МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Спиридонов Сергей Викторович

УДК 517.957

О СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена в Московском Государственном Университете им. М.В.Ломоносова

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, профессор
Чечкин Григорий Александрович

Официальные оппоненты: **Пятницкий Андрей Львович,**
Доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук,
старший научный сотрудник

Королёва Юлия Олеговна,
Кандидат физико-математических наук,
Российский Государственный Университет нефти и газа имени И.М. Губкина,
доцент кафедры высшей математики

Ведущая организация: Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

Защита состоится 5 октября 2018 г. в 17.30 на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном Университете им. А.Г. и Н.Г. Столетовых по адресу: 600024, РФ, Владимир, проспект Строителей, 11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного Университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых и на сайте http://diss.vlsu.ru/.

Автореферат разослан 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.025.08 при ВлГУ им. А.Г. и
Н.Г. Столетовых,
кандидат физико-математических наук,
доцент Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Уравнения Навье-Стокса являются основной математической моделью движения вязкой жидкости. $V(t,x,y,z) = (u,v,w), V : R^4 \to R^3$ задаёт вектор скорости движения жидкости. Мы рассматриваем однородную вязкую несжимаемую жидкость. При отсутствии массовых сил система уравнений Навье-Стокса выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\triangle u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\triangle v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\triangle w \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\nu > 0$ — кинематический коэффициент вязкости, $p(t,x,y,z)$ — давление, ρ — плотность жидкости.

Основные задачи связаны с движением жидкости в различных ограниченных областях при обтекании. Граничные условия ставятся из соображения физического характера.

В 1904 году на Международном математическом конгрессе в г. Гейдельберге Л.Прандтлем были заложены основы теории пограничного слоя, согласно которой при движении жидкости возникает основной поток — поток жидкости, которую можно рассматривать как идеальную, и тонкий пограничный слой, внутри которого жидкость рассматривается как вязкая. На границе пограничного слоя эти два потока сопрягаются. В связи с этим уравнения Навье-Стокса стало возможным заменить на более простые уравнения теории пограничного слоя (так называемую систему уравнений Прандтля).

С тех пор идеи Прандтля применяются для исследования не только классических ньютоновских жидкостей, но и для описания течения неньютоновских жидкостей (электропроводных, магнитных), а также применяются и к некоторым новым моделям жидкости, например, модифицированной жидкости О.А.Ладыженской (см. работы[1,2,3,4]). Некоторые задачи с малыми параметрами

[1] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Модификация О.А. Ладыженской уравнений Навье-Стокса и теория пограничного слоя // Вестник МГУП им. Ивана Федорова. 2009. Т. 5. С. 127—143.

[2] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* О непрерывной зависимости решения уравнений пограничного слоя от профиля начальных скоростей // Вестник МГУП им. Ивана Федорова. 2010. Т. 4. С. 64—71.

[3] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Асимптотика решений уравнений пограничного слоя обобщённо ньютоновской среды при внешнем течении, близком к симметричному // Проблемы математического анализа. 2011. Т. 59. С. 123—128.

[4] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье-Стокса // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2011. Т. 28. С. 329—361.

в теории пограничного слоя изучены в работе[5] (течение несжимаемой жидкости, проходящей сквозь малое отверстие), в работе[6] (воздействие гармонического осциллятора с быстро меняющимися параметрами на пограничном слой при обтекании пластины), в работе[7] (усреднение задач для системы уравнений Прандтля с быстро осциллирующим вдувом–отсосом), в работе[8] (многомасштабное усреднение системы уравнений Прандтля), в работе[9] (обтекание шероховатой поверхности), в работе[10] (оценки скорости сходимости решений исходных задач к решению усреднённой задачи), в работе[11] (усреднение неоднородной псевдоапластической жидкости).

В монографии[12] рассматривается поведение однородной жидкости с микронеоднородностями в граничных условиях и магнитном поле. В главе 10 рассматривается усреднение системы уравнений Прандтля для немагнитной жидкости при быстро осциллирующем вдуве-отсосе и усреднение магнитогидродинамического пограничного слоя в быстро осциллирующем магнитном поле. Устанавливаются условия существования решения усреднённой задачи.

В работе будет рассматриваться плоскопараллельный стационарный пограничный слой. Изучается асимптотической поведение жидкости с различными качественными характеристиками в пограничном слое при различных условиях.

Некоторые применения методов в теории пограничного слоя неньютоновской жидкости (модифицированной жидкости Ладыженской О.А.) см. в рабо-

[5] *Conca C.* On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // J. Math. Pures Appl. 1985. Т. 64, № 1. С. 31—75.

[6] *Рыжов О. С.*, *Савенков И. В.* Пространственные возмущения, вносимые гармоническим осциллятором в пограничный слой на пластинке // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1988. Т. 28, № 4. С. 591—602.

[7] *Олейник О. А.*, *Самохин В. Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997. 512 с. ISBN 5-02-015202-1.

[8] *Amirat Y.*, *Chechkin G. A.*, *Romanov M. S.* On Multiscale Homogenization Problems in Boundary Layer Theory // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2012. Т. 63. С. 475—502.

[9] *Bayada G.*, *Chambat M.* Homogenezation of the Stokes system in a thin film with rapidly varying thickness // Model. Math. et Anal. Number. (M^2AN). 1989. Т. 23, № 2. С. 205—234.

[10] *Романов М. С.*, *Самохин В. Н.*, *Чечкин Г. А.* О скорости сходимости решений уравнений Прандтля в быстро осциллирующем магнитном поле // Доклады РАН. 2009. Т. 426, № 4. С. 450—456.

[11] *Романов М. С.* Об усреднении пограничного слоя псевдопластической жидкости в присутствии быстроосциллирующих внешних сил // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2011. Т. 28. С. 300—328.

[12] *Олейник О. А.*, *Самохин В. Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997. 512 с. ISBN 5-02-015202-1.

тах[13,14,15,16,17], в теории псевдопластических жидкостей см. работу[18]. Задачи с малыми параметрами в теории пограничного слоя возникают довольно естественно. Например, в работе[19] для изучения течения несжимаемой жидкости, проходящей сквозь малое отверстие, была использована теория усреднения. В работе[20] было рассмотрено воздействие гармонического осциллятора с быстро меняющимися параметрами на пограничный слой при обтекании пластины. Вопросы обтекания шероховатых пластин с микронеоднородностями изучались в работах[21,22].

В настоящей работе изучается поведение пограничного слоя неоднородной модифицированной жидкости О.А.Ладыженской, проходящей сквозь перфорированную преграду, изготовленную из микропористого материала. Вводится малый параметр, характеризующий микронеоднородную структуру преграды и жидкости.

В последнее время появились работы, посвящённые исследованию задач теории пограничного слоя с малыми параметрами, где выводятся оценки скорости сходимости решений исходных задач к решению соответствующих усреднённых (см., например,[23,24]). Выведение оценок скорости сходимости при стремлении малого параметра к нулю для пограничного слоя жидкости, проходящей через перфорированную преграду, является целью наших дальнейших исследо-

---

[13] *Самохин В. Н.*, *Фадеева Г. М.*, *Чечкин Г. А.* Модификация О.А. Ладыженской уравнений Навье-Стокса и теория пограничного слоя // Вестник МГУП им. Ивана Федорова. 2009. Т. 5. С. 127—143.

[14] *Самохин В. Н.*, *Фадеева Г. М.*, *Чечкин Г. А.* О непрерывной зависимости решения уравнений пограничного слоя от профиля начальных скоростей // Вестник МГУП им. Ивана Федорова. 2010. Т. 4. С. 64—71.

[15] *Самохин В. Н.*, *Фадеева Г. М.*, *Чечкин Г. А.* Асимптотика решений уравнений пограничного слоя обобщённо ньютоновской среды при внешнем течении, близком к симметричному // Проблемы математического анализа. 2011. Т. 59. С. 123—128.

[16] *Самохин В. Н.*, *Фадеева Г. М.*, *Чечкин Г. А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье-Стокса // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2011. Т. 28. С. 329—361.

[17] *Самохин В. Н.*, *Фадеева Г. М.*, *Чечкин Г. А.* Аттракторы системы уравнений пограничного слоя обобщённо ньютоновской среды // Вестник МГУП им. Ивана Федорова. 2011. Т. 1. С. 245—249.

[18] *Романов М. С.* Об усреднении пограничного слоя псевдопластической жидкости в присутствии быстроосциллирующих внешних сил // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2011. Т. 28. С. 300—328.

[19] *Conca C.* On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // J. Math. Pures Appl. 1985. Т. 64, № 1. С. 31—75.

[20] *Рыжов О. С.*, *Савенков И. В.* Пространственные возмущения, вносимые гармоническим осциллятором в пограничный слой на пластинке // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 1988. Т. 28, № 4. С. 591—602.

[21] *Amirat Y.*, *Chechkin G. A.*, *Romanov M. S.* On Multiscale Homogenization Problems in Boundary Layer Theory // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2012. Т. 63. С. 475—502.

[22] *Линкевич А. Ю.*, *Спиридонов С. В.*, *Чечкин Г. А.* О пограничном слое неньютоновской жидкости, обтекающей шероховатую поверхность и проходящей через перфорированную преграду // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 3. С. 93—104.

[23] *Романов М. С.*, *Самохин В. Н.*, *Чечкин Г. А.* О скорости сходимости решений уравнений Прандтля в быстро осциллирующем магнитном поле // Доклады РАН. 2009. Т. 426, № 4. С. 450—456.

[24] *Amirat Y.*, *Chechkin G. A.*, *Romanov M. S.* On Multiscale Homogenization Problems in Boundary Layer Theory // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2012. Т. 63. С. 475—502.

ваний. В настоящей работе мы ограничиваемся только доказательством самого факта сходимости.

Целью данной работы является исследование влияния микрнеоднородностей в граничных условиях на решения систем уравнений пограничного слоя ньютоновских и неньютоновских жидкостей.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Сформулировать задачу, моделирующую то или иное поведение жидкости внутри пограничного слоя.
2. Поставить задачу с малым параметром, определяющим характер микронеоднородностей.
3. Доказать сходимость семейства решений задачи с параметром к решению усреднённой задачи.

Научная новизна:

1. Впервые было рассмотрено влияние микронеоднородностей в начальной скорости потока а также в самом пограничном слое.
2. Были показаны влияния микронеоднородностей пограничный слой жидкости с широким спектром реологических свойств (ньютоновская, неньютоновская жидкость и, в частности, жидкость О.А. Ладыженской).

Практическая значимость. Результаты данного исследования носят теоретических характер. Их можно использовать для построения приближённых решений задач, для которых представляется невозможным или затруднительным точное вычисление краевых условий.

Методы исследования. Для доказательства сходимости был использован подход, предложенный Мизесом, позволяющий свести систему уравнений к одному квазипараболическому уравнению. Далее, для полученной задачи формулируется обобщённая задача и с помощью вариации принципа максимума и системы интегральных оценок доказывается искомая сходимость.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах:

1. Семинар под руководством Чечкина Г.А., МГУ, Механико-математический факультет;
2. Семинар под руководством Жикова В.В. Шамаева А.С. Шапошниковой Т.А. Радкевича Е.В., МГУ, Механико-математический факультет.

Результаты диссертации докладывались также на следующих научных конференциях:

1. Международная конференция “Математические идеи П.Л.Чебышёва и их приложение к современным проблемам естествознания”, Обнинск, Россия, 2006;
2. Международная конференция, посвящённая И.Г.Петровскому (XXII сессия совместных заседаний ММО и семинара им. И.Г.Петровского), МГУ, 2007.

3. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 2010;
4. Международная конференция, посвящённая 110 годовщине выдающегося математика И.Г.Петровскому (XXIII сессия совместных заседаний ММО и семинара им. И.Г.Петровского), МГУ, 2011;
5. Шестая Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, Москва, Россия, 2011;
6. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 2012. -

Публикации.Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, 6 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 6 — в тезисах докладов.

Личный вклад автора.

В совместных работах из реферируемых изданий автору принадлежат следующие результаты:

– Работа 2: доказательство основной теоремы 2 о сходимости.
– Работа 3: доказательство основной теоремы 2 о сходимости.
– Работа 4: доказательство основной теоремы 1.2 о сходимости.
– Работа 5: доказательство основной теоремы 3.1 о сходимости.
– Работа 6: доказательство основной теоремы 2.1 о сходимости.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 97 страниц, включая 10 рисунков. Список литературы содержит 66 наименований.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук профессору Чечкину Григорию Александровичу за постоянное внимание к работе и плодотворное сотрудничество.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена исследованию влияния микронеоднородностей на пограничный слой ньютоновской жидкости.

В первом параграфе первой главы рассматривается задача о продолжении двумерного (плоскопараллельного) стационарного немагнитного пограничного слоя. Она сводится к отысканию решения системы дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$
\begin{gathered}
\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U^\infty \frac{dU^\infty}{dx} \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.
\end{gathered} \tag{2}
$$

в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$
\begin{gathered}
u(0,y) = U(y), u(x,0) = 0, v(x,0) = V(x) \\
u(x,y) \to U^\infty(x) \text{ при } y \to \infty,
\end{gathered} \tag{3}
$$

где плотность жидкости ρ предполагается равной единице, функции $U(y)$, vx, $U^\infty(x)$ известны, при этом $U^\infty(x) \neq 0$ и согласно закону Бернулли $U^{\infty 2}(x) + 2p(x) = C = const$. Далее с помощью замены Мизеса

$$
\begin{gathered}
x = x, \\
\psi = \psi(x,y),
\end{gathered} \tag{4}
$$

где

$$
\begin{gathered}
u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\
v - V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \\
\psi(x,0) = 0,
\end{gathered} \tag{5}
$$

система переводится в квазипараболическое уравнение:

$$
L(w) \equiv \nu\sqrt{w}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - V\frac{\partial w}{\partial \psi} = -2U^\infty \frac{dU^\infty}{dx} \tag{6}
$$

в области $\Omega = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$ с граничными условиями

$$
w(x,0) = 0, w(0,\psi) = W(\psi), w(x,\psi) \to U^{\infty 2}(x) \text{ при } \psi \to \infty, \tag{7}
$$

где $W\left(\int\limits_0^y U(\xi)d\xi\right) \equiv U^2(y)$, с условием согласования:

$$
\nu\sqrt{W}W'' + 2U^\infty(0){U^\infty}_x(0) - V(0)W' = O(\psi) \text{ при } \psi \to 0. \tag{8}
$$

. Ставится задача с параметром:

$$
L_\varepsilon(w_\varepsilon) \equiv \nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - v_\varepsilon\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} = -2U\frac{dU}{dx}, \tag{9}
$$

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, с условиями

$$
w_\varepsilon(x,0) = 0, w_\varepsilon(0,\psi) = w_1(\psi), w_\varepsilon(x,\psi) \to U^2(x) \text{ при } \psi \to \infty, \tag{10}
$$

и уреднённая задача:

$$L_0(w_0) \equiv \nu\sqrt{w_0}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\psi^2} - \frac{\partial w_0}{\partial x} - v_0\frac{\partial w_0}{\partial\psi} = -2U\frac{dU}{dx} \tag{11}$$

с условиями

$$w_0(x,0) = 0, w_0(0,\psi) = w_1(\psi), w_0(x,\psi) \to U^2(x) \text{ при } \psi \to \infty, \tag{12}$$

Формулируется обобщённое решение полученных уравнений и доказывается теорема усреднения:

***Теорема* 1.** *Предположим, что функции $U(x)$, $u_1(y)$, $v_\varepsilon(x)$, $v_0(x)$ при любом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности и $U_x(x) > 0$ при $0 \le x \le X$.*

Тогда решения задачи (9), (10) сходятся к обобщённому решению задачи (11), (12) при $\varepsilon \to 0$, так что $w_\varepsilon \rightrightarrows w_0$ в $\Omega_N = \{0 < x < X, 0 < \psi < N\}$ при любом $N > 0$ и $w_\varepsilon \rightharpoonup w_0$ в $W_2^1(\Omega_N)$.

Во **втором параграфе первой главы** рассматривается течение неоднородной магнитной жидкости вдоль пористой пластины в осциллирующем магнитном поле. Формулируется обобщённое решение. Ставятся задача с параметром:

$$\begin{aligned} L(w_\varepsilon) \equiv \nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2} - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - V_\varepsilon(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi} = \\ = -2{d^{vM}}_\varepsilon(x,\psi)(U^\infty - \sqrt{w_\varepsilon}) - 2U^\infty\frac{dU^\infty}{dx}, \end{aligned} \tag{13}$$

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, с условиями

$$w_\varepsilon(x,0) = 0, w_\varepsilon(0,\psi) = W(\psi), w_\varepsilon(x,\psi) \to {U^\infty}^2(x) \text{ при } \psi \to \infty, \tag{14}$$

и усреднённая задача:

$$\begin{aligned} L(w_0) \equiv \nu\sqrt{w_0}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\psi^2} - \frac{\partial w_0}{\partial x} - V\frac{\partial w_0}{\partial\psi} = \\ = -2{d^{vM}}_0(x,\psi)(U^\infty - \sqrt{w_0}) - 2U^\infty\frac{dU^\infty}{dx} \end{aligned} \tag{15}$$

с условиями

$$w_0(x,0) = 0, w_0(0,\psi) = W(\psi), w_0(x,\psi) \to {U^\infty}^2(x) \text{ при } \psi \to \infty. \tag{16}$$

Формулируется и доказывается теорема усреднения:

Теорема 2. *Предположим, что функции $U^\infty(x)$, $U(y)$, $V_\varepsilon(x)$, $d_\varepsilon(x,y)$ $V(x)$ при любом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ удовлетворяют условиям теоремы существования единственности и $U^\infty{}_x(x) > 0$ при $0 \le x \le X$ и, кроме того, $U(y) < U^\infty(0)$ для любого $y > 0$. Тогда решения задачи (13), (14) сходятся к обобщённому решению задачи (15), (16) при $\varepsilon \to 0$, так что $w_\varepsilon \rightrightarrows w_0$ в $\Omega_N = \{0 < x < X, 0 < \psi < N\}$ при любом $N > 0$ и $w_\varepsilon \rightharpoonup w_0$ в $W_2^1(\Omega_N)$.*

В **третьем параграфе первой главы** изучается течение неоднородной магнитной жидкости сквозь пористую преграду в осциллирующем магнитном поле. Формулируется обобщённое решение. Ставятся задача с параметром:

$$L_\varepsilon(w_\varepsilon) \equiv \nu\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial\psi^2} - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - V\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi} = -2d^{vM}{}_\varepsilon(x,\psi)(U^\infty - \sqrt{w_\varepsilon}) - 2U^\infty\frac{dU^\infty}{dx} \tag{17}$$

в области $\Omega = \{0 < x < X_0, 0 < \psi < \infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x,0) &= 0,\\ w_\varepsilon(0,\psi) &= W_\varepsilon(\psi),\\ w_\varepsilon(x,\psi) &\to U^{\infty 2}(x) \text{ при } \psi \to \infty, \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$W_\varepsilon\left(\int_0^y U_\varepsilon(\eta)d\eta\right) \equiv U_\varepsilon{}^2(y), \tag{19}$$

и условием согласования

$$\nu\sqrt{W_\varepsilon}W_\varepsilon'' + 2U^\infty(0)U^\infty{}_x(0) - V(0)W_\varepsilon' + 2d^{vM}(0,\psi)(U^\infty(0) - \sqrt{W_\varepsilon}) = O(\psi) \tag{20}$$

при $\psi \to 0$, и усреднённая задача:

$$L_0(w_0) \equiv \nu\sqrt{w_0}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\psi^2} - \frac{\partial w_0}{\partial x} - V\frac{\partial w_0}{\partial\psi} = -2d^{vM}(x,\psi)(U^\infty - \sqrt{w_0}) - 2U^\infty\frac{dU^\infty}{dx} \tag{21}$$

в области $\Omega = \{0 < x < X_0, 0 < \psi < \infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} w_0(x,0) &= 0,\\ w_0(0,\psi) &= W_0(\psi),\\ w_0(x,\psi) &\to U^{\infty 2}(x) \text{ при } \psi \to \infty, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$W_0\left(\int_0^y U_0 d\eta\right) \equiv U_0^2(y), \tag{23}$$

и условием согласования:

$$\nu\sqrt{W_0}W_0'' + 2U^\infty(0)U^\infty{}_x(0) - V(0)W_0' + 2d^{vM}(0,\psi)(U^\infty(0) - \sqrt{W_0}) = O(\psi) \tag{24}$$

при $\psi \to 0$. Формулируется и доказывается теорема усреднения:

Теорема 3. *Пусть*

- $\tilde{u}_1(y) > 0$ *при* $y > 0, \tilde{u}_1(0) = 0, \tilde{u}_1'(0) > 0, \tilde{u}_1(y) \to U(0) \neq 0$ *при* $y \to \infty$*;*
- $u_{1\varepsilon}(y) > 0$ *при* $y > 0, u_{1\varepsilon}(0) = 0, u_{1\varepsilon}'(0) > 0, u_{1\varepsilon}(y) \to U(0) \neq 0$ *при* $y \to \infty$*;*
- *функции* dU/dx, $V_0(x)$, $d(x,y)$ *бесконечно дифференцируемы на* $[0,X_0]$*;*
- $\tilde{u}_1(y)$, $\tilde{u}_1'(y)$,$\tilde{u}_1''(y)$ *ограничены при* $0 \leq y < \infty$ *и удовлетворяют условию Гёльдера;*
- $u_{1\varepsilon}(y)$, $u_{1\varepsilon}'(y)$,$u_{1\varepsilon}''(y)$ *ограничены при* $0 \leq y < \infty$ *и удовлетворяют условию Гёльдера;*
- $U_x(x) > 0$ *при* $0 \leq x \leq X$*;*
- $u_{1\varepsilon}(y) < U(0), \tilde{u}_1(y) < U(0)$ *для любых* $y > 0, \varepsilon > 0$.

Тогда для некоторых $X \leq X_0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$

- *обобщённые решения задач* (17) - (20) *для всех* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *и* (21) - (24) *существуют и единственны в* Ω*;*
- *обобщённые решения задачи* (17) - (20) *сходятся к обобщённому решению задачи* (21) - (24) *при* $\varepsilon \to 0$ *так, что* $w_\varepsilon \rightrightarrows w_0$ *в* $\Omega_N = \{0 < x < X, 0 < \psi < N\}$ *при любом* $N > 0$ *и* $w_\varepsilon \rightharpoonup w_0$ *в* $W_2^1(\Omega_N)$.

Четвёртый параграф первой главы по сути представляет собой объединение результатов второго и третьего параграфов.

Вторая глава посвящена исследованию влияния микронеоднородностей на течение пограничного слоя различных неньютоновских жидкостей (дилатантной и жидкости О.А. Ладыженской).

Первый параграф второй главы описывает течение дилатантной жидкости сквозь пористую преграду. Аналогично третьему параграфу первой главы ставится задача с параметром:

$$L(w_\varepsilon) \equiv \frac{\nu}{2^{n-1}}\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\right|^{n-1}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\right) - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - V\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi} + 2U^\infty {U^\infty}_x = 0 \quad (25)$$

в области $\Omega = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$ с условиями

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(0,\psi) &= W_\varepsilon(\psi), \\ w_\varepsilon(x,0) &= 0, \\ w_\varepsilon(x,\psi) &\to {U^\infty}^2(x) \text{ при } \psi \to \infty, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$W_\varepsilon\left(\int_0^y U_\varepsilon(\eta)d\eta\right) \equiv U_\varepsilon^2(y),$$

и усреднённая задача:

$$L(w) \equiv \frac{\nu}{2^{n-1}}\sqrt{w}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial\psi}\right|^{n-1}\frac{\partial w}{\partial\psi}\right) - \frac{\partial w}{\partial x} - V\frac{\partial w}{\partial\psi} + 2U^\infty {U^\infty}_x = 0 \quad (27)$$

в области $\Omega = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$ с условиями

$$\begin{aligned} w(0,\psi) &= W(\psi),\\ w(x,0) &= 0,\\ w(x,\psi) \to U^{\infty 2}(x) \text{ при } \psi &\to \infty, \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$W\left(\int\limits_0^y U(\eta)d\eta\right) \equiv U^2(y).$$

Формулируется и доказывается теорема усреднения:

***Теорема* 4.** *Допустим, выполнены условия теоремы существования и единственности для задач (27) — (28) и (25) — (26). Предположим также, что имеет место равномерная сходимость $U_\varepsilon \to U$ и равномерная по ε оценка $|U_{\varepsilon x}| \leq M$. Тогда w_ε сходится равномерно к w в области $\Omega = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$.*

Во **втором параграфе второй главы** рассматривается та же модель дилатантной жидкости с микронеоднородностями на поверхности обтекаемой пластины. Ставится задача с параметром:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(w_\varepsilon) \equiv &\frac{\nu}{2^{n-1}}\sqrt{w_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\left|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\right|^{n-1}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\right) - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - V\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi} =\\ &= -\,2d^{vM}(x,\psi)(U^\infty - \sqrt{w}_\varepsilon) - 2U^\infty\frac{dU^\infty}{dx} \end{aligned} \tag{29}$$

в области Ω с граничными условиями

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x{,}0) &= 0,\\ w_\varepsilon(0{,}\psi) &= W_\varepsilon(\psi),\\ w_\varepsilon(x{,}\psi) \to (U^\infty)^2(x) \text{ при } \psi &\to \infty, \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} W_\varepsilon\left(\int_0^y U_\varepsilon(\eta)d\eta\right) &\equiv U_\varepsilon^2(y),\\ d^{vM}(x{,}\psi(x,y)) &\equiv d^\varepsilon(x,y), \end{aligned} \tag{31}$$

и условием согласования:

$$\begin{aligned} \frac{\nu n}{2^{n-1}}\sqrt{W_\varepsilon}|W_\varepsilon'|^{n-1}W_\varepsilon'' + 2U^\infty(0)U_x^\infty(0) - V(0)W_\varepsilon' +&\\ +2d^{vM}(0{,}\psi)(U^\infty(0) - \sqrt{\omega_1}) = O(\psi)& \end{aligned} \tag{32}$$

при $\psi \to 0$, и усреднённая задача:

$$L_0(w) \equiv \frac{\nu}{2^{n-1}}\sqrt{w}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\left|\frac{\partial w}{\partial\psi}\right|^{n-1}\frac{\partial w}{\partial\psi}\right) - \frac{\partial w}{\partial x} - V\frac{\partial w}{\partial\psi} = \\ = -2d^{vM}(x,\psi)(U^\infty - \sqrt{w}) - 2U^\infty\frac{dU^\infty}{dx} \tag{33}$$

в области Ω с граничными условиями

$$\begin{aligned} w(x,0) &= 0,\\ w(0,\psi) &= W(\psi),\\ w(x,\psi) &\to (U^\infty)^2(x) \text{ при } \psi\to\infty, \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$W\left(\int_0^y U(\eta)d\eta\right) \equiv U^2(y), \tag{35}$$

и условием согласования

$$\frac{\nu n}{2^{n-1}}\sqrt{W}|W'|^{n-1}W'' + 2U^\infty(0)U_x^\infty(0) - V(0)W' + \\ +2d^{vM}(0,\psi)(U^\infty(0) - \sqrt{\omega_1}) = O(\psi) \tag{36}$$

при $\psi \to 0$. Затем формулируется и доказывается теорема усреднения:

Теорема 5. *Предположим, что*

- $U(y) > 0$ *при* $y > 0, U(0) = 0, U'(0) > 0, U(y) \to U^\infty(0) \neq 0$ *при* $y\to\infty$*;*
- $U_\varepsilon(y) > 0$ *при* $y > 0, U_\varepsilon(0) = 0, U_\varepsilon'(0) > 0, U_\varepsilon(y) \to U^\infty(0) \neq 0$ *при* $y\to\infty$*;*
- $\dfrac{dU^\infty}{dx}$*,* $V(x)$*,* $d(x,y)$ *бесконечно дифференцируемы на* $[0,X_0]$*;*
- $U(y)$*,* $U'(y)$*,*$U''(y)$ *ограничены при* $0 \le y < \infty$ *и удовлетворяют условию Гёльдера;*
- $U_\varepsilon(y)$*,* $U_\varepsilon'(y)$*,*$U_\varepsilon''(y)$ *ограничены при* $0 \le y < \infty$ *и удовлетворяют условию Гёльдера;*
- $U_x^\infty(x) > 0$ *при* $0 \le x \le X$*;*
- $U_\varepsilon(y) < U^\infty(0), U(y) < U^\infty(0)$ *для любых* $y > 0, \varepsilon > 0$*.*
- $V(x) \le 0$*,*
- $U(x) \equiv U^\infty(0)$ *при* $\psi \ge \Psi_0$*,*
- $U_\varepsilon(x) \equiv U^\infty(0)$ *при* $\psi \ge \Psi_0$*,*

Тогда существуют такие $X \le X_0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$*, что*

- *для любого* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *существует единственное обобщённое решение* (29) — (32) *и единственное обобщённое решение задачи* (33) — (36) *в* Ω*;*

– *семейство решений задачи* (29) — (32) *сходится к решению задачи* (33) — (36) *при* $\varepsilon \to 0$ *так, что*

$$w_\varepsilon \rightrightarrows w$$

равномерно в Ω.

Третий параграф второй главы посвящён жидкости О.А. Ладыженской. Рассматривается стационарная система модифицированных уравнений Прандтля:

$$\begin{gathered} \nu \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(1 + k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right) - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{gathered} \tag{37}$$

в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,y) = U(y), \quad u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = V(x), \tag{38}$$

где $(u(x,y), v(x,y))$ — поле скоростей жидкости (продольная и поперечная к обтекаемой поверхности составляющие скорости жидкости в пограничном слое), $(U(y),0)$ — начальная скорость, $(0,V(x))$ — скорость на границе обтекаемой пластинки, $(U^\infty(x),0)$ — скорость основного потока. В результате замены Мизеса задача принимает вид:

$$L(w) := \nu\sqrt{w}\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - V\frac{\partial w}{\partial \psi} + 2U^\infty\frac{dU^\infty}{dx} = 0 \tag{39}$$

в области $G = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$ с условиями

$$w(0,\psi) = W(\psi), \quad w(x,0) = 0, \quad w(x,\psi) \to \left(U^\infty\right)^2(x), \text{ при } \psi \to +\infty, \tag{40}$$

где функция $W(\psi)$ определяется из уравнения

$$W\left(\int_0^y U(\eta)d\eta\right) \equiv U^2(y).$$

Рассматривается семейство задач с параметром:

$$L(w_\varepsilon) = 0 \tag{41}$$

в области $\Omega = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$ с условиями

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(0,\psi) &= W_\varepsilon(\psi), \\ w_\varepsilon(x,0) &= 0, \\ w_\varepsilon(x,\psi) \to (U^\infty)^2(x) &\text{ при } \psi \to \infty, \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$W_\varepsilon\left(\int\limits_0^y U_\varepsilon(\eta)d\eta\right) \equiv U_\varepsilon^2(y),$$

ставится и доказывается теорема усреднения:

Теорема 6. *Допустим, выполнены условия теоремы существования и единственности для задач* (39) — (40) *и* (41) — (42). *Предположим также, что имеет место равномерная сходимость* $U_\varepsilon \to U$ *и равномерная по* ε *оценка* $\left|\dfrac{dU_\varepsilon}{dx}\right| \leq M$. *Тогда* w_ε *сходится равномерно к* w *в области* $\Omega = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. *Spiridonov S. V.* Homogenization of a stratified magnetic fluid problem with microinhomogeneous magnetic field and boundary data // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 165, issue 1. P. 158–170. DOI: 10.1007/s10958-010-9786-3
2. *Spiridonov S. V.*, *Chechkin G. A.* Percolation of the boundary layer of a newtonian fluid through a perforated obstacle // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 166, issue 3. P. 328–337. DOI: 10.1007/s10958-010-9870-8

   В работе [2] Спиридонову С.В. принадлежит доказательство основной теоремы 2 о сходимости.

3. *Линкевич А. Ю.*, *Спиридонов С. В.*, *Чечкин Г. А.* О пограничном слое неньютоновской жидкости, обтекающей шероховатую поверхность и проходящей через перфорированную преграду // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 3. С. 93—104

   В работе [3] Спиридонову С.В. принадлежит доказательство основной теоремы 2 о сходимости.

4. On a Thin Layer of Non-Newtonian Fluid on Rough Surface Percolating through Perforated Obstacle / A. Y. Linkevitch, S. V. Spiridonov, T. S. Ratiu, G. A. Chechkin // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 189, issue 3. P. 525–535. DOI: 10.1007/s10958-013-1204-1

   В работе [4] Спиридонову С.В. принадлежит доказательство основной теоремы 1.2 о сходимости.

5. *Linkevich A. Y.*, *Spiridonov S. V.*, *Chechkin G. A.* Homogenization of Stratified Dilatant Fluid // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 202, issue 6. P. 849–858. DOI: 10.1007/s10958-014-2081-y

   В работе [5] Спиридонову С.В. принадлежит доказательство основной теоремы 3.1 о сходимости.

6. Усреднение модифицированной жидкости О.А.Ладыженской, протекающей через пористую преграду / А. Ю. Линкевич, В. Н. Самохин, С. В. Спиридонов, Г. А. Чечкин // Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела. 2016. № 2. С. 25—35

   В работе [6] Спиридонову С.В. принадлежит доказательство основной теоремы 2.1 о сходимости.

Остальные публикации автора по теме диссертации

7. *Спиридонов С. В.*, *Чечкин Г. А.* Асимптотическое поведение решений стационарной системы уравнений пограничного слоя для магнитной жидкости // Тезисы докладов III международной конференции “Математические идеи П.Л.Чебышёва и их приложение к современным проблемам естествознания”. Обнинск, Россия, 05.2006. С. 121—122
8. *Спиридонов С. В.* Усреднение решений стационарной системы уравнений пограничного слоя для магнитной жидкости // Международная конференция, посвящённая И.Г.Петровскому (XXII сессия совместных заседаний ММО и семинара им. И.Г.Петровского): Тезисы докладов. Москва : Изд-во МГУ, 05.2007. С. 379
9. *Spiridonov S. V.*, *Chechkin G. A.* Homogenization of Stratified Boundary Layer of Viscous Fluid Percolated Through Perforated Obstacle // In: Book of Abstracts of the International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems (July 2 – July 7, 2010, Suzdal, Russia). Moscow: Steklov Mathematical Institute Press, 2010. P. 76–77
10. *Spiridonov S.* The boundary layer flowing through a porous barrier // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2011. Vol. 2, no. 1. P. 1–16
11. *Линкевич А. Ю.*, *Спиридонов С. В.*, *Чечкин Г. А.* Об асимптотическом поведении решений системы уравнений Прандтля для стратифицированной магнитной жидкости // Международная конференция, посвящённая 110 годовщине выдающегося математика И.Г.Петровскому (XXIII сессия совместных заседаний ММО и семинара им. И.Г.Петровского): Тезисы докладов. - М.: Изд-во МГУ и ООО “ИНТУИТ.РУ”. 2011. С. 424
12. *Линкевич А. Ю.*, *Спиридонов С. В.*, *Чечкин Г. А.* Об оценках решений системы уравнений Прандтля для микронеоднородной стратифицированной жидкости // Abstracts of the Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Peoples’ Friendship University of Russia Press, 08.2011. С. 97—98
13. *Linkevitch A. Y.*, *Spiridonov S. V.*, *Chechkin G. A.* On Filtration of Nonnewtonian Fluid Passing Rough Surface, Through Perforated Obstacle // In: Book of Abstracts of the International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems (June 29 – July 4, 2012, Suzdal, Russia). Moscow: Steklov Mathematical Institute Press, 2012. P. 106–107

Спиридонов Сергей Викторович

О СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________