end{cases}$$

которая гладко продолжается при $|\tau| < \varepsilon$ так, что она является положительной и имеет частные производные второго порядка, удовлетворяющие условию Гельдера.

Обозначим через $w_0^\varepsilon(\psi)$, $0 \le \psi < \infty$, семейство функций, для которых выполняются следующие условия:

- $w_0^\varepsilon(\psi)$ имеют производные второго порядка, удовлетворяющие условию Гельдера;
- $w_0^\varepsilon(\psi)$ совпадают с функцией $w_0(\psi)$ в окрестности границы $\psi = 0$ и при достаточно больших ψ;
- $w_0^\varepsilon(\psi)$ сходятся равномерно к $w_0(\psi)$ при $\varepsilon \to \infty$;
- $\frac{\partial w_0^\varepsilon(\psi)}{\partial \psi}$ и $\sqrt{w_0^\varepsilon}\Phi_\varepsilon\Big(\psi - \psi_*(0), \frac{\partial w_0^\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\frac{\partial^2 w_0^\varepsilon}{\partial \psi^2}$ равномерно ограничены относительно ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 < 1$.

В частности, при больших ψ предполагается, что $w_0^\varepsilon(\psi) \equiv w_0(\psi)$. Обозначим за ρ_ε и σ_ε гладкие, равномерно ограниченные по ε функции, которые совпадают при $|\tau| \geq \varepsilon$ соответственно с ρ и σ.

Обобщенное решение задачи в переменных Мизеса получим как предел при $\varepsilon \to 0$ решений уравнений

$$\begin{gathered}\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\Big(\tau, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - \frac{2\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon}\sqrt{w_\varepsilon} - \\ -\frac{2}{\rho^\varepsilon}\left(\frac{dp(x)}{dx} + \sigma^\varepsilon B(x)E(x)\right) = 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,\end{gathered} \tag{3.3.1}$$

в области $\Omega_\varepsilon = \big\{0 < x < X,\ 0 < \psi < \frac{1}{\varepsilon}\big\}$ с условиями

$$\begin{gathered}w_\varepsilon(0,\psi) = w_0^\varepsilon(\varepsilon+\psi), \quad w_\varepsilon(x,0) = w_0^\varepsilon(\varepsilon)\exp\Big\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\Big\}, \\ w_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big) = w_0^\varepsilon\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\exp\Big\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon})}{w_0^\varepsilon(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon})}x\Big\},\end{gathered} \tag{3.3.2}$$

где

$$\begin{gathered}\mu_\varepsilon(\psi) \equiv \sqrt{w_0^\varepsilon}\Phi_\varepsilon\Big(\psi - \psi_*(0), \frac{dw_0^\varepsilon}{d\psi}\Big)\frac{d^2 w_0^\varepsilon}{d\psi^2} - v_0(0)\frac{dw_0^\varepsilon}{d\psi} - \\ -\frac{2\sigma^\varepsilon(0,\psi)B^2(0)}{\rho^\varepsilon(0,\psi)}\sqrt{w_0^\varepsilon} - \frac{2}{\rho^\varepsilon(0,\psi)}\Big(\frac{dp(0)}{dx} + \sigma^\varepsilon(0,\psi)B(0)E(0)\Big).\end{gathered} \tag{3.3.3}$$

Принимая во внимание связь между градиентом давления и градиентом скорости внешнего течения, получаем эквивалентный вид уравнения (3.3.1):

$$\begin{gathered}\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\Big(\tau, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - \frac{2\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon}\sqrt{w_\varepsilon} + \\ +2U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right) = 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.\end{gathered}$$

При определенных предположениях относительно начальных данных задачи (3.1.1)–(3.1.3), которые будут сформулированы ниже, для функции $w_0(\psi)$ выполняется следующее условие согласования в переменных Мизеса:

$$\begin{aligned}\nu_1\sqrt{w_0}\Big(1+\frac{3}{4}k\big(w_0'\big)^2\Big)w_0''-v_0(0)w_0'-\frac{2\sigma_1 B^2(0)}{\rho_1}\sqrt{w_0}-\\ -\frac{2}{\rho_1}\Big(\frac{dp(0)}{dx}+\sigma_1 B(0)E(0)\Big)=O(\psi)\ \text{ при }\ \psi\to 0.\end{aligned}\qquad(3.3.4)$$

Разрешимость задачи (3.3.1)-(3.3.3) и компактность семейства решений $\{w_\varepsilon(x,\psi)\}$ можно установить с помощью методов, применяемых в работах [65], [48]. Установим ряд вспомогательных утверждений.

3.3.1 Вспомогательные утверждения

Лемма 3.3.1. *Предположим, что функции* $p'(x)$, $v_0(x)$, $B(x)$, $E(x)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[0,X]$, $u_{i0}(y)$, $u_{i0}'(y)$, $u_{i0}''(y)$, $i=1,2$, *ограничены и удовлетворяют условию Гельдера,* $u_{10}'(0)>0$, $u_{20}(y)\to U(0)$ *при* $y\to\infty$, *выполняются равенства*

$$u_{10}(y_*(0))=u_{20}(y_*(0)),$$

$$\nu_1\rho_1 u_{10}'\big(y_*(0)\big)\left(1+k\Big(u_{10}'\big(y_*(0)\big)\Big)^2\right)=\nu_2\rho_2 u_{20}'\big(y_*(0)\big)$$

и условие согласования в точке $(0,0)$

$$\begin{aligned}\nu_1\Big(1+\frac{3}{4}k\big(u_{10}'(y)\big)^2\Big)u_{10}''(y)-v_0(0)u_{10}'(y)-\frac{p'(0)}{\rho_1}-\frac{\sigma_1}{\rho_1}B^2(0)u_{10}(y)-\\ -\frac{\sigma_1}{\rho_1}B(0)E(0)=O(y^2)\ \textit{ при }\ y\to 0.\end{aligned}\qquad(3.3.5)$$

Пусть функция $f(\psi)$ *дважды непрерывно дифференцируема при* $0\le\psi<\infty$ *и* $f(\psi)=A_1\psi^{\frac{4}{3}}+A_2\psi$ *при* $0\le\psi\le\psi_0$, $0<\psi_0\le\frac{\psi_*(0)}{2}$, $f(\psi_0)\le f(\psi)\le A_3$, $|f'(\psi)|\le A_4$, $|f''(\psi)|\le A_5$ *при* $\psi\ge\psi_0$, $f(\psi)\equiv const$ *при* $\psi\ge\frac{\psi_*(0)}{2}$, *постоянные* A_i, $i=1,...,5$, *положительны. Тогда если* $w_\varepsilon(x,\psi)$ – *гладкое решение задачи* (3.3.1)–(3.3.3), *а постоянные* A_1,

A_2, A_3 и ε достаточно малы, то найдутся такие $X > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ в области Ω_ε выполняется неравенство

$$w_\varepsilon(x,\psi) \geq w_\varepsilon(x,0) + f(\psi)(1 + e^{-\alpha x}), \quad \alpha = const > 0.$$

Если, кроме того, $p'(x) + \sigma B(x)E(x) \leq -\beta_0 < 0$, где $\beta_0 = const$, то

$$w_\varepsilon(x,\psi) \geq w_\varepsilon(x,0) + f(\psi), \quad \forall X > 0.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$S_\varepsilon(x,\psi) = w_\varepsilon(x,0) + f(\psi)(1 + e^{-\alpha x}).$$

Тогда на основании условий (3.3.2)

$$S_\varepsilon(x,0) = w_\varepsilon(x,0),$$

$$S_\varepsilon\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}\Big) = w_\varepsilon(x,0) + f\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)(1 + +e^{-\alpha x}) = w_0^\varepsilon \exp\Big\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\Big\} + $$
$$+ f\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)(1 + e^{-\alpha x}) \leq w_0^\varepsilon(\varepsilon)\exp\Big\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\Big\} + 2A_3.$$

В силу условия согласования для переменных Мизеса, при достаточно малом значении ε, имеем $\mu_\varepsilon(\varepsilon) \leq C_1\varepsilon$. Таким образом,

$$\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x \leq \frac{C_1\varepsilon}{C_2\varepsilon}x \leq Cx,$$

откуда следует

$$S_\varepsilon\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}\Big) \leq C_3\varepsilon e^{Cx} + 2A_3 \leq C_3\varepsilon e^{CX} + 2A_3.$$

С другой стороны, при достаточно малых значениях ε

$$w_\varepsilon\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}\Big) = w_0^\varepsilon\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\exp\Big\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon})}{w_0^\varepsilon(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon})}x\Big\} \geq$$
$$\geq w_0^\varepsilon\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big) > \frac{U^2(0)}{2}.$$

Далее значения постоянной A_3 и параметра ε выбираются так, чтобы выполнялась цепочка неравенств

$$S_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big) < w_0^\varepsilon\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big) \le w_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big). \tag{3.3.6}$$

Ввиду возрастания функции $w_0^\varepsilon(\psi)$ при малых значениях ψ, имеем для малых параметров A_1 и A_2 неравенство

$$S_\varepsilon(0,\psi) = w_\varepsilon(0,0) + 2f(\varepsilon) = w_0^\varepsilon(\varepsilon) + 2A_1\varepsilon^{\frac{4}{3}} + 2A_2\varepsilon < w_0^\varepsilon(\varepsilon+\psi). \tag{3.3.7}$$

Согласно предположениям, наложенным на начальные данные, имеем

$$w_0^\varepsilon(\psi) \to U^2(0) > 0 \psi \to \infty.$$

Поэтому при малых ε и больших значениях ψ имеет место неравенство

$$w_0^\varepsilon(\varepsilon+\psi) > w_0^\varepsilon(\varepsilon).$$

Введем в рассмотрение при $\psi \le \psi_*$ следующий оператор

$$L(w_\varepsilon) \equiv \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\Big(\psi - \psi_*, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - \frac{2\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon}\sqrt{w_\varepsilon}.$$

Рассмотрим

$$L(S_\varepsilon) = \sqrt{S_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\Big(\psi - \psi_*, \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)f''(\psi)(1+e^{-\alpha x}) - \frac{\partial w_\varepsilon(x,0)}{\partial x} +$$
$$+\alpha f(\psi)e^{-\alpha x} - v_0(x)f'(\psi)(1+e^{-\alpha x}) - \frac{2\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon}\sqrt{S_\varepsilon}.$$

При $\psi \le \psi_*$ имеем

$$L(S_\varepsilon) = \sqrt{w_\varepsilon(x,0) + (A_1\psi^{\frac{4}{3}} + A_2\psi)(1+e^{-\alpha x})}\Phi_\varepsilon\Big(\psi - \psi_*, \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\times$$
$$\times\Big(\frac{4}{9}A_1\psi^{-\frac{2}{3}}\Big)(1+e^{-\alpha x}) - \mu_\varepsilon(\varepsilon)\exp\Big\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\Big\} + \alpha(A_1\psi^{\frac{4}{3}} + A_2\psi)e^{-\alpha x} -$$
$$-v_0(x)\Big(\frac{4}{3}A_1\psi^{\frac{1}{3}} + A_2\Big)(1+e^{-\alpha x}) -$$
$$-\frac{2\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon}\sqrt{w_\varepsilon(x,0) + (A_1\psi^{\frac{4}{3}} + A_2\psi)(1+e^{-\alpha x})} \ge$$
$$\ge \frac{4}{9}\nu_1\sqrt{A_2}A_1\psi^{-\frac{1}{6}} - \mu_\varepsilon(\varepsilon)\exp\Big\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\Big\} + \alpha(A_1\psi^{\frac{4}{3}} + A_2\psi)e^{-\alpha x} -$$
$$-v_0(x)\Big(\frac{4}{3}A_1\psi^{\frac{1}{3}} + A_2\Big)(1+e^{-\alpha x}) -$$
$$-\frac{2\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon}\sqrt{w_\varepsilon(x,0) + (A_1\psi^{\frac{4}{3}} + A_2\psi)(1+e^{-\alpha x})}.$$

В силу того, что $\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x \le Cx$, получаем из последнего неравенства для оператора $L(S_\varepsilon)$ неравенство

$$L(S_\varepsilon) \ge \frac{4}{9}\nu_1\sqrt{A_2}A_1\psi^{-\frac{1}{6}} - g(x),$$

где

$$g(x) = |\mu_\varepsilon(\varepsilon)|e^{Cx} + 2|v_0(x)|\Big(\frac{4}{3}A_1 + A_2\Big) +$$
$$+\frac{2\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon}\sqrt{w_\varepsilon(x,0) + 2(A_1 + A_2)}.$$

Учитывая связь градиентов давления и скорости внешнего течения, имеем при $0 < x < X$

$$g(x) + 2\left|U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)\right| \le C_4.$$

Поскольку $\psi^{-\frac{1}{6}} \to +\infty$ при $\psi \to 0$, то существует такое $\psi_1 > 0$, что при всех $\psi \in (0, \psi_1)$ справедливо неравенство

$$\frac{4}{9}\nu_1\sqrt{A_2}A_1\psi^{-\frac{1}{6}} > g(x) + 2\left|U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)\right|.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка снизу для оператора $L(S_\varepsilon)$

$$L(S_\varepsilon) \geq 2\left|U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)\right|$$

при всех $\psi \in (0, \psi_1)$.

При $\psi \geq \psi_1$ имеем $f(\psi) \geq \delta > 0$. Если α достаточно велико и значение X задано таким образом, чтобы выполнялось $e^{-\alpha X} \geq \frac{1}{2}$, то имеем неравенство

$$L(S_\varepsilon) \geq \nu_1\sqrt{S_\varepsilon}f''(\psi)(1 + e^{-\alpha x}) - \mu_\varepsilon(\varepsilon)\exp\left\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\right\} + \frac{\alpha\delta}{2} -$$

$$-v_0(x)f'(\psi)(1 + e^{-\alpha x}) - 2\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\sqrt{S_\varepsilon} \geq \frac{\alpha\delta}{2} - C_5 \geq 2\left|U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)\right|.$$

Из (3.3.6), (3.3.7) следует, что на границе

$$\partial\Omega_\varepsilon = \{0 < x < X,\ \psi = 0\}\cup$$

$$\cup\left\{x = 0,\ 0 < \psi < \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \left\{0 < x < X,\ \psi = \frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

справедливы следующие неравенства:

$$w_\varepsilon(x, \psi) \geq S_\varepsilon(x, \psi)$$

и

$$L(w_\varepsilon) - L(S_\varepsilon) \leq -2U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right) - 2 \leq 0.$$

Отсюда, в силу принципа максимума,

$$w_\varepsilon(x, \psi) - S_\varepsilon(x, \psi) \geq 0$$

всюду в $\overline{\Omega}_\varepsilon$. Таким образом, установлено первое неравенство из утверждения леммы.

Если $p'_x(x) + \sigma B(x)E(x) \leq -\beta_0 < 0$, то постоянные A_1,...,A_5 и параметр ε_0 выбираются так, чтобы неравенства

$$L\Big(w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)\Big) \geq -\beta_0$$

в Ω_ε и

$$w_\varepsilon(x,\psi) \geq w_\varepsilon(x,0) + f(\psi)$$

на границе $\partial\Omega_\varepsilon$ выполнялись при $\varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда получим

$$L\Big(w_\varepsilon\Big) - L\Big(w_\varepsilon(x,0) + f(\psi)\Big) \leq 0.$$

После применения принципа максимума в области Ω_ε устанавливаем второе неравенство в утверждении леммы. Лемма доказана. □

Из априорных оценок, полученных в лемме 3.3.1, вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.3.2. *В области Ω_ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где параметры ε_0 и X определяются леммой* 1, *существует решение $w_\varepsilon(x,\psi)$ задачи* (3.3.1)–(3.3.3) *в пространстве Гельдера $C^{1+\frac{\beta}{2},2+\beta}_{x,\psi}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ с некоторым $\beta \in (0,1)$. Внутри области Ω_ε уравнение* (3.3.1) *можно дифференцировать дважды по ψ и один раз по x.*

Доказательство. Согласно лемме 3.3.1 для решения $w_\varepsilon(x,\psi)$ в области Ω_ε выполняется цепочка неравенств

$$w_\varepsilon(x,\psi) \geq w_\varepsilon(x,0) + f(\psi)(1 + e^{-\alpha x}) \geq w_0^\varepsilon(\varepsilon)\exp\left\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\right\} \geq \omega(\varepsilon) > 0,$$

где $\omega(\varepsilon) > 0$ – некоторое положительное число, зависящее от параметра ε. В уравнении (3.3.1) при $w_\varepsilon \leq \omega(\varepsilon)$ вместо множителя $\sqrt{w_\varepsilon}$ возьмем гладкую, ограниченную, положительную функцию (при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$). В результате при каждом $\varepsilon > 0$ получим равномерно параболическое квазилинейное уравнение с краевыми условиями (3.3.2), у которого существует решение $w_\varepsilon(x,\psi)$. В силу априорных оценок леммы 1 выполнено $w_\varepsilon \geq \omega(\varepsilon)$, следовательно доказано существование решения уравнения с $\sqrt{w_\varepsilon}$ в главной части.

В силу достаточной гладкости функции Φ_ε уравнение (3.3.1) внутри области Ω_ε можно дифференцировать два раза по ψ и один раз по x. Получающиеся при этом производные непрерывны по Гельдеру внутри Ω_ε. Лемма доказана. □

Лемма 3.3.3. *Если выполнены предположения леммы* 3.3.1, *то для решения* $w_\varepsilon(x,\psi)$ *задачи* (3.3.1)–(3.3.3) *в области* Ω_ε *равномерно по* ε *имеют место следующие оценки:*

$$0 < w_\varepsilon(x,\psi) \le M_1, \tag{3.3.8}$$

$$M_2 < \left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} < M_3, \tag{3.3.9}$$

Доказательство. Установим сперва оценку (3.3.8). Пусть $w_\varepsilon(x,\psi) = e^{\alpha x}\overline{w}_\varepsilon(x,\psi)$, где $\alpha > 0$ – некоторая положительная постоянная. Тогда

$$e^{\alpha x}\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2\overline{w}_\varepsilon}{\partial\psi^2} - e^{\alpha x}\frac{\partial\overline{w}_\varepsilon}{\partial x} - \alpha e^{\alpha x}\overline{w}_\varepsilon - v_0(x)e^{\alpha x}\frac{\partial\overline{w}_\varepsilon}{\partial\psi} =$$
$$= 2\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\sqrt{w_\varepsilon} - 2U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right).$$

Пусть (x_0,ψ_0) – точка максимума функции $\overline{w}_\varepsilon(x,\psi) = e^{-\alpha x}w_\varepsilon(x,\psi)$. Если (x_0,ψ_0) лежит внутри области Ω_ε, то

$$\left.\frac{\partial\overline{w}_\varepsilon}{\partial x}\right|_{(x_0,\psi_0)} = 0, \quad \left.\frac{\partial\overline{w}_\varepsilon}{\partial \psi}\right|_{(x_0,\psi_0)} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2\overline{w}_\varepsilon}{\partial \psi^2}\right|_{(x_0,\psi_0)} \le 0.$$

Следовательно,

$$\alpha e^{\alpha x}\overline{w}_\varepsilon|_{(x_0,\psi_0)} = 2U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)\Bigg|_{(x_0,\psi_0)} + \nu(\psi)e^{\alpha x}\sqrt{w_\varepsilon}\left.\frac{\partial^2\overline{w}_\varepsilon}{\partial\psi^2}\right|_{(x_0,\psi_0)} +$$
$$+2\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\sqrt{w_\varepsilon}\Big|_{(x_0,\psi_0)} \le 2U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right) + 2\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\sqrt{w_\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что функция $\overline{w}_\varepsilon(x,\psi)$ ограничена внутри области Ω_ε. Так как она ограничена и на границе $\partial\Omega_\varepsilon$, то $\overline{w}_\varepsilon(x,\psi)$ ограничена во всей области Ω_ε, а значит, и функция w_ε ограничена в Ω_ε. Неравенство (3.3.8) доказано.

Перейдем теперь к доказательству неравенств (3.3.9). Заметим, что в силу первого неравенства в утверждении леммы 3.3.1, имеем

$$\left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\right|_{\psi=0} = \lim_{\psi\to 0}\frac{w_\varepsilon(x,\psi) - w_\varepsilon(x,0)}{\psi} \ge \lim_{\psi\to 0}\frac{f(\psi)(1+e^{-\alpha x})}{\psi} =$$

$$= \lim_{\psi \to 0} \frac{A_1 \psi^{\frac{4}{3}} + A_2 \psi}{\psi} > M_2 > 0,$$

где постоянная M_2 не зависит от ε. Итак, левая часть неравенства (3.3.9) установлена.

Докажем правую часть неравенства (3.3.9). Введем в рассмотрение следующе обозначения

$$L_0(w_\varepsilon) = \sqrt{w_\varepsilon} \Phi_\varepsilon \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - v_0(x) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - 2 \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} B^2 \sqrt{w_\varepsilon};$$

$$F_\varepsilon(x, \psi) = w_\varepsilon(x, 0) + \Big(2\psi - \psi^{\frac{4}{3}}\Big) e^{\alpha(x+1)}, \quad 0 \le \psi \le \psi_0,$$

где ψ_0 – значение из леммы 3.3.1. Имеем

$$L_0\Big(F_\varepsilon(x, \psi)\Big) = -\frac{4}{9} e^{\alpha(x+1)} \psi^{-\frac{2}{3}} \Phi_\varepsilon \sqrt{F_\varepsilon} - v_0(x) \Big(2 - \frac{4}{3} \psi^{\frac{1}{3}}\Big) e^{\alpha(x+1)} -$$
$$-2 \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} B^2 e^{\alpha(x+1)} \sqrt{F_\varepsilon} - \left(\mu_\varepsilon(\varepsilon) \exp\left\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)} x\right\} + \alpha \Big(2\psi - \psi^{\frac{4}{3}}\Big) e^{\alpha(x+1)}\right)$$
$$\to -\infty \quad \text{при} \quad \psi \to 0 + 0.$$

То есть для любого фиксированного x, $0 \le x \le X$, при достаточно больших значениях параметра α

$$L_0\Big(F_\varepsilon(x, \psi)\Big) < C < 0.$$

Величина $U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} B^2\right)$ ограничена на отрезке $0 \le x \le X$, поэтому найдется такое положительное число α, для которого при $0 \le \psi \le \psi_0$ будет выполнено

$$L_0(F_\varepsilon) < -2 \left| U \Big(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} B^2\Big) \right|.$$

При $\psi = \psi_0$ имеем

$$F_\varepsilon(x, \psi_0) = w_\varepsilon(x, 0) + \Big(2\psi_0 - \psi_0^{\frac{4}{3}}\Big) e^{\alpha(x+1)} \ge e^\alpha.$$

Следовательно, при достаточно больших величинах α и $0 \le x \le X$ выполнено неравенство

$$F_\varepsilon(x,\psi_0) - w_\varepsilon(x,0) \ge 0,$$

так как функция $w_\varepsilon(x,\psi_0)$ ограничена на отрезке $0 \le x \le X$.

При $\psi = 0$ имеем $F_\varepsilon(x,0) = w_\varepsilon(x,0)$. Это означает, что $F_\varepsilon(x,0) - w_\varepsilon(x,0) = 0$ при $0 \le x \le X$.

При $x = 0$ имеем

$$F_\varepsilon(0,\psi) = w_\varepsilon(0,\psi) + \left(2\psi - \psi^{\frac{4}{3}}\right)e^{\alpha},$$

следовательно,

$$F_\varepsilon(0,\psi) \ge w_\varepsilon(0,\psi) = w_0^\varepsilon(\varepsilon+\psi),$$

поскольку при достаточно малых значениях ε и ψ

$$w_0^\varepsilon(\varepsilon+\psi) \le C(\varepsilon+\psi)$$

и при достаточно больших значениях α

$$F_\varepsilon(0,\psi) = w_0^\varepsilon(\varepsilon) + e^{\alpha}\left(2\psi - \psi^{\frac{4}{3}}\right) = C\varepsilon + e^{\alpha}\left(2\psi - \psi^{\frac{4}{3}}\right) \ge C(\varepsilon+\psi).$$

В итоге имеем при $0 \le \psi \le \psi_0$ оценку

$$F_\varepsilon(0,\psi) - w_\varepsilon(0,\psi) \ge 0.$$

Применяя принцип максимума в области $0 < x < X$, $0 < \psi < \psi_0$, находим

$$F_\varepsilon(x,\psi) \ge w_\varepsilon(x,\psi) \ge 0$$

при $0 \le \psi \le \psi_0$, $0 \le x \le X$. Последнее неравенство обосновывается тем, что в области $0 < x < X$, $0 < \psi < \psi_0$ выполняются неравенства

$$L_0(F_\varepsilon) < -2\left|U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)\right| \le -2U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right) = L_0(w_\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\left(2\psi - \psi^{\frac{4}{3}}\right)e^{\alpha(x+1)} \geq w_\varepsilon(x,\psi) - w_\varepsilon(x,0)$$

при $0 \leq \psi \leq \psi_0$, $0 \leq x \leq X$. Тогда

$$\left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} = \lim_{\psi\to 0}\frac{w_\varepsilon(x,\psi) - w_\varepsilon(x,0)}{\psi} \leq \lim_{\psi\to 0}\left(2 - \psi^{\frac{1}{3}}\right)e^{\alpha(x+1)} \leq$$

$$\leq 2e^{\alpha(X+1)} < M_3$$

при $0 \leq x \leq X$. Оценка (3.3.9) доказана полностью. □

Лемма 3.3.4. *Если выполнены предположения леммы 3.3.1, то существует постоянная M_4 такая, что для решения $w_\varepsilon(x,\psi)$ задачи* (3.3.1)–(3.3.3) *в области Ω_ε; равномерно по ε справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial w_\varepsilon(x,\psi)}{\partial \psi}\right| \leq M_4. \tag{3.3.10}$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (3.3.1) по ψ и положим $z_\varepsilon(x,\psi) \equiv \frac{\partial w_\varepsilon(x,\psi)}{\partial \psi}$. Имеем

$$\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \psi} - \frac{\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon\sqrt{w_\varepsilon}}z_\varepsilon + \frac{\Phi_\varepsilon}{2\sqrt{w_\varepsilon}}z_\varepsilon\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \psi} +$$
$$+\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \eta}\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \psi} + \sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial z_\varepsilon}\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \psi}\right)^2 - 2\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi B^2(x)\sqrt{w_\varepsilon} -$$
$$-2\left(\frac{1}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi\frac{dp(x)}{dx} - 2\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi B(x)E(x) = 0.$$

Функция z_ε ограничена на $\partial\Omega_\varepsilon$: равномерная по ε ограниченность z_ε при $\psi = 0$ вытекает из леммы 3.3.3; при $x = 0$ функция $z_\varepsilon(0,\psi) = \frac{\partial w_0^\varepsilon(\psi+\varepsilon)}{\partial \psi}$ ограничена равномерно по ε согласно условиям на функцию $w_0^\varepsilon(\psi)$.

Остается оценить производную $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$ при $\psi = \frac{1}{\varepsilon}$. Пусть

$$\Lambda(w_\varepsilon) = \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}.$$

Введем следующее обозначение

$$\Phi_1(x,\psi) = w_\varepsilon\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}\Big) + A_1\Big(1 - e^{A_2(\psi-\frac{1}{\varepsilon})}\Big),$$

где A_1, A_2 – некоторые положительные постоянные; $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon}$ и ε достаточно мало. Тогда при достаточно больших значениях A_1 и A_2 выполняется оценка

$$\Lambda(\Phi_1) = -A_1A_2^2 e^{A_2(\psi-\frac{1}{\varepsilon})}\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon + v_0(x)A_1A_2e^{A_2(\psi-\frac{1}{\varepsilon})} -$$

$$-\mu_\varepsilon\Big(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\exp\left\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon})}{w_0^\varepsilon(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon})}x\right\} < -2\left|\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\Big(\sqrt{w_\varepsilon} - U\Big) - U\frac{dU}{dx}\right|.$$

Значит,

$$\Lambda(w_\varepsilon) - \Lambda(\Phi_1) > -2U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right) + 2\left|U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)\right| \ge 0.$$

В силу справедливости оценки (3.3.8) значение A_1 можно увеличить при необходимости так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Phi_1(0,\psi) = w_0^\varepsilon\Big(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Big) + A_1\Big(1 - e^{A_2(\psi-\frac{1}{\varepsilon})}\Big) \ge w_\varepsilon(0,\psi).$$

Далее,

$$\Phi_1\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}\Big) = w_\varepsilon\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}\Big),$$

$$\Phi_1\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}-1\Big) = w_\varepsilon\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}\Big) + A_1(1-e^{-A_2}) \ge M_1 \ge w_\varepsilon\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}-1\Big),$$

где значения A_1 выбраны достаточно большими. Отсюда и из принципа максимума вытекает, что

$$w_\varepsilon(x,\psi) \le \Phi_1(x,\psi)$$

при $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно,

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\bigg|_{\psi=\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\psi \to \frac{1}{\varepsilon}-0} \frac{w_\varepsilon(x,\psi) - w_\varepsilon(x,\frac{1}{\varepsilon})}{\psi - \frac{1}{\varepsilon}} =$$

$$= \lim_{\psi \to \frac{1}{\varepsilon}-0} \frac{w_\varepsilon(x,\psi) - \Phi_1(x,\psi) + A_1(1 - e^{A_2(\psi - \frac{1}{\varepsilon})})}{\psi - \frac{1}{\varepsilon}} \ge$$

$$\ge \lim_{\psi \to \frac{1}{\varepsilon}-0} \frac{A_1(1 - e^{A_2(\psi - \frac{1}{\varepsilon})})}{\psi - \frac{1}{\varepsilon}} = -A_1 A_2.$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi_2(x,\psi) = w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) - A_3\left(1 - e^{A_4(\psi - \frac{1}{\varepsilon})}\right).$$

Аналогичным образом получаем, что при достаточно больших значениях постоянных A_3 и A_4 справедливы неравенства

$$\Lambda(w_\varepsilon) - \Lambda(\Phi_2) < -2U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right) + 2\left|U\left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)\right| \le 0;$$

$$\Phi_2(0,\psi) \le w_\varepsilon(0,\psi); \quad \Phi_2\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) = w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right);$$

$$\Phi_2\left(x, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \le w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right),$$

то есть при $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon}$ имеем

$$w_\varepsilon(x,\psi) \ge \Phi_2(x,\psi).$$

Отсюда

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\bigg|_{\psi=\frac{1}{\varepsilon}} \le A_3 A_4.$$

В итоге получаем, что производная $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$ ограничена на $\partial\Omega\varepsilon$. Отсюда и из принципа максимума для функции $z_\varepsilon = \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$ следует, что $|z_\varepsilon|$ равномерно по ε ограничено в области Ω_ε. Лемма доказана. □

Из общих теорем о параболических уравнениях и леммы 3.3.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.3.5. *В области* $\Omega_{\varepsilon_1} = \{0 < x < X,\ \psi_\varepsilon(x) + \Delta < \psi < \frac{1}{\varepsilon}\}$, *где* $\Delta > \varepsilon_0$, *решения задачи* (3.3.1)–(3.3.3) *имеют производные* $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$, $\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}$, $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}$, *удовлетворяющие условию Гельдера, причем максимум модулей этих производных ограничен постоянной, не зависящей от* ε *и* Δ.

Доказательство. По лемме 3.3.1 при $\psi > \psi_*(x) + \varepsilon_0$ имеем

$$w_\varepsilon \geq \alpha > 0,$$

где параметр α не зависит от ε и Δ. Поэтому при $\psi > \psi_*(x) + \varepsilon_0 > 0$ уравнение (3.3.1) является равномерно (относительно ε) параболическим. По лемме 3.3.4 производные $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$ равномерно ограничены. Применяя к уравнению (3.3.1) лемму 6 из работы Олейник и Кружкова (см. [71]), получим, что w_ε удовлетворяют условию Гельдера по x с показателем и постоянной, не зависящими от ε и Δ, так как при $\psi > \psi_*(x) + \varepsilon_0$ коэффициенты уравнения удовлетворяют условию Липшица по ψ с постоянной, вследствие леммы 3.3.4 не зависящей от ε и Δ. Поэтому на основании известной теоремы (см. [72], § 2) функции w_ε при $\psi > \psi_*(x) + \varepsilon_0$ имеют производные $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$, $\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}$, $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}$, удовлетворяющие условию Гельдера, причем максимум модулей этих производных ограничен постоянной, не зависящей от ε и Δ. □

Из лемм 3.3.1, 3.3.3, 3.3.4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.3.6. *При любой фиксированной функции* $\eta(x, \psi) \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, *равной нулю при* $\psi > A_5 > 0$, *для всех* $\varepsilon < \frac{1}{A_5}$ *справедливы неравенства*

$$\iint\limits_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\left(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}\right)^2 \eta^2(x, \psi)\, dx d\psi < M_5, \tag{3.3.11}$$

$$\iint\limits_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right)^2 \eta^2(x, \psi)\, dx d\psi < M_6. \tag{3.3.12}$$

Доказательство. Умножим уравнение (3.3.1) на $\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}\eta^2(x,\psi)$ и проинтегрируем по Ω_ε. Получим

$$\iint\limits_{\Omega_\varepsilon} \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\left(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}\right)^2\eta^2(x,\psi)\,dxd\psi =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}\eta^2(x,\psi)\,dxd\psi + \iint\limits_{\Omega_\varepsilon} v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}\eta^2(x,\psi)\,dxd\psi +$$

$$+2\iint\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}\eta^2(x,\psi)\,dxd\psi -$$

$$-2\iint\limits_{\Omega_\varepsilon} U\left(\frac{dU}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}\eta^2(x,\psi)\,dxd\psi.$$

Преобразуя каждое слагаемое правой части последнего равенства при помощи интегрирования по частям, а так же воспользовавшись результатами лемм 3.3.1, 3.3.3 и 3.3.4, получаем неравенство (3.3.11). Выразив $\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right)^2$ из уравнения (3.3.1), умножив получившееся выражение на $\eta^2(x,\psi)$ и проинтегрировав по Ω_ε, получим с учетом неравенства (3.3.11) неравенство (3.3.12). □

Замечание 3.3.1. *Постоянные M_5 и M_6 в лемме* 3.3.6 *зависят лишь от данных задачи и функции $\eta(x,\psi)$.*

Лемма 3.3.7. *Существуют положительные не зависящие от ε постоянные M_7 и M_8 такие, что в области Ω_ε для решений $w_\varepsilon(x,\psi)$ задачи* (3.3.1)–(3.3.3) *равномерно по ε выполняются неравенства*

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \geq -M_7, \quad \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2} \geq -M_8. \tag{3.3.13}$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (3.3.1) по переменной x в области Ω_ε:

$$\frac{1}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\Phi_\varepsilon\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}+\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}+\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right)-$$
$$-\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x^2}-\frac{dv_0(x)}{dx}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}-v_0(x)\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right)-$$
$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\sqrt{w_\varepsilon}-\frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}+$$
$$+2\frac{dU(x)}{dx}\left(\frac{dU(x)}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)+2U(x)\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\right)=0.$$

Обозначим $r_\varepsilon=\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}$, получим уравнение на r_ε:

$$\frac{1}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}r_\varepsilon+\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}+\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 r_\varepsilon}{\partial\psi^2}-$$
$$-\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x}-\frac{dv_0(x)}{dx}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}-v_0(x)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial\psi}-$$
$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\sqrt{w_\varepsilon}-\frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)r_\varepsilon+$$
$$+2\frac{dU(x)}{dx}\left(\frac{dU(x)}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)+2U(x)\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\right)=0.$$

Поскольку в силу уравнения (3.3.1) имеем

$$\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}=\frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon}}\left[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}+v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}+\frac{2\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon}\sqrt{w_\varepsilon}-\right.$$
$$\left.-2U\left(\frac{dU(x)}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\right]=0,$$

получаем следующее соотношение:

$$\frac{1}{2w_\varepsilon}r_\varepsilon^2+\frac{v_0(x)}{2w_\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}r_\varepsilon-\frac{1}{w_\varepsilon}U(x)\left(\frac{dU(x)}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)r_\varepsilon+$$
$$+\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2}+\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 r_\varepsilon}{\partial\psi^2}-\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x}-$$
$$-\frac{dv_0(x)}{dx}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}-v_0(x)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial\psi}-\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\sqrt{w_\varepsilon}+$$
$$+2\frac{dU(x)}{dx}\left(\frac{dU(x)}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)+2U(x)\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\right)=0.$$

Пусть (x_0,ψ_0) — точка отрицательного минимума функции r_ε в области Ω_ε. Тогда

$$\left.\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial\psi}\right|_{(x_0,\psi_0)}=\left.\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x}\right|_{(x_0,\psi_0)}=0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 r_\varepsilon}{\partial\psi^2}\right|_{(x_0,\psi_0)}\geq 0,\quad r_\varepsilon(x_0,\psi_0)<0.$$

Следовательно, в точке (x_0,ψ_0) имеет место неравенство

$$\frac{1}{2w_\varepsilon}r_\varepsilon^2+\frac{v_0(x)}{2w_\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}r_\varepsilon-\frac{U(x)}{w_\varepsilon}\left(\frac{dU(x)}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)r_\varepsilon-$$
$$-\frac{dv_0(x)}{dx}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}-\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\sqrt{w_\varepsilon}+$$
$$+2\frac{dU(x)}{dx}\left(\frac{dU(x)}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)+2U(x)\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\right)\leq 0,$$

или, что то же самое,

$$r_\varepsilon^2+v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}r_\varepsilon-2U(x)\left(\frac{dU(x)}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)r_\varepsilon\leq$$
$$\leq 2w_\varepsilon\left[\frac{dv_0(x)}{dx}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}+\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\sqrt{w_\varepsilon}-\right.$$
$$\left.-2\frac{dU(x)}{dx}\left(\frac{dU(x)}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)-2U(x)\left(\frac{d^2U(x)}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\right)\right)\right].$$

Поскольку функции w_ε и $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$ ограничены в области Ω_ε (см. леммы 3.3.3 и 3.3.4), получаем, что $r_\varepsilon \geq -M_7$ во всех внутренних точках Ω_ε, причем значение константы M_7 не зависит от параметра ε.

Рассмотрим функцию r_ε на границе $\partial\Omega_\varepsilon$ области Ω_ε. Если значение параметра ε достаточно мало, то имеют место следующие оценки:

$$\left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right|_{\psi=0} = \mu_\varepsilon(\varepsilon)\exp\left\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\right\} \geq -M_7,$$

поскольку $\mu_\varepsilon(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$;

$$\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x \leq Cx$$

(см. доказательство леммы 3.3.1);

$$\left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right|_{\psi=\frac{1}{\varepsilon}} = \mu_\varepsilon\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)\exp\left\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon})}{w_0^\varepsilon(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon})}x\right\} \geq -M_7,$$

так как $\mu_\varepsilon(\psi) \to const$ при $\psi \to +\infty$;

$$\left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu_\varepsilon(\varepsilon+\psi) \geq -M_7.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$r_\varepsilon = \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \geq -M_7$$

в области Ω_ε, откуда с учетом уравнения (3.3.1) получаем, что

$$\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2} \geq -M_8$$

в Ω_ε.

□

Лемма 3.3.8. *Существуют положительные не зависящие от ε постоянные M_9, M_{10} и M_{11} такие, что в области Ω_ε для решений*

$w_\varepsilon(x,\psi)$ задачи (3.3.1)–(3.3.3) *равномерно по ε выполняются неравенства*

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \le M_9, \quad \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} \le M_{10}. \tag{3.3.14}$$

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} > M_{11}, \quad 0 \le \psi \le \psi_1, \tag{3.3.15}$$

для некоторого $\psi_1 > 0$, такого что $\psi_1 < \psi_*(0) - \varepsilon_0$.

Доказательство. Согласно лемме 3.3.5 достаточно показать, что существует такое число $\psi_1 > 0$, $\psi_1 < \psi_*(0) - \varepsilon_0$, что неравенства (3.3.14), (3.3.15) выполняются в области Ω_ε при $0 \le \psi \le \psi_1$.

Установим сперва, что при $0 \le \psi \le \psi_1$, где ψ_1 достаточно мало, выполнено неравенство (3.3.15). Имеем

$$\frac{\partial w_\varepsilon(x,\psi)}{\partial \psi} = \left.\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\right|_{\psi=0} + \int\limits_0^\psi \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}\, d\psi.$$

Учитывая последнее равенство, из лемм 3.3.3 и 3.3.7 вытекает неравенство

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \ge M_2 - \int\limits_0^\psi \frac{M_8}{\sqrt{A_6 \psi}}\, d\psi \ge M_{11},$$

для некоторого достаточно малого $\psi_1 > 0$ и постоянной A_6. Последнее равенство доказывает справедливость оценки (3.3.15).

Докажем теперь неравенства (3.3.14). Продифференцируем уравнение (3.3.1) по переменной ψ. Имеем

$$\frac{\Phi_\varepsilon}{2\sqrt{w_\varepsilon}} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} + \sqrt{w_\varepsilon} \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} + \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon \frac{\partial^3 w_\varepsilon}{\partial \psi^3} -$$
$$- \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x \partial \psi} - v_0(x) \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - 2\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi B^2 \sqrt{w_\varepsilon} -$$
$$- \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} \frac{B^2}{\sqrt{w_\varepsilon}} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} + 2\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi U B^2 = 0.$$

Обозначим $r_{1\varepsilon} = \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{gathered}\frac{\Phi_\varepsilon}{2\sqrt{w_\varepsilon}} r_{1\varepsilon}\frac{\partial r_{1\varepsilon}}{\partial \psi} + \sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi}\frac{\partial r_{1\varepsilon}}{\partial \psi} + \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 r_{1\varepsilon}}{\partial \psi^2} - \\ - \frac{\partial r_{1\varepsilon}}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial r_{1\varepsilon}}{\partial \psi} - 2\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi B^2\sqrt{w_\varepsilon} - \\ - \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\frac{B^2}{\sqrt{w_\varepsilon}} r_{1\varepsilon} + 2\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi UB^2 = 0.\end{gathered} \tag{3.3.16}$$

Обозначим $r_{1\varepsilon} = h(Z_\varepsilon)$. Тогда из уравнения (3.3.16) следует

$$\begin{gathered}\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 Z_\varepsilon}{\partial \psi^2} + \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{h''}{h'}\left(\frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial \psi}\right)^2 + \frac{\Phi_\varepsilon h}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial \psi} + \\ + \sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi}\frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial \psi} - \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial \psi} - \frac{2}{h'}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi B^2\sqrt{w_\varepsilon} - \\ - \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\frac{B^2}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{h}{h'} + \frac{2}{h'}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi UB^2 = 0.\end{gathered} \tag{3.3.17}$$

Продифференцируем теперь равенство (3.3.17) по переменной ψ, положив $r_{2\varepsilon} = \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial \psi}$, и получим уравнение на $r_{2\varepsilon}$:

$$\begin{gathered}\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 r_{2\varepsilon}}{\partial \psi^2} + \left[\frac{h\Phi_\varepsilon}{\sqrt{w_\varepsilon}} + 2\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi} - v_0(x)\right]\frac{\partial r_{2\varepsilon}}{\partial \psi} + \\ + 2\sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{h''}{h'} r_{2\varepsilon}\frac{\partial r_{2\varepsilon}}{\partial \psi} - \frac{\partial r_{2\varepsilon}}{\partial x} + \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\left(\frac{h''}{h'}\right)' r_{2\varepsilon}^3 + \\ + \left[\frac{h\Phi_\varepsilon}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{h''}{h'} + \sqrt{w_\varepsilon}\frac{h''}{h'}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi} + \frac{\Phi_\varepsilon h'}{2\sqrt{w_\varepsilon}}\right] r_{2\varepsilon}^2 + \\ + \left[\frac{h}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi} + \sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\Phi_\varepsilon h^2}{4} w_\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\right] r_{2\varepsilon} - \widehat{r}_\varepsilon = 0,\end{gathered}$$

где

$$\widehat{r}_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \psi}\left[\frac{2}{h'}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi B^2\sqrt{w_\varepsilon} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\frac{B^2}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{h}{h'} - \frac{2}{h'}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}\right)'_\psi UB^2\right].$$

Положим в последнем равенстве $r_{3\varepsilon} = \sqrt{w_\varepsilon} r_{2\varepsilon}$ и получим уравнение на $r_{3\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}
&\Phi_\varepsilon \frac{\partial^2 r_{3\varepsilon}}{\partial \psi^2} + \left[\frac{h\Phi_\varepsilon}{w_\varepsilon} + 2\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi} - \frac{v_0(x)}{\sqrt{w_\varepsilon}}\right]\frac{\partial r_{3\varepsilon}}{\partial \psi} + \\
&+ \frac{2\Phi_\varepsilon}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{h''}{h'} r_{3\varepsilon}\frac{\partial r_{3\varepsilon}}{\partial \psi} - \frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial r_{3\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\Phi_\varepsilon}{w_\varepsilon}\Big(\frac{h''}{h'}\Big)' r_{3\varepsilon}^3 + \\
&+ \left[\frac{h\Phi_\varepsilon}{2}\frac{h''}{h'} w_\varepsilon^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{h''}{h'}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi} + \frac{\Phi_\varepsilon h'}{2} w_\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\right] r_{3\varepsilon}^2 + \\
&+ \left[\frac{h}{w_\varepsilon}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\Phi_\varepsilon h^2}{4w_\varepsilon^2}\right] r_{3\varepsilon} - \widehat{r}_\varepsilon = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Если положительный максимум $r_{3\varepsilon}$ принимается во внутренней точке (x_0, ψ_0) области Ω_ε, то в этой точке

$$\left.\frac{\partial r_{3\varepsilon}}{\partial x}\right|_{(x_0,\psi_0)} = \left.\frac{\partial r_{3\varepsilon}}{\partial \psi}\right|_{(x_0,\psi_0)} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial^2 r_{3\varepsilon}}{\partial \psi^2}\right|_{(x_0,\psi_0)} \le 0, \quad r_{3\varepsilon}(x_0, \psi_0) > 0.$$

и в силу уравнения (3.3.18) в этой точке выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi_\varepsilon}{w_\varepsilon}\Big(\frac{h''}{h'}\Big)' r_{3\varepsilon}^3 + \left[\frac{h\Phi_\varepsilon}{2}\frac{h''}{h'} w_\varepsilon^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{h''}{h'}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi} + \frac{\Phi_\varepsilon h'}{2} w_\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\right] r_{3\varepsilon}^2 + \\
&+ \left[\frac{h}{w_\varepsilon}\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\Phi_\varepsilon h^2}{4w_\varepsilon^2}\right] r_{3\varepsilon} - \widehat{r}_\varepsilon \ge 0.
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Положим

$$h(Z_\varepsilon) \equiv \frac{M_{11}}{2}(e^{Z_\varepsilon} + 1).$$

Так как

$$M_4 > \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} = h(Z_\varepsilon) \ge M_{11} > 0$$

в Ω_ε, то замена $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} = h(Z_\varepsilon)$ в уравнении (3.3.16) возможна и $0 < Z_\varepsilon < A_7$ для некоторой постоянной A_7. При такой функции $h(Z_\varepsilon)$ из неравенства (3.3.19) следует, что в точке максимума $r_{3\varepsilon}$, если он достигается во внутренней точке (x_0, ψ_0) области Ω_ε, функция $r_{3\varepsilon}$ должна удовлетворять неравенству $r_{3\varepsilon} \leq A_8$ для некоторой постоянной A_8.

Оценим теперь $r_{3\varepsilon}$ на границе области Ω_ε. Имеем

$$\begin{aligned}
&r_{3\varepsilon}(x,\psi) = \sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial\psi} = \frac{\sqrt{w_\varepsilon}}{h'(Z_\varepsilon)}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2},\\
&r_{3\varepsilon}(0,\psi) = \frac{\sqrt{w_0^\varepsilon(\varepsilon+\psi)}}{h'(Z_\varepsilon)}\frac{d^2 w_0^\varepsilon(\varepsilon+\psi)}{d\psi^2},\\
&r_{3\varepsilon}(x,0) = \frac{1}{\Phi_\varepsilon h'(Z_\varepsilon)}\left[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} + v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi} + 2\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\sqrt{w_\varepsilon} + \right.\\
&\left.\left. + \frac{2}{\rho^\varepsilon}\Big(\frac{dp}{dx} + \sigma^\varepsilon B(x)E(x)\Big)\right]\right|_{\psi=0} = \frac{1}{\Phi_\varepsilon h'(Z_\varepsilon)}\left[\mu_\varepsilon(\varepsilon)\exp\left\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\right\} + \right.\\
&\left. + \left(v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi} + 2\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2(x)\sqrt{w_\varepsilon} + \frac{2}{\rho^\varepsilon}\Big(\frac{dp}{dx} + \sigma^\varepsilon B(x)E(x)\Big)\right)\Bigg|_{\psi=0}\right].
\end{aligned}$$

В силу предположений относительной функций $w_0^\varepsilon(\psi)$, $v_0(x)$, $B(x)$, $E(x)$ и $p(x)$ отсюда следует, что $r_{3\varepsilon}$ равномерно ограничены по ε при $\psi = 0$ и при $x = 0$. Следовательно, $r_{3\varepsilon} \leq A_9$ в Ω_ε, и поэтому

$$\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2} = h'(Z_\varepsilon) r_{3\varepsilon} \leq M_{10}.$$

Из уравнения (3.3.1) находим, что

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \leq M_9.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.3.9. *В области Ω_ε для решений $w_\varepsilon(x,\psi)$ задачи* (3.3.1)–(3.3.3) *равномерно по ε выполняются неравенства*

$$\left| w_\varepsilon^{\beta_1 - 1}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right| \leq M_{12}, \quad 0 < \beta_1 < \frac{1}{2}. \tag{3.3.20}$$

Доказательство. Из леммы 3.3.5 следует, что

$$\left| w_\varepsilon^{\beta_1 - 1} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \right| \le A_{10}$$

при $\psi \ge A_{11}$, где A_{10}, A_{11} — постоянные. Поэтому оценку (3.3.20) достаточно установить при $0 \le \psi \le A_{11}$, где A_{11} достаточно мало. Предположим, что $A_{11} < \psi_1$ и, следовательно,

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \ge M_{11} > 0$$

при $\psi \le A_{11}$. Положим $q_\varepsilon = w_\varepsilon^\beta$. Тогда

$$\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x} = \beta w_\varepsilon^{\beta-1} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}.$$

Таким образом, для получения требуемой оценки достаточно оценить $|\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}|$. Составим уравнение для q_ε. Учитывая, что $w_\varepsilon = q_\varepsilon^{\frac{1}{\beta}}$, и обозначив $\frac{1}{\beta}$ через b, из (3.3.1) получаем

$$\Phi_\varepsilon \left(b(b-1) q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2} \left(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial \psi} \right)^2 + b q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-1} \frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial \psi^2} \right) - \\ - b q_\varepsilon^{b-1} \left(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x} + v_0(x) \frac{\partial q_\varepsilon}{\partial \psi} \right) - 2 \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} B^2 q_\varepsilon^{\frac{b}{2}} + 2U \left(\frac{dU}{dx} + \frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} B^2 \right) = 0. \tag{3.3.21}$$

Продифференцируем уравнение (3.3.21) по переменной x. Имеем

$$\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}\left(b(b-1)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2}\left(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\right)^2+bq_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-1}\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial\psi^2}\right)+$$

$$+\Phi_\varepsilon\left(b(b-1)\left(\frac{3}{2}b-2\right)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-3}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}\left(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\right)^2+\right.$$

$$+2b(b-1)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial x\partial\psi}+b\left(\frac{3}{2}b-1\right)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial\psi^2}+$$

$$\left.+bq^{\frac{3}{2}b-1}\frac{\partial^3 q_\varepsilon}{\partial x\partial\psi^2}\right)-b(b-1)q_\varepsilon^{b-2}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}\left(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}+v_0(x)\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\right)-$$

$$-bq_\varepsilon^{b-1}\left(\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial x^2}+\frac{dv_0(x)}{dx}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}+v_0(x)\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial x\partial\psi}\right)-$$

$$-b\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2q_\varepsilon^{\frac{b}{2}-1}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}-2q_\varepsilon^{\frac{b}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)+\frac{d}{dx}\left(2U\left(\frac{dU}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)\right)=0.$$

Полагая в последнем равенстве $\overline{h}_\varepsilon=\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}$, получаем следующее соотношение:

$$\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}\left(b(b-1)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2}\left(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\right)^2+bq_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-1}\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial\psi^2}\right)+$$

$$+\Phi_\varepsilon\left(b(b-1)\left(\frac{3}{2}b-2\right)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-3}\overline{h}_\varepsilon\left(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\right)^2+\right.$$

$$+2b(b-1)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\frac{\partial\overline{h}_\varepsilon}{\partial\psi}+b\left(\frac{3}{2}b-1\right)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2}\overline{h}_\varepsilon\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial\psi^2}+$$

$$\left.+bq^{\frac{3}{2}b-1}\frac{\partial^2\overline{h}_\varepsilon}{\partial\psi^2}\right)-b(b-1)q_\varepsilon^{b-2}\overline{h}_\varepsilon\left(\overline{h}_\varepsilon+v_0(x)\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\right)-$$

$$-bq_\varepsilon^{b-1}\left(\frac{\partial\overline{h}_\varepsilon}{\partial x}+\frac{dv_0(x)}{dx}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}+v_0(x)\frac{\partial\overline{h}_\varepsilon}{\partial\psi}\right)-$$

$$-b\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2q_\varepsilon^{\frac{b}{2}-1}\overline{h}_\varepsilon-2q_\varepsilon^{\frac{b}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)+\frac{d}{dx}\left(2U\left(\frac{dU}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\right)\right)=0.$$

Подставляя сюда вместо $\frac{\partial^2 q_\varepsilon}{\partial\psi^2}$ его значение из уравнения (3.3.21), получим для $\overline{h}_\varepsilon$ уравнение вида

$$\Big(\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}\Phi_\varepsilon^{-1}+\Big(\frac{3}{2}b-1\Big)\frac{\overline{h}_\varepsilon}{\Phi_\varepsilon q_\varepsilon}\Big)\Big[-\Phi_\varepsilon b(b-1)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2}\Big(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)^2+$$

$$+bq_\varepsilon^{b-1}\Big(\overline{h}_\varepsilon+v_0(x)\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)+2\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2q_\varepsilon^{\frac{b}{2}}-2U\Big(\frac{dU}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\Big)\Big]+$$

$$+\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}b(b-1)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2}\Big(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)^2+\Phi_\varepsilon\Big(b(b-1)\Big(\frac{3}{2}b-2\Big)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-3}\overline{h}_\varepsilon\Big(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)^2+$$

$$+2b(b-1)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\frac{\partial\overline{h}_\varepsilon}{\partial\psi}+bq^{\frac{3}{2}b-1}\frac{\partial^2\overline{h}_\varepsilon}{\partial\psi^2}\Big)-$$

$$-b(b-1)q_\varepsilon^{b-2}\overline{h}_\varepsilon\Big(\overline{h}_\varepsilon+v_0(x)\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)-$$

$$-bq_\varepsilon^{b-1}\Big(\frac{\partial\overline{h}_\varepsilon}{\partial x}+\frac{dv_0(x)}{dx}\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}+v_0(x)\frac{\partial\overline{h}_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)-$$

$$-b\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2q_\varepsilon^{\frac{b}{2}-1}\overline{h}_\varepsilon-2q_\varepsilon^{\frac{b}{2}}\frac{d}{dx}\Big(\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\Big)+\frac{d}{dx}\Big(2U\Big(\frac{dU}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\Big)\Big)=0.$$

Установим справедливость принципа максимума для уравнения, которому удовлетворяет $\overline{h}_\varepsilon$ при $0\le\psi\le A_{11}$, где A_{11} достаточно мало. С этой целью перенесем все члены уравнения в правую часть и выпишем коэффициент K при $\overline{h}_\varepsilon$. Затем покажем, что $K<0$ при $\psi\le A_{11}$, если A_{11} достаточно мало. Имеем

$$K=\frac{1}{\Phi_\varepsilon q_\varepsilon}\Big(\frac{3}{2}b-1\Big)\Big[-\Phi_\varepsilon b(b-1)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-2}\Big(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)^2+$$

$$+bq_\varepsilon^{b-1}\Big(\overline{h}_\varepsilon+v_0(x)\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)+2\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2q_\varepsilon^{\frac{b}{2}}-2U\Big(\frac{dU}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\Big)\Big]+$$

$$+bq_\varepsilon^{b-1}\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}\Phi_\varepsilon^{-1}+\Phi_\varepsilon b(b-1)\Big(\frac{3}{2}b-2\Big)q_\varepsilon^{\frac{3}{2}b-3}\Big(\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)^2-$$

$$-b(b-1)q_\varepsilon^{b-2}\Big(\overline{h}_\varepsilon+v_0(x)\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)-b\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2q_\varepsilon^{\frac{b}{2}-1}.$$

Чтобы оценить K, перейдем обратно к функции w_ε в правой части последнего равенства. Получим

$$K=\frac{1}{\Phi_\varepsilon}w_\varepsilon^{-\frac{1}{b}}\Big(\frac{3}{2}b-1\Big)\Big[-\Phi_\varepsilon\frac{b-1}{b}w_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)^2+$$

$$+bw_\varepsilon^{1-\frac{1}{b}}\Big(\overline{h}_\varepsilon+\frac{v_0(x)}{b}w_\varepsilon^{\frac{1}{b}-1}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)+2\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2w_\varepsilon^{\frac{1}{2}}-2U\Big(\frac{dU}{dx}+\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2\Big)\Big]+$$

$$+bw_\varepsilon^{1-\frac{1}{b}}\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}\Phi_\varepsilon^{-1}+\Phi_\varepsilon\frac{b-1}{b}\Big(\frac{3}{2}b-2\Big)w_\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{b}}\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)^2-$$

$$-b(b-1)w_\varepsilon^{1-\frac{2}{b}}\Big(\overline{h}_\varepsilon+\frac{v_0(x)}{b}w_\varepsilon^{\frac{1}{b}-1}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)-b\frac{\sigma^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}B^2w_\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{b}}.$$

В леммах 3.3.7, 3.3.8 установлено, что

$$\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right|\le A_{12},$$

где A_{12} — постоянная. При $\psi\le\psi_1$ имеем

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}>M_{11}>0,\quad b>2.$$

Так как $w_\varepsilon\le A_{13}\psi$, то имеет место неравенство

$$K<-w_\varepsilon^{-\beta-\frac{1}{2}}A_{14}$$

при достаточно малых ψ, где A_{13}, A_{14} — некоторые постоянные. Поэтому если $|\overline{h}_\varepsilon|$ достигает наименьшего зачения внутри области

$$\{0<x<X,\ 0<\psi<A_{11}\},$$

то для некоторой постоянной A_{15} справедливо неравенство $|\overline{h}_\varepsilon|\le A_{15}$.

Если $|\overline{h}_\varepsilon|$ достигает наибольшего значения при $\psi=0$, то его равномерная (относительно ε) следует из равенства

$$\left.\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}\right|_{\psi=0}=\beta w_\varepsilon^{\beta-1}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}=$$

$$=\beta\Big[w_0^\varepsilon(\varepsilon)\exp\Big\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\Big\}\Big]^{\beta-1}\mu_\varepsilon(\varepsilon)\exp\Big\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\Big\}.$$

Таким образом производная $\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}$ при $\psi = 0$ равномерно (относительно ε) ограничено, так как ограничено отношение $\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}$.

Если $|\overline{h}_\varepsilon|$ принимает свое наибольшее значение при $x = 0$, то оно не превосходит

$$\max\left|\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}\right|\Bigg|_{x=0} = \max\beta\Big[w_0^\varepsilon(\varepsilon+\psi)\Big]^{\beta-1}\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right| =$$

$$= \max\Big|\beta w_0^{\varepsilon\beta-1}(\varepsilon+\psi)\mu_\varepsilon(\varepsilon+\psi)\Big|.$$

Последнее выражение равномерно ограничено по ε в силу условия согласования (3.3.5) и условий на начальную функцию $u_0(y)$. При $\psi = A_{11}$ мы уже оценили $\max|\frac{\partial q_\varepsilon}{\partial x}|$ в доказательстве леммы 3.3.5.

□

Лемма 3.3.10. *Для всех ψ таких, что $\max\limits_{0\le x\le X}\psi_*(x) + \varepsilon_0 < \psi_2 \le \psi \le \frac{1}{\varepsilon}$, выполняется неравенство*

$$|w_\varepsilon(x,\psi) - U^2(x)| < \delta(\psi_2) + M_{13}e^{-\psi+\alpha_1 x}, \tag{3.3.22}$$

где α_1 – положительная постоянная, а $\delta(\psi_2)\to 0$ при $\psi_2\to\infty$.

Доказательство. Положим

$$P(x,\psi) = w_\varepsilon(x,\psi) - U^2(x)$$

и рассмотрим оператор

$$L_{1\varepsilon}(P) \equiv \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon\frac{\partial^2 P}{\partial\psi^2} - \frac{\partial P}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial P}{\partial\psi} - \frac{2\sigma^\varepsilon B^2}{\rho^\varepsilon}\sqrt{w_\varepsilon} + \frac{2U\sigma^\varepsilon B^2}{\rho^\varepsilon} = 0.$$

Преобразуем два последних слагаемых в последнем равенстве:

$$\frac{2U\sigma^\varepsilon B^2}{\rho^\varepsilon} - \frac{2\sigma^\varepsilon B^2}{\rho^\varepsilon}\sqrt{w_\varepsilon} =$$

$$= \frac{2\sigma^\varepsilon B^2}{\rho^\varepsilon}(U - \sqrt{w_\varepsilon}) = -\frac{2\sigma^\varepsilon B^2(w_\varepsilon - U^2)}{\rho^\varepsilon(\sqrt{w_\varepsilon}+U)} = -\frac{2\sigma^\varepsilon B^2}{\rho^\varepsilon(\sqrt{w_\varepsilon}+U)}P.$$

С учетом последнего преобразования оператор $L_{1\varepsilon}(P)$ принимает следующий вид:

$$L_{1\varepsilon}(P) \equiv \sqrt{w_\varepsilon}\Phi_\varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial \psi^2} - \frac{\partial P}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial P}{\partial \psi} - \frac{2\sigma^\varepsilon B^2}{\rho^\varepsilon(\sqrt{w_\varepsilon} + U)} P = 0. \quad (3.3.23)$$

Введем в рассмотрение функции

$$V_\pm(x,\psi) = \pm P(x,\psi) + \delta(\psi_2) + M_{13}e^{-\psi+\alpha_1 x},$$

где α_1 – положительная постоянная, $\delta(\psi_2)$ – некоторое малое число, $\psi_2 \geq 0$.

Так как $w_0^\varepsilon(\psi) \to U^2(0)$ при $\psi \to \infty$, то при $x = 0$ и $\psi \geq \psi_2$ функция $P(x,\psi)$ может быть сделана сколь угодно малой при выборе достаточно малого ε и достаточно большого ψ_2. Пусть число $\delta(\psi_2)$ выбрано таким образом, что при $\psi \geq \psi_2$ выполняется неравенство

$$|w_0^\varepsilon(\psi) - U^2(0)| < \delta(\psi_2).$$

При $\psi = \psi_2$ и $\psi = \frac{1}{\varepsilon}$ имеем $V_\pm > 0$, если M_{13} и α_1 достаточно велики, так как $|P(x,\psi)| < M_{14}$ и в силу свойств функции $\mu_\varepsilon(\psi)$. Таким образом, постоянные α_1, M_{13} и ψ_2 могут быть выбраны так, что

$$V_\pm(0,\psi) > 0, \quad \psi \geq \psi_2,$$

$$V_\pm(x,\psi_2) > 0, \quad V_\pm\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) > 0.$$

Кроме того, $L_{1\varepsilon}(V_\pm) < 0$ при достаточно большом α_1. В силу принципа максимума для уравнения (3.3.23) из этих неравенств следует неравенство $V_\pm(x,\psi) > 0$ в области Ω_ε при $\psi \geq \psi_2$. Значит,

$$\pm P(x,\psi) + \delta(\psi_2) + M_{13}e^{-\psi+\alpha_1 x} > 0,$$

где $\delta(\psi_2) \to 0$ при $\psi_2 \to \infty$, откуда следует неравенство (3.3.22). $\square$

§ 3.4. Существование и единственность обобщенного решения основной задачи в переменных Мизеса

Ниже будет установлено существование и единственность обобщенного решения $w(x,\psi)$ задачи (3.2.6)–(3.2.9).

Теорема 3.4.1. *Пусть выполнены предположения леммы* 3.3.1. *Тогда обощенное решение* $w(x,\psi)$ *задачи* (3.2.6)–(3.2.9) *существует, причем* $w(x,\psi)\to U^2(x)$ *при* $\psi\to\infty$ *равномерно на отрезке* $0\le x\le X$, *а при* $0\le\psi\le\psi_1$ *выполняется неравенство*

$$\left|w^{\beta_1-1}\frac{\partial w}{\partial x}\right|\le M_{12},\quad 0<\beta_1<\frac{1}{2}. \tag{3.4.1}$$

Доказательство. Из лемм 3.3.3, 3.3.4 и 3.3.6 следует, что решения $w_\varepsilon(x,\psi)$ задач (3.3.1)–(3.3.3) принадлежат пространству $W^{1,1}_{2,\infty}(\Omega_{\frac{1}{N}})$ для любого натурального N. На основании теорем вложения имеет место следующая цепочка вложений (см. [73])

$$W^{1,1}_{2,\infty}(\Omega_{\frac{1}{N}})\subset H^{1,1}_{2,\infty}(\Omega_{\frac{1}{N}})\subset H^{\frac{1}{3},1}_{\infty}(\Omega_{\frac{1}{N}}).$$

Так как функции $w_\varepsilon(x,\psi)$ имеют классические производные первого порядка, то $w_\varepsilon(x,\psi)\in C^{\frac{1}{3}}(\Omega_{\frac{1}{N}})$ для любого натурального N и константы Гельдера не зависят от ε. Поэтому из последовательности $\{w_\varepsilon(x,\psi)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{w_{\varepsilon_k}(x,\psi)\}$, $k=1,2,...,\ \varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$, которая при каждом натуральном N равномерно сходится в области $\Omega_{\frac{1}{N}}$. Так как функции $w_{\varepsilon_k}(x,\psi)$ непрерывны в $\overline{\Omega}_{\frac{1}{N}}$, то последовательность $\{w_{\varepsilon_k}(x,\psi)\}$ сходится равномерно на каждом $\overline{\Omega}_{\frac{1}{N}}$, $N=1,2,...$

Принимая во внимание оценки функций $w_\varepsilon(x,\psi)$, данные в леммах, и переходя в случае необходимости к подпоследовательности, выделим такую последовательность $\{w_{\varepsilon_k}(x,\psi)\}$, что для любого $N=1,2...$

$$w_{\varepsilon_k}\to w \quad \text{в} \quad C(\overline{\Omega}_{\frac{1}{N}}),\quad \frac{\partial w_{\varepsilon_k}}{\partial\psi}\to\frac{\partial w}{\partial\psi}\quad \text{слабо в}\quad L_2(\Omega_{\frac{1}{N}}),$$

$$\Theta\left(x, \psi, \frac{\partial w_{\varepsilon_k}}{\partial \psi}\right) \to \xi \quad \text{слабо в} \quad L_2\big(\Omega_{\frac{1}{N}}\big),$$

$$\frac{\partial w_{\varepsilon_k}}{\partial x} \to \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{слабо в} \quad L_2\big(\Omega_{\frac{1}{N}}\big).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H(x, \psi, s) = \int\limits_0^s \Phi_\varepsilon(\psi - \psi_*(x), t)\, dt.$$

Тогда

$$\Phi_\varepsilon\left(\psi - \psi_*(x), \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\right)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} = \frac{d}{d\psi} H_\varepsilon\left(x, \psi, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\right) - \frac{\partial}{\partial \psi} H_\varepsilon\left(x, \psi, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\right).$$

Из (3.3.1) для любой функции $\varphi(x, \psi)$, указанной в определении 3.2.1, и выбранной последовательности решений $\{w_{\varepsilon_k}(x, \psi)\}$ (далее для краткости индекс k будем опускать) получаем равенства

$$\iint\limits_\Omega \left[H_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \psi}\varphi + \frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\varphi + \frac{v_0(x)}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon}\varphi + \frac{2}{\rho^\varepsilon\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{dp(x)}{dx}\varphi + \frac{2\sigma^\varepsilon B(x)E(x)}{\rho^\varepsilon\sqrt{w_\varepsilon}}\varphi\right] dxd\psi = 0,$$

$$\iint\limits_\Omega \left[\Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\varphi + \frac{v_0(x)}{\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sigma^\varepsilon B^2(x)}{\rho^\varepsilon}\varphi + \frac{2}{\rho^\varepsilon\sqrt{w_\varepsilon}}\frac{dp(x)}{dx}\varphi + \frac{2\sigma^\varepsilon B(x)E(x)}{\rho^\varepsilon\sqrt{w_\varepsilon}}\varphi\right] dxd\psi +$$

$$+ \iint\limits_\Omega \left[H_\varepsilon\left(x, \psi, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\right) - \Theta\left(x, \psi, \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\right)\right]\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\, dxd\psi +$$

$$+ \iint\limits_\Omega \varphi(x, \psi)\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \psi}\, dxd\psi \equiv J_1 + J_2 + J_3 = 0. \qquad (3.4.2)$$

Из определения функций $\Theta(x,\psi,s)$ и $H_\varepsilon(x,\psi,s)$ вытекает оценка

$$|J_2| = \Big| \int\limits_0^{\psi_*(x)+\varepsilon} \int\limits_0^X \Big[H_\varepsilon\Big(x,\psi,\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big) - \Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\Big] \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\, dx d\psi \Big| \le M_{13}\varepsilon^2.$$

Далее,

$$J_3 = \int\limits_0^X \int\limits_{\psi_*(x)-\varepsilon}^{\psi_*(x)+\varepsilon} \Big[\frac{d}{d\psi}\Big(\int\limits_0^{\frac{\partial w_*}{\partial \psi}} \Phi_\varepsilon(\psi-\psi_*(x),t)\, dt \Big) -$$

$$-\Phi_\varepsilon\Big(\psi-\psi_\varepsilon(x),\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}\Big)\Big]\varphi\, d\psi dx =$$

$$= -\int\limits_0^X \int\limits_{\psi_*(x)-\varepsilon}^{\psi_*(x)+\varepsilon} \frac{\partial \varphi(x,\psi)}{\partial \psi}\Big(\int\limits_0^{\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}} \Phi_\varepsilon(\psi-\psi_*(x),t)\, dt \Big)\, d\psi dx +$$

$$+ \int\limits_0^X \Big(\varphi(x,\psi) \int\limits_0^{\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}} \Phi_\varepsilon(x,t)\, dt \Big)\Big|_{\psi=\psi_*(x)-\varepsilon}^{\psi=\psi_*(x)+\varepsilon} dx -$$

$$- \int\limits_0^X \int\limits_{\psi_*(x)-\varepsilon}^{\psi_*(x)+\varepsilon} \varphi(x,\psi)\Phi_\varepsilon\Big(\psi-\psi_*(x),\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}\, d\psi dx =$$

$$= -\int\limits_0^X \int\limits_{\psi_*(x)-\varepsilon}^{\psi_*(x)+\varepsilon} \varphi(x,\psi)\Phi_\varepsilon\Big(\psi-\psi_*(x),\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}\, d\psi dx + O(1) \equiv I + O(1)$$

при $\varepsilon \to 0$ в силу абсолютной непрерывности интеграла и непрерывности функции $\varphi(x,\psi)$ из определения 3.2.1. Из абсолютной непрерывности интеграла и леммы 3.3.6 получаем

$$|I| \le \frac{1}{2} \int\limits_0^X \int\limits_{\psi_*(x)-\varepsilon}^{\psi_*(x)+\varepsilon} \Phi_\varepsilon\Big(\psi-\psi_*(x),\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\varphi^2(x,\psi)\, d\psi dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^X \int\limits_{\psi_*(x)-\varepsilon}^{\psi_*(x)+\varepsilon} \Phi_\varepsilon\Big(\psi-\psi_*(x),\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)\Big(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}\Big)^2\,d\psi dx = O(1),\quad \varepsilon\to 0.$$

Следовательно, $I_3 = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Переходя в равенстве (3.4.2) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\iint\limits_\Omega \Big(\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}+\frac{1}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial x}\varphi+\frac{v_0(x)}{\sqrt{w}}\frac{\partial w}{\partial\psi}\varphi+\frac{2\sigma B^2(x)}{\rho}\varphi+ \\ +\frac{2}{\rho\sqrt{w}}\frac{dp(x)}{dx}\varphi+\frac{2\sigma B(x)E(x)\varphi}{\rho\sqrt{w}}\Big)\,dxd\psi = 0. \tag{3.4.3}$$

Для завершения доказательства достаточно установить, что

$$\iint\limits_\Omega \Big[\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)-\xi\Big]\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\,dxd\psi = 0.$$

С этой целью введем функцию $\zeta_R(\psi)\in C^\infty$ такую, что $\zeta_R(\psi)=1$ при $0\le\psi\le R-1$, $\zeta_R(\psi)=0$ при $\psi\ge R$, $0\le\zeta_R(\psi)\le 1$, $|\frac{d\zeta_R}{d\psi}|\le 2$ при всех ψ. Для $\varepsilon<\frac{1}{R}$ и непрерывной функции $W(x,\psi)$, имеющей ограниченную производную $\frac{\partial W}{\partial\psi}$ и равной нулю при $\psi=0$, приходим к равенству (см. [60], теорема 1)

$$\iint\limits_\Omega \Big[\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)-\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial W}{\partial\psi}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial\psi}\Big(\zeta_R^2(\psi)(w_\varepsilon-W)\Big)\,dxd\psi \ge \\ \ge -M_{14}\int\limits_0^R\int\limits_0^X |w_\varepsilon-W|^2\,dxd\psi. \tag{3.4.4}$$

Из уравнения (3.3.1) и равенства (3.4.2), предполагая выполнение условия

$$R>\max_{0\le x\le X}\psi_*(x)+1,$$

выводим равенство

$$\int\limits_0^R\int\limits_0^X \Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)\frac{\partial}{\partial\psi}\Big(\zeta_R^2(\psi)w_\varepsilon\Big)\,dxd\psi =$$

$$= \int\limits_0^R\int\limits_0^X \zeta_R^2(\psi)\Big[-\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - v_0(x)\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi} - \frac{2\sigma B^2(x)}{\rho}w_\varepsilon - \frac{2}{\rho}\frac{dp(x)}{dx}\sqrt{w_\varepsilon} -$$

$$-\frac{2\sigma B(x)E(x)}{\rho}\sqrt{w_\varepsilon}\Big]\,dxd\psi + O(1),\quad \varepsilon\to 0.$$

Подставим это выражение в (3.4.4) и перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. Имеем

$$\int\limits_0^R\int\limits_0^X \zeta_R^2(\psi)\Big[-\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial x} - v_0(x)\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial\psi} - \frac{2\sigma B^2(x)}{\rho}w -$$

$$-\frac{2}{\rho}\frac{dp(x)}{dx}\sqrt{w} - \frac{2\sigma B(x)E(x)}{\rho}\sqrt{w}\Big]\,dxd\psi +$$

$$\int\limits_0^R\int\limits_0^X \Big[\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial W}{\partial\psi}\Big)\frac{\partial}{\partial\psi}\Big(\zeta_R^2(\psi)(W-w)\Big) - \xi\frac{\partial}{\partial\psi}\Big(\zeta_R^2 W\Big)\Big]\,dxd\psi \geq$$

$$\geq -M_{14}\int\limits_0^R\int\limits_0^X |w-W|^2\,dxd\psi. \tag{3.4.5}$$

При $\psi = 0$ получим, что $w = 0$, так как

$$w_0^\varepsilon(\psi)\exp\left\{\frac{\mu_\varepsilon(\varepsilon)}{w_0^\varepsilon(\varepsilon)}x\right\}\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Поэтому в (3.4.3) можно положить

$$\varphi(x,\psi) = \zeta_R^2(\psi)w(x,\psi).$$

Вследствие этого получим

$$\int_0^R\int_0^X \xi\frac{\partial}{\partial\psi}\Big(\zeta_R^2(\psi)w\Big)\,dxd\psi =$$

$$= \int_0^R\int_0^X \zeta_R^2(\psi)\Big[-\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial x} - v_0(x)\sqrt{w}\frac{\partial w}{\partial\psi} - \frac{2\sigma B^2(x)}{\rho}w -$$

$$-\frac{2}{\rho}\frac{dp(x)}{dx}\sqrt{w} - \frac{2\sigma B(x)E(x)}{\rho}\sqrt{w}\Big]\,dxd\psi.$$

Совместно с (3.4.5) это дает неравенство

$$\int_0^R\int_0^X \Big[\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial W}{\partial\psi}\Big) - \xi\Big]\frac{\partial}{\partial\psi}\Big(\zeta_R^2(\psi)(W-w)\Big)\,dxd\psi \geq$$

$$\geq -M_{14}\int_0^R\int_0^X |w-W|^2\,dxd\psi.$$

Выберем R настолько большим, что

$$\varphi(x,\psi) = \zeta_R^2(\psi)\varphi(x,\psi).$$

Для

$$W(x,\psi) = w(x,\psi) + \lambda\varphi(x,\psi), \quad \lambda > 0,$$

имеем

$$\int_0^R\int_0^X \Big[\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w}{\partial\psi}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\Big)-\xi\Big]\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\,dxd\psi \geq -\lambda M_{14}\int_0^R\int_0^X \varphi^2(x,\psi)\,dxd\psi.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $\lambda \to 0$, получаем независимо от знака функции $\varphi(x,\psi)$

$$\int_0^R\int_0^X \Big[\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big) - \xi\Big]\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\,dxd\psi \geq 0.$$

Это доказывает требуемое равенство.

Итак, функция $w(x,\psi)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3.2.11). Выполнение условий (3.2.10) следует из равномерной сходимости w_{ε_k} к w и неравенства (3.3.22). Из лемм вытекают также и другие свойства функции $w(x,\psi)$, которыми по определению 3.2.1 должно обладать обобщенное решение. Теорема доказана. $\square$

Согласно лемме 3.3.5, полученное обобщенное решение $w(x,\psi)$ при $\psi > \psi_*(x) + \Delta$ имеет обычные производные $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial \psi}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$, которые ограничены и удовлетворяют условию Гельдера. Поэтому функция $w(x,\psi)$ является решением уравнения (3.2.7) в классическом смысле.

Теорема 3.4.2. *Если*

$$v_0(x) \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x) \leq 0,$$

то решение $w(x,\psi)$, *полученное в теореме* 3.4.1, *единственно.*

Доказательство. Предположим, что w_1 и w_2 – два обобщенных решения задачи (3.2.6)–(3.2.9) в смысле определения 3.2.1. Тогда из интегрального тождества (3.2.11) вытекает равенство

$$\iint\limits_{\Omega} \Bigg[\bigg(\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_1}{\partial \psi}\Big) - \Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_2}{\partial \psi}\Big) \bigg) \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + 2\frac{\partial(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})}{\partial x}\varphi + \\ + 2v_0(x)\frac{\partial(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})}{\partial \psi}\varphi - \frac{2}{\rho}\frac{dp(x)}{dx}\frac{\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2}}{\sqrt{w_1 w_2}}\varphi - \\ - \frac{2\sigma B(x)E(x)}{\rho}\frac{\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2}}{\sqrt{w_1 w_2}}\varphi \Bigg] dx d\psi = 0. \tag{3.4.6}$$

Введем функцию

$$\chi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \leq 0, \\ 1, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Далее, определим для $\varepsilon > 0$ функцию

$$\chi_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \le 0, \\ 1, & \lambda \ge \varepsilon \end{cases}$$

и продолжим $\chi_\varepsilon(\lambda)$ на интервал $0 < \lambda < \varepsilon$ таким образом, чтобы $\chi_\varepsilon(\lambda)$ стала гладкой и монотонной функцией. Подставим в равенство (3.4.6) функцию

$$\varphi(x,\psi) = \chi_\varepsilon\Big(w_1(x,\psi) - w_2(x,\psi)\Big)\zeta_R(\psi),$$

где $\zeta_R(\psi)$ – функция, определяемая в рамках доказательства теоремы 3.4.1. Для почти всех точек $0 \le x_0 \le X$ имеем

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{x_0} \Bigg[\bigg(\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\Big) - \Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\Big)\bigg)\frac{\partial\Big(\chi_\varepsilon\big(w_1-w_2\big)\zeta_R(\psi)\Big)}{\partial\psi} +$$
$$+2\bigg(\frac{\partial(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})}{\partial x} + v_0(x)\frac{\partial(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})}{\partial\psi}\bigg)\chi_\varepsilon\big(w_1-w_2\big)\zeta_R(\psi) -$$
$$-\frac{2}{\rho}\frac{\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2}}{\sqrt{w_1w_2}}\bigg(\frac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x)\bigg)\chi_\varepsilon\big(w_1-w_2\big)\zeta_R(\psi)\Bigg]\,dxd\psi = 0.$$

Учтем, что $\zeta_R(\psi) \equiv 0$ при $\psi > R$, и получим равенство

$$\int\limits_0^R \int\limits_0^{x_0} \Bigg[\bigg(\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\Big) - \Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\Big)\bigg)\times$$
$$\times\frac{\partial\Big(\chi_\varepsilon\big(w_1-w_2\big)\Big)}{\partial\lambda}\bigg(\frac{\partial w_1}{\partial\psi} - \frac{\partial w_2}{\partial\psi}\bigg)\zeta_R(\psi) +$$
$$+\bigg(\Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_1}{\partial\psi}\Big) - \Theta\Big(x,\psi,\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\Big)\bigg)\chi_\varepsilon(w_1-w_2)\frac{\partial\zeta_R(\psi)}{\partial\psi} +$$
$$+2\bigg(\frac{\partial(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})}{\partial x} + v_0(x)\frac{\partial(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})}{\partial\psi}\bigg)\chi_\varepsilon\big(w_1-w_2\big)\zeta_R(\psi) -$$
$$-\frac{2}{\rho}\frac{\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2}}{\sqrt{w_1w_2}}\bigg(\frac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x)\bigg)\chi_\varepsilon\big(w_1-w_2\big)\zeta_R(\psi)\Bigg]\,dxd\psi = 0.$$

Поскольку первое слагаемое в последнем равенстве в силу монотонности $\Theta(x,\psi,s)$ по s, $s\geq 0$, неотрицательно и можно выбрать

$$R > \max_{0\leq x\leq X}\psi_*(x)+1,$$

получаем неравенство

$$\int\limits_{R-1}^{R}\int\limits_{0}^{x_0}\nu\biggl(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}-\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\biggr)\chi_\varepsilon(w_1-w_2)\frac{\partial\zeta_R(\psi)}{\partial\psi}\,dxd\psi+$$

$$+2\int\limits_{0}^{R}\int\limits_{0}^{x_0}\Biggl[\biggl(\frac{\partial(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})}{\partial x}+v_0(x)\frac{\partial(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})}{\partial\psi}\biggr)\chi_\varepsilon\bigl(w_1-w_2\bigr)\zeta_R(\psi)-$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2}}{\sqrt{w_1w_2}}\biggl(\frac{dp(x)}{dx}+\sigma B(x)E(x)\biggr)\chi_\varepsilon\bigl(w_1-w_2\bigr)\zeta_R(\psi)\Biggr]\,dxd\psi\leq 0.$$

Перейдем в левой части этого неравенства к пределу при $\varepsilon\to 0$. Предельный переход возможен по теореме Лебега. Кроме того, заметим, что

$$\chi(w_1-w_2)=\chi(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})$$

и для любой функции $f(x,\psi)$, имеющей обобщенные производные первого порядка, имеют место равенства

$$\chi(f)\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f^+}{\partial x},\quad \chi(f)\frac{\partial f}{\partial\psi}=\frac{\partial f^+}{\partial\psi},$$

где $f^+=\max(0;f)$. Таким образом,

$$\int\limits_{R-1}^{R}\int\limits_{0}^{x_0}\nu\biggl(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}-\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\biggr)\chi(w_1-w_2)\frac{d\zeta_R(\psi)}{d\psi}\,dxd\psi+$$

$$+2\int\limits_{0}^{R}\int\limits_{0}^{x_0}\Biggl[\biggl(\frac{\partial(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})^+}{\partial x}+v_0(x)\frac{\partial(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})^+}{\partial\psi}\biggr)\zeta_R(\psi)-$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\bigl(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2}\bigr)^+}{\sqrt{w_1w_2}}\biggl(\frac{dp(x)}{dx}+\sigma B(x)E(x)\biggr)\zeta_R(\psi)\Biggr]\,dxd\psi\leq 0.$$

После интегрирования по частям приходим к следующему неравенству

$$\int\limits_{R-1}^{R}\int\limits_{0}^{x_0}\nu\Big(\frac{\partial w_1}{\partial\psi}-\frac{\partial w_2}{\partial\psi}\Big)\chi(w_1-w_2)\frac{d\zeta_R(\psi)}{d\psi}\,dxd\psi+$$
$$+2\int\limits_{0}^{R}\zeta_R(\psi)(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})^+|_{x=x_0}\,d\psi-$$
$$-2\int\limits_{0}^{R}\int\limits_{0}^{x_0}\Big[v_0(x)(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})^+\frac{d\zeta_R(\psi)}{d\psi}+$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\big(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2}\big)^+}{\sqrt{w_1w_2}}\Big(\frac{dp(x)}{dx}+\sigma B(x)E(x)\Big)\zeta_R(\psi)\Big]\,dxd\psi\le 0. \tag{3.4.7}$$

Выше отмечалось, что при выполнении условия $\psi>\max\limits_{0\le x\le X}\psi_*(x)+\Delta$ производные $\frac{\partial^2 w_i}{\partial\psi^2}$, $i=1,2$, ограничены и удовлетворяют условию Гельдера. Поэтому в силу граничных условий (3.2.10) и оценки (3.3.22)

$$\left|\frac{\partial(w_1-w_2)}{\partial\psi}\right|^2\le M_{15}\max\left|\frac{\partial^2(w_1-w_2)}{\partial\psi^2}\right||w_1-w_2|\to 0\quad\text{при}\quad\psi\to\infty$$

равномерно при $0\le x\le X$. Учитывая неравенства

$$\frac{dp(x)}{dx}+\sigma B(x)E(x)\le 0,\quad v_0(x)\ge 0,\quad \frac{d\zeta_R(\psi)}{d\psi}\le 0,$$

из (3.4.7) выводим соотношение

$$2\int\limits_{0}^{R}\zeta_R(\psi)(\sqrt{w_1}-\sqrt{w_2})^+|_{x=x_0}\,d\psi\le M_{16}\varepsilon_1(R), \tag{3.4.8}$$

где $\varepsilon_1(R)\to 0$ при $R\to\infty$. Так как интеграл от неотрицательной функции в левой части неравенства (3.4.8) не убывает, а $\varepsilon_1(R)\to 0$

при $R \to \infty$, то при любом $R > \max\limits_{0 \le x \le X} \psi_*(x) + \Delta$ и $0 \le x_0 \le X$ имеем

$$\int\limits_0^R \zeta_R(\psi)(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2})^+|_{x=x_0}\, d\psi \le 0.$$

Из последнего неравенства следует тождество $(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2})^+ \equiv 0$. Аналогично можно получить тождество

$$(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2})^- = \max(-(\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2}), 0) \equiv 0.$$

Значит, $\sqrt{w_1} - \sqrt{w_2} \equiv 0$ и $w_1 \equiv w_2$. Теорема доказана. □

§ 3.5. Основной результат

Свойства решения $w(x, \psi)$ позволяют перейти от замены Мизеса (3.2.1), (3.2.2) к исходным переменным. Это дает возможность с помощью функции $w(x, \psi)$ получить решение задачи (3.1.1)–(3.1.6) и вывести его свойства.

Заметим, что за счет связи градиентов давления и скорости внешнего течения, неравенство

$$\frac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x) \le 0$$

эквивалентно неравенствам

$$\rho_i \frac{dU(x)}{dx} + \sigma_i B^2(x) \ge 0, \quad i = 1, 2,$$

которые выполняются при достаточно большом $B^2(x)$. Последнее неравенство означает, что достаточно сильное поперечное магнитное поле предотвращает отрыв пограничного слоя вязкой электропроводной среды.

Теорема 3.5.1. *Предположим, что функции* $p'(x)$, $v_0(x)$, $B(x)$, $E(x)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $0 \le x \le X$, $u_{i0}(y)$,

$u'_{i0}(y)$, $u''_{i0}(y)$, $i=1,2$, ограничены и удовлетворяют условию Гельдера, $u'_{10}(0)>0$, $u_{20}(y)\to U(0)$ при $y\to\infty$, $u_{i0}(y)\le U(0)$, $i=1,2$, выполняются равенства

$$u_{10}(y_*(0)) = u_{20}(y_*(0)),$$

$$\nu_1\rho_1 u'_{10}\big(y_*(0)\big)\left(1+k\Big(u'_{10}\big(y_*(0)\big)\Big)^2\right) = \nu_2\rho_2 u'_{20}\big(y_*(0)\big)$$

и условие согласования в точке $(0,0)$

$$\nu_1\Big(1+\frac{3}{4}k\big(u'_{10}(y)\big)^2\Big)u''_{10}(y) - v_0(0)u'_{10}(y) - \frac{p'(0)}{\rho_1} - \frac{\sigma_1}{\rho_1}B^2(0)u_{10}(y) - \\ -\frac{\sigma_1}{\rho_1}B(0)E(0) = O(y^2) \ \ \text{при} \ \ y\to 0. \tag{3.5.1}$$

Тогда при некотором $X>0$ существует обобщенное решение задачи (3.1.1)–(3.1.6) *в смысле определения* 3.1.1. *Если, кроме того, выполняется неравенство*

$$\frac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x) \le -\beta_0 < 0,$$

где $\beta_0 = const$, то решение существует при любом $X>0$. Если же выполнены условия

$$\frac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x) \le 0, \quad v_0(x)\ge 0,$$

то решение задачи (3.1.1)–(3.1.6) *единственно.*

Литература

[1] Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibund // Verh. Int. Math. Kongr. Heidelberg, 1904. Teubner, 1905. P. 484 - 494.

[2] Олейник О.А. О системе уравнений Прандтля в теории пограничного слоя// ДАН СССР. 1963. Т.150, № 1. С. 28-32.

[3] Олейник О.А. К математической теории пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости// ПММ. 1966. Т.30, № 5. С. 801-821.

[4] Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997 - 512 с.

[5] Кузнецов В.В. Поганичные слои Марангони: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Кузнецов Владимир Васильевич. - Новосибирск, 1984. С. 29-42.

[6] Кузнецов В.В. О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 67. С. 68–75.

[7] Пухначев В. В. Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 5. С 1061–1064.

[8] J. Thomson. On certain curious motions observable on the surfaces of wine and other alcoholic liquours // Philosophical Magazine. — 1855. — Vol. 10. — P. 330.

[9] C. Marangoni. Sull'espansione delle goccie di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquido. — 1865.

[10] Napolitano L.G. Marangoni boundary layers // Proc. 3rd Europ. symp. on material sci. in space. Grenoble, 1979. P. 349–358.

[11] Batishchev V.A., Kuznetsov V.V., Pukhnachov V.V. Marangoni boundary layers // Prog. Aerospace Sci. 1989. V. 26. P. 353–370.

[12] Гадияк Г.В., Чеблакова Е.А. Конвекция и перенос тепла в жидкости при пониженной гравитации и учете термокапиллярных эффектов // Институт вычислительных технологий СО РАН Новосибирск. Том 4, № 5, 1999.

[13] Магденко Е.П. Конвекция Марангони в цилиндре конечного размера // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, № 1. С 16–23.

[14] Rosenblat S., Davis S. H., Homsy G.M. Nonlinear Marangoni convection in bounded layers. 1. Circular cylindrical containers // J. Fluid Mech. 1982. V. 120. P. 91–122.

[15] Dauby P.C., Lebon G., Bouhy E. Linear Веknard–Marangoni instability in rigid circular containers // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 520–530.

[16] Pearson J.R. A. One convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 489-–500.

[17] Scriven L.E., Sternling C. V. On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity // J. Fluid Mech. 1964. V. 19. P. 321–340.

[18] Smith K. A. On convective instability induced by surface-tension gradients // J. Fluid Mech. 1966. V. 24, pt 2. P. 401–414.

[19] Kundrot G.E., Juge R.A., Pussey M.L. et al. // Crystal Growth Des. V. 1. P. 87.

[20] Tanaka H., Umehara T., Inaka K. et al. // Acta Cryst. F. 2007. V. 63. P. 1.

[21] Кузнецов В.В. Расчет полей скорости и концентрации в расплаве при получении кристаллов методом бестигельной зонной плавки // Задачи гидромеханики и тепломассообмена со свободными границами. Новосибирск. 1987.с.91–97.

[22] Chun Ch. H. Marangoni convection in a floating zone under reduced gravity // J. Crystal Growth. 1980 V. 48. P. 600–610.

[23] Shevtsova V.M., Kuhlmann H.C., Rath H.J. Thermocapillary convection in liquid bridges with a deformed free surface // Materials and Fluids under Low Gravity: Proc. 9th Eur. Symp. on Gravity Dependent Phenomena in Phys. Sci., Berlin, 2-5 May, 1995. P. 323–329.

[24] Neitzel G.P., Chang K.T., Jankowski D.F., Mittelmann H.D. Linear–stability theory of thermocapillary convection in a model of the float–zone crystal-growth process // Phys. Fluids. 1993. V. 5, № 1. P. 108–114.

[25] Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964 V. 18, № 1. P. 1–18.

[26] Кузнецов В.В. Течения с пограничными слоями в областях, имеющих свободные границы // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. N 4. С. 69-80.

[27] Хуснутдинова Н.В. Математические вопросы управления пограничным слоем с помощью отсосов. // Сиб.мат.ж. 1972. Т.13. №2. С.485–489.

[28] Хуснутдинова Н.В. Об условиях существования безотрывного пограничного слоя при возрастающем давлении. // ДАН СССР. 1980. Т. 253. №5. С. 1095–1099.

[29] Самохин В.Н. О системе уравнений ламинарного пограничного слоя при вдуве неньютоновской жидкости. // Сиб.мат.ж. 1993. Т.34. №1. С.157-168.

[30] Суслов А.И. Об отрыве пограничного слоя при вдуве. // ПММ. 1974. Т.38. №1. С. 166-169.

[31] Самохин В.Н. О непрерывной зависимости решения уравнений пограничного слоя от профиля начальных скоростей / В.Н. Самохин, Г.М. Фадеева, Г.А. Чечкин // Вестник МГУП. – 2010. – № 4. – С. 64–71.

[32] Кузнецов В.В. О задаче перехода пограничного слоя Марангони в слой Прандтля // Сиб. мат. журнал. 2000. Т. 41. № 4. С. 822-838.

[33] E W. Boundary layer theory and the zero-viscosity limit of the Navier-Stokes equetion.// Acta Math. Sin. (Engl.Ser.).2000. V. 16, N 2. P. 207-218.

[34] Leray J. Étude des diverses équation intégrales nonlinéares et de quelques problèmes que pose l'Hydrodinamique // J. Math. Pure. Appl. 1933. № 12 P. 1-82.

[35] Lopez Filho M.C. Boundary layers and the vanishing viscosity limit for incompressible 2D flow. Lectures om the analysis of nonlinear partial differential equations. Pt. 1. P/ 1-29. Somerville: Int. Press, 2012. (Morningside Lect. Math., V.1).

[36] Schlichting H., Gersten K. Boundary-Layer Theory. Berlin: Springer, 2000.

[37] Temam R., Wang X. Remarks on the Prandtl equation for a permeable wall. // Z. Angew. Math. Mech. 2000. V. 80, N 11-12. P. 835-834.

[38] Олейник О.А. Об отрыве пограничного слоя для плоскопараллельного стационарного течения несжимаемой жидкости. Механика сплошной среды и родственные вопросы анализа: Сб.к 80-летию Н.И. Мусхелишвили. М: Наука, 1970. С. 390-406.

[39] Олейник О.А. Математические задачи теории пограничного слоя. УМН. 1968. Т.23, № 3. С. 3-65

[40] Олейник О.А. О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. выч.мат. и мат.физ. 3 № 3. 1963. С. 489-506.

[41] Спиридонов С.В., Чечкин Г.А. Просачивание пограничного слоя ньютоновской жидкости через перфорированную преграду // Проблемы математического анализа.- 2010.- т. 45. - с. 93–102.

[42] Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А. О пограничном слое ньютоновской жидкости, обтекающей шероховатую поверхность и проходящей через перфорированную преграду // Уфимский математический журнал.- 2011. т. 3, № 3. - с. 93–104.

[43] Линкевич А.Ю., Ратью Т.С., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А. О тонком слое неньютоновской жидкости на шероховатой поверхности, протекающей через перфорированную преграду // Проблемы математического анализа.- 2013.- т. 68. - с. 173–182.

[44] Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А. Усреднение стратифицированной дилатантной жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления.- 2013.- т. 48.- с. 75–83.

[45] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука. Физмалит. 1970.

[46] Романов М.С. Об усреднении пограничного слоя псевдопластической жидкости в присутствии быстроосцилирующих внешних сил // Труды семинара им. И.Г.Петровского, МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва. 2011. Т. 28. С. 300–328.

[47] Самохин В. Н. Модификация О. А. Ладыженской уравнений Навье-Стокса и теория пограничного слоя / В.Н. Самохин, Г.М. Фадеева, Г.А. Чечкин // Вестник МГУП. – 2009. – № 5. – С. 127–143.

[48] Самохин В.Н. , Фадеева Г.М., Чечкин Г.А. Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Тр. сем. им. И.Г. Петровского.- 2011.- Вып. 28.- с. 329–361.

[49] Самохин В. Н., Чечкин Г.А. Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки. // Труды семинара им. И.Г. Петровского, Т.31, 2016. С. 158–176.

[50] Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Система уравнений пограничного слоя реологически сложной среды. Переменные Крокко. // Доклады РАН.- 2019. Т. 487, No 2, С. 119–125.

[51] Самохин В.Н., Чечкин Г.А., Чечкина Т.П. О пограничном слое при обтекании конфузора вязкой средой с реологическим законом О.А.Ладыженской. // Проблемы математического анализа.- 2019.- т. 100 - с. 145–157.

[52] Суслов А.И. О системе уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя. М.: Вестн. МГУ. Сер.мат., мех. 1974. № 2. С.62-70.

[53] Самохин В.Н. Математические вопросы магнитной гидродинамики неньютоновских сред. М.: МГУП, 2004.

[54] Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г.А. Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса.// Труды семинара им. И.Г. Петровского, Т.28, 2011. С. 329–361.

[55] Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Проблемы математического анализа.- 2018.- т. 92. - с. 83–100.

[56] Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Уравнения симметрического МГД-пограничного слоя вязкой жидкости с реологическим законом О.А. Ладыженской. // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Т. 32, 2019. С. 72–90.

[57] Bulatova R.R., Chechkin G.A., Chechkina T.P. and Samokhin V.N. On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non–Newtonian MHD medium // C R Mécanique.- 2018.- T. 346, No 9.- P. 807–814.

[58] Чечкин Г.А., Булатова Р.Р., Самохин В.Н. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя. // Проблемы математического анализа. 2018. Т. 92, с. 83-100.

[59] Самохин В.Н. О системе уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя дилатантной среды // Дифференц. уравнения.- 1993.- т. 29, № 2.- с. 328–336.

[60] Самохин В.Н. О системе уравнений стационарного пограничного слоя дилатантной среды // Тр. сем. им. И.Г. Петровского.- 1989.- Вып. 14.- с. 89–108.

[61] Oleinik, O.A. On Stefan–type free boundary problems for parabolic equations, In: Seminary 1962–1963 di analisi, algebra, geometria e topologia, 1. Roma, 1965, p. 388–403.

[62] Oleinik, O.A.; Primicerio, M.; Radkevich, E.V. Stefan-like problems, Meccanica, 28, 129–143 (1993).

[63] Thompson E.R., Snyder William T. Laminar boundary-layer flows of Newtonian fluid with non-Newtonian fluid injectants // J. Hydronaut. 1970. V. 4. № 2. P. 86–91.

[64] Ватажин А.Б. О вдувании в пограничный слой в присутствии магнитного поля электропроводной жидкости или газа // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. № 5. С. 909–911.

[65] Самохин В.Н. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя с условиями дифракции// Дифференциальные уравнения. Т.33, № 8, 1997. С. 1106–1113.

[66] Самохин В.Н. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя с инъекцией дилатантной среды// Дифференциальные уравнения, Т.46, № 6, 2010. С. 846–858.

[67] Джураев Т.Д. Об однозначной разрешимости основной краевой задачи теории температурного пограничного слоя. Прикладная математика и механика, 1974, т. 38, № 1, с. 170-175.

[68] Кисатов М.А. Система уравнений пограничного слоя Марангони в среде с реологическим законом О.А.Ладыженской. Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2021, т. 498, с. 41–44.

[69] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.

[70] Kisatov M.A., Samokhin V.N., Chechkin G.A. On Solutions to Equations of Magnetohydrodynamic Boundary Layer with Injection of a Medium Obeying the Ladyzhenskaya Rheological Law // Journal of Mathematical Sciences. Plenum Publishers (United States). 2022. T. 260, № 6, P. 774-797.

[71] Олейник О.А. Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными // УМН.-1961.-Т. 16, № 5.-С. 116-155.

[72] Ильин А.М. Калашников А.С. Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН.-1962.-Т. 17, № 3.-С. 3-146.

[73] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1969.