МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.957

Булатова Регина Рашидовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В МОДИФИКАЦИИ ЛАДЫЖЕНСКОЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В.Ломоносова

Научные руководители:	Доктор физ.-мат. наук, профессор **Самохин Вячеслав Николаевич**
	Доктор физ.-мат. наук, профессор **Чечкин Григорий Александрович**
Официальные оппоненты:	**Панкратов Леонид Сергеевич,** Доктор физ.-мат. наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт», доцент кафедры высшей математики
	Спиридонов Сергей Викторович, Кандидат физ.-мат. наук, ООО "Мэйл.Ру Девелопмент", технический директор
Ведущая организация:	Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

Защита состоится 19 июня 2020 г. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном Университете им. А.Г. и Н.Г. Столетовых по адресу: 600024, РФ, Владимир, проспект Строителей, 11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Владимирского государственного Университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых и на сайте http://diss.vlsu.ru/.

Автореферат разослан 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.025.08,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Представленная работа является дальнейшим развитием предложенной Людвигом Прандтлем[1] теории пограничного слоя, которая изучает движение вязких сплошных сред в окрестности твёрдой поверхности. Прандтль составил систему уравнений, которой в первом приближении удовлетворяет скорость течения жидкости в пограничном слое, и которая стала основой теории пограничного слоя. Эта система выводится из уравнений Навье–Стокса при некоторых предположениях и является её упрощением.

Теория пограничного слоя, изучающая движение вязких сплошных сред в окрестности твердой поверхности, составляет один из важнейших разделов гидродинамики и содержит ряд задач, относящихся к теории дифференциальных уравнений и систем с частными производными. В случае двумерного нестационарного пограничного слоя уравнения Прандтля имеют вид

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = -\frac{1}{\rho}p_x + \nu u_{yy}, \\ u_x + v_y = 0, \end{cases}$$

Здесь $\nu > 0$ – кинематический коэффициент вязкости жидкости, u и v – продольная и поперечная к обтекаемой поверхности составляющие скорости жидкости в пограничном слое, ρ – плотность жидкости, p – давление. Теории пограничного слоя посвящено большое количество трудов, которые содержат теоретические и экспериментальные исследования, см., например, обзоры списка литературы в работах[2,3] .

Идея Прандтля о возможности пренебречь вязкостью вне пограничного слоя дала новый толчок в развитии гидродинамики и оказалась очень продуктивной и применимой также для описания пограничного слоя реологически более сложных сред, чем ньютоновская. Методы и подходы Прандтля в дальнейшем были развиты и неоднократно применялись в работах[4,5,6,7,8,9].

[1] *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibund // Verh. Int. Math. Kongr. Heidelberg. 1904. C. 484—494.

[2] *Schlichting H.* Теория пограничного слоя. М.: Мир, 1969. 744 с.

[3] *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 477 с.

[4] *Leray J.* Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'esoace // Acta Math. 1934. № 63. С. 331—418.

[5] *Gersten K.*, *Schlichting H.* Boundary-Layer Theory. Berlin: Springer, 2000.

[6] *Temam R.*, *Wang X.* Remarks on the Prandtl equation for a permeable wall // Z. Angew. Math. Mech. 2000. Т. 80, № 11/12. С. 835—834.

[7] *Олейник О. А.* Об отрыве пограничного слоя для плоскопараллельного стационарного течения несжимаемой жидкости // Механика сплошной среды и родственные вопросы анализа: Сб.к 80-летию Н.И. Мусхелишвили. 1970. С. 390—406.

[8] *Lopez Filho M. C.* Boundary layers and the vanishing viscosity limit for incompressible 2D flow // Morningside Lect. Math. / под ред. S. I. Press. 2012. Т. 1. С. 1—29.

[9] *Олейник О. А.* К математической теории пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости // ПММ. 1966. Т. 30, № 5. С. 801—821.

Некоторые вопросы о продолжении пограничного слоя при просачивании через пористые преграды, оценки скорости сходимости при измельчении пор и другие вопросы асимптотического анализа в теории пограничного слоя рассмотрены в[10,11,12].

С начала 60-х годов теория пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости тщательно изучалась О.А. Олейник . Ей принадлежат фундаментальные результаты, которые положили начало развитию математической теории. В работах[13,14,15] впервые была доказана корректная разрешимость основных краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Прандтля. Основную задачу теории пограничного слоя для стационарного движения несжимаемой жидкости Олейник О.А. рассмотрела в работе[16]. Так же в работах[17,18,19] Олейник вывела условия отрыва пограничного слоя и существования безотрывных течений, а также показала достаточное условия отрыва пограничного слоя при инъекции сплошной среды через проницаемую поверхность.

В свою очередь, отрыва пограничного слоя можно избежать, подействовав на него достаточно сильным поперечным магнитным полем. Воздействие достаточно сильного внешнего магнитного поля, поперечного потоку электропроводной среды, дает возможность предотвратить возникновение турбулентности, кавитации и других явлений, нарушающих ламинарность потока и заполнение жидкой средой полного сечения трубопроводов.

---

[10] *Линкевич А. Ю.*, *Самохин В. Н.*, *Спиридонов С. В.* Чечкин Г. А. Усреднение модифицированной жидкости О.А. Ладыженской, протекающей через пористую преграду // Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела. 2016. Т. 2. С. 25—35.

[11] *Романов М. С.* Об усреднении пограничного слоя псевдопластической жидкости в присутствии быстроосциллирующих внешних сил // Труды семинара им. И.Г.Петровского. 2011. Т. 28. С. 300—328.

[12] *Линкевич А. Ю.*, *Спиридонов С. В.*, *Чечкин Г. А.* О пограничном слое ньютоновской жидкости, обтекающей шероховатую поверхность и проходящей через перфорированную преграду // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 3. С. 93—104.

[13] *Олейник О. А.* О системе уравнений Прандтля в теории пограничного слоя // ДАН СССР. 1963. Т. 150, № 1. С. 28—32.

[14] *Олейник О. А.* К математической теории пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости // ПММ. 1966. Т. 30, № 5. С. 801—821.

[15] *Олейник О. А.* О системе уравнений теории пограничного слоя // Ж. выч.мат. и мат.физ. 1963. Т. 3, № 3. С. 489—507.

[16] *Олейник О. А.* О системе уравнений теории пограничного слоя // Ж. выч.мат. и мат.физ. 1963. Т. 3, № 3. С. 489—507.

[17] *Олейник О. А.* О системе уравнений Прандтля в теории пограничного слоя // ДАН СССР. 1963. Т. 150, № 1. С. 28—32.

[18] *Олейник О. А.*, *Самохин В. Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997. 512 с. ISBN 5-02-015202-1.

[19] *Олейник О. А.* Об отрыве пограничного слоя для плоскопараллельного стационарного течения несжимаемой жидкости // Механика сплошной среды и родственные вопросы анализа: Сб.к 80-летию Н.И. Мусхелишвили. 1970. С. 390—406.

Подробное изложение вопросов магнитогидродинамического (МГД) пограничного слоя можно найти в работах[20,21,22].

На основе аксиом Прандтля для неньютоновских жидкостей можно также вывести систему уравнений, обобщающую классическую систему пограничного слоя, которая применяется для описания движения вязких сред со сложной реологией. Одна из возможных модификаций уравнений Навье – Стокса была предложена О.А. Ладыженской[23]. Эта новая система уравнений имеет более сложную структуру, чем классическая, но при определенных предположениях к ней можно применить теорию Прандтля и вывести уравнения, описывающие движение сплошной среды в тонком слое, непосредственно примыкающем к обтекаемой поверхности. При этом, предложенная модель Ладыженской предполагает, что реологический закон для рассматриваемой среды нелинеен и является обобщением реологического уравнения Ньютона. Таким образом, динамика жидкости описывается системой уравнений, обобщающей уравнения Навье–Стокса и имеющей вид

$$\begin{cases} -\nu \sum_{j=1}^{3} \Big[(1 + d\mathbf{v}^2(\mathbf{u}))\mathbf{v}_{ij}(\mathbf{u}) \Big]_{x_j} + \sum_{j=1}^{3} u_j u_{i x_j} = -\frac{1}{\rho} p_{x_i}, \\ \sum_{j=1}^{3} u_{j\, x_j} = 0. \end{cases},$$

где $i = 1,2,3,\qquad \mathbf{v}_{ij}(\mathbf{u}) = u_{i x_j} + u_{j\, x_i},\qquad \mathbf{v}^2(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{v}_{ij}^2(u)$, ν — кинематическая вязкость среды, d — малая положительная постоянная. Предполагается, что ν и d — величины одного порядка. При этих условиях, с помощью процедуры, предложенной Прандтлем (см.[24]), из системы уравнений, модель которой была предложена Ладыженской, можно вывести систему, которая описывает динамику маловязкой среды вблизи обтекаемой поверхности и называется системой уравнений пограничного слоя. В двумерном случае она имеет вид

$$\begin{cases} \nu\big(1 + 3d(u_y)^2\big)u_{yy} - uu_x - vu_y = -UU_x, \\ u_x + v_y = 0. \end{cases}$$

---

[20] *Самохин В. Н.* Математические вопросы магнитной гидродинамики неньютоновских сред. М.: МГУП, 2004.

[21] *Суслов А. И.* О системе уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя // М.: Вестн. МГУ. Сер.мат., мех. 1974. № 2. С. 62—70.

[22] *Булатова Р. Р., Самохин В. Н., Чечкин Г. А.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Проблемы математического анализа. 2018. Т. 92. С. 83—100.

[23] *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука: Физматлит, 1970.

[24] *Олейник О. А., Самохин В. Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997. 512 с. ISBN 5-02-015202-1.

Данная задача о продолжении модифицированного пограничного слоя для стационарных плоскопараллельных течений изучена в работах[25,26] на основе сведения системы к одному квазилинейному вырождающемуся уравнению (результаты по вырождающимся уравнениям см.[27,28]).

Результаты настоящей работы являются продолжением и обобщением исследований математических задач пограничного слоя вязкой жидкости в модификации О.А. Ладыженской. Разобраны новые случаи, для которых применены как стандартные, так и новые методы исследования.

Актуальность диссертационной работы заключается в совершенствовании способов и методов управления пограничного слоя вблизи твердой поверхности, являющихся неотъемлемой частью развития современных технологий, используемых в судо- и авиастроении.

Целью работы является исследование задач пограничного слоя реологически сложных сред, корректная разрешимость начально-краевых и краевых задач для системы типа Прандтля.

Кроме того, настоящая работа содержит построение асимптотик полученных решений и исследование устойчивости решений нестационарных задач при возмущении некоторых начальных параметров.

Также целью диссертации является исследование поведения электропроводящей жидкости под воздействием поперечного магнитного поля.

Методы исследования. Методы исследования различных задач для системы уравнений пограничного слоя, применяемые в настоящей работе, основаны на преобразованиях Мизеса и Крокко, которые приводят систему уравнений типа Прандтля к одному квазилинейному параболическому уравнению. Также в диссертации используются методы эллиптической регуляризации, методы последовательных приближений, качественной теории дифференциальных операторов в частных производных, функционального анализа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные научные результаты:

– для системы уравнений МГД–пограничного слоя получена корректная разрешимость краевых задач, исследовано влияние поперечного магнитного поля на динамику электропроводящей жидкости;

[25] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Модификация О.А. Ладыженской уравнений Навье–Стокса и теория пограничного слоя // Вестник. МГУП. 2009. № 5. С. 127—143.

[26] *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Труды семинара им. Петровского. 2011. Т. 28, № 5. С. 329—361.

[27] *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 316 с.

[28] *Amaziane B., Pankratov L., Piatnitski A.* The existence of weak solutions to immiscible compressible two–phase flow in porous media: the case of fields with different rock–types // Discrete Continuous and Dynamical Systems. Ser. B. 2013. Т. 15, № 5. С. 1217—1251.

– для системы уравнений симметричного пограничного слоя доказана теорема о существовании и единственности решения задачи, построены асимптотические ряды, представляющие решения уравнений;
– исследована задача симметричного МГД–пограничного слоя в окрестности носовой точки;
– изучен случай нестационарного симметричного пограничного слоя реологически сложных сред, получено доказательство устойчивости решений при определенных изменениях начальных данных задачи.

Теоретическая и практическая значимость. Предлагаемая работа носит теоретический характер и может быть использована в различных разделах качественной теории дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, механики сплошных сред.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара под руководством Чечкина Г.А.

Также результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

1. XXIV международная конференция «Математика. Экономика. Образование», ЮФУ, Краснодарский край, Россия, (27 мая - 3 июня 2016);
2. VI Congress of the Turkic world mathematical society, Astana, Kazakhstan, (October 2-5 2017);
3. 60-я научная конференция МФТИ, Москва, Долгопрудный, Жуковский, Россия, (20-26 ноября 2017);
4. «Ломоносов 2018», Москва, Россия, МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия, (9-13 апреля 2018);
5. Международная конференция «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXIX», посвященная 90-летию В.А.Ильина, МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и Кибернетики, Россия, (2-6 мая 2018);
6. Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, (6-11 июля 2018);
7. Воронежская Зимняя Математическая Школа «Современные Методы Теории Функций и Смежные Проблемы», Воронеж, Россия, (28 января - 2 февраля 2019);
8. Всероссийская научно-практическая конференция «Наука-общество-технологии 2019», Москва, Россия, (26 февраля 2019);
9. Понтрягинские чтения XXX в рамках Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач», г. Воронеж, Россия(3-8 мая 2019);

10. Международная научно-практическая конференция «Современные тенденции развития науки и образования: теория и практика», г. Москва, Россия, (20 июня 2019).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 19 публикациях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 14 — в прочих научных журналах и материалах конференций.

Личный вклад автора.

В совместных работах из реферируемых изданий автору принадлежат следующие результаты:

– Работа 2: доказательство теоремы 5 о безотрывности течения.
– Работа 3: доказательство теоремы 5 о безотрывности течения.
– Работа 4: доказательство основной теоремы существования.
– Работа 5: доказательство основной теоремы существования и единственности.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы и списка литературы, включающего 64 наименования. Общий объем диссертации составляет 135 страниц.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Чечкину Григорию Александровичу и доктору физико-математических наук, профессору Самохину Вячеславу Николаевичу за постоянное внимание к работе и плодотворное сотрудничество.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, сформулированы научная новизна и практическая значимость поставленной работы.

Первая глава посвящена изучению задачи о продолжении двумерного стационарного пограничного слоя модифицированной жидкости О.А.Ладыженской под действием поперечного магнитного поля. Исследуется характер поведения сплошной среды в момент влияния электромагнитных сил. Рассматривается система

$$\begin{cases} \nu\big(1+3d(u_y)^2\big)u_{yy} - uu_x - vu_y + B^2\big(U-u\big) = -UU_x, \\ u_x + v_y = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь ν – кинематическая вязкость среды и d – малая положительная постоянная, которые зависят от свойств жидкости, плотность жидкости ρ и проводимость среды σ предполагаются равными единице, $B(x)$, $U(x)$ — заданные функции. Функция $U(x)$ связана с давлением $p(x)$ и компонентами электромагнитного поля $B(x)$ соотношением

$$U(x)U_x(x) = -p_x(x) - EB(x) - B^2(x)U(x).$$

Система уравнений (1) рассматривается в области $D = \{0 < x < X,\, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,y) = u_0(y),\; u(x,0) = 0,\;\; v(x,0) = v_0(x),\;\; u(x,y) \rightrightarrows U(x) \text{ при } y \to \infty. \quad (2)$$

Функции $v_0(x), u_0(x)$ предполагаются заданными. Случаю задачи о продолжении пограничного слоя соответствует условие $u(0,y) = u_0(y)$, при $y > 0$, если $u_0(y) > 0$.

Определение 1. *Классическим решением* задачи (1), (2) называются функции $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, обладающие следующими свойствами: u и v — непрерывны в $\overline{D}$, имеют в D непрерывные производные, входящие в уравнение (1); удовлетворяют поточечено уравнениям (1) и условиям (2). Вводятся условия гладкости:

$u_0(y) > 0$ при $y > 0$;
$u_0(0) = 0, u_0'(0) > 0$;
$u_0(y) \to U(0)$ при $y \to \infty$;
$U_x(x), v_0(x), B(x)$ – непрерывно дифференцируемы при $x \in [0,X]$;
$u_0(y), u_0'(y), u_0''(y)$ ограничены при $0 \le y < \infty$ и непрерывны по Гёльдеру.

А так же при $y \to 0$ в точке $(0,0)$ выполняется условие согласования:

$$\nu\big(1 + 3d(u_y)^2\big)u_{yy} - v_0(0)u_{0y} + B^2(0)\big(U(0) - u_0(y)\big) + U(0)U_x(0) = O(y^2).$$

Главной целью данной главы является доказательство теоремы существования и единственности решений основных краевых задач для системы уравнений пограничного слоя. Доказательство корректной разрешимости проводится на основе преобразования, предложенного Мизесом, которое сводит систему уравнений (1) с условиями (2) к одному квазилинейному дифференциальному уравнению с помощью замены:

$$x = x, \quad \psi = \psi(x,y), \quad w(x,\psi) = u^2(x,y), \quad (3)$$

где $u(x,y) = \psi_y, \quad v(x,y) - v_0(x) = -\psi_x, \quad \psi(x,0) = 0.$

Новое уравнение выглядит следующим образом:

$$\nu\sqrt{w}\big(1 + \frac{3}{4}d(w_\psi)^2\big)w_{\psi\psi} - w_x - v_0 w_\psi + 2B^2(U - \sqrt{w}) = -2UU_x \quad (4)$$

в области $G = \{0 < x < X, \quad 0 < \psi < \infty\}$ с условиями

$$w(0,\psi) = w_0(\psi), \quad w(x,0) = 0, \qquad w(x,\psi) \rightrightarrows U^2(x) \text{ при } \psi \to \infty. \quad (5)$$

Функция $w_0(\psi)$ определяется из уравнения $w_0\left(\int\limits_0^y u_0(\eta)d\eta\right) \equiv u_0^2(y)$.

Определение 2. *Решением задачи* (4), (5) называется неотрицательная функция $w(x,\psi)$, которая непрерывна в $\overline{G}$, имеет в G непрерывные производные, входящие в уравнение (4); удовлетворяет уравнению (4) и условиям (5).

Далее доказывается эквивалентность решений поставленной задачи и задачи (1), (2) в новых переменных. Ставится задача о существовании и единственности решения в переменных x, ψ. Приводятся вспомогательные леммы и оценки полученных решений задачи, на основании которых доказываем следующие теоремы.

Теорема 1.(Существование) *Пусть выполнены условия гладкости и согласования относительно функций $U(x), u_0(y), v_0(x)$. Тогда задача* (4), (5) *при некотором X имеет в области $G = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$ решение $w(x,\psi)$, обладающее следующими свойствами: $w(x,\psi)$ ограничена в $\overline{G}$, $w(x,\psi) > 0$ при $\psi > 0$,*

$$\left|w_\psi\right| \le M, \quad \left|\sqrt{w}w_{\psi\psi}\right| \le M \text{ в } G, \quad \left|w_x\right| \le M\psi^{1-\beta},$$

$$w_\psi \ge m > 0 \text{ при } 0 \le \psi \le k, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2},$$

где положительные постоянные M, m, k зависят только от X, $U(x)$, $v_0(x)$, $u_0(y)$. Если $\big(U_x(x)+B^2(x)\big) \ge 0$ и $v_0(x) \le 0$ либо $\big(U_x(x)+B^2(x)\big) > 0$, то такое решение существует в G при любом $X > 0$.

Теорема 2. (Единственность) *Решение $w(x,\psi)$ задачи* (4), (5) *непрерывное и ограниченное в $\overline{G}$, удовлетворяющее дополнительным неравенствам $k_1\psi \le w(x,\psi) \le k_2\psi$ при $\psi \le \psi_1$; $w(x,\psi) \ge a > 0$ при $\psi \ge k$; $\sqrt{w}w_{\psi\psi} \le M$, является единственным в $\overline{G}$, где k_1, k_2, k, M — некоторые положительные постоянные.*

Теоремы существования и единственности решения задачи в декартовых координатах получаются с помощью обратной замены переменных, как следствие теорем существования единственности решения задачи пограничного слоя в переменных (3) . Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. (Существование) *В области D при некотором $X > 0$ задача* (1), (2) *имеет решение (u, v), обладающее свойствами: u ограничена в D; $u > 0$ при $y > 0$; $u_y > m > 0$ при $0 \le y \le y_0$; $m, y_0 = const$; u_y, u_{yy} ограничены и непрерывны в любой конечной подобласти D. Решение задачи* (1), (2) *существует для любого $X > 0$ при условии*

$$\big(U_x(x) + B^2(x)\big) \ge 0 \text{ и } v_0(x) \le 0 \quad \text{или} \quad \big(U_x(x) + B^2(x)\big) \ge \alpha = const > 0.$$

Теорема 4. (Единственность) *Пусть (u,v) — решение задачи* (1), (2), *для которого выполняются дополнительные неравенства $0 < u < C$ при $y > 0$; $k_1 y \le u \le k_2 y$ при $0 < y < y_0$, $u_{yy} \le k_3$ в D, где C, k_j, y_0 — некоторые положительные постоянные. Тогда решение (u, v) задачи* (1), (2) *единственно.*

Устанавливается характер поведения сплошной среды в присутствии магнитного поля. Доказана теорема, в которой показано влияние магнитного поля на положение точки отрыва пограничного слоя от твердой обтекаемой поверхности.

В теореме 3 утверждается безотрывность течения при $\big(U_x(x) + B^2(x)\big) \geq \alpha$, где $\alpha = const > 0$, что достигается при сильном поперечном магнитном поле независимо от знака $U_x(x)$, если эта производная ограничена, то есть для любого $X > 0$ решение системы уравнений пограничного слоя существует при этих условиях в области D. Если же эти условия не выполнены, то $X > 0$ ограничено сверху, и происходит явление отрыва пограничного слоя.

Определение 3. *Точкой отрыва* пограничного слоя называется такая точка x_0, что $u_y(x_0, 0) = 0$ и $u_y(x, 0) > 0$ при $0 < x < x_0$. Тогда x_0 — верхняя грань таких $X > 0$, что в области D задача (1), (2) имеет решение (u, v), такое, что $u_y(x,0) > 0$.

Теорема 5. *Если решение задачи* (1), (2) *существует в области* $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$, *то* $X < x_0$, *где* x_0 *определяется следующими условиями*

$$\max_y u_0^2(y) - \int\limits_0^{x_0} \Big(- 2U(x)U_x(x) - 2B^2(x)U(x)\Big)\, dx = 0 \quad \text{и} \quad U_x(x_0) < 0.$$

Во **второй главе** изучается система уравнений симметричного пограничного слоя вязкой жидкости с нелинейным реологическим законом О.А. Ладыженской. Мы применяем здесь преобразование Крокко, которое переводит систему уравнений пограничного слоя в квазилинейное уравнение, при этом появляется возможность изучать как стационарный, так и нестационарный пограничный слой, в отличие от преобразования (3). Кроме того, получены асимптотические оценки решения.

Ставится задача о движении несжимаемой модифицированной жидкости в пограничном слое плоскопараллельного симметрического течения. В случае двумерного стационарного течения модифицированная система уравнений пограничного слоя имеет вид:

$$\begin{cases} \nu\Big(1 + 3d\big(u_y\big)^2\Big)u_{yy} - uu_x - vu_y = -UU_x, \\ u_x + v_y = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь ν, d – постоянные, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ предполагается равной единице, $U(x)$ – заданная функция, связанная с давлением $p(x)$ соотношением Бернулли $U^2(x)+2p(x) = const$. Система уравнений (6) рассматривается в области $D = \{0 < x < X,\, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \;\; u(x, 0) = 0, \;\; v(x, 0) = v_0(x), \;\; u(x, y) \rightrightarrows U(x) \text{ при } y \to \infty, \tag{7}$$

где $U(0) = 0$, $U(x) > 0$ при $x > 0$. Пусть $U_x(x)$ измерима и ограничена, $U_x(0) > 0$, функция $v_0(x)$ предполагается заданной.

Определение 4. *Классическим решением* задачи (6), (7) называются функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, обладающие следующими свойствами: u непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, v непрерывна в D, а по y в $\overline{D}$; u и v имеют в D непрерывные производные, входящие в уравнение (6); удовлетворяют поточечно уравнениям (6) и граничным условиям (7).

Используя идею Крокко, вводим новые переменные, которые сводят систему уравнений к квазилинейному параболическому уравнению, с помощью которого доказывается теорема существования и единственности решения поставленной задачи в декартовых координатах.

С помощью новых переменных и новой неизвестной функции

$$\xi = x, \qquad \eta = \frac{u(x,y)}{U(x)}, \qquad w(\xi,\eta) = \frac{u_y(x,y)}{U(x)} \tag{8}$$

задача (6), (7) сводится к некоторой вспомогательной краевой задаче для квазилинейного уравнения

$$\nu\big(1+3dU^2w^2\big)w^2w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + (\eta^2-1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w + 6\nu dU^2 w_\eta^2 w^3 = 0 \tag{9}$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X,\ 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$w(\xi,1) = 0, \quad \Big(\nu\big(1+3dU^2w^2\big)ww_\eta - v_0(\xi)w + U_\xi\Big)\Big|_{\eta=0} = 0. \tag{10}$$

Определение 5. Функция $w(\xi,\eta)$ называется *решением задачи* (9), (10), если: w непрерывна в $\overline{\Omega}$ и имеет непрерывные производные $w_\xi, w_\eta, w_{\eta\eta}$ в Ω; w_η непрерывна по η при $\eta = 0$; w удовлетворяет уравнению (9) в Ω и граничным условиям (10).

Пусть $Y(\eta)$ — решение граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$L(Y) \equiv \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + (\eta^2-1)aY_\eta - \eta a Y = 0, \quad 0 < \eta < 1 \tag{11}$$

с граничными условиями

$$l(Y) \equiv \Big(\nu Y Y_\eta - bY + a\Big)\Big|_{\eta=0} = 0, \qquad Y(1) = 0, \tag{12}$$

которое используем для оценки полученных решений искомой задачи. $a > 0$, b — некоторые константы.

В дальнейшем через M и N будем обозначать разные положительные постоянные.

Устанавливаются теоремы существования и единственности решения задачи (9), (10).

Теорема 6. *Пусть $U(x)$ и $v_0(x)$ удовлетворяют предположениям, приведённым выше. Тогда задача* (9), (10) *в области* Ω, *где* X *зависит от* U, v_0, ν, *имеет решение* $w(\xi,\eta)$, *положительное при* $\eta < 1$, *ее производные* w_ξ, w_η, $w_{\eta\eta}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$Ye^{-N\xi} \le w \le Ye^{N\xi}, \qquad Y_\eta e^{N\xi} \le w_\eta \le Y_\eta e^{-N\xi},$$

$$\left|w_\xi\right| \le NY, \qquad -N \le ww_{\eta\eta} \le -N,$$

где N *— некоторые положительные постоянные. В любой замкнутой области, лежащей внутри* Ω, *функция* w *и ее производные, входящие в уравнение* (9), *удовлетворяют условию Гёльдера.*

Теорема 7. *Задача* (9), (10) *в области* Ω *может иметь лишь одно неотрицательное решение* w, *такое, что* $w > 0$ *при* $\eta = 0$.

Теорема существования решения задачи в новых переменных ξ, η доказывается на основе метода прямых, то есть дискретизацией по ξ и заменой уравнения (9) системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приводится обоснование теоремы существования и единственности решения задачи в новых переменных, основанное на вспомогательных утверждениях.

Основной результат о существовании и единственности решения поставленной задачи симметричного пограничного слоя получается с помощью обратной замены независимых переменных $\xi = x$, $\eta = \dfrac{u(x,y)}{U(x)}$ и новой неизвестной функции $w(\xi{,}\eta) = \dfrac{u_y(x{,}y)}{U(x)}$.

Теорема 8. *Предположим, что* $U(x) = x\big(a + xa_1(x)\big)$, $v_0(x) = b + xb_1(x)$, *где* $a = const > 0$, $b = const$; $U(x) > 0$ *при* $x > 0$; $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $a_{1xx}(x)$, $b_1(x)$, $b_{1x}(x)$ *ограничены. Тогда задача* (6), (7) *в области* D *при* X, *зависящем от* $U(x)$ *и* $v_0(x)$, *имеет решение* (u,v), *которое обладает свойствами:* $u_y > 0$ *при* $y \ge 0$, $x > 0$; $\dfrac{u}{U}$, $\dfrac{u_y}{U}$ *ограничены и непрерывны в* $\overline{D}$; $u > 0$ *при* $y > 0$, $x > 0$; $u(x{,}y) \to U(x)$ *при* $y \to \infty$, $u(x{,}0) = u(0{,}y) = 0$; $\dfrac{u_y}{U} > 0$ *при* $y \ge 0$; $\dfrac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; u_{yyy} *ограничена в* $\overline{D}$; u_{xy} *ограничена в* D *при ограниченных* y; u_{xy} *и* u_{yyy} *непрерывны в* $\overline{D}$; $\dfrac{u_{yy}}{u_y}$ *непрерывна в* $\overline{D}$ *по* y; *имеют место оценки*

$$UY\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{-Nx} \le u_y \le UY\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{Nx}, \quad Y_\eta\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{Nx} \le \frac{u_{yy}}{u_y} \le Y_\eta\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{-Nx},$$

$$\exp\Big[-\frac{M^2}{4}y^2e^{2Nx}\Big] \le 1 - \frac{u}{U} \le \exp\Big[-\frac{M^2}{4}y^2e^{-2Nx}\Big],$$

где M *и* N *— положительные постоянные.*

Теорема 9. *Пусть* (u, v) — *решение задачи* (6), (7) *такое, что:* u_x *непрерывна по* y *при* $y = 0$; $\dfrac{u_{yyy}u_y - u_y^2}{u_y^2} \leq 0$. *Тогда* (u, v) — *единственное решение задачи* (6), (7).

Найден главный член асимптотики полученных оценок функций $w(\xi,\eta)$ и $u_y(x,y)$, получено асимптотическое разложение функции $u_y(x,y)$ и оценен остаточный член разложения.

Предполагается, что имеют место асимптотические разложения

$$U(x) = x\Big(a + \sum_{\beta=1}^{q} a_\beta x^\beta + a_{q+1}(x)\Big), \quad v_0(x) = b + \sum_{\gamma=1}^{q} b_\gamma x^\gamma + b_{q+1}(x), \tag{13}$$

где $a = const > 0$; $a_\beta = const$; $\beta = 1, \dots, q$; $b,\ b_\gamma = const$; $\gamma = 1, \dots, q$;

$$|a_{q+1}(x)| \leq Nx^{q+1}, \quad \left|\frac{da_{q+1}}{dx}\right| \leq Nx^q, \quad \left|\frac{d^2a_{q+1}}{dx^2}\right| \leq Nx^{q-1},$$
$$|b_{q+1}(x)| \leq Nx^{q+1}, \quad \left|\frac{db_{q+1}}{dx}\right| \leq Nx^q, \quad q \geq 1.$$

Эти предположения выполняются, в частности, когда производная порядка $q + 2$ функции $U(x)$ и производная порядка $q + 1$ функции $v_0(x)$ ограничены.

Пусть $Y_m(\eta)$, $m = 1, \dots, q$ — решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$T(Y_m) \equiv \nu Y_0^2 Y_{m\eta\eta} + (\eta^2 - 1)aY_{m\eta} - 2\eta aY_m + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_m, \tag{14}$$

$$t(Y_m) \equiv \big(\nu Y_0 Y_{m\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_m - bY_m\big)\Big|_{\eta=0}. \tag{15}$$

Теорема 10. *Предположим, что для* $U(x)$ *и* $v_0(x)$ *имеем представления* (13) *при* $q \geq 1$. *Тогда для решения* $w(\xi, \eta)$ *задачи* (9), (10) *справедливо асимптотическое разложение вида*

$$\left|w(\xi, \eta) - \sum_{m=0}^{q} Y_m \xi^m\right| \leq NY_0(\eta)\xi^{q+1}, \qquad 0 \leq \xi \leq X,$$

при $\xi \to 0$, *где* Y_m — *решения вспомогательной задачи* (14), (15); Y_0 — *решение задачи* (11), (12); N — *положительная постоянная.*

Теорема 11. *Предположим, что имеют место представления* (13) *при* $q \geq 1$. *Тогда для решения* (u, v) *задачи* (6), (7) *справедлива оценка*

$$\left|u_y(x,y) - U(x)\sum_{m=0}^{q} Y_m\Big(\frac{u}{U}\Big)x^m\right| \leq NU(x)Y_0\Big(\frac{u}{U}\Big)x^{q+1},$$

при $x \to 0$, где $Y_1, \ldots, Y_q$ — решения некоторой вспомогательной системы (14), (15)*;* Y_0 *— решение задачи* (11), (12) *.*

Рассмотрим обобщение задачи (6), (7) симметричного пограничного слоя вязкой электропроводной жидкости типа модификации О.А. Ладыженской в поперечном магнитном поле. Однозначная разрешимость краевой задачи доказана с помощью преобразования (8), которое сводит систему МГД–пограничного слоя к квазилинейному параболическому вырождающемуся уравнению. Нелинейные вырождающиеся уравнения встречаются также в работах[29,30]. Изучается влияние электромагнитного поля на движение вязкой несжимаемой электропроводной жидкости в пограничном слое.

В случае двумерного стационарного течения модифицированная система уравнений МГД-пограничного слоя имеет вид:

$$\begin{cases} \nu\Big(1 + 3d\big(u_y\big)^2\Big)u_{yy} - uu_x - vu_y + B^2(U - u) = -UU_x, \\ u_x + v_y = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Система уравнений (16) рассматривается в области $D = \{0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ \ u(x,0) = 0,\ \ v(x,0) = v_0(x),\ \ u(x,y) \rightrightarrows U(x) \text{ при } y \to \infty, \tag{17}$$

где $U(0) = 0, \quad U(x) > 0$ при $x > 0$. Пусть $U_x(x)$ измерима и ограничена, $U_x(0) > 0$, функция $v_0(x)$ предполагается заданной.

Задача (16), (17) сводится к некоторой вспомогательной краевой задаче для одного квазилинейного уравнения с помощью преобразования (8):

$$\begin{aligned} \nu\big(1 + 3dU^2w^2\big)w^2w_{\eta\eta} - \eta Uw_\xi + (\eta^2 - 1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w + \\ + 6\nu dU^2w_\eta^2w^3 + (\eta - 1)B^2w_\eta - B^2Uw = 0 \end{aligned}$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X,\ 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$w(\xi,1) = 0, \quad \Big(\nu\big(1 + 3dU^2w^2\big)ww_\eta - v_0(\xi)w + U_\xi + B^2\Big)\Big|_{\eta=0} = 0.$$

Теоремы о существовании и единственности решения задачи МГД-пограничного слоя также доказываются с помощью переменных ξ и η, путём обратного преобразования переменных.

В **третьей главе** исследуется задача о пограничном слое, возникающем при обтекании симметричного тела нестационарным потоком вязкой

[29] *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 316 с.

[30] *Amaziane B., Pankratov L., Piatnitski A.* The existence of weak solutions to immiscible compressible two–phase flow in porous media: the case of fields with different rock–types // Discrete Continuous and Dynamical Systems. Ser. B. 2013. Т. 15, № 5. С. 1217—1251.

несжимаемой жидкости в рамках модели, предложенной О.А. Ладыженской. Основным методом исследования поставленных задач является преобразование Крокко, которое переводит нестационарную систему уравнений пограничного слоя в квазилинейное уравнение. Существование решения задачи получено в некоторой окрестности критической точки. Задача о нестационарном симметричном слое исследована в целом по t. При этом решения рассматриваются в классе функций, имеющих асимптотику вида $u(t,x,y) - U(t,x) \sim exp\{-My^2\}$ при $y \to \infty$. Исследована устойчивость полученных решений относительно изменений данных задачи.

Рассматривается случай двумерного нестационарного течения модифицированной системы уравнений Прандтля, имеющей вид:

$$\begin{cases} \nu\Big(1 + 3d\big(u_y\big)^2\Big)u_{yy} - u_t - u\,u_x - v\,u_y = -U_t - U\,U_x, \\ u_x + v_y = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Здесь $U(t,x)$ – заданная функция, связанная с давлением $p(t,x)$ уравнением Эйлера для скорости внешнего потока $-p_x = U_t + U\,U_x$.

Система уравнений (18) рассматривается в области $Q = \{0 < t < \infty,\ 0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$ с начальным и граничными условиями

$$u(0,x,y) = \mathcal{U}_0(x,y), \quad u(t,0,y) = 0, \quad u(t,x,0) = 0,$$

$$v(t,x,0) = v_0(t,x), \quad u(t,x,y) \rightrightarrows U(t,x) \ \text{ при } \ y \to \infty, \tag{19}$$

где $U(t,0) = 0$, $U_x(t,0) > 0$, $U(t,x) > 0$ при $x > 0$, а функция $v_0(t,x)$ предполагается заданной. Дополнительно предположим, что $U(t,x) = xV(t,x)$, $V(t,x) > 0$ и $V(t,x)$, $V_x(t,x)$, $V_t(t,x)$, $v_0(t,x)$ ограничены при $0 < x \le X$.

Определение 6. *Решением задачи* (18), (19) называется пара функций $u = u(t,x,y)$ и $v = v(t,x,y)$, обладающая следующими свойствами: u непрерывна и ограничена в замкнутой области $\overline{Q}$, v непрерывна по y в $\overline{Q}$, и ограничена при ограниченных y; обобщенные производные u_t, u_x, u_y, u_{yy}, v_y являются ограниченными измеримыми функциями; u и v удовлетворяют системе (18) в Q и граничным условиям (19).

Переходим к новым переменным, чтобы свести задачу к одному квазилинейному уравнению, и с помощью принципа максимума доказать теорему о существовании и единственности поставленной задачи.

Введем новые независимые переменные τ, ξ, η и новую неизвестную функцию $w(\tau,\xi,\eta)$, предложенные Крокко, следующим образом:

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{u(t,x,y)}{U(t,x)}, \quad w(\tau,\xi,\eta) = \frac{u_y(t,x,y)}{U(t,x)}. \tag{20}$$

И задачу (18), (19) сведем к некоторой вспомогательной краевой задаче для одного квазилинейного уравнения.

$$\nu\big(1+3dU^2w^2\big)w^2w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta U w_\xi + (\eta^2-1)U_x w_\eta + (\eta-1)\frac{U_t}{U}w_\eta - \\ -\eta U_x w + 6\nu dU^2 w_\eta^2 w^3 - \frac{U_t}{U}w = 0 \quad (21)$$

в области $\Gamma = \{0<\tau<\infty,\, 0<\xi<X,\, 0<\eta<1\}$ с условиями

$$w(0,\xi,\eta) = \mathcal{W}_0(\xi,\eta), \text{ где } \mathcal{W}_0(\xi,\eta) = \frac{\mathcal{U}_{0y}(x,y)}{U(0,x)},$$

$$w(\tau,\xi,1)=0, \quad \Big(\nu\big(1+3dU^2w^2\big)ww_\eta - v_0 w + \frac{U_t}{U} + U_x\Big)\Big|_{\eta=0} = 0. \quad (22)$$

Воспользуемся введенным ранее предположением $U(t,x) = xV(t,x)$ и для удобства примем обозначения:

$$A = (\eta^2-1)(V+\xi V_x) + (\eta-1)\frac{V_t}{V}, B = -\eta(V+\xi V_x) - \frac{V_t}{V}, C = V + \xi V_x + \frac{V_t}{V}.$$

Тогда задача (21) примет вид

$$\nu\big(1+3d\xi^2V^2w^2\big)w^2w_{\eta\eta} - w_\tau - \eta\xi V w_\xi + Aw_\eta + Bw + 6\nu d\xi^2V^2w^3w_\eta^2 = 0,$$

а ее начальное и граничные условия (22) перепишутся:

$$w(0,\xi,\eta) = \mathcal{W}_0(\xi,\eta),\ w(\tau,\xi,1)=0,\ \Big(\nu\big(1+3d\xi^2V^2w^2\big)ww_\eta - v_0w + C\Big)\Big|_{\eta=0} = 0.$$

Определение 7. Функция $w(\tau,\xi,\eta)$ называется *решением задачи* (21), (22), если: w непрерывна в $\overline{\Gamma}$ и имеет ограниченные обобщенные производные w_τ, w_ξ, w_η, причем w_η непрерывна по η при $\eta=0$; существует обобщенная производная $w_{\eta\eta}$, такая что произведение ww_η ограничено в $\overline{\Gamma}$; уравнение (21) выполняется для w почти всюду в Γ и w удовлетворяет условиям (22).

В дальнейшем через M и N будем обозначать разные положительные постоянные.

Приводим основные утверждения и существовании и единственности решений задач. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть $U_x(t,x)>0$ при $0\le x\le X$; функции A_x, B_x, C_x ограничены, $|V_t|$, $|A_t|$, $|B_t|$, $|C_t| \le Mx$, $|v_{0t}| \ge -Mx$,*

$$Ye^{-M\xi} \le \mathcal{W}_0 \le Ye^{M\xi}, \quad |\mathcal{W}_{0\xi}| \le M(1-\eta);$$

w_0 непрерывно дифференцируема по $\eta\in[0,1)$ и

$$Y_\eta e^{M\xi} \le \mathcal{W}_{0\eta} \le Y_\eta e^{-M\xi},$$

$$-M(1-\eta) \le \nu\big(1+3d\xi^2V^2\mathcal{W}_0^2\big)\mathcal{W}_0^2\mathcal{W}_{0\eta\eta} + A\mathcal{W}_{0\eta} +$$
$$+B\mathcal{W}_0 + 6\nu d\xi^2V^2\mathcal{W}_0^3\mathcal{W}_{0\eta}^2 \le Mx(1-\eta),$$
$$\Big(\nu(1+3d\xi V^2\mathcal{W}_0^2)\mathcal{W}_0\mathcal{W}_{0\eta} - v_0\mathcal{W}_0 + U_x + \frac{U_t}{U}\Big)\Big|_{\eta=0,\tau=0} = 0.$$

Тогда задача (21), (22) в области Ω при X, зависящем от V, v_0, w_0 имеет решение $w(\tau,\xi,\eta)$, обладающее свойствами:

$$Ye^{-N\xi} \le w \le Ye^{N\xi};$$

w_η непрерывна по $\eta < 1$, $Y_\eta e^{-N\xi} \le w_\eta \le Y_\eta e^{N\xi}$; обобщенные производные w_τ, w_ξ, $w_{\eta\eta}$ удовлетворяют неравенствам

$$-N(1-\eta) \le w_\tau \le N\xi(1-\eta), \quad \big|w_\xi\big| \le NY, \quad -N \le ww_{\eta\eta} \le -N,$$

где $Y(\eta)$ решение вспомогательной краевой задачи , которую ввели выше. Решение задачи (21), (22) при таких условиях единственно.

Пользуясь методом прямых, т.е. дискретизацией по ξ и t и заменой уравнения (21) системой обыкновенных дифференциальных уравнений, докажем при соответствующих предположениях о данных задачи существование и единственность решения задачи (21), (22). Как следствие, получим теоремы о существовании и единственности решения системы (18), (19). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 13. *Предположим, что*

$$U(t,x) = x\big(a + xa_1(t,x)\big), \qquad v_0(t,x) = b + xb_1(t,x),$$

где $a = const > 0$, $b = const$; $U(t,x) > 0$ при $x > 0$; $a_1(t,x)$, $a_{1x}(t,x)$, $a_{1xx}(t,x)$, $b_1(t,x)$, $b_{1x}(t,x)$ ограничены при $0 \le t < \infty$, $0 \le x \le X$. Пусть выполнены следующие условия: $U_x > 0$ при $0 \le x \le X$; функции V, V_x, v_0 ограничены, $\dfrac{V_t}{V} \le Mkh$; $\mathcal{U}_0(x,y)$ такова, что $\mathcal{W}_0(\xi,\eta) = \dfrac{\mathcal{U}_{0y}(x,y)}{U(x)}$ и

$$M(1-\eta) \le \mathcal{W}_0(\xi,\eta) \le M(1-\eta)\sigma$$

где $\sigma = \sqrt{-\ln\mu(1-\eta)}$, и $\mathcal{W}_0(\xi,\eta)$ имеет непрерывную производную по $\eta \in [0,1)$. Тогда при некотором X, зависящем от функций $U(t,x)$, $v_0(t,x)$, $\mathcal{U}_0(x,y)$, задача (18) в области Q имеет единственное решение (u,v), которое обладает следующими свойствами: $u > 0$ при $y > 0$ и $x > 0$; $\dfrac{u}{U}$, $\dfrac{u_y}{U}$ ограничены и непрерывны в $\overline{Q}$; $u_y > 0$ при $y \ge 0$; $\dfrac{u_y(t,x,y)}{U(t,x)} \to 0$ при $y \to \infty$; u_x, u_y, u_{yy}, u_t, v_y, непрерывны в Q по y; уравнения (18) выполняются почти всюду в Q; имеют место оценки

$$UY\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{-Nx} \le u_y \le UY\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{Nx}, \quad Y_\eta\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{Nx} \le \frac{u_{yy}}{u_y} \le Y_\eta\Big(\frac{u}{U}\Big)e^{Nx},$$

$$\exp\Big[-\frac{M^2}{4}y^2e^{2Nx}\Big] \le 1-\frac{u}{U} \le \exp\Big[-\frac{M^2}{4}y^2e^{-2Nx}\Big].$$

Исследуется устойчивость решений системы уравнений нестационарного симметричного пограничного слоя при изменении определенных параметров задачи.

В работе получены условия, при которых решение системы уравнений пограничного слоя существует при $0 \le t < \infty$. Для таких решений, существующих на бесконечном интервале времени, возникает вопрос об их устойчивости при определенных изменениях начальных данных и параметров рассматриваемой системы уравнений. Пусть $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$— решения задачи (18), (19) в области $Q = \{0 < t < \infty, 0 < x < X, 0 < y < \infty\}$, соответствующее заданным функциям $U(t,x) = xV(t,x)$, $v_0(t,x)$, $\mathcal{U}_0(x,y)$, и пусть $\widetilde{u}(t,x,y)$, $\widetilde{v}(t,x,y)$ — решение той же задачи, соответствующее функциям $x\widetilde{V}(t,x)$, $\widetilde{v}_0(t,x)$, $\widetilde{\mathcal{U}}_0(x,y)$. Имеют место утверждения.

Теорема 14. *Предположим, что функции*

$$V-\widetilde{V}, \quad V_x-\widetilde{V}_x, \quad \frac{V_t}{V}-\frac{\widetilde{V}_t}{\widetilde{V}}, \quad v_0-\widetilde{v}_0 \tag{23}$$

равны нулю при $t \ge t_0 = const > 0$. Тогда

$$\Big|\frac{u}{V}-\frac{\widetilde{u}}{\widetilde{V}}\Big| \le xNe^{-\alpha t} \quad \text{в} \quad Q$$

при $0 \le y \le y_0 < \infty$, где α, N — положительные постоянные.

Теорема 15. *Если функции (23) по модулю не превосходят ε, а функции V, $\widetilde{V}$, $\mathcal{U}_0$, $\widetilde{\mathcal{U}}_0$ таковы, что $\big|w-\widetilde{w}\big|\Big|_{\tau=0} < \varepsilon$, где w и $\widetilde{w}$ — решения задачи (21), (22), соответствующие V, v_0, $\mathcal{U}_0$ и $\widetilde{V}$, $\widetilde{v}_0$, $\widetilde{\mathcal{U}}_0$, то*

$$\Big|\frac{u}{V}-\frac{\widetilde{u}}{\widetilde{V}}\Big| \le xN\varepsilon \quad \text{в} \quad Q$$

при $y \le y_0 < \infty$ и всех $t \ge 0$, где N — положительная постоянная.

Для исследования устойчивости решений системы типа Прандтля оценивается разность $|u-\widetilde{u}|$ по абсолютной величине.

Публикации автора по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. *Булатова Р. Р.* Влияние магнитного поля на положение точки отрыва пограничного слоя электропроводной жидкости // Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела. 2018. Вып. 1. С. 14—22
2. *Bulatova R. R.*, *Chechkin G. A.*, *Chechkina T. P. , Samokin V. N.* On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non–Newtonian MHD medium // Comptes Rendus - Mecnique, Elsevier BV (Netherlands). 2018. Vol. 346, issue 9. P. 807–814

В работе [2] Булатовой Р.Р. принадлежит доказательство основной теоремы 5.

3. *Bulatova R. R.*, *Chechkin G. A.*, *Samokhin V. N.* Equations of Magnetohydrodynamic Boundary Layer for a Modified Incompressible Viscous Medium. Boundary Layer Separation // Journal of Mathematical Sciences. Plenum Publishers (United States). 2018. Т. 232, вып. 3. С. 299—321. (Перевод статьи: Булатова Р.Р., Самохин В.Н.,Чечкин Г.А. Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Проблемы математического анализа. 2018. Т. 92. С. 83–100.)

В работе [3] Булатовой Р.Р. принадлежит доказательство теоремы 5.

4. *Булатова Р. Р.*, *Самохин В. Н.*, *Чечкин Г. А.* Система уравнений пограничного слоя реологически сложной среды. Переменные Крокко // Доклады Академии наук, М.: Наука. 2019. Т. 487, вып. 2. С. 119—125

В работе [4] Булатовой Р.Р. принадлежит доказательство основной теоремы существования.

5. *Bulatova R. R.*, *Chechkin G. A.*, *Samokhin V. N.* Equations of Symmetric Boundary Layer for the Ladyzhenskaya Model of a Viscous Medium in the Crocco Variables // Journal of Mathematical Sciences. Plenum Publishers (United States). 2019. Т. 242, вып. 1. С. 85—118. (Перевод статьи: Булатова Р.Р., Самохин В.Н.,Чечкин Г.А. Уравнения симметричного пограничного слоя для модели вязкой среды О.А.Ладыженской в переменных Крокко // Проблемы математического анализа. 2019. Т. 98. С. 73–100.)

В работе [5] Булатовой Р.Р. принадлежит доказательство основной теоремы существования и единственности.

Остальные публикации автора по теме диссертации

6. *Булатова Р. Р.* Уравнения МГД-пограничного слоя для модификации О.А. Ладыженской системы Навье–Стокса // XXIV Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». IX симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Международная конференция по стохастическим методам. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону: Фонд науки и образования, 2016. С. 95—96. ISBN 978-5-9908134-9-6
7. *Булатова Р. Р.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя нелинейно вязкой жидкости в модификации О.А. Ладыженской // Труды 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 20 - 26 ноября 2017 г. Прикладная математика и информатика. Тезисы докладов. Москва: МФТИ Долгопрудный Жуковский, 2017. С. 306—307. ISBN 978-5-7417-0652-7
8. *Bulatova R. R.*, *Chechkin G. A.*, *Samokhin V. N.* On MHD boundary layer for the O.A. Ladyzhenskaya modification of the Navier–Stokes system // Abstracts of VI Congress of the Turkic World Mathematical Society (October 2-5, 2017, Astana, Kazakhstan). Astana: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2017. C. 55. ISBN 978-9965-31-907-5
9. *Булатова Р. Р.* Симметрический пограничный слой нелинейной жидкости О.А.Ладыженской в переменных Крокко // Ломоносов 2018: материалы международного научного форума. Тезисы докладов. Москва, 2018
10. *Булатова Р. Р.* Влияние магнитного поля на движение электропроводной жидкости в пограничном слое // Современные методы теории краевых задач. "Понтрягинские чтения-XXIX серия Материалы Международной конференции посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина (Москва, 2–6 мая 2018 г.). Тезисы докладов. Москва: МАКС Пресс, 2018. С. 64—65. ISBN 978-5-9273-2453–8
11. *Булатова Р. Р.* Уравнение нестационарного пограничного слоя обобщенно ньютоновской реологически сложной среды // «Ломоносов – 2019»: XV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых: Тезисы докладов XV Международной научной конференции: в 2-х частях (I часть). Нур-Султан: Казахстанский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019. С. 20—21. ISBN 978-601-7804-69-5
12. *Булатова Р. Р.*, *Самохин В. Н.*, *Чечкин Г. А.* Уравнения симметрического пограничного слоя модифицированной жидкости О.А. Ладыженской в переменных Крокко // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим си-

стемам. Суздаль 6 - 11 июля 2018. Тезисы докладов. Владимир: Аркаим, 2018. С. 55. ISBN 978-5-93767-285-8

13. *Булатова Р. Р.* Нестационарный пограничный слой модифицированной вязкой жидкости модели О.А.Ладыженской // «Современные методы теории краевых задач». Материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXX». Тезисы докладов. Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2019. С. 81—82
14. *Булатова Р. Р.*, *Самохин В. Н.*, *Чечкин Г. А.* Система уравнений симметрического пограничного слоя модифицированной жидкости О.А. Ладыженской в переменных Крокко // Современные методы теории функции и смежные проблемы: материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (28 января - 2 февраля 2019). Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. С. 57—58. ISBN 978-5-9273-2724–9
15. *Булатова Р. Р.* Решение задачи нестационарного пограничного слоя модифицированной нелинейной вязкой жидкости в целом по t и его устойчивость // Современные тенденции развития науки и образования: теория и практика. Сборник материалов 3-й Международной научно-практической конференции. Т. 4. Москва: ВИПО, 2019. С. 81—87. ISBN 978-5-9908488-3-2
16. *Булатова Р. Р.*, *Самохин В. Н.*, *Чечкин Г. А.* Уравнение симметричного пограничного слоя модифицированной жидкости О.А. Ладыженской // Наука, техника, педагогика. Новые технологии высшей школы: материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии – 2019» (Россия, Москва, 26 февраля 2019 года). Московский Политех, Москва, 2019. С. 8—13. ISBN 978-5-2760-2507-0
17. *Булатова Р. Р.*, *Самохин В. Н.*, *Чечкин Г. А.* Модель Ладыженской вязкой несжимаемой жидкости и система уравнений МГД-пограничного слоя // Наука, техника, педагогика. Новые технологии высшей школы: материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука – Общество – Технологии – 2019». Московский Политех, Москва, 2019. С. 5—8. ISBN 978-5-2760-2507-0
18. *Булатова Р. Р.* Нестационарный МГД-пограничный слой неньютоновской среды // «Наука XXI века: новый подход»: Материалы XXIII молодёжной международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. Санкт-Петербург, 2019. С. 7—9. ISBN 978-0-359-71873-3
19. *Булатова Р. Р.*, *Самохин В. Н.*, *Чечкин Г. А.* Уравнения симметрического МГД-пограничного слоя вязкой жидкости с реологическим законом О.А. Ладыженской // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2019. Т. 32. С. 72—90

Булатова Регина Рашидовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В МОДИФИКАЦИИ ЛАДЫЖЕНСКОЙ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________