МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.984.55 + 517.925 + 519.218.7

Владимиров Антон Алексеевич

Некоторые вопросы теории обыкновенных дифференциальных операторов в тройках пространств Соболева

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант —
доктор физико-математических наук
профессор А. А. Шкаликов

Москва
2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Линейные операторы, отображающие „нижние“ компоненты $\mathfrak{D}$ троек

$$\mathfrak{D} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{D}^*$$

гильбертовых пространств в сопряжённые к ним „верхние“ компоненты $\mathfrak{D}^*$, хорошо известны в математике. В случае вещественности рассматриваемых пространств к таким операторам приводит, в частности, двукратное дифференцирование гладких функционалов $f\colon \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$. Это наблюдение сразу показывает значение операторов указанного вида для механики систем с бесконечным числом степеней свободы — так, в учебнике [57: пп. 99, 100], по существу, рассмотрение задачи о колебаниях струны проведено именно на основе рассмотрения некоторой тройки гильбертовых пространств. В терминах операторов в тройках легко переформулируются [16] также обычно трактуемые в терминах полуторалинейных форм теоремы о представлении [35: § VI.2]. Несмотря на всё сказанное, определение и изучение свойств обыкновенных дифференциальных операторов с коэффициентами–обобщёнными функциями, естественным образом определяемых именно как операторы в тройках, представляет собой сравнительно новое направление математического анализа. Начало его современному развитию было положено, по всей видимости, в работах [53, 60]. Результаты, составившие основное содержание настоящей диссертации, представляют собой дальнейшее развитие ряда аспектов указанной теории.

2. Краткая характеристика излагаемых в диссертации результатов может быть дана следующим образом.

Первая глава диссертации посвящена изложению ряда общих фактов о представлении неограниченных операторов в гильбертовых пространствах ограниченными отображениями „нижних“ компонент троек пространств в „верхние“. На основе этих фактов строится теория расширений и устанавливаются вариационные принципы для неполуограниченных операторных матриц — что, в частности, позволяет в рамках единой точки зрения получать некоторые известные результаты, рассматривавшиеся ранее как независимые (см., например, [87]).

Вторая глава посвящена определению граничных задач, отвечающих содержащим в качестве коэффициентов p_k некоторые обобщённые функции дивергентным дифференциальным выражениям

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left(p_k y^{(n-k)}\right)^{(n-k)}.$$

Оно осуществляется на основе аппроксимации сингулярных задач „классически“ понимаемыми гладкими, каковая аппроксимация оказывается корректно определённой в случае так называемых *вполне регулярных* *) граничных условий. Соответствующие неограниченные операторы в пространстве $L_2[0,1]$ определяются в терминах квазидифференциальных выражений, что превращает так называемый “метод регуляризации“ — применительно к дифференциальным выражениям второго порядка сформулированный в работе [59] независимо от связанных с тройками гильбертовых пространств конструкций работы [53] — в естественный продукт общей теории. Кроме сказанного, глава содержит изложение теории Штурма для граничных задач второго порядка с вещественными коэффициентами–обобщёнными функциями и произвольными самосопряжёнными распадающимися граничными условиями, а также ряд

*) Термин заимствован нами из работы [74]. Осмысленным также являлось бы именование таких граничных условий «секториальными».

результатов о знакорегулярности аналогичных граничных задач более высоких порядков.

В третьей главе приводятся примеры естественного возникновения операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-обобщёнными функциями в экстремальных спектральных задачах, изначально упоминания таких потенциалов не содержащих. А именно, показывается, что при пробегании знакоопределённым потенциалом $q \in L_1[0,1]$ единичной сферы экстремальные значения наименьшего собственного значения граничной задачи

$$
\begin{gathered}
-y'' + qy = \lambda y, \\
y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0,
\end{gathered}
$$

где $k_1 \geqslant k_0 \geqslant 0$, достигаются, вообще говоря, на сингулярных потенциалах (представляющих собой дельтаобразные возмущения некоторых регулярных). Аналогичные результаты получаются при решении вопроса о достижимости экстремальных значений наименьшего собственного значения задачи Дирихле при пробегании потенциалом единичных шаров весовых пространств. Развитая при решении указанных задач техника применяется нами также к задаче об оценке минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля на геометрическом графе.

Четвёртая и пятая главы посвящены задаче об асимптотике спектра струны, то есть дифференциального оператора (или операторного пучка), отвечающего уравнению

$$
-y'' - \lambda \rho y = 0, \tag{1}
$$

где вес ρ, в соответствии с возможностями изложенной в предыдущих главах теории, представляет собой обобщённую функцию класса $W_2^{-1}[0,1]$. Говоря более точно, рассматривается случай *самоподобия* обобщённой первообразной $P \in L_2[0,1]$ весовой функции $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$. При этом, в отличие от ряда предшествующих работ по близкой тематике — использующих для постановки задачи отличную от нашей терминологию, — не исключается возможность незнакоопределённости весовой обобщённой функции. Распределение материала между указанными двумя главами произведено таким образом, что к первой из них относится материал, касающийся случая положительности так называемого *спектрального порядка* функции $P \in L_2[0,1]$, а ко второй — касающийся случая равенства этого спектрального порядка нулю.

Последняя, шестая глава диссертации посвящается изучению некоторого подкласса рассмотренных в четвёртой главе задач на основе нового метода, базирующегося на исследовании осцилляционных свойств собственных функций некоторых третьих граничных задач для рассматриваемых дифференциальных выражений, и связанному с этим установлению для таких задач свойств *спектральной периодичности*. На таком пути удаётся найти — применительно к задачам рассматриваемого класса — положительный ответ на неоднократно ставившийся в литературе (см., например, [49, 80]) вопрос о непостоянности фигурирующей в известном асимптотическом представлении

$$\mathcal{N}(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln \lambda) + o(1)]$$

считающей функции $\mathcal{N}$ собственных значений вспомогательной числовой функции s. Ранее такая непостоянность устанавливалась лишь для конкретных весов — в частности, для плотности канторовой меры — на основе машинных расчётов.

Наконец, в приложении к основному тексту иллюстрируется связь между спектральными свойствами граничных задач, отвечающих уравнению (1) с незнакоопределённым весом $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$, и распределением отвечающих указанному весу интегральных характеристик

$$\int_0^1 \rho \cdot \xi^2 \, dt$$

винеровского процесса ξ. Будучи хорошо известной для случая знакоопределённости веса $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$, указанная связь представляет собой один из центральных источников интереса к соответствующим спектральным задачам.

3. В диссертации использована система ссылок, восходящая к работам А. А. Маркова (см., например, [43, 45, 46]) и состоящая в следующем. Главы, обозначаемые римскими цифрами, делятся на параграфы, нумерация которых ведётся отдельно внутри каждой главы. Аналогичным образом производится деление параграфов на пункты. Утверждения и формулы нумеруются отдельно внутри пунктов. Полная ссылка на утверждение состоит из номера главы, номера параграфа (предшествуемого знаком «§»), номера пункта и номера утверждения, отделяемых друг от друга точками. При ссылке на утверждение из той же главы, внутри которой даётся ссылка, номер главы опускается. Аналогичным образом, при ссылке на утверждение из того же параграфа, внутри которого даётся ссылка, опускается номер этого параграфа.

Ссылки на формулы делаются аналогичным ссылкам на утверждения образом. При этом номер формулы заключается в круглые скобки, точка перед открывающей номер формулы скобкой не ставится, и при ссылке на формулу того же пункта, внутри которого даётся ссылка, этот номер пункта опускается.

4. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1°. «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённой 103-летию со дня рождения И. Г. Петровского (Москва, 2004).

2°. Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XV» (Воронеж, 2004).

3°. 15-й ежегодной международной конференции КРОМШ-2004 (Севастополь, 2004).

4°. «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвящённой 100-летию С. М. Никольского (Москва, 2005).

5°. «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённой 107-летию со дня рождения И. Г. Петровского (Москва, 2007).

6°. Украинском математическом конгрессе (Киев, 2009).

7°. «Спектральные задачи и смежные вопросы» (Москва, 2009).

8°. «Асимптотические методы и математическая физика» (Москва, 2010).

9°. «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённой 110-летию со дня рождения И. Г. Петровского (Москва, 2011).

10°. 22rd International Workshop on Operator Theory and its Applications (Sevilla, 2011).

11°. Conference on Differential and Difference Equations and Applications (Terchovà, 2012).

12°. 23-ей ежегодной международной конференции КРОМШ-2012 (Севастополь, 2012).

13°. «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвящённой 100-летию со дня рождения Б. М. Левитана (Москва, 2014),

14°. «Функциональные пространства и теория приближений», посвящённой 110-летию со дня рождения С. М. Никольского (Москва, 2015),

15°. Семинаре по математической физике им. В. И. Смирнова (Санкт-Петербург, ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН, 2015).

16°. Воронежской зимней математической школе–2016 (Воронеж, 2016).

17°. Семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра дифференциальных уравнений, 2016).

18°. Семинаре по теории функций многих действительных переменных и её приложениям к задачам математической физики (Москва, МИ им. В. А. Стеклова РАН, 2016, 2017).

19°. «Теория операторов и её приложения», посвящённой 85-летию со дня рождения А. Г. Костюченко (Москва, 2016).

20°. Научном семинаре кафедры прикладной математики факультета физико-математических и естественных наук РУДН (Москва, 2017).

5. По тематике диссертации автором опубликовано — без учёта препринтов и тезисов докладов — 15 работ [[9], [20], [21], [10], [11], [22], [23], [84], [24], [12], [13], [14], [15], [16], [17]], в том числе 9 работ [[9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17]], выполненных без соавторов.

Глава I

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть дано некоторое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, разложенное в ортогональную прямую сумму $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ двух своих замкнутых подпространств. Пусть при этом дополнительно фиксированы четыре оператора $T^\circ_{11}\colon \operatorname{dom} T^\circ_{11} \to \mathfrak{H}_1$, $T^\circ_{12}\colon \operatorname{dom} T^\circ_{22} \to \mathfrak{H}_1$, $T^\circ_{21}\colon \operatorname{dom} T^\circ_{11} \to \mathfrak{H}_2$ и $T^\circ_{22}\colon \operatorname{dom} T^\circ_{22} \to \mathfrak{H}_2$, задающие симметрическую операторную матрицу

$$T^\circ \rightleftharpoons \begin{pmatrix} T^\circ_{11} & T^\circ_{12} \\ T^\circ_{21} & T^\circ_{22} \end{pmatrix}$$

с областью определения $\operatorname{dom} T^\circ_{11} \oplus \operatorname{dom} T^\circ_{22}$. Наконец, пусть симметрический оператор T°_{11} ограничен снизу, а симметрический оператор T°_{22} — сверху.

В работе [87] для трёх различных типов взаимных соотношений между операторами T°_{11}, T°_{22} и T°_{21} была развита вариационная техника, позволяющая исследовать свойства некоторых частей дискретного спектра замыкания оператора T°. Основной целью настоящей главы является производимое на основе теории оснащённых пространств указание ряда общих фактов, частными случаями которых выступают результаты работы [87], а также некоторые аналогичные им.

Под *оснащённым пространством* на протяжении настоящей главы будет пониматься совокупность

$$\mathbf{A} \rightleftharpoons \{\mathfrak{B}, \mathfrak{D}^+, \mathfrak{D}^-, I^+, I^-\}$$

из трёх банаховых пространств $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}^+$, $\mathfrak{D}^-$ и двух инъективных вложений $I^+\colon \mathfrak{D}^+ \to \mathfrak{B}$ и $I^-\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}^-$ с плотными образами. *Операторами в оснащении* $\mathbf{A}$ мы при этом будем сокращенно называть ограниченные операторы, отображающие пространство $\mathfrak{D}^+$ в пространство $\mathfrak{D}^-$. Класс операторов в оснащении $\mathbf{A}$ мы будем обозначать символом $\mathcal{B}(\mathbf{A})$.

Представление неограниченных операторов операторами в оснащениях в значительной степени примыкает к хорошо известному представлению таких операторов полуторалинейными формами [35: Гл. VI]. Однако первый подход имеет перед вторым значительное техническое преимущество, заключающееся в возможности обращения оператора в оснащении. Этим соображением и обусловлен сделанный нами выбор используемого понятийного аппарата.

Структура настоящей главы имеет следующий вид. В § 1 устанавливаются используемые далее теоремы о представлении замкнутого неограниченного оператора в банаховом пространстве линейным пучком ограниченных операторов в оснащении. Эти теоремы содержат как простые частные случаи классические результаты о представлении секториального оператора полуторалинейной формой [35: Гл. VI, § 2]. В § 2 вводится процедура *углового расширения* симметрической операторной матрицы, опирающаяся на результаты § 1 и тесно связанная со стандартной процедурой расширения (и псевдорасширения) оператора по Фридрихсу. В § 3 на основе вариационных принципов для самосопряжённых оператор-функций устанавливаются вариационные принципы для угловых расширений. Наконец, в § 4 обсуждаются некоторые дальнейшие применения результатов из § 1.

Изложение материала настоящей главы следует работе [16].

§ 1. Теоремы о представлении

1. Пусть зафиксированы некоторое оснащение

$$\mathbf{A} \rightleftharpoons \{\mathfrak{B}, \mathfrak{D}^+, \mathfrak{D}^-, I^+, I^-\}$$

и связанный с ним оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A})$. Символом $T^\bullet$ мы далее будем обозначать оператор $(I^-)^{-1}T(I^+)^{-1}$, действующий в пространстве $\mathfrak{B}$ и, вообще говоря, неограниченный.

1.1. *Пусть при некотором* $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{B})$ *оператор* $T - I^- A I^+$ *обладает ограниченным обратным. Тогда оператор* $T^\bullet$ *замкнут и плотно определён.*

Доказательство. Легко видеть справедливость равенства

$$T^\bullet - A = (I^-)^{-1} \cdot (T - I^- A I^+) \, (I^+)^{-1}. \tag{1}$$

Соответственно, оператор $T^\bullet - A$ является обратным к всюду определённому ограниченному оператору $I^+ \cdot (T - I^- A I^+)^{-1} I^-$, а потому замкнут. Этот факт автоматически означает замкнутость оператора $T^\bullet$.

Далее, область определения оператора $T^\bullet$ совпадает с областью определения оператора $T^\bullet - A$, а потому и с областью значений оператора $I^+ \cdot (T - I^- A I^+)^{-1} I^-$. Ввиду предполагаемой плотности образов операторов $I^\pm$ это означает плотность подмножества $\operatorname{dom} T^\bullet$ в пространстве $\mathfrak{B}$. $\square$

1.2. *Всякое значение* $\lambda \in \mathbb{C}$*, для которого оператор* $T - \lambda I^- I^+$ *обладает ограниченным обратным, принадлежит резольвентному множеству оператора* $T^\bullet$ *и удовлетворяет равенству*

$$(T^\bullet - \lambda)^{-1} = I^+ \cdot (T - \lambda I^- I^+)^{-1} I^-.$$

Справедливость данного утверждения, по существу, была установлена в ходе доказательства утверждения 1.1.

1.3. *Пусть при некотором* $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{B})$ *оператор* $T - I^- A I^+$ *обладает ограниченным обратным. Тогда для любого* $\lambda \in \varrho(T^\bullet)$ *оператор* $T - \lambda I^- I^+$ *также обладает ограниченным обратным.*

Доказательство. Введем сокращения $T^\natural(\lambda) \rightleftharpoons T - \lambda I^- I^+$, $T^\natural(A) \rightleftharpoons T - I^- A I^+$, $R_\lambda \rightleftharpoons (T^\bullet - \lambda)^{-1}$ и $R_A \rightleftharpoons (T^\bullet - A)^{-1}$, а также обозначим через $S\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}^+$ ограниченный оператор

$$S \rightleftharpoons [T^\natural(A)]^{-1} I^- \cdot [1 + (\lambda - A) R_\lambda]. \tag{2}$$

Заметим, что имеют место равенства

$$R_\lambda - R_A = R_A \cdot [(T^\bullet - A) - (T^\bullet - \lambda)] R_\lambda$$

$$(3) \qquad\qquad = R_A \cdot (\lambda - A)R_\lambda,$$

$$\begin{aligned}
T^\natural(\lambda)S &= [I^- - I^-(\lambda - A)R_A]\cdot[1 + (\lambda - A)R_\lambda] && [(2), (1)]\\
&= I^-\cdot[1 + (\lambda - A)(R_\lambda - R_A) - (\lambda - A)R_A\cdot(\lambda - A)R_\lambda]\\
&= I^-. && [(3)]
\end{aligned}$$

Вытекающие отсюда равенства

$$\begin{aligned}
T^\natural(\lambda)\cdot[1 + S(\lambda - A)I^+][T^\natural(A)]^{-1} &= T^\natural(A)\cdot[T^\natural(A)]^{-1}\\
&= 1
\end{aligned}$$

означают существование у оператора $T^\natural(\lambda)$ ограниченного правого обратного. Обусловленная ограниченной обратимостью оператора $T^\bullet - \lambda$ инъективность оператора $T^\natural(\lambda)$ означает потому ограниченную обратимость последнего. □

Сказанное означает, что если хотя бы для одного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{B})$ оператор $T - I^-AI^+$ обладает ограниченным обратным, то спектр оператора $T^\bullet$ в точности совпадает со спектром линейного пучка $T^\natural\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathbf{A})$ вида $T^\natural(\lambda) \rightleftharpoons T - \lambda I^-I^+$. При этом также справедливо следующее утверждение.

1.4. *Независимо от выбора значения $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется равенство*

$$\ker(T^\bullet - \lambda) = I^+ \ker T^\natural(\lambda).$$

Доказательство. Любой вектор $x \in \ker(T^\bullet - \lambda)$ допускает представление в виде $x = I^+y$, где вектор $y \in \mathfrak{D}^+$ удовлетворяет равенству $(I^-)^{-1}T^\natural(\lambda)y = 0$. Соответственно, имеет место вложение

$$\ker(T^\bullet - \lambda) \subseteq I^+ \ker T^\natural(\lambda).$$

С другой стороны, для любого вектора $y \in \ker T^\natural(\lambda)$ выполняется равенство $Ty = I^-(\lambda I^+y)$, означающее принадлежность вектора $x \rightleftharpoons I^+y$ области определения оператора $T^\bullet$, а тогда и ядру оператора $T^\bullet - \lambda$. □

2. Рассмотрим в качестве примера оснащение

$$\mathbf{A}_0 \rightleftharpoons \{L_2[0,1], \tilde{W}_2^1[0,1], L_2[0,1], I, \mathrm{id}\}.$$

Здесь использовано обозначение

$$\tilde{W}_2^1[0,1] \rightleftharpoons \{y \in W_2^1[0,1] \ : \ y(0) - y(1) = 0\},$$

через $I\colon \tilde{W}_2^1[0,1] \to L_2[0,1]$ обозначен оператор вложения, а через id — тождественный оператор в пространстве $L_2[0,1]$. Свяжем с этим оснащением оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A}_0)$ вида $Ty \rightleftharpoons -iy'$. Тогда оператор $T - I$ обладает обратным интегральным оператором с ядром

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{ie^{i(x-t)}}{1-e^{i}} & \text{при } x \geqslant t, \\ \frac{-ie^{i(x-t)}}{1-e^{-i}} & \text{при } x \leqslant t, \end{cases}$$

что, согласно утверждениям 1.1 и 1.3, означает замкнутость и плотную определённость оператора $T^\bullet$, а также совпадение его спектра со спектром пучка $T^\natural$.

Следующие примеры показывают, что условия из утверждений 1.1 и 1.3 носят содержательный характер.

Рассмотрим оснащение

$$\mathbf{A}_1 \rightleftharpoons \{L_2[0,1], \tilde{W}_2^1[0,1], \tilde{W}_2^{-1}[0,1], I, I^*\},$$

где через $\tilde{W}_2^{-1}[0,1]$ обозначено пространство, сопряжённое пространству $\tilde{W}_2^1[0,1]$. В этом случае оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A}_1)$ вида $Ty \rightleftharpoons -iy'$ вполне непрерывен, что, ввиду полной непрерывности вложения I, означает отсутствие для оператора $T - I^*AI$ ограниченного обратного независимо от выбора оператора $A \in \mathcal{B}(L_2[0,1])$. Оператор $T^\bullet$ имеет тот же вид, что и в рассмотренном выше случае оснащения $\mathbf{A}_0$, однако спектром пучка $T^\natural$ в рассматриваемой ситуации выступает вся плоскость $\mathbb{C} \neq \sigma(T^\bullet)$.

Рассмотрим оснащение

$$\mathbf{A}_2 \rightleftharpoons \{L_2[0,1], \tilde{W}_2^2[0,1], L_2[0,1], J, \mathrm{id}\},$$

где использовано обозначение

$$\tilde{W}_2^2[0,1] \eqqcolon \{y \in W_2^2[0,1] \ : \ y(0) - y(1) = y'(0) + y'(1) = 0\},$$

а через $J\colon \tilde{W}_2^2[0,1] \to L_2[0,1]$ обозначен оператор вложения. В этом случае оператор $T^\bullet$ не является замкнутым.

Наконец, рассмотрим оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A}_1)$ вида

$$Ty \eqqcolon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} y(\zeta_n) \boldsymbol{\delta}_{\zeta_n},$$

где $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ — произвольно фиксированная плотная на отрезке $[0,1]$ последовательность, а через $\boldsymbol{\delta}_\zeta \in \tilde{W}_2^{-1}[0,1]$ обозначена дельта-функция с сосредоточенным в точке $\zeta \in [0,1]$ носителем. В этом случае область определения оператора $T^\bullet$ содержит лишь нулевой вектор пространства $L_2[0,1]$.

§ 2. Угловые расширения

1. Классическая процедура расширения полуограниченного самосопряжённого оператора по Фридрихсу на языке теории оснащённых пространств выглядит следующим образом. Пусть T° — действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ симметрический оператор (вообще говоря, неограниченный), и пусть число $\gamma \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$(\forall y \in \operatorname{dom} T^\circ) \qquad \langle (T^\circ - \gamma)y, y\rangle_{\mathfrak{H}} \geqslant \|y\|_{\mathfrak{H}}^2.$$

Обозначим через $\mathfrak{D}$ пополнение линейного множества $\operatorname{dom} T^\circ$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{D}} \eqqcolon \langle (T^\circ - \gamma)y, y\rangle_{\mathfrak{H}}^{1/2},$$

а через $I\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{H}$ — соответствующий оператор вложения. Наконец, обозначим через $\mathfrak{D}^*$ сопряжённое к $\mathfrak{D}$ пространство, после чего рассмотрим оснащение $\mathbf{A} \eqqcolon \{\mathfrak{H}, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*, I, I^*\}$. Тривиальное тождество

$$(1) \qquad (\forall y \in I^{-1} \operatorname{dom} T^\circ) \qquad \langle [I^* T^\circ I - \gamma I^* I] y, y\rangle_{\mathfrak{H}} = \|y\|_{\mathfrak{D}}^2$$

означает, что оператор $I^* T^\circ I$ допускает однозначное продолжение по непрерывности до некоторого оператора $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A})$. Далее следует воспользоваться следующей теоремой.

1.1. [35: Гл. V, Следствие 3.3] *Пусть $\mathfrak{D}$ — гильбертово пространство, и пусть числовая область значений*

$$W(A) \rightleftharpoons \{\lambda \in \mathbb{C} \;:\; (\exists y \in \mathfrak{D} : \|y\|_{\mathfrak{D}} = 1) \quad \langle Ay, y\rangle = \lambda\}$$

ограниченного оператора $A\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}^*$ отделена от нуля. Тогда оператор A обладает ограниченным обратным.

С учётом этой теоремы, оператор $T^\natural(\gamma)$ ограниченно обратим [(1)]. Соответственно [§ 1.1.2], оператор $T^\bullet \rightleftharpoons (I^*)^{-1} T I^{-1}$, очевидным образом расширяющий оператор T°, является самосопряжённым.

Целью настоящего параграфа является разработка аналогичного метода построения самосопряжённых расширений для симметрических операторных матриц описанного в начале настоящей главы вида.

2. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ задана симметрическая операторная матрица

$$T^\circ \rightleftharpoons \begin{pmatrix} T^\circ_{11} & T^\circ_{12} \\ T^\circ_{21} & T^\circ_{22} \end{pmatrix}$$

с указанными в начале настоящей главы свойствами. Зафиксируем два значения $\varkappa$, $\tau \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} &(\forall y \in \operatorname{dom} T^\circ_{11}) \qquad \langle (T^\circ_{11} - \varkappa) y, y\rangle_{\mathfrak{H}_1} \geqslant \|y\|^2_{\mathfrak{H}_1}, \\ &(\forall y \in \operatorname{dom} T^\circ_{22}) \qquad \langle (\tau - T^\circ_{22}) y, y\rangle_{\mathfrak{H}_2} \geqslant \|y\|^2_{\mathfrak{H}_2}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathfrak{D}_2$ пополнение линейного множества $\operatorname{dom} T^\circ_{22}$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{D}_2} \rightleftharpoons \langle (\tau - T^\circ_{22}) y, y\rangle^{1/2}_{\mathfrak{H}_2},$$

через $T^\bullet_{22}$ — связанное с пространством $\mathfrak{D}_2$ фридрихсовское расширение оператора T°_{22}, а через $\mathfrak{D}_1$ — пополнение линейного множества $\operatorname{dom} T^\circ_{11}$ по норме

$$(1) \qquad \|y\|_{\mathfrak{D}_1} \rightleftharpoons \left[\langle (T^\circ_{11} - \varkappa) y, y\rangle_{\mathfrak{H}_1} + \langle (\tau - T^\bullet_{22})^{-1} T^\circ_{21} y, T^\circ_{21} y\rangle_{\mathfrak{H}_2}\right]^{1/2}.$$

По построению, при этом существуют обладающие плотными образами непрерывные операторы вложения $I_1\colon\mathfrak{D}_1\to\mathfrak{H}_1$ и $I_2\colon\mathfrak{D}_2\to\mathfrak{H}_2$. Это позволяет ввести в рассмотрение оснащение $\mathbf{A}\risingdotseq\{\mathfrak{H},\mathfrak{D},\mathfrak{D}^*,I,I^*\}$, где положено $\mathfrak{D}\risingdotseq\mathfrak{D}_1\oplus\mathfrak{D}_2$ и $I\risingdotseq I_1\oplus I_2$, а через $\mathfrak{D}^*$ обозначено пространство, сопряжённое пространству $\mathfrak{D}$.

Заметим, что при любом выборе вектора $y\in\mathfrak{D}_1$, удовлетворяющего дополнительному условию $I_1y\in\operatorname{dom}T_{11}^\circ$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
\|I_1^*(T_{11}^\circ-\varkappa)I_1y\|_{\mathfrak{D}_1^*}&=\sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}_1}=1}|\langle(T_{11}^\circ-\varkappa)I_1y,I_1z\rangle_{\mathfrak{H}_1}|\\
&\leqslant\sup_{\substack{\|z\|_{\mathfrak{D}_1}=1\\ I_1z\in\operatorname{dom}T_{11}^\circ}}\langle(T_{11}^\circ-\varkappa)I_1y,I_1y\rangle_{\mathfrak{H}_1}^{1/2}\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\langle(T_{11}^\circ-\varkappa)I_1z,I_1z\rangle_{\mathfrak{H}_1}^{1/2}\\
&\leqslant\|y\|_{\mathfrak{D}_1},\\
\|I_2^*T_{21}^\circ I_1y\|_{\mathfrak{D}_2^*}&=\sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}_2}=1}|\langle T_{21}^\circ I_1y,I_2z\rangle_{\mathfrak{H}_2}|\\
&=\sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}_2}=1}|\langle(\tau-T_{22}^\bullet)^{-1/2}T_{21}^\circ I_1y,(\tau-T_{22}^\bullet)^{1/2}I_2z\rangle_{\mathfrak{H}_2}|\\
&\leqslant\|(\tau-T_{22}^\bullet)^{-1/2}T_{21}^\circ I_1y\|_{\mathfrak{H}_2}\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}_2}=1}\|(\tau-T_{22}^\bullet)^{1/2}I_2z\|_{\mathfrak{H}_2}\\
&\leqslant\|y\|_{\mathfrak{D}_1}.
\end{aligned}$$

Соответственно, замыканиями операторов $I_1^*T_{11}^\circ I_1$ и $I_2^*T_{21}^\circ I_1$ являются некоторые всюду определённые ограниченные операторы $T_{11}\colon\mathfrak{D}_1\to\mathfrak{D}_1^*$ и $T_{21}\colon\mathfrak{D}_1\to\mathfrak{D}_2^*$.

Аналогичным образом, при любом выборе вектора $y\in\mathfrak{D}_2$, удовлетворяющего дополнительному условию $I_2y\in\operatorname{dom}T_{22}^\circ$, выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
\|I_2^*(T_{22}^\circ-\tau)I_2y\|_{\mathfrak{D}_2^*}&=\sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}_2}=1}|\langle(\tau-T_{22}^\circ)I_2y,I_2z\rangle_{\mathfrak{H}_2}|\\
&\leqslant\sup_{\substack{\|z\|_{\mathfrak{D}_2}=1\\ I_2z\in\operatorname{dom}T_{22}^\circ}}\langle(\tau-T_{22}^\circ)I_2y,I_2y\rangle_{\mathfrak{H}_2}^{1/2}\cdot
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad \cdot \langle (\tau - T_{22}^{\circ}) I_2 z, I_2 z\rangle_{\mathfrak{H}_2}^{1/2}\\
&= \|y\|_{\mathfrak{D}_2},\\
\|I_1^* T_{12}^{\circ} I_2 y\|_{\mathfrak{D}_1^*} &= \sup_{\substack{\|z\|_{\mathfrak{D}_1}=1\\ I_1 z\in \operatorname{dom} T_{11}^{\circ}}} |\langle I_2 y, T_{21}^{\circ} I_1 z\rangle_{\mathfrak{H}_2}|\\
&= \sup_{\substack{\|z\|_{\mathfrak{D}_1}=1\\ I_1 z\in \operatorname{dom} T_{11}^{\circ}}} |\langle (\tau - T_{22}^{\bullet})^{1/2} I_2 y, (\tau - T_{22}^{\bullet})^{-1/2} T_{21}^{\circ} I_1 z\rangle_{\mathfrak{H}_2}|\\
&\leqslant \|(\tau - T_{22}^{\bullet})^{1/2} I_2 y\|_{\mathfrak{H}_2} \cdot\\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \sup_{\substack{\|z\|_{\mathfrak{D}_1}=1\\ I_1 z\in \operatorname{dom} T_{11}^{\circ}}} \|(\tau - T_{22}^{\bullet})^{-1/2} T_{21}^{\circ} I_1 z\|_{\mathfrak{H}_2}\\
&\leqslant \|y\|_{\mathfrak{D}_2}.
\end{aligned}
$$

Соответственно, замыканиями операторов $I_2^* T_{22}^{\circ} I_2$ и $I_1^* T_{12}^{\circ} I_2$ являются некоторые всюду определённые ограниченные операторы $T_{22}\colon \mathfrak{D}_2 \to \mathfrak{D}_2^*$ и $T_{12}\colon \mathfrak{D}_2 \to \mathfrak{D}_1^*$.

Объединяя установленные факты, убеждаемся, что замыканием оператора $I^* T^{\circ} I$ является некоторый всюду определённый ограниченный оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A})$. Отвечающий ему оператор $T^{\bullet} \rightleftharpoons (I^*)^{-1} T I^{-1}$ мы далее будем называть *угловым расширением* исходной операторной матрицы T°.

2.1. *Угловое расширение $T^{\bullet}$ операторной матрицы T° представляет собой самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Вещественнозначность квадратичной формы оператора $T^{\bullet}$ немедленно вытекает из его определения. Соответственно, для доказательства утверждения достаточно [35: Гл. V, Теорема 4.3] установить ограниченную обратимость оператора

$$
T^{\bullet} - \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} = (I^*)^{-1} \begin{pmatrix} T_{11} - \varkappa I_1^* I_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \tau I_2^* I_2 \end{pmatrix} I^{-1}.
$$

Последняя, в свою очередь, немедленно вытекает из ограниченной обратимости оператора

$$
(2) \qquad \begin{pmatrix} T_{11} - \varkappa I_1^* I_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \tau I_2^* I_2 \end{pmatrix} =
$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & T_{12}D_\tau^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{\varkappa,\tau} & 0 \\ 0 & D_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_\tau^{-1}T_{21} & 1 \end{pmatrix},$$

где положено $D_\tau \rightleftharpoons T_{22} - \tau I_2^* I_2$ и $S_{\varkappa,\tau} \rightleftharpoons T_{11} - \varkappa I_1^* I_1 - T_{12} D_\tau^{-1} T_{21}$. Действительно, числовые области значений операторов D_τ и $S_{\varkappa,\tau}$ отделены от нуля, что и означает [1.1] ограниченную обратимость этих операторов. □

В ходе доказательства утверждения 2.1 нами, по существу, была также установлена справедливость следующего утверждения.

2.2. *Любое значение $\lambda \in \mathbb{R}$ принадлежит спектру оператора $T^\bullet$ в том и только том случае, когда оно принадлежит спектру линейного пучка $T^\natural \colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathbf{A})$ вида*

$$T^\natural(\lambda) = T - \lambda I^* I.$$

При этом кратность любого собственного значения $\lambda \in \mathbb{R}$ оператора $T^\bullet$ в точности совпадает с размерностью ядра оператора $T^\natural(\lambda)$ [§ 1.1.2, § 1.1.3, § 1.1.4].

3. Связь разработанной выше в настоящем параграфе конструкции с результатами работы [87] дается следующим легко проверяемым утверждением.

3.1. *Пусть матрица T° самосопряжена в существенном, операторы T_{11}° и T_{22}° полуограничены (соответственно, снизу и сверху), а также выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1°. Оператор T_{22}° самосопряжён в существенном, причём для некоторых γ, $\varkappa \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$(\forall y \in \operatorname{dom} T_{11}^\circ) \qquad \|T_{21}^\circ y\|_{\mathfrak{H}_1}^2 \leqslant \gamma \cdot \langle (T_{11}^\circ - \varkappa) y, y \rangle_{\mathfrak{H}_1}.$$

2°. Для некоторых $\gamma, \varkappa, \tau \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$(\forall y \in \operatorname{dom} T_{11}^\circ) \qquad \|T_{21}^\circ y\|_{\mathfrak{H}_1}^2 \leqslant \gamma \cdot \langle (T_{11}^\circ - \varkappa) y, y \rangle_{\mathfrak{H}_1},$$
$$(\forall y \in \operatorname{dom} T_{22}^\circ) \qquad \|T_{12}^\circ y\|_{\mathfrak{H}_2}^2 \leqslant \gamma \cdot \langle (\tau - T_{22}^\circ) y, y \rangle_{\mathfrak{H}_2}.$$

3°. Операторы T_{11}° и T_{22}° являются ограниченными.

Тогда замыкание оператора T° является его угловым расширением [2.1].

Фигурирующие в формулировке утверждения 3.1 три случая взаимных соотношений между элементами операторной матрицы T° суть в точности три типа взаимного доминирования этих элементов, рассмотренные в работе [[87]].

4. В качестве примера применения процедуры углового расширения рассмотрим действующую в пространстве $L_2(\mathbb{R}) \oplus L_2(\mathbb{R})$ симметрическую операторную матрицу

$$T^\circ \risingdotseq \begin{pmatrix} x^2 & -d/dx \\ d/dx & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

с областью определения $[W_2^1(\mathbb{R}) \cap L_2(x^4;\, \mathbb{R})] \oplus W_2^1(\mathbb{R})$. Этой матрице отвечают пространства $\mathfrak{D}_1 = W_2^1(\mathbb{R}) \cap L_2(x^2;\, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{D}_2 = L_2(\mathbb{R})$ с некоторыми эквивалентными стандартным нормами. Область определения соответствующего углового расширения не раскладывается в прямую сумму — так, среди векторов

$$\begin{pmatrix} \frac{2\cos x^2}{x^2+1} \\ \frac{\sin x^2}{\sqrt{x^2+1}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{2\cos x^2}{x^2+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

множеству $\operatorname{dom} T^\bullet$ принадлежит лишь первый. Операторы $T_{22} - \lambda I_2^* I_2$ представляют собой действующие в $L_2(\mathbb{R})$ операторы умножения на постоянную $-\lambda$, что означает в случае $\lambda \neq 0$ равносильность ограниченной обратимости оператора $T^\natural(\lambda) = T - \lambda I^* I$ и ограниченной обратимости передаточного оператора

$$\begin{gathered} S(\lambda) \risingdotseq T_{11} - \lambda I_1^* I_1 + \lambda^{-1} T_{12} T_{21} \colon \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1^*, \\ \langle S(\lambda) y, z \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} \left[\lambda^{-1} y' \overline{z'} + (x^2 - \lambda) y \overline{z}\right] \, dx. \end{gathered} \tag{2}$$

Зафиксировав в пространстве $\mathfrak{D}_1$ базис из функций Эрмита

$$h_n(x) \risingdotseq (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n},$$

с учётом (2) легко устанавливаем, что оператор $S(\lambda)$ подобен некоторому вполне непрерывному возмущению преобразования $\hat{S}(\lambda)\colon \ell_2 \to \ell_2$ с матрицей

$$[\hat{S}(\lambda)]_{nm} = \begin{cases} \frac{\lambda+1}{2\lambda} & \text{при } n = m, \\ \frac{\lambda-1}{4\lambda} & \text{при } |n-m| = 2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Соответственно, полупрямая $(-\infty, 0]$ представляет собой [2.2] существенный спектр оператора $T^{\bullet}$, в то время как на полупрямой $(0, +\infty)$ расположены лишь собственные значения конечной кратности. Ввиду (2), замечаний из пункта 1 и классических фактов [51: § 23.6] эти собственные значения совпадают с собственными значениями решаемого на классе $L_2(\mathbb{R})$ уравнения

$$-y'' + (\lambda x^2 - \lambda^2)y = 0.$$

Отметим, что матрица (1) не относится ни к одному из трёх типов, рассмотренных в работе [87] и указанных в формулировке утверждения 3.1.

§ 3. Вариационные принципы

1. Утверждение § 2.2.2 сводит вопрос о спектре углового расширения $T^{\bullet}$ операторной матрицы T° к вопросу о спектре линейного пучка $T^{\natural}$ ограниченных операторов вида

$$T^{\natural}(\lambda) = \begin{pmatrix} T_{11} - \lambda I_1^* I_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda I_2^* I_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

В случае, когда значение $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит резольвентному множеству оператора $T_{22}^{\bullet}$, оператор $T_{22}^{\natural}(\lambda) = T_{22} - \lambda I_2^* I_2$ обладает ограниченным обратным [§ 1.1.3], что означает возможность факторизации операторной матрицы (1) в виде § 2.2 (2). Соответственно, вне спектра оператора $T_{22}^{\bullet}$ собственные значения оператора $T^{\bullet}$ совпадают — с сохранением кратностей — с собственными значениями оператор-функции S вида

$$S(\lambda) \rightleftharpoons T_{11} - \lambda I_1^* I_1 - T_{12}[T_{22}^{\natural}(\lambda)]^{-1} T_{21}. \tag{2}$$

Настоящий параграф будет посвящен описанию основанных на таком замечании вариационных принципов для собственных значений оператора $T^\bullet$.

2. Далее через $\operatorname{ind} A$ всегда обозначается отрицательный индекс инерции квадратичной формы оператора A, то есть точная верхняя грань размерностей подпространств $\mathfrak{M} \subseteq \operatorname{dom} A$, удовлетворяющих условию

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall y \in \mathfrak{M}) \qquad \langle Ay, y\rangle \leqslant -\varepsilon\,\|y\|^2.$$

Имеет место следующий факт.

2.1. *Пусть отрезок* $[\zeta^-, \zeta^+] \subseteq \varrho(T_{22}^\bullet)$ *таков, что оператор* $S(\zeta^+)\colon \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1^*$ *представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора. Тогда спектр оператора* $T^\bullet$ *на полуинтервале* $[\zeta^-, \zeta^+)$ *чисто дискретен, причём его суммарная кратность равна величине* $\operatorname{ind} S(\zeta^+) - \operatorname{ind} S(\zeta^-)$.

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$, представляющее собой нижнюю оценку некоторого вполне непрерывного возмущения оператора $S(\zeta^+)$. Ввиду справедливости для любых чисел $\lambda_1 \in [\zeta^-, \zeta^+)$, $\lambda_2 \in (\lambda_1, \zeta^+]$ и вектора $y \in \mathfrak{D}_1$ соотношений

$$\begin{aligned} \langle [S(\lambda_2) - S(\lambda_1)]y, y\rangle &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\langle S(\lambda)y, y\rangle}{d\lambda}\, d\lambda \\ &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Big(-\|I_1 y\|_{\mathfrak{H}_1}^2 - \|I_2[T_{22}^\natural(\lambda)]^{-1} T_{21} y\|_{\mathfrak{H}_2}^2\Big)\, d\lambda \qquad [1\,(2)] \\ &\leqslant -(\lambda_2 - \lambda_1)\,\|I_1 y\|_{\mathfrak{H}_1}^2, \end{aligned} \tag{1}$$

постоянная ε будет минорировать некоторое вполне непрерывное возмущение оператора $S(\lambda)$ при любом выборе значения $\lambda \in [\zeta^-, \zeta^+]$. Положим теперь

$$\Lambda_n(\lambda) \rightleftharpoons \inf_{\substack{\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{D}_1 \\ \dim \mathfrak{M} > n}} \ \sup_{\substack{y \in \mathfrak{M} \\ \|y\|_{\mathfrak{D}_1} = 1}} \ \inf\Big\{\langle S(\lambda)y, y\rangle, \varepsilon\Big\}.$$

Непрерывный и монотонный характер зависимости операторов $S(\lambda)$ от параметра гарантирует непрерывность и невозрастание каждой из функций $\Lambda_n\colon [\zeta^-, \zeta^+] \to \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Стандартные вариационные принципы для ограниченных самосопряжённых операторов [2: п. 82, Теорема 2] утверждают, что независимо от выбора значения $\lambda \in [\zeta^-, \zeta^+]$ размерность подпространства $\ker S(\lambda)$ равна величине

$$\#\{n \in \mathbb{N} \,:\, \Lambda_n(\lambda) = 0\},$$

причём в случае обращения этой размерности в нуль оператор $S(\lambda)$ обладает ограниченным обратным. Кроме того, из оценок (1) вытекает факт отрицательной определённости квадратичной формы оператора $S(\lambda_2)$ на любом подпространстве, на котором неположительна квадратичная форма оператора $S(\lambda_1)$. Тем самым, каждая из функций Λ_n строго убывает в своих нулях. Соответственно, пересечение спектра оператора $T^\bullet$ с полуинтервалом $[\zeta^-, \zeta^+)$ представляет собой [§ 2.2.2] дискретное множество всевозможных нулей функций Λ_n, причём суммарная кратность этой части спектра оператора $T^\bullet$ совпадает с величиной

$$(2) \qquad \#\{n \in \mathbb{N} \,:\, (\Lambda_n(\zeta^-) \geqslant 0) \,\&\, (\Lambda_n(\zeta^+) < 0)\} = \operatorname{ind} S(\zeta^+) - \operatorname{ind} S(\zeta^-).$$

Тем самым, доказываемое утверждение является верным. □

Аналогичным образом доказывается также следующее утверждение.

2.2. *Пусть отрезок* $[\zeta^-, \zeta^+] \subseteq \varrho(T^\bullet_{22})$ *таков, что оператор* $S(\zeta^-)\colon \mathfrak{D}_1 \to \mathfrak{D}_1^*$ *представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно отрицательного оператора. Тогда спектр оператора* $T^\bullet$ *на полуинтервале* $(\zeta^-, \zeta^+]$ *чисто дискретен, причём его суммарная кратность равна величине* $\operatorname{ind}[-S(\zeta^-)] - \operatorname{ind}[-S(\zeta^+)]$.

3. Имеют место следующие четыре факта.

3.1. *Пусть* $\zeta \in \varrho(T^\bullet_{22})$ *— имеющее конечную кратность изолированное собственное значение оператора* $T^\bullet$. *Пусть также для некоторого* $\zeta^- < \zeta$ *справедливо соотношение* $[\zeta^-, \zeta) \subseteq \varrho(T^\bullet) \cap \varrho(T^\bullet_{22})$, *причём* $S(\zeta^-)$ *представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора. Тогда найдётся такое* $\zeta^+ > \zeta$, *что* *справедливо соотношение* $(\zeta, \zeta^+] \subseteq \varrho(T^\bullet) \cap \varrho(T_{22}^\bullet)$*, а* $S(\zeta^+)$ *представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора.*

Доказательство. В рассматриваемом случае заведомо найдётся [67: п. 21.4] самосопряжённый оператор конечного ранга $K\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, для которого оператор $T^\bullet + K - \zeta$ будет ограниченно обратимым. Без умаления общности рассмотрения можно считать K настолько малым по норме, что оператор

$$\tilde{D}_\zeta \rightleftharpoons T_{22} + I_2^*(K_{22} - \zeta) I_2$$

обладает ограниченным обратным. В этом случае определённая на некотором содержащем точку ζ интервале $\Gamma \subseteq (\zeta^-, +\infty)$ оператор-функция $\tilde{S}$ вида

$$\tilde{S}(\lambda) \rightleftharpoons T_{11} + I_1^*(K_{11} - \lambda) I_1 - (T_{12} + I_1^* K_{12} I_2)\, \tilde{D}_\lambda^{-1} \cdot (T_{21} + I_2^* K_{21} I_1)$$

принимает при $\lambda = \zeta$ ограниченно обратимое значение [§ 2.2.2].

Ввиду непрерывности функции $\tilde{S}$ в смысле равномерной операторной топологии, найдётся содержащий точку ζ интервал $\Delta \subseteq \Gamma$ со следующими свойствами:

1°. При любом выборе значения $\lambda \in \Delta$ оператор $\tilde{S}(\lambda)$ обладает ограниченным обратным.

2°. Операторы $\theta(\tilde{S}(\lambda))$, где через θ обозначена функция Хэвисайда, непрерывно зависят от параметра $\lambda \in \Delta$ в смысле равномерной операторной топологии.

Зафиксируем теперь произвольное расположенное слева от точки ζ значение $\mu \in \Delta$. Оператор $\tilde{S}(\mu)$ представляет собой имеющее конечный ранг возмущение оператора $S(\mu)$, по условию являющегося вполне непрерывным возмущением некоторого равномерно положительного оператора. Соответственно, оператор $\tilde{S}(\mu)$ сам является вполне непрерывным возмущением некоторого равномерно положительного оператора, и потому оператор $\theta(\tilde{S}(\mu))$ представляет собой проектор на подпространство конечной коразмерности. Согласно вышесказанному, проекторами на некоторые подпространства той же конечной коразмерности [2: п. 39] будут выступать также операторы $\theta(\tilde{S}(\lambda))$ при всех $\lambda \in \Delta$. Последнее как раз и означает, что при любом выборе значения $\lambda \in \Delta$ операторы $\tilde{S}(\lambda)$ и $S(\lambda)$ представляют собой вполне непрерывные возмущения некоторого равномерно положительного оператора. $\square$

3.2. *Пусть $\zeta \in \varrho(T^\bullet_{22})$ — имеющее конечную кратность изолированное собственное значение оператора $T^\bullet$. Пусть также для некоторого $\zeta^+ > \zeta$ справедливо соотношение $(\zeta, \zeta^+] \subseteq \varrho(T^\bullet) \cap \varrho(T^\bullet_{22})$, причём $S(\zeta^+)$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно отрицательного оператора. Тогда найдётся такое $\zeta^- < \zeta$, что справедливо соотношение $[\zeta^-, \zeta) \subseteq \varrho(T^\bullet) \cap \varrho(T^\bullet_{22})$, а $S(\zeta^-)$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно отрицательного оператора.*

Доказательство утверждения 3.2 полностью аналогично доказательству утверждения 3.1.

3.3. *Пусть все расположенные на отрезке $[\zeta^-, \zeta^+] \subseteq \varrho(T^\bullet_{22})$ точки спектра оператора $T^\bullet$ являются изолированными собственными значениями конечной кратности. Пусть при этом $S(\zeta^-)$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора. Тогда $S(\zeta^+)$ также представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно положительного оператора.*

3.4. *Пусть все расположенные на отрезке $[\zeta^-, \zeta^+] \subseteq \varrho(T^\bullet_{22})$ точки спектра оператора $T^\bullet$ являются изолированными собственными значениями конечной кратности. Пусть при этом $S(\zeta^+)$ представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно отрицательного оператора. Тогда $S(\zeta^-)$ также представляет собой вполне непрерывное возмущение некоторого равномерно отрицательного оператора.*

Два последних утверждения легко выводятся из утверждений 3.1 и 3.2 индукцией по числу лежащих на отрезке $[\zeta^-, \zeta^+]$ собственных значений оператора $T^\bullet$.

4. Связь результатов настоящего параграфа с результатами работы [87] устанавливается следующим образом.

Обозначим через λ_e точную нижнюю грань пересечения существенного спектра оператора $T^\bullet$ с некоторой полупрямой $(\zeta, +\infty) \subseteq \varrho(T^\bullet_{22})$, где $\zeta \in \varrho(T^\bullet)$. В качестве точной нижней грани пустого множества здесь и далее понимается величина $+\infty$. Обозначим также через λ_n, где $n \in \mathbb{N}$, величины, совпадающие либо с $(n+1)$-ми снизу (с учётом кратности) собственными значениями оператора $T^\bullet$ из интервала (ζ, λ_e), либо с величиной λ_e, если требуемое собственное значение не существует. Имеет место следующий тривиальным образом вытекающий из результатов настоящего параграфа факт.

4.1. *Пусть величина* $\operatorname{ind} S(\zeta)$ *конечна. Тогда при любом* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\lambda_n = \inf\{\lambda \in (\zeta, +\infty) \ : \ \operatorname{ind} S(\lambda) > \operatorname{ind} S(\zeta) + n\}.$$

Основные результаты работы [87] получаются комбинированием утверждений 4.1 и § 2.3.1.

§ 4. Дополнительные замечания

1. Несложно заметить, что для получения основных результатов пункта § 2.2 полуограниченность оператора T°_{11} в действительности не является необходимой. Достаточным оказывается выполнение следующих двух условий:

1°. Существуют величины $\varkappa, \tau \in \mathbb{R}$, для которых квадратичная форма

$$\mathfrak{s}[y] \rightleftharpoons \langle (T^\circ_{11} - \varkappa) y, y \rangle_{\mathfrak{H}_1} + \langle (\tau - T^\bullet_{22})^{-1} T^\circ_{21} y, T^\circ_{21} y \rangle_{\mathfrak{H}_2}$$

равномерно по $\mathfrak{H}_1$-норме знакоопределена на линейном множестве $\operatorname{dom} T_{11}^{\circ}$.

2°. При выборе в качестве пространства $\mathfrak{D}_1$ пополнения линейного множества $\operatorname{dom} T_{11}^{\circ}$ по норме $\|y\|_{\mathfrak{D}_1} \rightleftharpoons \sqrt{|\mathfrak{s}[y]|}$ замыканием оператора $I^* T^{\circ} I$ является некоторый всюду определённый ограниченный оператор $T \in \mathcal{B}(\mathbf{A})$.

В качестве примера здесь может быть рассмотрена действующая в пространстве $L_2[-1,1] \oplus L_2[-1,1]$ операторная матрица

$$T^{\circ} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} -(d/dx)x(d/dx) & -d/dx \\ d/dx & 0 \end{pmatrix}$$

с областью определения $\tilde{W}_2^2[-1,1] \oplus \tilde{W}_2^1[-1,1]$, где использованы обозначения

$$\tilde{W}_2^1[-1,1] \rightleftharpoons \{y \in W_2^1[-1,1] \ : \ y(1) - y(-1) = 0\},$$
$$\tilde{W}_2^2[-1,1] \rightleftharpoons \{y \in W_2^2[-1,1] \ : \ y(1) - y(-1) = y'(1) + y'(-1) = 0\}.$$

На роль пространств $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ могут быть взяты пространства $\tilde{W}_2^1[-1,1]$ и $L_2[-1,1]$, соответственно. Аналогичными проведённым в пункте § 2.2 рассуждениями устанавливается, что полупрямые $(-\infty,-1]$ и $[1,+\infty)$ представляют собой существенный спектр соответствующего оператора $T^{\bullet}$, в то время как на множестве $(-1,1) \setminus \{0\}$ спектр указанного оператора дискретен и совпадает со спектром граничной задачи

$$-\big((1+\lambda x)y'\big)' - \lambda^2 y = 0,$$
$$y(1) - y(-1) = (1+\lambda)y'(1) - (1-\lambda)y'(-1) = 0.$$

2. Результаты предыдущего параграфа были сформулированы применительно к задаче о спектре простейшего линейного пучка $T^{\bullet} - \lambda$. Между тем, как несложно заметить, они допускают естественное распространение на случай самосопряжённой оператор-функции достаточно общего вида (ср. [[90]]). А именно, пусть $T \colon [\zeta^-, \zeta^+] \to \mathcal{B}(\mathbf{A})$ есть гладкая в смысле сильной операторной топологии оператор-функция, для которой при любом выборе значения $\lambda \in [\zeta^-, \zeta^+]$ соответствующий оператор $[T(\lambda)]^\bullet$ самосопряжён. Пусть также выполнены следующие два условия:

1°. Существует вещественное число $\varepsilon > 0$, для которого независимо от выбора значения $\lambda \in [\zeta^-, \zeta^+]$ правая нижняя компонента $T_{22}(\lambda)$ операторной матрицы $T(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$(\forall y \in \mathfrak{D}_2) \qquad \langle T_{22}(\lambda)y, y\rangle \leqslant -\varepsilon \, \|y\|^2_{\mathfrak{D}_2}.$$

2°. Определённая на отрезке $[\zeta^-, \zeta^+]$ оператор-функция S вида

$$S(\lambda) \rightleftharpoons T_{11}(\lambda) - T_{12}(\lambda)[T_{22}(\lambda)]^{-1}T_{21}(\lambda)$$

непрерывна в смысле равномерной операторной топологии, а её значения суть вполне непрерывные возмущения некоторых равномерно положительных операторов.

Во избежание недоразумений подчеркнём, что норма пространств $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ здесь уже не предполагается каким-либо образом связанной с соотношениями из пункта § 2.2.

Напомним, что собственное значение $\mu \in (\zeta^-, \zeta^+)$ самосопряжённой оператор-функции $\lambda \mapsto [T(\lambda)]^\bullet$ считается *имеющим отрицательный тип*, если для любого ненулевого вектора $y \in \ker[T(\mu)]^\bullet$ числовая функция $\lambda \mapsto \langle [T(\lambda)]^\bullet y, y\rangle_{\mathfrak{H}}$ определена на некотором содержащем точку μ интервале и имеет в этой точке строго отрицательную производную. При сделанных предположениях имеют место следующие два факта.

2.1. *Каждое имеющее отрицательный тип изолированное конечнократное собственное значение $\mu \in (\zeta^-, \zeta^+)$ оператор-функции $\lambda \mapsto [T(\lambda)]^\bullet$ является имеющим отрицательный тип изолированным собственным значением той же кратности для передаточной оператор-функции S.*

Доказательство. При сделанных предположениях из теоремы Банаха–Штейнгауза вытекает равномерная по параметру $\lambda \in [\zeta^-, \zeta^+]$

ограниченность операторов $T(\lambda)$ и связанная с этим возможность дифференцирования оператор-функции S в смысле сильной операторной топологии. Согласно утверждению § 2.2.2 и замечаниям из пункта 1, точка μ является изолированным собственным значением оператор-функции S, причём соответствующее собственное подпространство допускает [§ 1.1.4] представление

$$\left\{y \in \mathfrak{D}_1 \;:\; I\begin{pmatrix} y \\ z_\mu \end{pmatrix} \in \ker[T(\mu)]^\bullet\right\},$$

где использовано сокращение $z_\lambda \rightleftharpoons -[T_{22}(\lambda)]^{-1}T_{21}(\lambda)y$. Учёт выполняющихся для любого вектора $y \in \ker S(\mu)$ равенств

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\langle S(\lambda)y, y\rangle}{d\lambda}\right|_{\lambda=\mu} &= \frac{d}{d\lambda}\left.\left\langle \begin{pmatrix} S(\lambda) & 0 \\ 0 & T_{22}(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z_\mu - z_\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z_\mu - z_\lambda \end{pmatrix}\right\rangle\right|_{\lambda=\mu} \\ &= \frac{d}{d\lambda}\left.\left\langle [T(\lambda)]^\bullet I\begin{pmatrix} y \\ z_\mu \end{pmatrix}, I\begin{pmatrix} y \\ z_\mu \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathfrak{H}}\right|_{\lambda=\mu} \qquad [\S\, 2.2\,(2)] \end{aligned}$$

завершает доказательство. □

2.2. *Пусть все расположенные на интервале* (ζ^-, ζ^+) *собственные значения оператор-функции* T *имеют отрицательный тип, а каждый из операторов* $T(\zeta^\pm)$ *обладает ограниченным обратным. Тогда спектр оператор-функции* $\lambda \mapsto [T(\lambda)]^\bullet$ *на интервале* (ζ^-, ζ^+) *чисто дискретен, причём его суммарная кратность равна величине* $\operatorname{ind} S(\zeta^+) - \operatorname{ind} S(\zeta^-)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\mu \in \mathbb{R}$ и рассмотрим определённую на некотором содержащем эту точку интервале гладкую оператор-функцию F вида

$$F(\lambda) \rightleftharpoons \begin{pmatrix} F_{11}(\lambda) & F_{12}(\lambda) \\ F_{21}(\lambda) & F_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

значениями которой выступают ограниченные самосопряжённые операторы в ортогональной прямой сумме $\mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2$ некоторых конечномерных гильбертовых пространств. Предположим также выполнение равенств

$F_{11}(\mu) = 0$, $F_{21}(\mu) = 0$ и обратимость операторов $F'_{11}(\mu)$ и $F_{22}(\mu)$. Тогда при $\lambda \to \mu + 0$ оказываются справедливыми асимптотики

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind} F(\lambda) &= \operatorname{ind} F_{11}(\lambda) + \operatorname{ind}[F_{22}(\lambda) - F_{21}(\lambda)F_{11}^{-1}(\lambda)F_{12}(\lambda)] \\
&= \operatorname{ind}[(\lambda - \mu) \cdot (F'_{11}(\mu) + o(1))] + \operatorname{ind}[F_{22}(\mu) + O(\lambda - \mu)] \\
&= \operatorname{ind} F'_{11}(\mu) + \operatorname{ind} F(\mu).
\end{aligned}$$

Повторим теперь в основном рассуждения из доказательства утверждения § 3.2.1. А именно, сопоставим оператор-функции S последовательность непрерывных числовых функций $\Lambda_n \colon [\zeta^-, \zeta^+] \to \mathbb{R}$. Применяя полученную асимптотику индексов инерции к случаю, когда пространство $\mathfrak{E}_1$ представляет собой ядро оператора $S(\mu)$, пространство $\mathfrak{E}_2$ — отвечающее отрицательной части спектра инвариантное подпространство того же оператора, а квадратичные формы операторов $F(\lambda)$ совпадают с таковыми для операторов $S(\lambda)$, убеждаемся, что каждая из функций Λ_n строго убывает в своих нулях. Согласно утверждению § 2.2.2 и замечаниям из пункта 1, это означает совпадение суммарной кратности расположенного на интервале (ζ^-, ζ^+) спектра оператор-функции $\lambda \mapsto [T(\lambda)]^\bullet$ с величиной § 3.2 (2). $\square$

Глава II

ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И ОСЦИЛЛЯЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Первой целью настоящей главы является применение представления об операторах в тройках гильбертовых пространств к проблеме интерпретации граничных задач для дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left(p_k y^{(n-k)}\right)^{(n-k)}=f,$$

где коэффициенты p_k суть некоторые обобщённые функции, а граничные условия ставятся, следуя [58], в терминах — вообще говоря, формальных — векторов граничных значений

$$y^{\wedge}\rightleftharpoons\begin{pmatrix} y(0)\\ y'(0)\\ \dots\\ y^{(n-1)}(0)\\ y(1)\\ y'(1)\\ \dots\\ y^{(n-1)}(1)\end{pmatrix},\qquad y^{\vee}\rightleftharpoons\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k-1}(p_k y^{(n-k)})^{(n-k-1)}(0)\\ \sum\limits_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-k-2}(p_k y^{(n-k)})^{(n-k-2)}(0)\\ \dots\\ [p_0 y^{(n)}](0)\\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(p_k y^{(n-k)})^{(n-k-1)}(1)\\ \sum\limits_{k=0}^{n-2}(-1)^{n-k-1}(p_k y^{(n-k)})^{(n-k-2)}(1)\\ \dots\\ -[p_0 y^{(n)}](1)\end{pmatrix}.$$

В случае задачи Штурма–Лиувилля с граничными условиями Дирихле — а также некоторых близких случаях — подход к такой интерпретации был заложен в работах [53, 59]. Изложение материала этой части главы в основном следует работе [9].

Второй целью настоящей главы является изучение осцилляционных свойств собственных функций сингулярных дифференциальных операторов. Для случая задачи второго порядка оно представляет собой известную проблему, в частных случаях неоднократно ставившуюся и решавшуюся в литературе (из сравнительно недавних работ здесь можно отметить, например, статью [77]). Дополненное граничными условиями Штурма уравнение струны

$$-y'' = \lambda\rho y,$$

где обобщённая функция $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ является знакоопределённой, вообще является — будучи переформулированным в терминах интегральных уравнений — классическим объектом указанного рода исследований (см., например, [25: Гл. III]). Применительно же к сингулярным граничным задачам общего вида в ряде источников высказывались даже сомнения относительно принципиальной возможности построения аналогов теории Штурма. Здесь может быть указано, например, рассуждение со стр. 114 монографии [54], в которой развита теория осцилляции собственных функций для достаточно узкого подкласса рассматриваемых далее в настоящей главе задач.

Различные подходы к построению осцилляционной теории для граничных задач второго порядка с коэффициентами–обобщёнными функциями были предложены, в частности, в работах [75, 11]. В первой из них рассматривается не очень широкий класс задач (отвечающий тождественно единичным весу и старшему коэффициенту, а также граничным условиям Дирихле), вторая излагает основанный на операторной трактовке осцилляционных свойств (см., например, [58]) подход к задачам более общего вида. К числу дополнительных достоинств последнего подхода следует отнести возможность его естественного распространения — как это и делается в монографии [58] применительно к задачам с достаточно гладкими коэффициентами — на случай изучения связи между спектром задач высшего порядка (либо задач для вектор-функций) и распределением сопряжённых точек соответствующих дифференциальных выражений.

Новые варианты построения осцилляционной теории для сингулярных граничных задач второго порядка продолжают появляться и в настоящее время (см., например, [82]).

Следует отметить, что в случае задачи высокого порядка указанный выше вопрос о связи между спектром оператора и распределением сопряжённых точек определяющего этот оператор дифференциального выражения существенно расходится с вопросом о числе нулей и знакоперемен собственных функций оператора. Последний вопрос применительно к дифференциальным операторам с гладкими коэффициентами традиционно рассматривается на основе теории знакорегулярности, а также свойств так называемой осцилляционности ядер обращающих исходный дифференциальный оператор интегральных операторов (см., например, [25, 41, 6, 62]). Что касается дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами, в последнее время появился цикл работ Р. Ч. Кулаева [37, 38, 39], посвящённый установлению осцилляционности функции Грина ряда граничных задач для уравнений вида

$$(p_0 y'')'' - (p_1 y')' + p_2 y = f,$$

где равномерно положительная на отрезке $[0,1]$ функция p_0 кусочно-непрерывна, а неотрицательные обобщённые функции p_1 и p_2 представляют собой линейные комбинации кусочно-непрерывных функций с дельта-функциями Дирака. Работа [15], материал которой включён в настоящую главу, содержит основанное на излагаемой в первой части настоящей главы идеологии обобщение основных результатов работ указанного цикла.

Материал данной части главы основан, главным образом, на материале работ [11, 15].

§ 1. Вполне регулярные граничные задачи

1. Зафиксируем произвольное натуральное число $n > 0$ и рассмотрим граничную задачу

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(p_k y^{(n-k)})^{(n-k)} = f, \tag{1}$$

$$By^{\wedge} + Cy^{\vee} = 0, \tag{2}$$

где коэффициенты $p_k \in C^{n-k}[0,1]$ и $f \in C[0,1]$ суть некоторые комплекснозначные функции, а $B, C \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ суть некоторые комплексные матрицы. При этом также предполагается, что область значений старшего коэффициента p_0 отделена от точки $0 \in \mathbb{C}$. Запись в форме (2) очевидным образом допускает всякая двухточечная граничная задача для уравнения (1).

Свяжем с граничными условиями (2) пространство

$$W^n_{2,B,C}[0,1] \coloneqq \{y \in W^n_2[0,1] \ : \ By^{\wedge} \in \operatorname{im} C\}.$$

Оно плотным образом вложено в пространство $L_2[0,1]$, и вместе с двойственным к нему пространством $W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$ нормированных функционалов, а также естественными вложениями $I\colon W^n_{2,B,C}[0,1] \to L_2[0,1]$ и $I^*\colon L_2[0,1] \to W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$, задаёт некоторое оснащение

$$\mathbf{A}_{B,C} \coloneqq \{L_2[0,1],\, W^n_{2,B,C}[0,1],\, W^{-n}_{2,B,C}[0,1],\, I,\, I^*\}. \tag{3}$$

Имеет место следующий тривиальный факт.

1.1. *Пусть граничные условия (2) удовлетворяют соотношению*

$$B^{-1}\operatorname{im} C \subseteq \mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C, \tag{4}$$

где символ B^{-1} обозначает взятие полного прообраза. Тогда оператор, сопоставляющий всякой функции $y \in C^{2n}[0,1]$ со свойством (2) значение f выражения из левой части уравнения (1), допускает продолжение по непрерывности до ограниченного линейного оператора $T\colon W^n_{2,B,C}[0,1] \to W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные функции $y \in C^{2n}[0,1]$ со свойством (2), а также $z \in W^n_{2,B,C}[0,1]$. Обозначим через $V\colon B^{-1}\operatorname{im} C \to \mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C$ оператор, сопоставляющий каждому вектору $\xi \in B^{-1}\operatorname{im} C$ принадлежащее подпространству $\mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C$ решение $\eta = V\xi$ уравнения $C\eta = -B\xi$. Интегрируя по частям, убеждаемся в выполнении равенств

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\overline{z}\,dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n p_k y^{(n-k)}\overline{z^{(n-k)}}\,dx + \langle y^\vee, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^{2n}} \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n p_k y^{(n-k)}\overline{z^{(n-k)}}\,dx + \langle Vy^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^{2n}}, \qquad [(4)]\end{aligned}$$

а потому и априорной оценки

$$\left|\int_0^1 f\overline{z}\,dx\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot\|y\|_{W_2^n[0,1]}\cdot\|z\|_{W_2^n[0,1]}.$$

Для завершения доказательства остаётся лишь учесть факт плотности рассматриваемого семейства функций $y \in C^{2n}[0,1]$ со свойством (2) в пространстве $W^n_{2,B,C}[0,1]$. □

Отметим (см. также [74]), что условие (4) в действительности представляет собой критерий: оператор, отвечающий дифференциальной операции из (1) и не подчинённым указанному условию соотношениям (2), продолжения до ограниченного оператора $T\colon W^n_{2,B,C}[0,1] \to W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$ заведомо не допускает. Действительно, пусть $z \in W^n_{2,B,C}[0,1]$, и пусть $\xi \in \ker C$ не ортогонален вектору $z^\wedge$. Тогда может быть построена бесконечно малая по норме пространства $W_2^n[0,1]$ последовательность $\{y_m\}_{m=0}^\infty$ гладких функций, для которой при всяком $m \in \mathbb{N}$ выполняются равенства $y_m^\wedge = 0$ и $y_m^\vee = \xi$. Повторяя рассуждения из доказательства утверждения 1.1, убеждаемся в справедливости асимптотического соотношения

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\int_0^1 f_m\overline{z}\,dx &= \langle \xi, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^{2n}} \\ &\neq 0,\end{aligned}$$

означающего разрывность отвечающей (1) и (2) дифференциальной операции, понимаемой как (частично заданное) отображение пространства $W^n_{2,B,C}[0,1]$ в пространство $W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$.

2. Граничные условия 1 (2), удовлетворяющие равенству

$$B^{-1}\operatorname{im} C = \mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C, \tag{1}$$

а также связанные с ними граничные задачи, мы будем далее называть *вполне регулярными**). Полная регулярность граничной задачи равносильна совмещению включения 1 (4) и совпадения ранга системы уравнений 1 (2) с величиной $2n$.

3. Введём теперь в рассмотрение набор пространств

$$W^k_{2,B,C}[0,1] \rightleftharpoons \{y \in W^k_2[0,1] \ : \ (\exists z \in W^n_{2,B,C}[0,1]) \quad z^{(n-k)} = y\},$$

где $k \in 0\,..\,n-1$. Через $\mathfrak{M}_{B,C,k}$ при этом мы будем обозначать пространства мультипликаторов класса $\mathcal{B}(W^k_{2,B,C}[0,1], W^{-k}_{2,B,C}[0,1])$, то есть ограниченных операторов, допускающих в смысле сильной операторной топологии сколь угодно точную аппроксимацию операторами умножения на непрерывные функции. В частности, пространство $\mathfrak{M}_{B,C,0}$ при таком определении совпадает с пространством $L_\infty[0,1]$.

4. Зафиксируем некоторый набор мультипликаторов $p_k \in \mathfrak{M}_{B,C,k}$. Сингулярным дифференциальным оператором, порождённым формальным дифференциальным уравнением 1 (1) и формальными вполне регулярными граничными условиями 1 (2), далее будет считаться ограниченный оператор $T\colon W^n_{2,B,C}[0,1] \to W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$, удовлетворяющий тождеству

$$\langle Ty, z\rangle \equiv \sum_{k=0}^{n} \langle p_k y^{(n-k)}, z^{(n-k)}\rangle + \langle V y^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^{2n}}, \tag{1}$$

где оператор $V\colon \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$ определён матрицами B и C, как указано при доказательстве утверждения 1.1. В том случае, когда мультипликаторы p_k представляют собой операторы умножения на гладкие функции, утверждение 1.1 гарантирует совпадение введённого понимания с ранее рассматривавшимся „классическим“.

Имеет место следующий факт.

*) Как уже отмечалось, в использовании термина «полная регулярность» мы следуем работе [74].

4.1. *Пусть фиксировано некоторое направленное множество $\mathfrak{A}$, а также даны n направленностей $\{p_{k,\alpha}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ элементов пространств $\mathfrak{M}_{B,C,k}$ и две матричные направленности $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$. Пусть также при этом выполнены следующие условия:*

1°. Каждая из направленностей $\{p_{k,\alpha}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ сильно (либо равномерно) сходится к некоторому мультипликатору $p_k \in \mathfrak{M}_{B,C,k}$.

2°. Матричные направленности $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ и $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ сходятся к матрицам B и C, соответственно.

3°. При любом выборе индекса $\alpha \in \mathfrak{A}$ выполняются соотношения

$$B_\alpha^{-1} \operatorname{im} C_\alpha = \mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C_\alpha = B^{-1} \operatorname{im} C.$$

Тогда направленность $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ ограниченных линейных операторов $T_\alpha\colon W^n_{2,B,C}[0,1] \to W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$, порождённых дифференциальными выражениями

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} (p_{k,\alpha} y^{(n-k)})^{(n-k)}$$

и граничными условиями $B_\alpha y^\wedge + C_\alpha y^\vee = 0$, сильно (либо равномерно) сходится к оператору $T\colon W^n_{2,B,C}[0,1] \to W^{-n}_{2,B,C}[0,1]$ вида (1).

Доказательство. Поскольку каждый из отображающих пространство $W^n_{2,B,C}[0,1]$ в пространство $W^k_{2,B,C}[0,1]$ операторов $y \mapsto y^{(n-k)}$ непрерывен, то для доказательства рассматриваемого утверждения достаточно установить, что операторы $V_\alpha\colon B^{-1} \operatorname{im} C \to B^{-1} \operatorname{im} C$, сопоставляющие каждому вектору $\xi \in B^{-1} \operatorname{im} C$ решение уравнения $C_\alpha \eta = -B_\alpha \xi$, стремятся к оператору V.

Обозначим через Γ совокупность номеров базисных строк матрицы C. Тогда набор $\{\eta_j\}_{j\in\Gamma}$ соответствующих столбцов матрицы C^* образует базис подпространства $B^{-1} \operatorname{im} C$, причём для некоторого значения $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ аналогичные базисы образуют и наборы $\{\eta_{j,\alpha}\}_{j\in\Gamma}$ столбцов матриц C^*_α, где

$\alpha \geqslant \alpha_0$. Обозначив через $\{\zeta_j\}_{j\in\Gamma}$ и $\{\zeta_{j,\alpha}\}_{j\in\Gamma}$ соответствующие биортогональные базисы, с очевидностью устанавливаем факт стремления векторов $\zeta_{j,\alpha}$ к соответствующим векторам ζ_j. Учёт равенств

$$V\xi = -\sum_{j\in\Gamma}(B\xi)_j\cdot\zeta_j, \qquad V_\alpha\xi = -\sum_{j\in\Gamma}(B_\alpha\xi)_j\cdot\zeta_{j,\alpha}$$

завершает доказательство. □

Утверждение 4.1 означает, что сформулированное нами понимание граничных задач с коэффициентами–мультипликаторами носит аппроксимативный характер, то есть связано с представлением негладких задач в форме предельных случаев направленностей „классических“ гладких задач.

5. Перейдём теперь к характеризации действующих в пространстве $L_2[0,1]$ неограниченных операторов $T^\bullet \rightleftharpoons (I^*)^{-1}TI^{-1}$ [I. § 1.1, 1 (3)] в терминах квазидифференциальных операций. При этом мы ограничимся рассмотрением того случая, когда существенная область значений коэффициента $p_0 \in L_\infty[0,1]$ отделена от точки $0 \in \mathbb{C}$, а при всех $k \in 1\,..\,n$ выполняются соотношения $p_k \in W_2^{-k}[0,1]$. В этом случае могут быть указаны функции $u_k \in L_2[0,1]$ и наборы их „граничных значений“ $u_k^{(l)}(j)$, где $l < k$ и $j \in \{0,1\}$, удовлетворяющие тождествам

$$(1) \qquad (\forall y \in W_2^k[0,1]) \quad \langle p_k, y\rangle = (-1)^k\int_0^1 u_k\overline{y^{(k)}}\,dx + \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l u_k^{(k-l-1)}\overline{y^{(l)}}\Big|_0^1.$$

Следует отметить, что для всякого значения $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого оператор $T - \lambda I^*I$ обладает ограниченным обратным, очевидным образом выполняется равенство

$$(T^\bullet - \lambda)^{-1} = I\cdot[T - \lambda I^*I]^{-1}I^*.$$

Соответственно, $T^\bullet$ в таком случае представляет собой замкнутый оператор с вполне непрерывной — ввиду полной непрерывности вложения $I\colon W^n_{2,B,C}[0,1] \to L_2[0,1]$ — резольвентой. В частности, в случае эрмитовости определяющей оператор T билинейной формы 4 (1) оператор $T^\bullet$ заведомо будет (в рассматриваемой ситуации) самосопряжённым.

Сформулируем сперва результат для частного случая $n = 2$ с граничными условиями третьего типа.

5.1. *Пусть* $n = 2$, B *невырождена, а* $C = 1$. *Тогда для любых функций* $y, f \in L_2[0,1]$ *равенство* $T^\bullet y = f$ *равносильно совпадению функции* y *почти всюду с первой компонентой решения* $Y \in W_2^1[0,1] \times \{W_1^1[0,1]\}^3$ *граничной задачи*

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -u_2/p_0 & u_1/p_0 & 1/p_0 & 0 \\ u_1 u_2/p_0 & 2u_2 - (u_1^2/p_0) & -u_1/p_0 & -1 \\ -u_2^2/p_0 & u_1 u_2/p_0 & u_2/p_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\hat{B} \cdot \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \\ Y_1(1) \\ Y_2(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_4(0) \\ Y_3(0) \\ -Y_4(1) \\ -Y_3(1) \end{pmatrix} = 0, \tag{3}$$

$$\hat{B} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} B_{11} + u_2'(0) & B_{12} - u_2(0) & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} - u_2(0) & B_{22} + u_1(0) & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - u_2'(1) & B_{34} + u_2(1) \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} + u_2(1) & B_{44} - u_1(1) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. На основе тождества (1) легко устанавливается, что для всяких $y, z \in W_{2,B,C}^n[0,1]$ выполняются равенства

$$\langle p_1 y', z' \rangle = -\int_0^1 u_1 \cdot [y'' \overline{z'} + y' \overline{z''}]\, dx + u_1 y \overline{z}\Big|_0^1,$$

$$\langle p_2 y, z \rangle = \int_0^1 u_2 \cdot [y'' \overline{z} + 2y' \overline{z'} + y \overline{z''}]\, dx + (u_2' y \overline{z})\Big|_0^1 - \big(u_2 \cdot [y' \overline{z} + y \overline{z'}]\big)\Big|_0^1.$$

Совмещая их с определением 4 (1), устанавливаем, что при любом выборе функции $z \in W_{2,B,C}^n[0,1]$ должно выполняться равенство

$$\int_0^1 f \overline{z}\, dx = \int_0^1 \Big\{ [p_0 y'' - u_1 y' + u_2 y]\, \overline{z''} + \tag{4}$$

$$+\left[-u_1y''+2u_2y'\right]\overline{z'}+u_2y''\overline{z}\Big\}\,dx+$$
$$+\left\{-u_2y\overline{z}'+\left[u_1y+u_2'y-u_2y'\right]\overline{z}\right\}\Big|_0^1+$$
$$+\langle Vy^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^4}.$$

Возможность подстановки в это равенство произвольной функции $z \in \overset{\circ}{W}{}_2^2[0,1]$ означает абсолютную непрерывность квазипроизводной

$$y^{[2]} \rightleftharpoons p_0y''-u_1y'+u_2y. \tag{5}$$

Проводимое с учётом последнего обстоятельства интегрирование по частям показывает абсолютную непрерывность квазипроизводной

$$y^{[3]} \rightleftharpoons -(y^{[2]})'-u_1y''+2u_2y', \tag{6}$$

а также справедливость равенства

$$f=-(y^{[3]})'+u_2y''. \tag{7}$$

С учётом вытекающего из (5) представления

$$y''=(1/p_0)\,y^{[2]}+(u_1/p_0)\,y'-(u_2/p_0)\,y,$$

равенства (6) и (7) означают подчинение векторнозначной функции

$$Y \rightleftharpoons \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}$$

уравнению (2). Возвращаясь теперь к рассмотрению в (4) произвольной функции $z \in W_{2,B,C}^n[0,1]$, с учётом установленных фактов убеждаемся в равносильности (4) равенству

$$-\left\{y^{[2]}\overline{z'}+y^{[3]}\overline{z}\right\}\Big|_0^1=\left\{-u_2y\overline{z}'+\left[u_1y+u_2'y-u_2y'\right]\overline{z}\right\}\Big|_0^1+\langle Vy^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^4}.$$

Последнее, в свою очередь, равносильно граничным условиям (3).

Обратное рассуждение проводится аналогичным образом. □

Более общий случай в явном виде не был рассмотрен в работе [9], однако его разбор на основе изложенной схемы не представляет никаких затруднений (см. также недавние публикации [48, 18]). Действительно, на основе тождества (1) легко устанавливается, что для всяких $y, z \in W^n_{2,B,C}[0,1]$ выполняются равенства

$$\text{(8)} \qquad \langle p_k y^{(n-k)}, z^{(n-k)}\rangle = \sum_{l=0}^{k} (-1)^k \int_0^1 \binom{k}{l} u_k y^{(n-k+l)} \overline{z^{(n-l)}}\, dx + \\ + \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{l} (-1)^l \binom{l}{m} u_k^{(k-l-1)} y^{(n-k+m)} \overline{z^{(n-k+l-m)}}\Big|_0^1 .$$

Совмещая 4 (1) и (8), устанавливаем, что при любом выборе функции $z \in W^n_{2,B,C}[0,1]$ должно выполняться равенство

$$\text{(9)} \qquad \int_0^1 f\overline{z}\, dx = \sum_{l=0}^{n} \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^{n-l} (-1)^{k+l} \binom{k+l}{l} u_{k+l} y^{(n-k)} \right\} \overline{z^{(n-l)}}\, dx + \\ + \sum_{l=0}^{n-1} W_l(y) \overline{z^{(l)}}\Big|_0^1 + \langle V y^{\wedge}, z^{\wedge}\rangle_{\mathbb{C}^{2n}},$$

где положено

$$W_l(y) \rightleftharpoons \sum_{k=0}^{l} \sum_{m=0}^{n-l-1} (-1)^{k+m} \binom{k+m}{m} u_{n+k-l}^{(n-l-m-1)} y^{(m+l-k)} .$$

Далее, на основе индукции по параметру $n-k-1$ легко устанавливается следующий простой факт.

5.2. *Каковы бы ни были функции $g_l \in L_1[0,1]$, где $l \in k+1\,..\,n$, найдётся функция $g \in W_1^1[0,1]$, удовлетворяющая при всяком $z \in \overset{\circ}{W}{}^n_2[0,1]$ равенству*

$$\sum_{l=k+1}^{n} \int_0^1 g_l \overline{z^{(n-l)}}\, dx = \int_0^1 g \overline{z^{(n-k)}}\, dx .$$

Объединяя этот факт с рассматриваемым в случае $z \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$ тождеством (9), убеждаемся в абсолютной непрерывности квазипроизводной

$$y^{[n]} \rightleftharpoons \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k y^{(n-k)}, \tag{10}$$

а также последовательно определяемых для $l \in 1\,..\,n-1$ квазипроизводных

$$y^{[n+l]} \rightleftharpoons -(y^{[n+l-1]})' + \sum_{k=0}^{n-l} (-1)^{k+l} \binom{k+l}{l} u_{k+l} y^{(n-k)}. \tag{11}$$

При этом, ввиду плотности вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$ в пространство $L_2[0,1]$, оказывается также справедливым равенство

$$f = -(y^{[2n-1]})' + (-1)^n u_n y^{(n)}. \tag{12}$$

Возвращаясь к рассмотрению в равенстве (9) произвольных $z \in W^n_{2,B,C}[0,1]$, переписываем это равенство с учётом полученных результатов в форме

$$-\sum_{l=0}^{n-1} y^{[2n-l-1]}\overline{z^{(l)}}\Big|_0^1 = \sum_{l=0}^{n-1} W_l(y)\overline{z^{(l)}}\Big|_0^1 + \langle Vy^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^{2n}},$$

что приводит нас к следующему факту.

5.3. *Для любых функций $y, f \in L_2[0,1]$ равенство $T^\bullet y = f$ равносильно совокупности рассматриваемого совместно с определениями (10), (11) уравнения (12) и граничных условий*

$$By^\wedge + C\cdot\begin{pmatrix} y^{[2n-1]}(0) + [W_0(y)](0) \\ y^{[2n-2]}(0) + [W_1(y)](0) \\ \dots \\ y^{[n]}(0) + [W_{n-1}(y)](0) \\ -y^{[2n-1]}(1) - [W_0(y)](1) \\ -y^{[2n-2]}(1) - [W_1(y)](1) \\ \dots \\ -y^{[n]}(1) - [W_{n-1}(y)](1) \end{pmatrix} = 0.$$

6. В случае $n = 1$ утверждение 5.3 ожидаемым образом приводит к системе

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_1/p_0 & 1/p_0 \\ -u_1^2/p_0 & -u_1/p_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

для подслучая $p_0 \equiv 1$ введённой в работе [59]. В случае произвольного $n > 0$, $p_0 \equiv 1$ и $p_k = 0$ при $k \in 1\,..\,n-1$ утверждение 5.3 приводит к системе

$$\begin{aligned} y^{[n]} &\rightleftharpoons y^{(n)} + (-1)^n u_n y \\ y^{[n+l]} &\rightleftharpoons -(y^{[n+l-1]})' + (-1)^n \binom{n}{l} u_n y^{(l)}, \quad \text{при } l \in 1\,..\,n-1, \\ f &= -(y^{[2n-1]})' + (-1)^n u_n y^{(n)}. \end{aligned}$$

Эта система — в незначительным образом отличной форме и вне связи с изложенной теорией — была сформулирована в докладе [47].

§ 2. Теория Штурма

1. Рассмотрим формальную граничную задачу

$$\begin{gathered} -(py')' + qy = f, \\ By^{\wedge} + Cy^{\vee} = 0, \end{gathered}$$

где $p \in L_\infty[0,1]$ равномерно (в существенном) положительна, $q \in W_2^{-1}[0,1]$ вещественна*), а B, $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ суть диагональные матрицы со свойством

$$B^{-1} \operatorname{im} C = \mathbb{C}^2 \ominus \ker C,$$

где символ B^{-1} означает взятие полного прообраза. Подобно тому, как это было сделано в предыдущей главе, мы связываем с этой парой матриц пространство

$$W^1_{2,B,C}[0,1] \rightleftharpoons \left\{ y \in W_2^1[0,1] \;:\; By^{\wedge} \in \operatorname{im} C \right\},$$

*) В очевидном смысле вещественности значения $\langle q, y\rangle$ при любом выборе вещественнозначной функции $y \in W_2^1[0,1]$.

а со всей граничной задачей в целом — оператор $T\colon W^1_{2,B,C}[0,1] \to W^{-1}_{2,B,C}[0,1]$, определяемый тождеством

$$\langle Ty, z\rangle \equiv \int_0^1 py'\overline{z'}\,dx + \langle q, \overline{y}z\rangle + \langle Vy^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^2},$$

где оператор V сопоставляет всякому вектору $\xi \in B^{-1}\operatorname{im} C$ решение $\eta = V\xi \in B^{-1}\operatorname{im} C$ уравнения $C\eta = -B\xi$. Кроме того, мы намерены зафиксировать также пространство

$$\hat{W}^1_{2,B,C}[0,1] \risingdotseq \{y \in W^1_{2,B,C}[0,1] \ : \ y(1) = 0\}, \tag{1}$$

после чего связать с введённым выше оператором T две операторнозначные функции

$$\hat{T}_0\colon (0,1] \to \mathcal{B}(\hat{W}^1_{2,B,C}[0,1], \hat{W}^{-1}_{2,B,C}[0,1]),$$
$$\hat{T}\colon (0,1] \to \mathcal{B}(\hat{W}^1_{2,B,C}[0,1], \hat{W}^{-1}_{2,B,C}[0,1]),$$

значениями которых выступают операторы Штурма–Лиувилля видов

$$\langle \hat{T}_0(a)y, z\rangle \equiv \int_0^1 p\cdot [J_a y]'\overline{[J_a z]'}\,dx, \tag{2}$$

$$\langle \hat{T}(a)y, z\rangle \equiv \langle \hat{T}_0(a)y, z\rangle + \langle q, J_a[\overline{y}z]\rangle + \langle Vy^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^2}. \tag{3}$$

Через J_a здесь и далее обозначается оператор, перерабатывающий всякую функцию $y \in \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$ в функцию $J_a y \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ вида

$$[J_a y](x) \risingdotseq \begin{cases} y(a^{-1}x) & \text{при } x \leqslant a, \\ 0 & \text{при } x \geqslant a. \end{cases} \tag{4}$$

Имеют место следующие три факта.

1.1. *Функция $\hat{T}_0$ непрерывна относительно сильной операторной топологии и независимо от выбора значения $a \in (0,1]$ и функции $y \in \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$ удовлетворяет соотношению*

$$\langle \hat{T}_0(a)y, y\rangle \geqslant [2/(3a)] \operatorname*{vrai\,inf}_{x\in[0,1]} p(x)\cdot \|y\|^2_{W^1_2[0,1]}.$$

Доказательство. Обозначим через $p_a \in L_\infty[0,1]$, где $a \in (0,1]$, функции вида

$$p_a(x) \rightleftharpoons a^{-1}p(ax).$$

Зафиксируем также произвольные функцию $y \in \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$, точку $a \in (0,1]$ и значение $\varepsilon > 0$. Ввиду ограниченности функции p в существенном некоторой постоянной $C > 0$, найдется интервал $\Delta \ni a$, для которого при любом выборе точки $b \in (0,1] \cap \Delta$ будет выполняться неравенство

$$\|(p_b - p_a)y'\|_{L_2[0,1]} < \varepsilon. \tag{5}$$

Действительно, приближая функции y' и p в пространстве $L_2[0,1]$ некоторыми функциями $\hat{y} \in C[0,1]$ и $\hat{p} \in C^1[0,1]$ с точностью $\varepsilon/(6C)$ и $a^3\varepsilon/(6\|\hat{y}\|_{C[0,1]})$, соответственно, легко устанавливаем справедливость оценок

$$\begin{aligned}
\|(p_b - p_a)y'\|_{L_2[0,1]} &< \|(p_b - p_a)\hat{y}\|_{L_2[0,1]} + \varepsilon/3 \\
&\leqslant \|\hat{y}\|_{C[0,1]} \cdot \|p_b - p_a\|_{L_2[0,1]} + \varepsilon/3 \\
&< \|\hat{y}\|_{C[0,1]} \cdot \|\hat{p}_b - \hat{p}_a\|_{L_2[0,1]} + \frac{3 + (a/b)^3}{6}\,\varepsilon \\
&\leqslant \frac{2ab+1}{ab}\|\hat{y}\|_{C[0,1]} \cdot \|\hat{p}\|_{C^1[0,1]} \cdot |b-a| + \frac{3+(a/b)^3}{6}\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

как раз и означающих искомое. Соответственно, справедливы также не зависящие от выбора функции $z \in \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$ соотношения

$$\begin{aligned}
|\langle [\hat{T}_0(b) - \hat{T}_0(a)]\, y, z\rangle| &= |\langle [p_b - p_a]y', z'\rangle_{L_2[0,1]}| && [(2), (4)] \\
&\leqslant \varepsilon\, \|z\|_{W_2^1[0,1]}, && [(5)]
\end{aligned}$$

а потому и неравенство $\|\hat{T}_0(b)y - \hat{T}_0(a)y\|_{\hat{W}^{-1}_{2,B,C}[0,1]} \leqslant \varepsilon$. Учёт не зависящих от выбора точки $\zeta \in [0,1]$ соотношений

$$\begin{aligned}
|y(\zeta)| &\leqslant \sqrt{1-\zeta}\,\|y'\|_{L_2[0,1]} && [(1)] \\
\langle \hat{T}_0(a)y, y\rangle &\geqslant a^{-1} \operatorname*{vrai\,inf}_{x\in[0,1]} p(x) \cdot \|y'\|^2_{L_2[0,1]} && [(2), (4)] \\
&\geqslant [2/(3a)] \operatorname*{vrai\,inf}_{x\in[0,1]} p(x) \cdot \|y\|^2_{W_2^1[0,1]} && [(6)]
\end{aligned} \tag{6}$$

завершает доказательство. □

1.2. *Функция* $(\hat{T}-\hat{T}_0)$ *непрерывна относительно равномерной операторной топологии и принимает самосопряжённые вполне непрерывные значения.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные значения $a \in (0,1]$ и $\varepsilon > 0$. Ввиду плотности множества ступенчатых функций в пространстве $L_2[0,1]$, найдутся набор $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ точек отрезка $[0,1]$ и набор $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$ вещественных коэффициентов, удовлетворяющие условию

$$\left\|[q+V_{11}\boldsymbol{\delta}_0]-\sum_{k=1}^n \gamma_k \boldsymbol{\delta}_{\xi_k}\right\|_{W_2^{-1}[0,1]} \leqslant \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{8}, \tag{7}$$

где V_{11} — левый верхний матричный элемент матрицы V, а символ $\boldsymbol{\delta}_\xi \in W_2^{-1}[0,1]$ использован для обозначения дельта-функции с носителем в точке $\xi \in [0,1]$. Зафиксируем интервал $\Delta \ni a$ со свойством

$$(\forall b \in \Delta) \qquad \big(b > a/4\big)\ \&\ \left(\sqrt{\frac{|b-a|}{ab}}\sum_{k=1}^n |\gamma_k| < \varepsilon/4\right). \tag{8}$$

Тогда независимо от выбора значения $b \in (0,1] \cap \Delta$ и функций $y, z \in \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$ для имеющего конечный ранг оператора $Q\colon \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1] \to \hat{W}^{-1}_{2,B,C}[0,1]$ вида

$$\langle Qy, z\rangle \equiv \sum_{k=1}^n \gamma_k\,[J_a y](\xi_k)\cdot\overline{[J_a z](\xi_k)}$$

выполняются соотношения

$$\|\overline{y}z\|^2_{W_2^1[0,1]} \leqslant 4\,\|y\|^2_{W_2^1[0,1]}\cdot\|z\|^2_{W_2^1[0,1]}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
|\langle[\hat{T}(b)-\hat{T}_0(b)-Q]y,z\rangle| &\leqslant \sum_{k=1}^n |\gamma_k|\cdot\big\|J_b[\overline{y}z]-J_a[\overline{y}z]\big\|_{C[0,1]} + \\
&\quad + \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{8}\,\|J_b[\overline{y}z]\|_{W_2^1[0,1]} && [(3),\ (7)] \\
&\leqslant \left(\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{4\sqrt{b}} + 2\sqrt{\frac{|b-a|}{ab}}\sum_{k=1}^n|\gamma_k|\right)\times \\
&\quad \times \|y\|_{W_2^1[0,1]}\cdot\|z\|_{W_2^1[0,1]} && [(4),\ (9)]
\end{aligned}$$

$$\leqslant \varepsilon \, \|y\|_{W_2^1[0,1]} \cdot \|z\|_{W_2^1[0,1]}. \qquad [(8)]$$

Тем самым, ввиду произвольности выбора значений $a \in (0,1]$ и $\varepsilon > 0$, доказываемое утверждение справедливо. □

1.3. *При любом достаточно малом значении параметра $a \in (0,1]$ оператор $\hat{T}(a)$ является положительным.*

Доказательство. Достаточно совместить не зависящую от выбора значения $a \in (0,1]$ и функции $y \in \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$ оценку

$$|\langle[\hat{T}(a) - \hat{T}_0(a)]y, y\rangle| \leqslant \left(2a^{-1/2}\, \|q\|_{W_2^{-1}[0,1]} + |V_{11}|\right) \times \\ \times \|y\|^2_{W_2^1[0,1]} \qquad [(3), (4), (9)]$$

с утверждением 1.1. □

2. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие несложные факты, по существу связанные с общей теорией операторов в гильбертовом пространстве. Символ $\operatorname{ind} A$ мы в дальнейшем используем для записи отрицательного индекса инерции оператора $A\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^*$, то есть точной верхней грани размерностей подпространств $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ со свойством

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall y \in \mathfrak{M}) \qquad \langle Ay, y\rangle \leqslant -\varepsilon\, \|y\|^2_{\mathfrak{H}}.$$

2.1. *Операторнозначная функция $K\colon (0,1] \to \mathcal{B}(W^1_{2,B,C}[0,1])$ вида*

$$K(a) \rightleftharpoons [\hat{T}_0(a)]^{-1}\, \hat{T}(a)$$

непрерывна относительно равномерной операторной топологии.

Доказательство. Заметим, что функция $a \mapsto [\hat{T}_0(a)]^{-1}$ непрерывна относительно сильной операторной топологии. Действительно, при любом выборе значений $a, b \in (0,1]$ и функции $y \in \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$ выполняется равенство

$$[\hat{T}_0(a)]^{-1}y - [\hat{T}_0(b)]^{-1}y = -[\hat{T}_0(a)]^{-1} \cdot [\hat{T}_0(a) - \hat{T}_0(b)]\, [\hat{T}_0(b)]^{-1}y,$$

ввиду непрерывности оператор-функции $\hat{T}_0$ и равномерной по параметру $a \in (0,1]$ ограниченности операторов $[\hat{T}_0(a)]^{-1}$ [1.1] означающее искомое.

Зафиксируем теперь произвольные значения $b \in (0,1]$ и $\varepsilon > 0$. Ввиду непрерывности оператор-функции $(\hat{T} - \hat{T}_0)$ [1.2], найдутся имеющий конечный ранг оператор $Q\colon \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1] \to \hat{W}^{-1}_{2,B,C}[0,1]$ и интервал $\Delta_1 \ni b$, для которых независимо от выбора значения $a \in (0,1] \cap \Delta_1$ оператор $\hat{T}(a) - \hat{T}_0(a) - Q$ будет ограничен сверху постоянной

$$(\varepsilon/6) \operatorname*{vrai\,inf}_{x\in[0,1]} p(x).$$

Конечность ранга оператора Q и установленная выше непрерывность оператор-функции $a \mapsto [\hat{T}_0(a)]^{-1}$ означают также существование интервала $\Delta_2 \ni b$, для которого независимо от выбора значения $a \in (0,1] \cap \Delta_2$ оператор $[\hat{T}_0(a)]^{-1}Q - [\hat{T}_0(b)]^{-1}Q$ будет ограничен сверху постоянной $\varepsilon/2$. Объединяя сказанное, устанавливаем, что независимо от выбора значения $a \in (0,1] \cap \Delta_1 \cap \Delta_2$ ранее фиксированная постоянная $\varepsilon > 0$ ограничивает сверху оператор $K(a) - K(b)$. $\square$

2.2. *Пусть при некотором значении $a \in (0,1]$ оператор $K(a)$ из утверждения 2.1 обладает ограниченным обратным. Пусть также постоянная $C > 0$ ограничивает оператор $K(a)$ сверху. Тогда при всех достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ величина $\operatorname{ind}\hat{T}(a)$ совпадает с размерностью образа проектора*

$$P(a) \rightleftharpoons -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Pi_\varepsilon} [K(a) - z]^{-1}\,dz,$$

где через $\partial\Pi_\varepsilon$ обозначена положительно ориентированная граница прямоугольника

$$\Pi_\varepsilon \rightleftharpoons \{z \in \mathbb{C} \;:\; (-C-1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant -\varepsilon) \,\&\, (|\operatorname{Im} z| \leqslant \varepsilon)\}.$$

Доказательство. Корректность определения оператора $P(a)$ для всех достаточно малых значений $\varepsilon > 0$ вытекает из очевидного факта самосопряжённости оператора $K(a)$ в пространстве $\hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$, снабжённом скалярным произведением

(1) $$\langle y, z\rangle_{\hat{T}_0(a)} \rightleftharpoons \langle \hat{T}_0(a)y, z\rangle,$$

а также возможности представить при близких к нулю значениях $w \in \mathbb{C}$ оператор $[K(a) - w]^{-1}$ в виде суммы равномерно сходящегося ряда

$$[K(a) - w]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \cdot [K(a)]^{-n-1}.$$

Известно, что при этом оператор $P(a)$ является проектором на некоторое инвариантное подпространство оператора $P(a)$, причём самосопряжённый относительно метрики (1) оператор

$$\hat{K} \rightleftharpoons -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Pi_\varepsilon} \frac{[K(a) - w]^{-1}}{\sqrt{-w}}\, dw$$

перестановочен с оператором $K(a)$ и удовлетворяет равенству

$$\hat{K}^2 K(a) = -P(a). \tag{2}$$

Соответственно, независимо от выбора функции $y \in \operatorname{im} P(a)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}(a)y, y\rangle &= -\langle \hat{T}_0(a)K(a)y, \hat{K}^2 K(a)y\rangle && [(2)] \\ &= -\langle \hat{T}_0(a)\hat{K}K(a)y, \hat{K}K(a)y\rangle \\ &\leqslant -[2/(3a)] \ \operatorname*{vrai\,inf}_{x\in[0,1]} p(x) \cdot \|\hat{K}\|^{-2}\, \|y\|^2_{W_2^1[0,1]}. && [1.1, (2)] \end{aligned}$$

Иначе говоря, квадратичная форма оператора $\hat{T}(a)$ равномерно отрицательна на подпространстве $\operatorname{im} P(a)$. Аналогичным образом устанавливается, что квадратичная форма оператора $\hat{T}(a)$ равномерно положительна на подпространстве $\operatorname{im}[1 - P(a)]$. □

2.3. *Пусть при некотором* $a \in (0,1]$ *оператор* $\hat{T}(a)$ *обладает ограниченным обратным. Тогда найдётся такой интервал* $\Delta \ni a$*, что при всяком выборе значения* $b \in (0,1] \cap \Delta$ *оператор* $\hat{T}(b)$ *обладает ограниченным обратным и удовлетворяет равенству* $\operatorname{ind} \hat{T}(b) = \operatorname{ind} \hat{T}(a)$.

Доказательство. При значениях $b \in (0,1]$, достаточно близких к ранее зафиксированному значению $a \in (0,1]$, оператор $[\hat{T}(b)]^{-1}$ допускает представление в виде равномерно сходящегося ряда

$$[\hat{T}(b)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big([K(a)]^{-1} \cdot [K(a) - K(b)] \Big)^n [\hat{T}_0(b) K(a)]^{-1}.$$

Аналогичным образом, для достаточно малых $\varepsilon > 0$ при любом выборе значения $w \in \partial \Pi_\varepsilon$ справедливы равенства

$$[K(b) - w]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big([K(a) - w]^{-1} \cdot [K(a) - K(b)] \Big)^n [K(a) - w]^{-1},$$

означающие непрерывную относительно равномерной операторной топологии зависимость проекторов $P(b)$ от параметра $b \in (0,1]$ на некотором интервале $\Delta \ni a$. Тем самым, доказываемое утверждение справедливо. □

3. Результаты предыдущего пункта означают возможность введения в рассмотрение связанных с оператор-функцией $\hat{T}$ функций $\Lambda_n \colon (0,1] \to \mathbb{R}$, сопоставляющих всякому значению $a \in (0,1]$ величину

$$\Lambda_n(a) = \sup\{\varkappa < 1 \;:\; \operatorname{ind}[\hat{T}(a) - \varkappa \hat{T}_0(a)] \leqslant n\}.$$

Каждая из функций Λ_n является непрерывной. Действительно, зафиксируем произвольные индекс $n \in \mathbb{N}$ и точку $a \in (0,1]$. Ввиду полной непрерывности определённого в формулировке утверждения 2.1 оператора $K(a) - 1$ [1 (3)], значение $\Lambda_n(a)$ допускает сколь угодно точную нижнюю оценку $\varkappa_- \in \mathbb{R}$, принадлежащую резольвентному множеству оператора $K(a)$. Аналогичным образом, в случае $\Lambda_n(a) < 1$ допустима сколь угодно точная верхняя оценка $\varkappa_+ \in (-\infty, 1)$ с тем же свойством. Применяя теперь к оператор-функциям $a \mapsto \hat{T}(a) - \varkappa_\pm \hat{T}_0(a)$ утверждение 2.3, убеждаемся в наличии интервала $\Delta \ni a$, на пересечении которого с полуинтервалом $(0,1]$ значения функции Λ_n минорируются величиной $\varkappa_-$ и, в случае $\Lambda_n(a) < 1$, мажорируются величиной $\varkappa_+$.

Имеют место следующие два факта.

3.1. *Независимо от выбора точки $a \in (0,1]$ существование индекса $n \in \mathbb{N}$ со свойством $\Lambda_n(a) = 0$ равносильно выполнению равенства $y(a) = 0$ для решения начальной задачи*

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v/p & 1/p \\ -v^2/p & -v/p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix},$$

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} y(0) \\ y^{[1]}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_{11} \\ B_{11} + C_{11}v(0) \end{pmatrix},$$

где $v \in L_2[0,1]$ и $v(0) \in \mathbb{R}$ отвечают представлению

$$(3) \qquad \langle q, y \rangle \equiv -\int_0^1 v\overline{y'}\,dx + (v\overline{y})\Big|_0^1$$

обобщённой функции $q \in W_2^{-1}[0,1]$.

Справедливость утверждения 3.1 немедленно вытекает из утверждения § 1.5.3.

3.2. *При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$ функция Λ_n строго убывает в каждой точке $a \in (0,1]$ со свойством $\Lambda_n(a) = 0$.*

Доказательство. Из единственности решения всякой начальной задачи для уравнения (1) немедленно вытекает изолированность нулей функции Λ_n. Далее, любое n-мерное подпространство $\mathfrak{M} \subset \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$ со свойством

$$(4) \qquad (\forall y \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}) \qquad \langle \hat{T}(a)y, y \rangle \leqslant 0$$

удовлетворяет [1 (3), 1 (4)] при всяком $b \in [a,1]$ соотношению

$$(5) \qquad (\forall y \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}) \qquad \langle \hat{T}(b)[J_{a/b}y], [J_{a/b}y] \rangle \leqslant 0.$$

Соответственно, никакое подпространство, на котором квадратичная форма оператора $\hat{T}(b)$ положительна, не может иметь минорирующую n коразмерность. В случае ограниченной обратимости оператора $\hat{T}(b)$ этот факт влечёт справедливость неравенства $\Lambda_n(b) < 0$. Повторяя теперь проведённое рассуждение с заменой неравенств в (4), (5) на строгие, устанавливаем, что неравенство $\Lambda_n(a) \leqslant 0$ влечёт справедливость неравенств $\Lambda_n(b) < 0$ для всех $b \in (a, 1]$. □

Объединяя теперь утверждения 3.1, 3.2 и 1.3 с теоремой о единственности решений начальных задач для уравнения (1), устанавливаем следующий факт.

3.3. *Решение* $y \in W_2^1[0,1]$ *начальной задачи* (1), (2) *меняет знак в каждом из своих расположенных на интервале* $(0,1)$ *нулей. При этом число таких нулей совпадает с величиной* $\operatorname{ind} \hat{T}(1)$.

4. Пусть теперь $\Gamma \subset \mathbb{R}$ есть некоторый отрезок вещественной прямой, а $L\colon \Gamma \to \mathcal{B}(W^1_{2,B,C}[0,1], W^{-1}_{2,B,C}[0,1])$ — операторнозначная функция, отвечающая параметрическому семейству граничных задач

$$-\big(p(\lambda)y'\big)' + q(\lambda)y = f,$$
$$B(\lambda)y^\wedge + C(\lambda)y^\vee = 0,$$

где диагональные вещественные матрицы $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям

$$[B(\lambda)]^{-1} \operatorname{im} C(\lambda) = \mathbb{C}^2 \ominus \ker C(\lambda) = \mathbb{C}^2 \ominus \ker C$$

и зависят от параметра непрерывным образом. Пусть также функция L дифференцируема относительно сильной операторной топологии и подчиняется условию

$$(1) \qquad (\forall \lambda \in \Gamma)\ (\forall y \in W^1_{2,B,C}[0,1] \setminus \{0\}) \qquad \langle L'(\lambda)y, y\rangle < 0.$$

Рассуждения, аналогичные проведённым выше в пункте 2 (ср. также, например, I. § 3 и [8]), означают возможность определения для оператор-функции L последовательности непрерывных функций $\Lambda_n\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ вида

$$\Lambda_n(\lambda) \rightleftharpoons \sup\{\varkappa < 1 \ :\ \operatorname{ind}[L(\lambda) - \varkappa L_0(\lambda)] \leqslant n\},$$

где через $L_0(\lambda)$ обозначен оператор Штурма–Лиувилля, отвечающий граничной задаче

$$\begin{gathered}-\bigl(p(\lambda)y'\bigr)' = f,\\ B(\lambda)y^{\wedge} + C(\lambda)y^{\vee} = 0.\end{gathered}$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает тот факт, что спектр оператор-функции L состоит из изолированных собственных значений геометрической кратности 1, причём равенство $\operatorname{ind} L(\lambda_n) = n$ определяет собственное значение $\lambda_n \in \sigma(L)$ однозначно.

4.1. *Пусть $y_n \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ — вещественнозначная собственная функция оператор-функции L, отвечающая собственному значению λ_n. Тогда интервал $(0,1)$ содержит ровно n нулей функции y_n, в каждом из которых указанная функция меняет знак.*

Доказательство. В случае $C_{22} = 0$ доказываемое утверждение автоматически вытекает из утверждения 3.3. В случае $C_{22} \neq 0$ положим $T \rightleftharpoons L(\lambda_n)$ и заметим, что, ввиду теоремы о единственности решений начальных задач для уравнения 3 (1), выполняется неравенство $y_n(1) \neq 0$. Соответственно, всякая функция $y \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ допускает представление в виде $y = [y(1)/y_n(1)] \cdot y_n + z$, где $z \in \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$. При этом, ввиду $y_n \in \ker T$ и $T^* = T$, выполняются равенства

$$\begin{aligned}\langle Ty, y\rangle &= \langle Tz, z\rangle\\ &= \langle \hat{T}(1)z, z\rangle, \qquad [1\,(2),\ 1\,(3)]\end{aligned}$$

а потому и означающее [3.3] справедливость доказываемого утверждения равенство $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} \hat{T}(1)$. □

4.2. *Пусть $y_n,\ y_{n+1} \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ — собственные функции оператор-функции L, отвечающие собственным значениям λ_n и λ_{n+1}, соответственно. Тогда расположенные на интервале $(0,1)$ нули функций y_n и y_{n+1} перемежаются.*

Доказательство. Обозначим через $\{\zeta_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ и $\{\zeta_{n+1,k}\}_{k=1}^{n+1}$ наборы занумерованных в порядке возрастания нулей функций y_n и y_{n+1}, соответственно. Согласно утверждениям 1.3, 3.1 и 3.2, при любом выборе индекса $k \in 1\,..\,n$ найдётся k-мерное подпространство $\mathfrak{M} \subset \hat{W}^1_{2,B,C}[0,1]$ со свойством

$$(\forall y \in \mathfrak{M}) \qquad \langle L(\lambda_n) J_{\zeta_{n,k}} y, J_{\zeta_{n,k}} y\rangle \leqslant 0.$$

Условие (1) означает тогда справедливость соотношения

$$(\forall y \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}) \qquad \langle L(\lambda_{n+1}) J_{\zeta_{n,k}} y, J_{\zeta_{n,k}} y\rangle < 0,$$

а потому и неравенства $\zeta_{n+1,k} < \zeta_{n,k}$. Проводя аналогичные рассуждения с заменой „подвижного“ правого и „неподвижного“ левого концов отрезка местами, устанавливаем справедливость неравенства $\zeta_{n,k} < \zeta_{n+1,k+1}$. $\square$

§ 3. Знакорегулярность и чебышёвские свойства

1. Вещественнозначную функцию $f \in C[0,1]$ мы, обычным образом, называем *имеющей не менее n перемен знака*, если может быть указан упорядоченный по возрастанию набор $\{\xi_k\}_{k=0}^{n}$ точек интервала $(0,1)$, для которого при всяком $k \in 1\,..\,n$ выполнено неравенство $f(\xi_{k-1}) \cdot f(\xi_k) < 0$. Соответственно, вещественнозначную функцию $f \in C[0,1]$, для которой такой набор точек не может быть указан, мы называем *имеющей менее n перемен знака*.

1.1. *Пусть вещественнозначная функция $f \in C[0,1]$ имеет не менее n перемен знака. Тогда она не может быть приближена в пространстве $W^{-1}_{2,B,C}[0,1]$ непрерывными функциями, имеющими менее n перемен знака, с произвольной точностью.*

Доказательство. Пусть $\{\xi_k\}_{k=0}^{n}$ — упорядоченный по возрастанию набор точек интервала $(0,1)$, удовлетворяющий при всяком $k \in 1\,..\,n$ неравенству $f(\xi_{k-1}) \cdot f(\xi_k) < 0$. Ввиду непрерывности функции f, найдётся такое значение $\varepsilon > 0$, что независимо от выбора индекса $k \in 0\,..\,n$ и точки $x \in (\xi_k - \varepsilon, \xi_k + \varepsilon)$ будет выполняться неравенство $f(x) \cdot \operatorname{sign} f(\xi_k) > 3\varepsilon$.

Пусть теперь вещественнозначная функция $g \in C[0,1]$ имеет менее n перемен знака. Тогда, согласно вышесказанному, найдётся значение индекса $k \in 0\,..\,n$, для которого при всех $x \in (\xi_k - \varepsilon, \xi_k + \varepsilon)$ будет выполняться неравенство $[f(x) - g(x)] \cdot \operatorname{sign} f(\xi_k) > 2\varepsilon$. Тем самым, функция $y \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ вида

$$y(x) \rightleftharpoons \begin{cases} x - \xi_k + \varepsilon & \text{при } x \in [\xi_k - \varepsilon, \xi_k], \\ \xi_k + \varepsilon - x & \text{при } x \in [\xi_k, \xi_k + \varepsilon], \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

удовлетворяет неравенству

$$|\langle f - g, y\rangle| \geqslant 2\varepsilon^3,$$

означающему справедливость оценки $\|f - g\|_{W^{-1}_{2,B,C}[0,1]} \geqslant \varepsilon^{5/2}$. □

В согласии с утверждением 1.1, вещественную обобщённую функцию $f \in W^{-1}_{2,B,C}[0,1]$ мы называем *имеющей менее n перемен знака*, если она может быть с произвольной точностью приближена в пространстве $W^{-1}_{2,B,C}[0,1]$ имеющими менее n перемен знака непрерывными функциями.

Оператор $S\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, отображающий некоторое функциональное пространство $\mathfrak{X}$ в некоторое функциональное пространство $\mathfrak{Y}$, мы, обычным образом, называем *вещественным*, если он сопоставляет всякой вещественной обобщённой функции $y \in \mathfrak{X}$ некоторую вещественную же обобщённую функцию $Sy \in \mathfrak{Y}$. Вещественный оператор $S\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ мы называем *знакорегулярным*, если при любом выборе натурального числа $n \geqslant 1$ и имеющей менее n перемен знака вещественной обобщённой функции $y \in \mathfrak{X}$ обобщённая функция $Sy \in \mathfrak{Y}$ также имеет менее n перемен знака.

2. В настоящем параграфе, как и в предыдущем, коэффициенты $p \in L_\infty[0,1]$ и $q \in W_2^{-1}[0,1]$ мы будем предполагать вещественными. Матрицы же $B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ мы будем считать такими, что определяемые ими граничные условия принимают один из следующих четырёх видов:

(1) $$y(0) = y(1) = 0,$$

(2) $$y(0) = [py'](1) = 0,$$

(3) $$[py'](0) = y(1) = 0,$$

(4) $$[py'](0) = [py'](1) + B_{22}y(1) = 0, \quad \text{где } B_{22} > 0.$$

Указанные предположения гарантируют вещественность соответствующих операторов Штурма–Лиувилля. Кроме того, имеет место следующий факт.

2.1. *Пусть оператор Штурма–Лиувилля* $T\colon W^1_{2,B,C}[0,1] \to W^{-1}_{2,B,C}[0,1]$ *вида*

$$\langle Ty, z\rangle \equiv \int_0^1 py'\overline{z'}\,dx + \langle Vy^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^2}$$

ограниченно обратим. Тогда соответствующий оператор T^{-1} *является знакорегулярным.*

Доказательство. В рассматриваемом случае функция $py' \in L_2[0,1]$ почти всюду совпадает с некоторой абсолютно непрерывной функцией, а потому без ограничения общности сама может быть рассмотрена в качестве таковой. Далее мы будем предполагать зафиксированным некоторое натуральное число $n \geqslant 1$, а также учитывать, что непрерывность оператора T^{-1} и характер определения представления о числе перемен знака обобщённой функции позволяют ограничиться проверкой того, что оператор T^{-1} не увеличивает числа перемен знака у непрерывных функций.

Пусть функции $y \in W^1_2[0,1]$ и $f \in C[0,1]$ удовлетворяют уравнению $-(py')' = f$ и граничным условиям (1). Пусть также упорядоченный по возрастанию набор $\{\xi_k\}_{k=0}^n$ точек интервала $(0,1)$ подчиняется при любом выборе индекса $k \in 1\,..\,n$ неравенству $y(\xi_{k-1}) \cdot y(\xi_k) < 0$. Тогда, согласно теореме о среднем значении для интеграла Лебега от функции $y' = (py')/p$, найдутся $n+2$ точки $\xi_{1,0} \in (0,\xi_0)$, $\xi_{1,n+1} \in (\xi_n,1)$ и $\xi_{1,k} \in (\xi_{k-1},\xi_k)$, где $k \in 1\,..\,n$, удовлетворяющие при любом выборе индекса $k \in 1\,..\,n+1$ неравенству $(py')(\xi_{1,k-1}) \cdot (py')(\xi_{1,k}) < 0$. Ещё раз применяя теорему о среднем, убеждаемся в существовании $n+1$ точек $\xi_{2,k} \in (\xi_{1,k},\xi_{1,k+1})$, где $k \in 0\,..\,n$, удовлетворяющих при любом выборе индекса $k \in 1\,..\,n$ неравенству $f(\xi_{2,k-1}) \cdot f(\xi_{2,k}) < 0$. Тем самым, наличие у функции y не менее n перемен знака гарантирует наличие такого же числа перемен знака у функции f.

Пусть функции $y \in W_2^1[0,1]$ и $f \in C[0,1]$ удовлетворяют уравнению $-(py')' = f$ и граничным условиям (2). Пусть также упорядоченный по возрастанию набор $\{\xi_k\}_{k=0}^n$ точек интервала $(0,1)$ подчиняется при любом выборе индекса $k \in 1\,..\,n$ неравенству $y(\xi_{k-1}) \cdot y(\xi_k) < 0$. Тогда, согласно интегральной теореме о среднем, найдутся $n+1$ точек $\xi_{1,0} \in (0,\xi_0)$ и $\xi_{1,k} \in (\xi_{k-1},\xi_k)$, где $k \in 1\,..\,n$, удовлетворяющих при любом выборе индекса $k \in 1\,..\,n$ неравенству $(py')(\xi_{1,k-1}) \cdot (py')(\xi_{1,k}) < 0$. Ещё раз применяя теорему о среднем с учётом соотношений (2), убеждаемся в существовании $n+1$ точек $\xi_{2,k} \in (\xi_{1,k},\xi_{1,k+1})$, где $k \in 0\,..\,n-1$, и $\xi_{2,n} \in (\xi_{1,n},1)$, удовлетворяющих при любом выборе индекса $k \in 1\,..\,n$ неравенству $f(\xi_{2,k-1}) \cdot f(\xi_{2,k}) < 0$. Тем самым, наличие у функции y не менее n перемен знака гарантирует наличие такого же числа перемен знака у функции f.

Пусть функции $y \in W_2^1[0,1]$ и $f \in C[0,1]$ удовлетворяют уравнению $-(py')' = f$ и граничным условиям (4). Пусть также упорядоченный по возрастанию набор $\{\xi_k\}_{k=0}^n$ точек интервала $(0,1)$ подчиняется при любом выборе индекса $k \in 1\,..\,n$ неравенству $y(\xi_{k-1}) \cdot y(\xi_k) < 0$. Тогда, согласно интегральной теореме о среднем, найдутся n точек $\xi_{1,k} \in (\xi_{k-1},\xi_k)$, где $k \in 1\,..\,n$, удовлетворяющих при любом выборе индекса $k \in 2\,..\,n$ неравенству $(py')(\xi_{1,k-1}) \cdot (py')(\xi_{1,k}) < 0$. В вырожденном случае $n = 1$ при этом выполняется также неравенство $(py')(\xi_{1,1}) \neq 0$. Кроме того, из соотношений (4) вытекает справедливость хотя бы одного из неравенств $y(1) \cdot y(\xi_n) < y^2(\xi_n)$ или $(py')(1) \cdot y(\xi_n) < 0$. Ввиду очевидного неравенства $(py')(\xi_{1,n}) \cdot y(\xi_n) > 0$, последнее означает возможность указания точки $\xi_{1,n+1} \in (\xi_n, 1]$ со свойством $(py')(\xi_{1,n}) \cdot (py')(\xi_{1,n+1}) < 0$. Применяя теперь ещё раз теорему о среднем с учётом соотношений (4), убеждаемся в существовании $n+1$ точек $\xi_{2,0} \in (0,\xi_{1,1})$ и $\xi_{2,k} \in (\xi_{1,k},\xi_{1,k+1})$, где $k \in 1\,..\,n$, удовлетворяющих при любом выборе индекса $k \in 1\,..\,n$ неравенству $f(\xi_{2,k-1}) \cdot f(\xi_{2,k}) < 0$. Тем самым, наличие у функции y не менее n перемен знака гарантирует наличие такого же числа перемен знака у функции f.

Случай граничных условий (3) рассматривается аналогично случаю граничных условий (2). $\square$

3. Рассмотрим теперь пучок $L\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(W^1_{2,B,C}[0,1], W^{-1}_{2,B,C}[0,1])$ операторов Штурма–Лиувилля вида

$$\langle L(\lambda)y, z\rangle \equiv \int_0^1 py'\overline{z'}\,dx - \lambda\,\langle r, \overline{y}z\rangle + \langle Vy^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^2}$$

с неотрицательной весовой обобщённой функцией $r \in W_2^{-1}[0,1]$. Повторяя рассуждения из доказательства утверждения § 2.1.2, убеждаемся в полной непрерывности не зависящего от выбора значения $\lambda \in \mathbb{C}$ оператора $L'(\lambda)\colon W^1_{2,B,C}[0,1] \to W^{-1}_{2,B,C}[0,1]$, что означает возможность применения к заданной на полупрямой $(0,+\infty)$ оператор-функции $\lambda \mapsto \lambda^{-1}L(\lambda)$ результатов пункта § 2.4. С учётом факта неположительности оператора $[L(0)]^{-1}L'(0)$ относительно скалярного произведения

$$\langle y, z\rangle_{L(0)} \rightleftharpoons \langle L(0)y, z\rangle$$

это означает, что спектр пучка L может быть представлен в виде возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ — возможно, обрывающейся, — положительных собственных значений геометрической кратности 1.

3.1. *Пусть $y \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ — собственная функция операторного пучка L, отвечающая собственному значению $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда эта функция является липшицевой.*

Доказательство. Из даваемого утверждением § 1.5.3 — или, что в данном случае есть то же самое, результатами работы [59] — описания элементов ядра оператора $L(\lambda)$ вытекает существование функции $y^{[1]} \in C[0,1]$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\lambda R/p & 1/p \\ -\lambda^2 R^2/p & \lambda R/p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix},$$

в котором неубывающая и ограниченная в существенном функция $R \in L_2[0,1]$ отвечает представлению

$$(2)\qquad \langle R, y\rangle \equiv -\int_0^1 R\overline{y'}\,dx + (R\overline{y})\Big|_0^1$$

весовой обобщённой функции $r \in W_2^{-1}[0,1]$. Соответственно, оценка

$$|y(t) - y(s)| \leqslant \Big(\|y\|_{C[0,1]} \cdot \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in [0,1]} |\lambda p^{-1}(x) R(x)| + \\ + \|y^{[1]}\|_{C[0,1]} \cdot \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in[0,1]} p^{-1}(x) \Big) \cdot |t - s|$$

справедлива при любом выборе точек $t, s \in [0,1]$. $\square$

3.2. *Пусть $y \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ — вещественнозначная собственная функция операторного пучка L, отвечающая собственному значению $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда найдётся значение $\varepsilon > 0$, для которого независимо от выбора вещественнозначной функции $z \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ со свойством*

$$(3) \qquad (\forall t, s \in [0,1]) \qquad \big(|z(t) - z(s)| \leqslant \varepsilon \cdot |t - s|\big) \;\&\; \big(|z(t)| \leqslant \varepsilon\big)$$

числа перемен знака функций y и $y + z$ совпадают.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $a \in [0,1]$ со свойством $y(a) = 0$. Равенство (1) означает существование интервала $\Delta \ni a$, удовлетворяющего соотношению

$$(\forall t, s \in [0,1] \cap \Delta) \qquad \frac{2\,[y(t) - y(s)]}{y^{[1]}(a)} \geqslant |t - s| \cdot \operatorname*{vrai\,inf}_{x\in[0,1]} p^{-1}(x).$$

Соответственно, для достаточно малых значений $\varepsilon > 0$ независимо от выбора вещественнозначной функции $z \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ со свойством (3) функция $y + z$ будет строго монотонна на промежутке $[0,1] \cap \Delta$. При этом в случае $a \in (0,1)$ указанная функция будет менять знак на интервале Δ, а в случае $a \in \{0,1\}$ для любой функции $z \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ обязано выполняться равенство $z(a) = 0$. Тем самым, доказываемое утверждение справедливо. $\square$

3.3. *Пусть* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность вещественнозначных собственных функций пучка* L*, отвечающих собственным значениям* λ_n*. Тогда для любого конечного набора* $\{c_k\}_{k=n}^{N}$ *вещественных коэффициентов со свойствами* $c_n \neq 0$ *и* $c_N \neq 0$ *функция* $\sum_{k=n}^{N} c_k y_k$ *имеет не менее* n *и не более* N *перемен знака.*

Доказательство. Неубывающая функция $R \in L_2[0,1]$ из представления (2) весовой обобщённой функции $r \in W_2^{-1}[0,1]$ допускает характеризацию в виде предела последовательности $\{R_m\}_{m=0}^{\infty}$ гладких неубывающих функций со свойствами $R_m(0) = R(0)$ и $R_m(1) = R(1)$. Соответственно, при любом выборе вещественнозначной функции $y \in W_{2,B,C}^{1}[0,1]$ обобщённая функция $L'(0)y \in W_{2,B,C}^{-1}[0,1]$ является пределом последовательности $\{-R'_m y\}_{m=0}^{\infty}$ непрерывных функций, никакая из которых не может иметь числа перемен знака, превосходящего таковое для функции y. Тем самым, оператор $L'(0)\colon W_{2,B,C}^{1}[0,1] \to W_{2,B,C}^{-1}[0,1]$ является знакорегулярным, что означает также [2.1] знакорегулярность оператора $K \rightleftharpoons -[L(0)]^{-1}L'(0)$.

Рассмотрим последовательность $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ функций вида

$$f_m \rightleftharpoons \sum_{k=n}^{N} c_k y_k \cdot \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^m.$$

Ввиду выполнения не зависящих от выбора индекса $m \in \mathbb{N}$ равенств $f_{m+1} = \lambda_n K f_m$, число перемен знака никакой из функций $f_m \in W_{2,B,C}^{1}[0,1]$ не может превзойти числа перемен знака функции $f_0 \in W_{2,B,C}^{1}[0,1]$. С другой стороны, в пространстве $W_{2,B,C}^{1}[0,1]$ последовательность $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ имеет пределом функцию $c_n y_n$, обладающую [§ 2.4.1] не менее n знакопеременами. Тем самым, функция f_0 также имеет не менее n перемен знака.

Рассмотрим теперь последовательность $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ функций вида

$$f_m \rightleftharpoons \sum_{k=n}^{N} c_k y_k \cdot \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_N}\right)^m.$$

Ввиду выполнения не зависящих от выбора индекса $m \in \mathbb{N}$ равенств $f_m = \lambda_N K f_{m+1}$, число перемен знака функции $f_0 \in W_{2,B,C}^{1}[0,1]$ не может превзойти числа перемен знака никакой из функций $f_m \in W^1_{2,B,C}[0,1]$. С другой стороны, независимо от выбора значения $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших $m \in \mathbb{N}$ функция $f_m - c_N y_N$ удовлетворяет [3.1] условию (3). Тем самым [3.2, § 2.4.1], функция f_0 имеет не более N перемен знака. $\square$

4. Распространим теперь основной результат предыдущего пункта на случай пучка $L\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(W^1_{2,B,C}[0,1], W^{-1}_{2,B,C}[0,1])$ операторов Штурма–Лиувилля вида

$$\langle L(\lambda)y, z\rangle \equiv \int_0^1 py'\overline{z'}\,dx + \langle q - \lambda r, \overline{y}z\rangle + \langle Vy^\wedge, z^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^2},$$

удовлетворяющего условию положительности оператора $L(0)$. Через $v \in L_2[0,1]$ и $v(0), v(1) \in \mathbb{R}$ мы, как и ранее, будем обозначать коэффициенты представления § 2.3 (3).

4.1. *Существует равномерно положительная функция* $\sigma \in W^1_2[0,1]$, *удовлетворяющая вместе с некоторой функцией* $\sigma^{[1]} \in C[0,1]$ *равенству*

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v/p & 1/p \\ -v^2/p & -v/p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma^{[1]} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

При этом в случае граничных условий 2 (3) *или* 2 (4) *можно потребовать дополнительного выполнения равенства* $\sigma^{[1]}(0) = -v(0)\sigma(0)$, *а в случае граничных условий* 2 (2) — *равенства* $\sigma^{[1]}(1) = -v(1)\sigma(1)$.

Доказательство. В случае граничных условий 2 (3) или 2 (4) достаточно заметить, что решение $\sigma \in W^1_2[0,1]$ начальной задачи

$$\begin{pmatrix} \sigma(0) \\ \sigma^{[1]}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -v(0) \end{pmatrix}$$

для уравнения (1) не может [§ 2.3.3, § 2.3.1] иметь нулей на полуинтервале $(0,1]$. Случай граничных условий 2 (2) разбирается аналогичным образом.

Пусть теперь граничные условия имеют вид 2 (1). Применяя утверждения § 2.3.3 и § 2.3.1 к оператору $S^*L(0)S$, где $S\colon W^1_{2,B,C}[0,1] \to W^1_{2,B,C}[0,1]$ есть оператор замены переменной вида

$$[Sy](x) \rightleftharpoons y(1-x),$$

убеждаемся, что решение $\sigma \in W_2^1[0,1]$ начальной задачи

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma^{[1]}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

для уравнения (1) положительно на полуинтервале $[0,1)$. Последнее, в свою очередь, означает [§ 2.3.3] справедливость неравенства

$$\int_0^1 p\,|y'|^2\,dx + \langle q, |y|^2\rangle + \varkappa\,|y(0)|^2 \geqslant 0$$

при любом выборе значения $\varkappa > v(0) + \sigma^{[1]}(0)/\sigma(0)$ и функции $y \in W_2^1[0,1]$ со свойством $y(1) = 0$. Из утверждения § 2.3.3 и теоремы о единственности решений начальных задач для уравнения (1) тогда вытекает положительность решения $\sigma \in W_2^1[0,1]$ начальной задачи

$$\begin{pmatrix} \sigma(0) \\ \sigma^{[1]}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varkappa - v(0) \end{pmatrix}$$

на всём отрезке $[0,1]$. □

Введём теперь в рассмотрение функцию $\tau \in C^1[0,1]$ вида

$$\tau(t) \rightleftharpoons \int_0^t \frac{dx}{\sigma^2}, \tag{2}$$

предположив, без ограничения общности, выполненным равенство $\tau(1) = 1$. Эта функция строго монотонным образом отображает отрезок $[0,1]$ на себя, что позволяет ввести в рассмотрение ограниченно обратимый оператор $S\colon W_2^1[0,1] \to W_2^1[0,1]$ вида

$$Sy \rightleftharpoons \sigma \cdot (y \circ \tau). \tag{3}$$

Легко при этом видеть, что подпространство $W_{2,B,C}^1[0,1] \subseteq W_2^1[0,1]$ является относительно действия оператора S инвариантным.

4.2. *Пусть функция $\hat{p} \in L_\infty[0,1]$ при почти всех $x \in [0,1]$ удовлетворяет равенству $\hat{p}(\tau(x)) = p(x)$, а неотрицательная обобщённая функция $\hat{r} \in W_2^{-1}[0,1]$ имеет вид $\hat{r} = S^*[\sigma r]$. Пусть также матрицы $\hat{B}, \hat{C} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ совпадают с матрицами $B, C \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ в случае граничных условий 2 (1), 2 (2) или 2 (3), и определяют граничные условия*

$$[\hat{p}y'](0) = [\hat{p}y'](1) + \hat{B}_{22}y(1) = 0,$$

где $\hat{B}_{22} \rightleftharpoons \sigma^{[1]}(1)\sigma(1) + [B_{22} + v(1)] \cdot \sigma^2(1) > 0$, в случае граничных условий 2 (4). Тогда независимо от выбора значения $\lambda \in \mathbb{C}$ и функции $y \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ выполняется равенство

$$\langle L(\lambda)Sy, Sy\rangle = \int_0^1 \hat{p}\,|y'|^2\,dx - \lambda\,\langle \hat{r}, |y|^2\rangle + \langle \hat{V}y^\wedge, y^\wedge\rangle_{\mathbb{C}^2}, \tag{4}$$

где оператор $\hat{V}$ связан с парой матриц B и C тем же способом, что и оператор V — с парой матриц B и C.

Доказательство. При любом выборе функции $y \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p\sigma'\overline{y'}\,dx + \langle q, \sigma y\rangle &= \int_0^1 \Big([p\sigma' - v\sigma]\,\overline{y'}\,dx - v\sigma'\overline{y}\Big)\,dx + \\
&\qquad + v(1)\sigma(1)\overline{y(1)} - v(0)\sigma(0)\overline{y(0)} \\
&= \sigma^{[1]}\overline{y}\Big|_0^1 + v(1)\sigma(1)\overline{y(1)} - v(0)\sigma(0)\overline{y(0)} && [(1)] \\
&= [\sigma^{[1]}(1) + v(1)\sigma(1)] \cdot \overline{y(1)}, && [4.1] \\
\int_0^1 \hat{p}\,\big|y'\big|^2\,dx &= \int_0^1 p \cdot \big|\sigma \cdot [Sy]' - \sigma' \cdot Sy\big|^2\,\frac{dx}{\sigma^2} && [(3),\ (2)] \\
&= \int_0^1 p\,\big|[Sy]'\big|^2\,dx - \int_0^1 p\sigma' \cdot \left(\frac{|Sy|^2}{\sigma}\right)'\,dx \\
&= \int_0^1 p\,\big|[Sy]'\big|^2\,dx + \langle q, |Sy|^2\rangle - \\
&\qquad - \frac{\sigma^{[1]}(1) + v(1)\sigma(1)}{\sigma(1)}\,\big|[Sy](1)\big|^2, && [(5)] \\
\langle \hat{r}, |y|^2\rangle &= \langle r, \sigma \cdot S|y|^2\rangle
\end{aligned} \tag{5}$$

$$= \langle r, |Sy|^2 \rangle. \qquad [(3)]$$

Вычисляя теперь с учётом утверждения 4.1 правую сторону соотношения (4), убеждаемся в её равенстве левой стороне. Справедливость оценки $\hat{B}_{22} > 0$ в случае граничных условий 2 (4) устанавливается подстановкой функции $\sigma \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ на место функции y в равенстве (5) с учётом положительности оператора $L(0)$. $\square$

4.3. *Утверждение* 3.3 *остаётся справедливым для пучка операторов Штурма–Лиувилля рассмотренного в настоящем пункте вида.*

Доказательство. С учётом хорошо известного факта выразимости полуторалинейной формы через отвечающую ей квадратичную, утверждение 4.2 означает применимость утверждения 3.3 к операторному пучку $\lambda \mapsto S^*L(\lambda)S$. Сохранение числа перемен знака произвольной вещественнозначной функции $y \in W^1_{2,B,C}[0,1]$ под действием оператора S означает потому искомое. $\square$

Отметим в заключение, что для случая задач Штурма–Лиувилля с суммируемыми коэффициентами возможность проведённого в настоящем пункте устранения потенциала хорошо известна [34: § 14].

5. Проведённое при доказательстве утверждения 3.2 рассуждение опирается на факт равномерной отделённости функции y от нуля вне малой окрестности множества нулей этой функции. С точки зрения конструктивного математического анализа, в котором опровергается на примерах [40: Гл. 8, § 2, Теорема 5] теорема о достижении равномерно непрерывной функцией точных граней множества своих значений, указанный факт нуждается в дополнительном обосновании. Таковое может быть дано, в частности, следующим образом. Введём в рассмотрение функции $\varrho, \vartheta \in C[0,1]$ вида

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} \equiv \varrho \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие уравнениям

$$(\ln \varrho)' = \frac{\lambda R}{p}\,\cos 2\vartheta + \frac{1-\lambda^2 R^2}{2p}\,\sin 2\vartheta,$$

$$\vartheta' = \frac{\cos^2\vartheta}{p} + \left[\frac{\lambda^2R^2}{p}\,\sin\vartheta - \frac{2\lambda R}{p}\,\cos\vartheta\right]\cdot\sin\vartheta,$$

где производные понимаются как обобщённые. При этом выполняется соотношение

$$(\forall t\in[0,1])\qquad \varrho(t)\geqslant\varrho(0)\cdot\exp\left[-\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in[0,1]}\frac{(1+|\lambda R(x)|)^2}{2p(x)}\right],$$

означающее, что независимо от выбора значения $\varepsilon>0$ функция y равномерно отделена от нуля на дополнении множества

$$\Xi_\varepsilon \rightleftharpoons \{t\in[0,1]\ :\ |\sin\vartheta(t)|<\varepsilon\}. \tag{1}$$

Если при этом значение $\varepsilon>0$ выбрано достаточно малым, то на самòм множестве Ξ_ε почти всюду выполняется неравенство

$$\vartheta'(t) > \operatorname*{vrai\,inf}_{x\in[0,1]}\,[1/2p(x)],$$

что гарантирует близость к любой точке $t\in\Xi_\varepsilon$ либо некоторого из нулей функции y, либо границы отрезка $[0,1]$.

При доказательстве утверждения 4.1, с точки зрения конструктивного математического анализа, необходимо привлечь аналогичные только что указанным соображения. А именно, введём в рассмотрение функции $\varrho,\vartheta\in C[0,1]$ вида

$$\begin{pmatrix}\sigma\\ \sigma^{[1]}\end{pmatrix}\equiv\varrho\cdot\begin{pmatrix}\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix},$$

удовлетворяющие уравнениям

$$(\ln\varrho)' = -\frac{v}{p}\,\cos 2\vartheta + \frac{1-v^2}{2p}\,\sin 2\vartheta, \tag{2}$$

$$(\sin\vartheta)' = \frac{\cos^3\vartheta}{p} + \left[\frac{v^2}{2p}\,\sin\vartheta + \frac{v}{p}\,\cos\vartheta\right]\cdot\sin 2\vartheta. \tag{3}$$

Из (2) вытекает справедливость соотношения

$$(\forall t\in[0,1])\qquad \varrho(t)\geqslant\varrho(0)\cdot\exp\left[-\int_0^1\frac{(1+|v|)^2}{2p}\,dx\right],$$

означающего равномерную положительность функции σ на дополнении множества (1), а из (3) — справедливость для любых отрезков $[\delta, \varepsilon] \subset (0, 1)$ и $[a, b] \subset (0, 1)$ со свойством

$$(\forall t \in [a, b]) \qquad \sin \vartheta(t) \in [\delta, \varepsilon]$$

соотношений

$$b - a \leqslant \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in [0,1]} p(x) \cdot \left[1 + \int_0^1 \frac{(1 + |v|)^2}{p}\, dx\right],$$

$$(\forall t \in [a, b]) \qquad \sin \vartheta(t) \leqslant D \cdot \exp\left[\int_0^1 \frac{(1 + |v|)^2}{p}\, dx\right],$$

где положено

$$D \rightleftharpoons \begin{cases} \sin \vartheta(a) & \text{при } \cos \vartheta(a) < 0, \\ \sin \vartheta(b) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Соответственно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ любая точка множества (1) близка либо к некоторому из нулей функции σ, либо к границе отрезка $[0, 1]$.

§ 4. Случай задачи высшего чётного порядка

1. Дополнительно к определённому в предыдущем параграфе представлению о непрерывной вещественнозначной функции с заданной минорантой числа знакоперемен, в настоящем параграфе мы будем пользоваться представлением о непрерывной вещественнозначной функции с заданной минорантой числа знакоперемен *с положительным началом*. А именно, функцией с *не менее n знакопеременами с положительным началом* мы будем называть всякую вещественнозначную функцию $f \in C[0, 1]$, для которой найдётся упорядоченный по возрастанию набор $\{\xi_k\}_{k=0}^n$ точек интервала $(0, 1)$ со свойствами $(-1)^k y(\xi_k) > 0$. Аналогичным образом, вещественную обобщённую функцию из некоторого пространства $\mathfrak{X}$ — в роли какового далее обычно будет выступать то или иное пространство Соболева с негативным индексом гладкости — мы называем имеющей не более $n \in \mathbb{N}$ перемен знака с положительным началом, если она допускает в пространстве $\mathfrak{X}$ сколь угодно точную аппроксимацию имеющими не более n перемен знака с положительным началом непрерывными функциями.

Вещественные линейные операторы, для которых прообразом всякой имеющей не более n знакоперемен с положительным началом обобщённой функции также является некоторая имеющая не более n знакоперемен с положительным началом (обобщённая) функция, мы будем далее именовать *правильными*. Соотношение между понятиями правильного оператора и оператора, не понижающего числа перемен знака, аналогично соотношению между понятиями знакоопределённой и вполне неотрицательной матрицы (см., например, [[25]: Гл. V]). В частности, действующий в пространстве $C[0,1]$ оператор умножения на постоянную -1 не понижает числа перемен знака, однако не является правильным в вышеуказанном смысле.

Один из простейших примеров правильного оператора даёт действующий в пространстве $L_2[0,1]$ оператор умножения на равномерно положительную функцию $p \in L_\infty[0,1]$. Действительно, функция p^{-1} есть в пространстве $L_2[0,1]$ предел некоторой равномерно ограниченной последовательности $\{p_k^{-1}\}_{k=0}^\infty$ положительных непрерывных функций. Соответственно, для всякой вещественнозначной функции $y \in L_2[0,1]$, для которой функция $py \in L_2[0,1]$ допускает представление в виде предела последовательности $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ непрерывных функций с не более чем n знакопеременами с положительным началом каждая, последовательность $\{p_k^{-1} f_k\}_{k=0}^\infty$ непрерывных функций, также имеющих не более n знакоперемен с положительным началом каждая, сойдётся к исходной функции y.

2. Основной целью настоящего параграфа является указание метода, позволяющего — в конечном счёте — сводить к только что установленному факту правильности оператора умножения вопрос об осцилляционных свойствах положительно определённых дифференциальных операторов описанного в настоящей главе вида.

Используемая нами процедура сводится к комбинированию двух основных фактов. Первый из них будет установлен далее в настоящем пункте. Получение второго требует проведения некоторой предварительной работы, выполняемой в следующем пункте.

2.1. *Пусть при некотором* $n \geqslant 1$ *является правильным некоторый положительно определённый оператор* $S\colon W_2^{n-1}[0,1] \to W_2^{-(n-1)}[0,1]$. *Тогда положительно определённый оператор* $T\colon W_2^n[0,1] \to W_2^{-n}[0,1]$*, заданный тождеством*

$$\langle Ty, z\rangle \equiv \langle Sy', z'\rangle + \alpha\, y(0)\overline{z(0)}, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$*, также правилен.*

Доказательство. Очевидным образом достаточно установить, что всякая вещественнозначная функция $f \in C[0,1]$, для которой соответствующая $y \rightleftharpoons T^{-1}f$ имеет не менее N знакоперемен с положительным началом, сама обладает не меньшим числом таковых. Обозначим символом F первообразную функции f, выделенную условием $F(1) = 0$. Из определения (1) немедленно вытекает справедливость тождества

$$\langle Sy', z'\rangle + \int_0^1 F\overline{z'}\,dx \equiv -[F(0) + \alpha y(0)]\,\overline{z(0)},$$

равносильного паре равенств $Sy' = -F$ и $-F(0) = \alpha y(0)$. Последнее из них означает, что либо функция y' имеет не менее N перемен знака с положительным началом, либо функция $-y'$ имеет не менее $N-1$ таких перемен при одновременном выполнении неравенства $-F(0) > 0$. В обоих указанных случаях правильность оператора S гарантирует наличие у функции $-F$ не менее N перемен знака с положительным началом. Учёт равенства $F(1) = 0$ и теоремы Лагранжа о конечном приращении завершает доказательство. $\square$

3. Имеет место следующий факт:

3.1. *Пусть при некоторых $m \geqslant 1$ и $n \geqslant m$ заданы вещественные распределения $q_{k,l} \in W_2^{-(n-k)}[0,1]$, где $m \geqslant k \geqslant l \geqslant 1$, в случае $n = m$ дополнительно удовлетворяющие условию $q_{n,n} \in L_\infty[0,1]$. Тогда найдутся такие вещественные распределения $h_m = 2q_{m,m}$ и $h_k \in W_2^{-(n-k)}[0,1]$, где $k \in 1\,..\,m-1$, что независимо от выбора функции $y \in W_2^n[0,1]$ будет справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}\langle q_{k,l}, \overline{y^{(k)}}y^{(l)} + \overline{y^{(l)}}y^{(k)}\rangle = \sum_{k=1}^{m}\langle h_k, |y^{(k)}|^2\rangle. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $m = 1$ справедливость доказываемого утверждения тривиальна. Переход к общему случаю осуществляется теперь на основе метода индукции. А именно, с учётом выполнения при $m > l$ равенств

$$\overline{y^{(m)}}y^{(l)} + \overline{y^{(l)}}y^{(m)} = (|y^{(l)}|^2)^{(m-l)} - \sum_{k=1}^{m-l-1}\binom{m-l}{k}\overline{y^{(m-k)}}y^{(l+k)}$$

левую часть доказываемого равенства (1) можно переписать в виде

$$\langle 2q_{m,m}, |y^{(m)}|^2\rangle + \sum_{l=1}^{m-1}\langle q_{m,l}, (|y^{(l)}|^2)^{(m-l)}\rangle + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{k}\langle \hat{q}_{k,l}, \overline{y^{(k)}}y^{(l)} + \overline{y^{(l)}}y^{(k)}\rangle \tag{2}$$

с некоторыми вещественными распределениями $\hat{q}_{k,l} \in W_2^{-(n-k)}[0,1]$. Соответственно, равенство (1) выполняется с распределениями $h_k \in W_2^{-(n-k)}[0,1]$ вида

$$\langle h_k, y\rangle \equiv \langle q_{m,k}, y^{(m-k)}\rangle + \langle \hat{h}_k, y\rangle,$$

в каковом представлении распределения $\hat{h}_k \in W_2^{-(n-k)}[0,1]$ сконструированы на основе индуктивного предположения для последнего слагаемого из суммы (2). $\square$

Имея в своём распоряжении утверждение 3.1, мы можем теперь установить второй основной факт развиваемого нами метода.

3.2. *Пусть при некотором* $n \geqslant 1$ *отвечающая оператору* $T\colon W_2^n[0,1] \to W_2^{-n}[0,1]$ *вида* § 1.4 (1) *при* $V = 0$ *функция* $\sigma \rightleftharpoons T^{-1}\boldsymbol{\delta}_0 \in W_2^n[0,1]$ *равномерно на отрезке* $[0,1]$ *положительна. Тогда может быть указан оператор* $S\colon W_2^{n-1}[0,1] \to W_2^{-(n-1)}[0,1]$ *такого же вида, удовлетворяющий тождеству*

$$\langle G^*TGy, z\rangle \equiv \langle Sy', z'\rangle + \sigma(0)y(0)\overline{z(0)},$$

где оператор $G\colon W_2^n[0,1] \to W_2^n[0,1]$ *действует согласно правилу* $Gy \rightleftharpoons \sigma y$. *При этом старший коэффициент задающего оператор* S *дифференциального выражения имеет вид* $p_0\sigma^2$.

Доказательство. Ввиду известного принципа поляризации [[35]: Гл. I, (6.11)] справедливость искомого тождества достаточно установить в случае $y = z$. Однако, как легко проверяется непосредственно, выражение $\langle TGy, Gy\rangle - \langle T\sigma, \sigma\,|y|^2\rangle$ допускает запись в форме левой части равенства (1) с функцией $q_{n,n} = p_0\sigma^2/2$. С учётом утверждения 3.1 и определения функции σ, это и означает справедливость доказываемого факта. □

Ввиду очевидного сохранения числа знакоперемен с положительным началом при действии операторов G и G^*, правильность указанного в утверждении 3.2 оператора S даёт гарантию правильности исходного оператора T. В этом замечании и заключается суть предлагаемого подхода.

4. Как вытекает из установленного ранее утверждения § 2.3.3, всякий положительно определённый оператор $T\colon W_2^1[0,1] \to W_2^{-1}[0,1]$ рассматриваемого нами вида обладает равномерно положительной функцией $\sigma \rightleftharpoons T^{-1}\boldsymbol{\delta}_0$. Соответственно, развитый в настоящем параграфе метод автоматически сводит вопрос о правильности такого оператора к вопросу о правильности действующего в пространстве $L_2[0,1]$ оператора умножения на равномерно положительную функцию $p_0\sigma^2$. Это, в свою очередь, приводит нас к выводу о правильности всякого положительно определённого оператора Штурма–Лиувилля с граничными условиями третьего типа.

Перейдём теперь к рассмотрению оператора $T\colon W_2^2[0,1] \to W_2^{-2}[0,1]$ четвёртого порядка. В случае равномерной положительности функции $\sigma \rightleftharpoons T^{-1}\boldsymbol{\delta}_0$ развитый выше метод позволяет свести вопрос о правильности такого оператора к вопросу о правильности некоторого положительно определённого оператора Штурма–Лиувилля $S\colon W_2^1[0,1] \to W_2^{-1}[0,1]$. Однако последний оператор, как только что установлено, заведомо правилен. Тем самым, равномерная положительность функции $T^{-1}\boldsymbol{\delta}_0$ представляет собой достаточное условие правильности оператора четвёртого порядка.

Полученный результат допускает усиление до следующего *критерия* правильности положительно определённого дифференциального оператора четвёртого порядка с распадающимися граничными условиями:

4.1. *Пусть подпространство* $\mathfrak{H} \subseteq W_2^2[0,1]$ *представляет собой ортогональное дополнение некоторого (возможно, пустого) линейно независимого набора распределений класса* $\operatorname{Lin}\{\boldsymbol{\delta}_0, \boldsymbol{\delta}_0'\} \cup \operatorname{Lin}\{\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_1'\} \subset W_2^{-2}[0,1]$. *Пусть также оператор* $T\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^*$ *вида* § 1.4 (1) *при* $V = 0$ *положительно определён, а его функция Грина*

$$\mathcal{G}(t,s) \rightleftharpoons \overline{\langle \boldsymbol{\delta}_t, T^{-1}\boldsymbol{\delta}_s \rangle} \tag{1}$$

положительна внутри открытого квадрата $(0,1)\times(0,1)$. *Тогда оператор* T *является правильным.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное значение $\varepsilon \in (0,1/2)$. Ввиду положительности квадратичной формы оператора T на подпространстве

$$\mathfrak{M} \rightleftharpoons L^{-1} \operatorname{Lin}\{\boldsymbol{\delta}_\varepsilon, \boldsymbol{\delta}_\varepsilon', \boldsymbol{\delta}_{1-\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}_{1-\varepsilon}'\},$$

всякий набор из четырёх величин $y(\varepsilon)$, $y'(\varepsilon)$, $y(1-\varepsilon)$ и $y'(1-\varepsilon)$ однозначно определяет некоторую функцию $y \in \mathfrak{M}$. Положительность оператора T означает также, что поведение указанной функции слева от точки ε полностью определяется фиксацией пары величин $y(\varepsilon)$ и $y'(\varepsilon)$, а её поведение справа от точки $1-\varepsilon$ — фиксацией пары величин $y(1-\varepsilon)$ и $y'(1-\varepsilon)$.

Пусть теперь оператор $I\colon W_2^2[\varepsilon,1-\varepsilon]\to\mathfrak{H}$ таков, что функция $Iy\in\mathfrak{H}$ всегда совпадает с исходной функцией $y\in W_2^2[\varepsilon,1-\varepsilon]$ на отрезке $[\varepsilon,1-\varepsilon]$, и с некоторой функцией класса $\mathfrak{M}$ — вне этого отрезка. Учитывая представления

$$\langle p_1,y\rangle\equiv-\int_0^1 Q\,\overline{y'}\,dx+\alpha\,\overline{y(0)},\qquad Q\in L_2[0,1],\ \alpha\in\mathbb{R},$$

$$\langle p_2,y\rangle\equiv\int_0^1 H\,\overline{y''}\,dx+\beta\,\overline{y(0)}+\gamma\,\overline{y'(0)},\qquad H\in L_2[0,1],\ \beta,\gamma\in\mathbb{R},$$

функционалов $p_k\in W_2^{-k}[0,1]$, устанавливаем справедливость тождества

$$\langle I^*TIy,y\rangle\equiv\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} p_0\,|y''|^2\,dx+\sum_{k=1}^2\langle\hat{p}_k,|y^{(2-k)}|^2\rangle,$$

где $\hat{p}_k\in W_2^{-k}[\varepsilon,1-\varepsilon]$ суть некоторые вещественные распределения. При этом функция Грина оператора I^*TI представляет собой ограничение функции Грина исходного оператора T на квадрат $[\varepsilon,1-\varepsilon]\times[\varepsilon,1-\varepsilon]$, и потому на этом квадрате равномерно положительна. С учётом установленного выше признака правильности оператора четвёртого порядка это означает, что для всякой имеющей не более N знакоперемен с положительным началом функции $f\in C[0,1]$, тождественно обращающейся в нуль за пределами отрезка $[\varepsilon,1-\varepsilon]$, соответствующая функция $y\rightleftharpoons T^{-1}f$ также имеет на отрезке $[\varepsilon,1-\varepsilon]$ не более N знакоперемен с положительным началом. Произвольность выбора значения $\varepsilon\in(0,1/2)$ означает теперь, что оператор T^{-1} не повышает числа знакоперемен с положительным началом никакой финитной функции $f\in C[0,1]$. Для завершения доказательства остаётся теперь лишь учесть непрерывный характер вложения $L_1[0,1]\hookrightarrow\mathfrak{H}^*$. □

Отметим, что установленный выше факт правильности всякого положительно определённого оператора Штурма–Лиувилля с граничными условиями третьего типа может быть аналогичным образом усилен до факта правильности всякого положительно определённого оператора Штурма–Лиувилля с произвольными распадающимися граничными условиями.

5. В случае оператора $T\colon W_2^n[0,1]\to W_2^{-n}[0,1]$ более высокого порядка введём в рассмотрение функции $\sigma_k \rightleftharpoons (-1)^k T^{-1}\boldsymbol{\delta}_0^{(k)}$, где $k\in 0\,..\,n-2$. Заметим, что в предположении равномерной положительности функции $\sigma\rightleftharpoons\sigma_0$ утверждение 3.2 гарантирует постоянность функции $(G^*TG)^{-1}\boldsymbol{\delta}_0$. Соответственно, ввиду самосопряжённости оператора G^*TG, функции $\tau_k \rightleftharpoons (-1)^k(G^*TG)^{-1}\boldsymbol{\delta}_0^{(k)}$, где $k\in 1\,..\,n-2$, подчиняются условиям $\tau_k(0)=0$, в свете утверждения 3.2 означающим справедливость равенств $S\tau_k' = (-1)^{k-1}\boldsymbol{\delta}_0^{(k-1)}$. При этом несложные вычисления показывают, что выполняются также равенства

$$\tau_k' = \sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}\,[\sigma^{-1}]^{(k-l)}(0)\cdot\left(\frac{\sigma_l}{\sigma_0}\right)'.$$

Тем самым, вронскианы $W(\tau_1',\ldots,\tau_k')$ с точностью до умножения на некоторые равномерно положительные функции совпадают с соответствующими вронскианами $W(1,\sigma_1\sigma_0^{-1},\ldots,\sigma_k\sigma_0^{-1})$, а тогда и вронскианами $W(\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$. Индукцией по параметру n с учётом установленных в предыдущих пунктах фактов легко получаем теперь, что равномерная положительность всех вронскианов $W(\sigma_0,\ldots,\sigma_k)$, где $k\in 0\,..\,n-2$, даёт достаточное условие правильности оператора T.

6. Отметим в заключение, что рассмотренный в настоящем параграфе класс задач включает целый ряд постановок, в традиционной записи имеющих вид многоточечных. Так, формально трёхточечная задача вида

$$\begin{gathered} y^{(4)} = f,\\ y(0)=y'(0)=y''(1)+4y'(1)-6y(1)=y'''(1)+6y'(1)-10y(1)=0,\\ \begin{aligned} y(1/2+0)-y(1/2-0)&=y'(1/2+0)-y'(1/2-0)=\\ &=y''(1/2+0)-y''(1/2-0)+4y'(1/2)=\\ &=y'''(1/2+0)-y'''(1/2-0)+48y(1/2)=0 \end{aligned} \end{gathered}$$

в действительности представляет собой задачу на пространстве

$$\mathfrak{H} = \{y\in W_2^2[0,1]\ :\ y(0)=y'(0)=0\}$$

с коэффициентами $p_0\equiv 1$, $p_1=-4\boldsymbol{\delta}_{1/2}+4\boldsymbol{\delta}_1$ и $p_2=48\boldsymbol{\delta}_{1/2}+10\boldsymbol{\delta}_1+6\boldsymbol{\delta}_1'$, и в таком качестве подпадает под действие критерия 4.1.

Глава III

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Задача об установлении априорных оценок собственных значений дифференциальных операторов при варьировании коэффициентов внутри некоторых классов является классической задачей математического анализа. Мы не станем давать здесь подробного изложения истории вопроса, ограничившись ссылкой на обзорную работу [31]. Целью настоящей главы является иллюстрация того, каким образом в рамках изучения указанной экстремальной задачи естественным образом возникает необходимость привлечения представлений теории дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами.

В различных формах эта необходимость отмечалась многими авторами. Так, одно из приложений к уже отмеченной работе [31] по существу посвящено изучению спектра граничной задачи, отвечающей уравнению

$$-y'' = \lambda \boldsymbol{\delta}_\zeta y,$$

где символом $\boldsymbol{\delta}_\zeta \in W_2^{-1}[0,1]$ обозначена дельта-функция Дирака с носителем в точке $\zeta \in [0,1]$. Тот факт, что минимум наименьшего собственного значения задачи

$$-y'' + (q - \lambda)y = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{2}$$

при пробегании потенциалом $q \in L_1[0,1]$ класса

$$A \rightleftharpoons \left\{ q \in L_1[0,1] \ : \ \int_0^1 q\,dx = 1 \right\}$$

достигается (в некотором, не уточняемом в указанных работах смысле) на потенциале $-\boldsymbol{\delta}_{1/2}$, отмечался в работах [7, 103, 32]. В настоящей главе будут указаны три иллюстрации описываемого явления, взятые из работ [84, 13, 17].

Перейдём теперь к краткой характеристике излагаемого ниже материала.

Параграф § 1 посвящён изложению условий достижимости максимума $M_{r,1} \rightleftharpoons \sup_{q\in A_r} \lambda_0(q)$ наименьшего собственного значения задачи (1), (2) при пробегании потенциалом $q \in L_1[0,1]$ заданного положительной весовой функцией $r \in C(0,1)$ класса

$$A_r \rightleftharpoons \left\{ q \in L_1[0,1] \ : \ (q \geqslant 0) \ \& \ \left(\int_0^1 rq\,dx = 1 \right) \right\}.$$

При этом устанавливается, что этот максимум достигается на единственном — причём, вообще говоря, сингулярном — потенциале $\hat{q} \in \Gamma_r$, принадлежащем замыканию Γ_r класса A_r в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{-1}_{2,loc}(0,1)$. Изложение материала этого параграфа следует работе [17]. Отметим, что для частного случая $r \equiv 1$ близкие к излагаемым результаты были установлены ранее в работах [30, 32].

Параграф § 2 посвящён изложению некоторых примыкающих к материалу работ [31, 7] результатов о граничных задачах третьего типа, формулировка которых существенно опирается на представление об операторе Штурма–Лиувилля с потенциалом–обобщённой функцией. Изложение материала этого параграфа следует работе [84].

Параграф § 3 посвящается установлению точной априорной миноранты для первого и второго собственного значений задачи Штурма–Лиувилля на геометрическом графе. Дифференциальным уравнениям на таких графах посвящена значительная литература — см., например, [55, 54] и имеющиеся там ссылки. К числу основных целей настоящей диссертации изучение свойств дифференциальных операторов на графах не относится. Результаты § 3 основаны на сведѐнии задачи для оператора на графе к обычной задаче Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами, и дополнительно иллюстрируют возможные приложения последних. Эти результаты в основном уточняют и обобщают результаты работы [29], используемые в которой методы не связаны с теорией операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами. Изложение материала параграфа следует работе [13].

На протяжении настоящей главы все рассматриваемые функциональные пространства, коль скоро не оговорено противное, мы предполагаем вещественными.

§ 1. Мажоранты собственных значений задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из шаров весовых пространств

1. Мы будем рассматривать пространство обобщённых функций $\overset{\circ}{W}{}^{-1}_{2,loc}(0,1)$ в качестве пространства Фреше с отвечающими всевозможным натуральным значениям $\ell \geqslant 2$ полунормами

$$\|q\|_\ell \rightleftharpoons \sup_{\substack{y \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(2^{-\ell},1-2^{-\ell}) \\ \|y'\|_{L_2[0,1]} \leqslant 1}} \langle q, y\rangle. \tag{1}$$

Множество *неотрицательных* обобщённых функций класса $\overset{\circ}{W}{}^{-1}_{2,loc}(0,1)$ мы далее будем обозначать символом $\mathfrak{P}$. С каждой обобщённой функцией $q \in \mathfrak{P}$ может быть связано гильбертово пространство $\mathfrak{D}_q$, получаемое пополнением семейства $C_0^1(0,1)$ относительно скалярного произведения

$$\langle y, z\rangle_{\mathfrak{D}_q} \rightleftharpoons \int_0^1 y'z'\,dx + \langle q, yz\rangle. \tag{2}$$

1.1. *При любом выборе потенциала $q \in \mathfrak{P}$, значения $\varepsilon \in (0,1/2)$ и функции $y \in \mathfrak{D}_q$, ортогональной подпространству $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, справедливо неравенство*

$$\|y\|_{L_2[0,1]} \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,\|y\|_{\mathfrak{D}_q}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Q \in L_{2,loc}(0,1)$ — неубывающая функция со свойством

$$(\forall z \in C_0^1(0,1)) \qquad \langle q, z\rangle = -\int_0^1 Qz'\,dx. \tag{3}$$

Ввиду (2) и (3), независимо от выбора функции $z \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ выполняется равенство

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} [y' - Qy]\, z'\, dx = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} Qy'z\, dx,$$

что означает подчинение функции y на интервале $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ уравнению $-[y' - Qy]' - Qy' = 0$. Тем самым, для любых двух точек непрерывности $a \in (\varepsilon, 1-\varepsilon)$ и $b \in (a, 1-\varepsilon)$ функции Q выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b [y' - Qy]'\, y\, dx + \int_a^b Qy'y\, dx \\
&= [y' - Qy]\, y\Big|_a^b - \int_a^b (y')^2\, dx + \int_a^b Q \cdot (y^2)'\, dx \\
&= \frac{(y^2)'}{2}\Big|_a^b - \int_a^b (y')^2\, dx - \int_a^b y^2\, dQ \\
&\leqslant \frac{(y^2)'}{2}\Big|_a^b,
\end{aligned}$$

означающие неубывание функции $(y^2)'$ на некотором почти полном подмножестве интервала $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Обусловленная этим фактом вогнутость функции y^2 гарантирует справедливость равенства

$$\sup_{x\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} |y(x)| = \sup\bigl\{|y(\varepsilon)|,\ |y(1-\varepsilon)|\bigr\},$$

с учётом выполнения вне отрезка $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ тривиальных неравенств $|y(x)| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, \|y'\|_{L_2[0,1]}$ автоматически означающего искомое. $\square$

В частности, при любом $\varepsilon \in (0, 1/2)$ всякая ε-сеть $L_2[0,1]$-образа единичного шара пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\varepsilon^2, 1-\varepsilon^2)$ будет являться 2ε-сетью $L_2[0,1]$-образа единичного шара пространства $\mathfrak{D}_q$. Это замечание означает полную непрерывность вложения $\mathfrak{D}_q \hookrightarrow L_2[0,1]$.

2. Пространству $\mathfrak{D}_q$ может быть сопоставлено сопряжённое гильбертово пространство $\mathfrak{D}_q^*$, а также линейный операторный пучок $T_q\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathfrak{D}_q, \mathfrak{D}_q^*)$ вида

(1) $$\langle T_q(\lambda)y, z\rangle \rightleftharpoons \int_0^1 \left[y'z' - \lambda yz\right] dx + \langle q, yz\rangle.$$

Упомянутая ранее полная непрерывность вложения $\mathfrak{D}_q \hookrightarrow L_2[0,1]$ гарантирует, что спектр пучка T_q допускает представление в виде последовательности сосчитанных с учётом кратности собственных значений

$$\lambda_0(q) \leqslant \lambda_1(q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(q) \leqslant \ldots$$

2.1. *При любом выборе индекса* $n \in \mathbb{N}$ *и потенциала* $q \in \mathfrak{P}$ *справедливо неравенство*

$$\lambda_n(q) \leqslant 4\pi^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (1 + 2\,\|q\|_2).$$

Доказательство. Заметим, что независимо от выбора функции $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(1/4, 3/4)$ и значения $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливы вытекающие из (1) и 1 (1) оценки

$$\begin{aligned}\langle T_q(\lambda)y, y\rangle &\leqslant \int_0^1 \left[(y')^2 - \lambda y^2\right] dx + \|q\|_2 \cdot \sqrt{\int_0^1 4y^2 \cdot (y')^2\,dx} \\ &\leqslant \int_0^1 \left[(1 + 2\,\|q\|_2) \cdot (y')^2 - \lambda y^2\right] dx.\end{aligned}$$

Соответственно, при всяком $\lambda > 4\pi^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (1+2\,\|q\|_2)$ заведомо найдётся $(n+1)$-мерное подпространство $\mathfrak{M} \subseteq \overset{\circ}{W}{}_2^1(1/4, 3/4)$ со свойством

$$(\forall y \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}) \qquad \langle T_q(\lambda)y, y\rangle < 0.$$

Согласно известным вариационным принципам для собственных значений самосопряжённых вполне непрерывных операторов [[57]: п. 95], это как раз и означает справедливость доказываемого утверждения. □

2.2. *При любом выборе индекса* $n \in \mathbb{N}$ *заданное на множестве* $\mathfrak{P}$ *отображение* $q \mapsto 1/\lambda_n(q)$ *является равномерно непрерывным.*

Доказательство. Согласно упомянутым ранее вариационным принципам [[57]: п. 95], имеет место равенство

$$\frac{1}{\lambda_n(q)} = \inf_{\substack{\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{D}_q \\ \operatorname{codim} \mathfrak{M} \leqslant n}} \; \sup_{\substack{y \in \mathfrak{M} \\ \|y\|_{\mathfrak{D}_q} \leqslant 1}} \|y\|^2_{L_2[0,1]}.$$

Соответственно, из утверждения 1.1 вытекает справедливость при всех $\ell \geqslant 2$ оценок

(2) $$\frac{1}{\lambda_n(q)} - 2^{-\ell} \leqslant \inf_{\substack{\mathfrak{M}\subseteq \mathring{W}_2^1(2^{-\ell},1-2^{-\ell}) \\ \operatorname{codim}\mathfrak{M}\leqslant n}} \sup_{\substack{y\in\mathfrak{M} \\ \|y\|_{\mathfrak{D}_q}\leqslant 1}} \|y\|^2_{L_2[0,1]} \leqslant \frac{1}{\lambda_n(q)}.$$

Далее, для любых двух потенциалов $q_1, q_2 \in \mathfrak{P}$ и функции $y \in \mathring{W}_2^1(2^{-\ell}, 1 - 2^{-\ell})$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \|y\|^2_{\mathfrak{D}_{q_1}} &= \|y\|^2_{\mathfrak{D}_{q_2}} + \langle q_1 - q_2, y^2\rangle \\ &\leqslant \|y\|^2_{\mathfrak{D}_{q_2}} + \|q_1 - q_2\|_\ell \cdot \|2yy'\|_{L_2[0,1]} \\ &\leqslant \|y\|^2_{\mathfrak{D}_{q_2}} + 2\,\|q_1 - q_2\|_\ell \cdot \|y'\|^2_{L_2[0,1]} \\ &\leqslant \big(1 + 2\,\|q_1 - q_2\|_\ell\big) \cdot \|y\|^2_{\mathfrak{D}_{q_2}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2) вытекает справедливость оценок

$$\frac{1}{\lambda_n(q_2)} - 2^{-\ell} \leqslant \frac{1 + 2\,\|q_1 - q_2\|_\ell}{\lambda_n(q_1)},$$

ввиду тривиального неравенства $\lambda_n(q_1) \geqslant \pi^2$ означающих, что при $\|q_1 - q_2\|_\ell < 2^{-\ell-1}\pi^2$ расстояние между величинами $1/\lambda_n(q_1)$ и $1/\lambda_n(q_2)$ мажорируется величиной $2^{-\ell+1}$. □

3. Введём в рассмотрение функции

(1) $$u_{q,n} \rightleftharpoons (y'_{q,n})^2 + \lambda_n(q) y^2_{q,n},$$

где через $y_{q,n} \in \mathfrak{D}_q$ обозначены нормированные условием $\|y_{q,n}\|_{L_2[0,1]} = 1$ собственные функции пучка T_q, отвечающие собственным значениям $\lambda_n(q)$. Имеют место следующие четыре факта.

3.1. *При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$, неотрицательного финитного потенциала $q \in C(0,1)$ и натурального значения $\ell \geqslant 2$ справедливо соотношение*

$$(\forall x_1, x_2 \in [2^{-\ell}, 1-2^{-\ell}]) \qquad \frac{u_{q,n}(x_1)}{u_{q,n}(x_2)} \leqslant \exp\left[2^{\ell/2}\,\|q\|_{\ell+1}\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varepsilon \rightleftharpoons 2^{-\ell-1}$. Заметим, что соотношения

$$\left|\left[(y'_{q,n})^2 + \lambda_n(q)y^2_{q,n}\right]'\right| = q \cdot |2y'_{q,n}y_{q,n}| \leqslant \frac{q}{\sqrt{\lambda_n(q)}} \cdot \left[(y'_{q,n})^2 + \lambda_n(q)y^2_{q,n}\right]$$

вместе с тривиальным неравенством $\lambda_n(q) \geqslant \pi^2$ немедленно влекут за собой оценки

$$(\forall x_1, x_2 \in [2\varepsilon, 1-2\varepsilon]) \qquad \frac{u_{q,n}(x_1)}{u_{q,n}(x_2)} \leqslant \exp\left[\frac{\int_{2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} q\,dx}{\pi}\right].$$

Рассматривая функцию $w \in \mathring{W}_2^1(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ вида

$$w(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [2\varepsilon, 1-2\varepsilon], \\ (x-\varepsilon)/\varepsilon & \text{при } x \in [\varepsilon, 2\varepsilon], \\ (1-x-\varepsilon)/\varepsilon & \text{при } x \in [1-2\varepsilon, 1-\varepsilon], \end{cases}$$

убеждаемся также в справедливости оценок

$$\int_{2\varepsilon}^{1-2\varepsilon} q\,dx \leqslant \int_0^1 qw\,dx \leqslant \|q\|_{\ell+1} \cdot \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

Тем самым, доказываемое утверждение справедливо. $\square$

3.2. *При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$, неотрицательного финитного потенциала $q \in C(0,1)$ и натурального значения $\ell > 4 + n + 2\,\|q\|_2$ справедливо соотношение*

$$(\forall x \in [2^{-\ell}, 1-2^{-\ell}]) \qquad u_{q,n}(x) \geqslant \lambda_n(q) \cdot \exp\left[-1 - 2^{\ell/2}\,\|q\|_{\ell+1}\right].$$

Доказательство. Положим $\varepsilon \rightleftharpoons 2^{-\ell}$. Характер выбора значения ℓ ввиду утверждения 2.1 гарантирует справедливость оценки $\lambda_n(q)\varepsilon^2 < 1/2$. Соответственно, выполняются соотношения

$$
\begin{aligned}
(\forall \zeta \in [0,1]) \qquad |y_{q,n}(\zeta)| &= \left|(1-\zeta)\cdot\int_0^\zeta y'_{q,n}\,dx - \zeta\cdot\int_\zeta^1 y'_{q,n}\,dx\right| \\
&\leqslant \sqrt{\zeta\cdot(1-\zeta)}\cdot\|y'_{q,n}\|_{L_2[0,1]} \\
&\leqslant \sqrt{\lambda_n(q)\cdot\zeta\cdot(1-\zeta)},
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
(\forall \zeta \in [\varepsilon,1-\varepsilon]) \qquad \lambda_n(q) &= \int_0^1 \lambda_n(q) y_{q,n}^2\,dx \\
&\leqslant \int_{[0,\varepsilon]\cup[1-\varepsilon,1]} \lambda_n(q) y_{q,n}^2\,dx + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{q,n}\,dx \\
&\leqslant [\lambda_n(q)]^2\varepsilon^2 + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{q,n}\,dx \\
&\leqslant \frac{\lambda_n(q)}{2} + u_{q,n}(\zeta)\cdot\exp\left[2^{\ell/2}\,\|q\|_{\ell+1}\right],
\end{aligned}
$$

$$
(\forall \zeta \in [\varepsilon,1-\varepsilon]) \qquad u_{q,n}(\zeta) \geqslant \frac{\lambda_n(q)}{2}\cdot\exp\left[-2^{\ell/2}\,\|q\|_{\ell+1}\right].
$$

Тем самым, доказываемое утверждение справедливо. $\square$

3.3. *При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$, неотрицательного финитного потенциала $q \in C(0,1)$ и натурального значения $\ell > 4 + n + 2\,\|q\|_2$ всякая точка $x \in [2^{-\ell+1}, 1-2^{-\ell+1}]$ со свойством*

$$
|y_{q,n}(x)| \leqslant 2^{-\ell}\cdot\exp\left[\frac{-1-2^{-\ell/2}\,\|q\|_{\ell+1}}{2}\right] \tag{3}
$$

удалена от некоторого нуля функции $y_{q,n}$ не более, чем на $2^{-\ell}$.

Доказательство. Рассмотрим отрезок $\Delta \subseteq [2^{-\ell}, 1-2^{-\ell}]$, на котором функция $y_{q,n}$ является знакоопределённой, и все точки которого обладают свойством (3). Тогда, ввиду 3.2 и (1), функция $y'_{q,n}$ на отрезке Δ также является знакоопределённой, причём оценивается снизу по абсолютной величине постоянной

$$
\frac{\sqrt{\lambda_n(q)}}{2}\cdot\exp\left[\frac{-1-2^{-\ell/2}\,\|q\|_{\ell+1}}{2}\right].
$$

Это автоматически означает, что длина отрезка Δ не может превосходить величину $2^{-\ell+1}/\sqrt{\lambda_n(q)}$. Учёт тривиальной оценки $\lambda_n(q) \geqslant \pi^2$ завершает доказательство. $\square$

3.4. *При любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$, неотрицательного финитного потенциала $q \in C(0,1)$ и натурального значения $\ell > 5 + n + 2\,\|q\|_2$ справедливо неравенство*

$$\lambda_{n+1}(q) - \lambda_n(q) \geqslant 2^{-\ell} \cdot \exp\bigl[-2^{-\ell/2}\,\|q\|_{\ell+1}\bigr].$$

Доказательство. Пусть a и $b > a$ — два нуля функции $y_{q,n}$. Соотношения

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \{-y''_{q,n} + [q - \lambda_n(q)]y_{q,n}\} \cdot y_{q,n}\,dx \\ &\geqslant \int_a^b [(y'_{q,n})^2 - \lambda_n(q)y^2_{q,n}]\,dx \\ &\geqslant \left[\frac{\pi^2}{(b-a)^2} - \lambda_n(q)\right] \cdot \int_a^b y^2_{q,n}\,dx \end{aligned}$$

означают, что расстояние между точками a и b не может быть меньше величины $\pi/\sqrt{\lambda_n(q)}$. Аналогичным образом, расстояние между двумя различными нулями функции $y_{q,n+1}$ не может быть меньше величины $\pi/\sqrt{\lambda_{n+1}(q)}$. Поскольку при этом число нулей функции $y_{q,n+1}$ превосходит таковое для функции $y_{q,n}$, то заведомо должен найтись нуль $\zeta \in (0,1)$ функции $y_{q,n+1}$, удалённый от каждого из нулей функции $y_{q,n}$ более чем на $\pi/[3\sqrt{\lambda_{n+1}(q)}]$.

Далее, характер выбора значения ℓ гарантирует справедливость оценок

$$\frac{\pi}{3\sqrt{\lambda_{n+1}(q)}} \geqslant \frac{1}{6\,(n+2)\,\sqrt{1 + 2\,\|q\|_2}} > 2^{-\ell+1},$$

а потому, согласно 3.3, и оценки

$$|y_{q,n}(\zeta)| \geqslant 2^{-\ell} \cdot \exp\left[\frac{-1 - 2^{-\ell/2}\,\|q\|_{\ell+1}}{2}\right].$$

Из 3.2 и (1) легко также усматривается справедливость оценки

$$|y'_{q,n+1}(\zeta)| \geqslant \pi \cdot \exp\left[\frac{-1 - 2^{-\ell/2}\,\|q\|_{\ell+1}}{2}\right].$$

Но тогда соотношения

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1}(q) - \lambda_n(q) &\geqslant \left|[\lambda_{n+1}(q) - \lambda_n(q)] \cdot \int_0^\zeta y_{q,n}y_{q,n+1}\,dx\right| \\
&= \left|\left(y'_{q,n}y_{q,n+1} - y_{q,n}y'_{q,n+1}\right)\Big|_0^\zeta\right| \\
&= \left|y_{q,n}(\zeta)y'_{q,n+1}(\zeta)\right|
\end{aligned}$$

как раз и означают справедливость доказываемого утверждения. □

Установленные в настоящем пункте оценки собственных пар $\{\lambda_n(q), y_{q,n}\}$ являются довольно грубыми. Однако для достижения основных целей настоящей статьи они вполне достаточны. В частности, утверждения 3.4 и 2.2 гарантируют простоту собственных значений $\lambda_n(q)$ при любом выборе потенциала $q \in \mathfrak{P}$.

4. Обозначим теперь через $\Gamma_r \subseteq \mathfrak{P}$ замыкание множества A_r в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{-1}_{2,loc}(0,1)$. Из утверждения 2.2 немедленно вытекает справедливость равенства

$$M_{r,1} = \sup_{q \in \Gamma_r} \lambda_0(q).$$

4.1. *Множество* Γ_r *является компактным в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}^{-1}_{2,loc}(0,1)$.

Доказательство данного утверждения представляет определённые сложности только в рамках чисто конструктивного анализа [44]. Мы опускаем его, имея в виду, что с точки зрения „классической“ теоретико-множественной математики здесь достаточно сослаться на тривиальный факт полной непрерывности вложений $L_1[2^{-\ell}, 1-2^{-\ell}] \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{-1}_2(2^{-\ell}, 1-2^{-\ell})$.

5. Заметим теперь, что утверждения 4.1, 2.2 и 2.1 гарантируют существование последовательности $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ финитных непрерывных потенциалов класса A_r, обладающей свойством $\lambda_0(q_n) \to M_{r,1}$. При этом, очевидно, можно без ограничения общности считать выполненным тождество

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \int_0^1 rq_n\,dx = 1.$$

Рассмотрим теперь двойную последовательность $\{q_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ потенциалов вида

$$q_{n,m} \rightleftharpoons \frac{q_n + q_m}{2}. \tag{1}$$

Поскольку отображение $\lambda_0\colon L_1[0,1] \to \mathbb{R}$, согласно вариационным принципам, является выпуклым, то нижний предел числовой двойной последовательности $\{\lambda_0(q_{n,m})\}_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ не может оказаться меньшим, нежели $M_{r,1}$. Это автоматически означает справедливость равенства

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \lambda_0(q_{n,m}) = M_{r,1}. \tag{2}$$

Обозначим через y_n нормированные условием $\|y_n\|_{L_2[0,1]} = 1$ неотрицательные собственные функции пучков T_{q_n}. Заметим также, что при любых значениях $n, m \in \mathbb{N}$ со свойством $y_n \neq y_m$ нормированная условием $\|y_{n,m}\|_{L_2[0,1]} = 1$ неотрицательная собственная функция пучка $T_{q_{n,m}}$, отвечающего потенциалу (1), удовлетворяет хотя бы одному из неравенств

$$\|y_{n,m} - y_n\|_{L_2[0,1]} > \frac{\|y_n - y_m\|_{L_2[0,1]}}{3}, \qquad \|y_{n,m} - y_m\|_{L_2[0,1]} > \frac{\|y_n - y_m\|_{L_2[0,1]}}{3}.$$

Без ограничения общности можно предположить выполнение первого из них. Зафиксировав теперь не зависящую от выбора значений $n, m \in \mathbb{N}$ величину $\eta > 0$ достаточно малой и раскладывая функцию $y_{n,m}$ в пространстве $\mathfrak{D}_{q_n}$ по собственным функциям пучка T_{q_n}, с учётом 4.1 и 3.4 убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned}\int_0^1 [(y_{n,m}')^2 + q_n y_{n,m}^2]\,dx \geqslant \lambda_0(q_n)\cdot\left(\int_0^1 y_{n,m}y_n\,dx\right)^2 &+ \\ + \lambda_1(q_n)\cdot\left[1 - \left(\int_0^1 y_{n,m}y_n\,dx\right)^2\right]& \\ \geqslant \lambda_0(q_n) + 2\eta\,\|y_n - y_m\|^2_{L_2[0,1]}&,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_0(q_{n,m}) &= \int_0^1 [(y'_{n,m})^2 + q_{n,m}y^2_{n,m}]\,dx\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^1 [(y'_{n,m})^2 + q_n y^2_{n,m}]\,dx + \int_0^1 [(y'_{n,m})^2 + q_m y^2_{n,m}]\,dx\right)\\ &\geqslant \frac{\lambda_0(q_n)+\lambda_0(q_m)}{2} + \eta\,\|y_n - y_m\|^2_{L_2[0,1]}.\end{aligned}$$

Ввиду выполнения равенства (2), последние оценки означают фундаментальность функциональной последовательности $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ в пространстве $L_2[0,1]$. Следовательно, на плотном подмножестве $C_0^2(0,1)\subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ выполняются соотношения

$$(\forall\varphi\in C_0^2(0,1))\qquad \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\int_0^1 (y'_n - y'_m)\cdot\varphi'\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\int_0^1 (y_m - y_n)\cdot\varphi''\,dx = 0,$$

ввиду справедливости оценок $\|y'_n\|_{L_2[0,1]}\leqslant\sqrt{M_{r,1}}$ гарантирующие слабую фундаментальность последовательности $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. Полная непрерывность вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)\hookrightarrow C[0,1]$ означает при этом сильную фундаментальность последовательности $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ в пространстве $C[0,1]$. Непрерывность линейной биекции $y\mapsto y''$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ на пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(0,1)$ означает также слабую фундаментальность последовательности функций $q_n y_n = y''_n + \lambda_0(q_n)y_n$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(0,1)$.

Зафиксируем теперь произвольное натуральное $\ell\geqslant 2$ и положим $\varepsilon \rightleftharpoons 2^{-\ell}$. Заведомое выполнение при любом выборе индекса $n\in\mathbb{N}$ и функции $z\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\varepsilon,1-\varepsilon)$ неравенства

$$\left|\int_0^1 q_n y_n z\,dx\right| \leqslant L\cdot\|z\|_{C[0,1]},$$

где положено $L>\sqrt{M_{r,1}}\cdot\sup_{x\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} r^{-1}(x)$, вместе с вполне непрерывным характером вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\varepsilon,1-\varepsilon)\hookrightarrow C[0,1]$ означают фундаментальность последовательности $\{q_n y_n\}_{n=0}^\infty$ относительно полунормы 1 (1). Зафиксировав теперь не зависящую от выбора значений $n,m\in\mathbb{N}$ величину $\theta>0$ достаточно малой, с учётом 4.1 и 3.3 убеждаемся в выполнении при любом выборе функции $z\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\varepsilon,1-\varepsilon)$ соотношений

$$\langle q_n - q_m, z\rangle = \int_0^1 [q_n y_n - q_m y_m]\cdot\frac{z}{y_m}\,dx + \int_0^1 q_n y_n\cdot\frac{y_m - y_n}{y_n y_m}\cdot z\,dx$$

$$\leqslant \|q_n y_n - q_m y_m\|_\ell \cdot \left\| \frac{z' y_m - z y_m'}{y_m^2} \right\|_{L_2[0,1]} + \\ + L \cdot \|z'\|_{L_2[0,1]} \cdot \sup_{x\in[\varepsilon,1-\varepsilon]} \left| \frac{y_m(x) - y_n(x)}{y_n(x) y_m(x)} \right| \\ \leqslant \left(\|q_n y_n - q_m y_m\|_\ell \cdot \frac{\theta + \sqrt{M_{r,1}}}{\theta^2} + \right. \\ \left. + L\theta^{-2} \cdot \|y_n - y_m\|_{C[0,1]} \right) \cdot \|z'\|_{L_2[0,1]}.$$

Тем самым, последовательность $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ фундаментальна относительно полунормы 1 (1). Из 2.2 теперь немедленно вытекает справедливость следующего утверждения:

5.1. *Существует и однозначно определён потенциал* $\hat q \in \Gamma_r$*, удовлетворяющий равенству* $\lambda_0(\hat q) = M_{r,1}$*.*

Зафиксируем теперь произвольным образом отличную от тождественного нуля непрерывную финитную функцию $p \in A_r$ и рассмотрим параметризованное значениями $\varepsilon \in [0,1)$ семейство пучков $T_{q_\varepsilon}\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathfrak{D}_{\hat q}, \mathfrak{D}_{\hat q}^*)$, отвечающих потенциалам $q_\varepsilon \rightleftharpoons (1-\varepsilon)\,\hat q + \varepsilon p$. Для него при $\varepsilon \to +0$ справедлива асимптотика

$$\lambda_0(q_\varepsilon) = M_{r,1} + \varepsilon \cdot \langle p - \hat q, y_{\hat q}^2\rangle + o(\varepsilon),$$

где через $y_{\hat q} \in \mathfrak{D}_{\hat q}$ обозначена нормированная условием $\|y_{\hat q}\|_{L_2[0,1]} = 1$ собственная функция пучка $T_{\hat q}$, отвечающая собственному значению $M_{r,1}$. Это автоматически означает справедливость неравенства

$$\int_0^1 rp \cdot \frac{y_{\hat q}^2}{r}\, dx \leqslant \langle \hat q, y_{\hat q}^2\rangle,$$

а тогда, ввиду произвольности выбора функции p, и неравенства

$$\sup_{x\in(0,1)} \frac{y_{\hat q}^2(x)}{r(x)} \leqslant \langle \hat q, y_{\hat q}^2\rangle. \tag{3}$$

С другой стороны, всякий потенциал $\hat{q} \in \Gamma_r$ со свойством (3) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}
M_{r,1} - \lambda_0(\hat{q}) &\leqslant \sup_{q \in A_r} \left(\int_0^1 [\lambda_0(q) - \lambda_0(\hat{q})]\, y_{\hat{q}}^2 \, dx + \langle T_q(\lambda_0(q)) y_{\hat{q}}, y_{\hat{q}} \rangle \right) \\
&= \sup_{q \in A_r} \int_0^1 [(y_{\hat{q}}')^2 + (q - \lambda_0(\hat{q}))\, y_{\hat{q}}^2] \, dx \\
&\leqslant \int_0^1 [(y_{\hat{q}}')^2 - \lambda_0(\hat{q}) y_{\hat{q}}^2] \, dx + \sup_{x \in (0,1)} \frac{y_{\hat{q}}^2(x)}{r(x)} \cdot \sup_{q \in A_r} \int_0^1 rq \, dx \\
&\leqslant \int_0^1 [(y_{\hat{q}}')^2 - \lambda_0(\hat{q}) y_{\hat{q}}^2] \, dx + \langle \hat{q}, y_{\hat{q}}^2 \rangle \\
&= \langle T_{\hat{q}}(\lambda_0(\hat{q})) y_{\hat{q}}, y_{\hat{q}} \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

что означает выполнение равенства $\lambda_0(\hat{q}) = M_{r,1}$. При этом все неравенства внутри последней выкладки вырождаются в равенства, а потому равенствами оказываются также и оценки (3). Соответственно, справедливо следующее утверждение:

5.2. *Потенциал $\hat{q} \in \Gamma_r$ со свойством $\lambda_0(\hat{q}) = M_{r,1}$ характеризуется условием*

$$\sup_{x \in (0,1)} \frac{y_{\hat{q}}^2(x)}{r(x)} = \langle \hat{q}, y_{\hat{q}}^2 \rangle. \tag{4}$$

Соотношения $\hat{q} \in \Gamma_r$ и (4) означают, что функция $r^{-1} y_{\hat{q}}^2$ принимает своё максимальное значение почти всюду по мере $\hat{q}$. Тем самым, имеет место следующий факт:

5.3. *Никакая точка $\zeta \in (0,1)$ со свойством*

$$\frac{y_{\hat{q}}^2(\zeta)}{r(\zeta)} < \sup_{x \in (0,1)} \frac{y_{\hat{q}}^2(x)}{r(x)}$$

не принадлежит носителю меры $\hat{q}$.

6. Отметим в заключение, что доказательство утверждения 5.1 практически без изменений переносится на случай, когда вместо класса A_r рассматривается его выпуклое подмножество (ср., например, [[30]: Теорема 1]).

§ 2. Оценки собственных значений третьей граничной задачи для уравнения Штурма–Лиувилля

1. Рассмотрим граничную задачу

$$-y'' + (q - \lambda)y = 0, \tag{1}$$

$$y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0, \tag{2}$$

где $k_0 \geqslant 0$ и $k_1 \geqslant k_0$ — произвольно фиксированные вещественные параметры, а потенциал q пробегает один из классов $\pm A$, где положено

$$A \risingdotseq \left\{ q \in L_1[0,1] \;:\; (q \geqslant 0) \,\&\, \left(\int_0^1 q\,dx = 1 \right) \right\}.$$

Введём в рассмотрение четыре величины

$$M^{\pm} \risingdotseq \sup_{q \in \pm A} \lambda_0(q), \qquad m^{\pm} \risingdotseq \inf_{q \in \pm A} \lambda_0(q),$$

задающие точные априорные оценки наименьшего собственного значения граничной задачи (1), (2). Величина M^+ допускает следующее не связанное с привлечением обобщённых функций описание, принадлежащее Е. С. Карулиной:

1.1. [84: Theorem 1.3.1] *Положим*

$$\alpha_\mu \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{arctg} \frac{k_0^2}{\sqrt{\mu}}, \qquad \beta_\mu \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{arctg} \frac{k_1^2}{\sqrt{\mu}}. \tag{3}$$

Тогда величина M^+ представляет собой единственное решение уравнения

$$1 - \alpha_\mu - \beta_\mu = \mu^{-1}$$

и достигается на ступенчатом потенциале $\hat{q} \risingdotseq M^+\chi$, где символ χ обозначает индикатор отрезка $[\alpha_{M^+}, 1 - \beta_{M^+}]$.

Прочие три точные оценки, однако, приводят к необходимости рассмотрения потенциалов–обобщённых функций.

2. В настоящем пункте мы укажем ряд вспомогательных объектов, связанных с задачей Штурма–Лиувилля с потенциалами–обобщёнными функциями и используемых далее при формулировке и доказательстве основных результатов настоящего параграфа.

Во-первых, символом Γ мы намерены обозначать замыкание класса A в пространстве $W_2^{-1}[0,1]$. Несложным образом устанавливается, что класс $\Gamma \subseteq W_2^{-1}[0,1]$ составлен в точности неотрицательными обобщёнными функциями $q \in W_2^{-1}[0,1]$ со свойством $\langle q, 1\rangle = 1$, — или, что то же самое, обобщёнными плотностями заданных на отрезке $[0,1]$ вероятностных борелевских мер. При этом также справедливо следующее простое утверждение.

2.1. *Отображение $q \mapsto \lambda_0(q)$ непрерывно на каждом из классов $\pm\Gamma$.*

Действительно, для отвечающего граничной задаче 1 (1), 1 (2) линейного операторного пучка $T_q\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(W_2^1[0,1], W_2^{-1}[0,1])$ величина $1/[\lambda_0(q)+1]$ представляет собой наибольшее собственное значение вполне непрерывного оператора $-[T_q(-1)]^{-1}T_q'(-1)$, зависящего от потенциала $q \in W_2^{-1}[0,1]$ непрерывным в смысле равномерной операторной топологии образом. Отметим также, что используемая в работе [7] непрерывность отображения $q \mapsto \lambda_0(q)$ относительно слабой топологии в пространстве $L_1[0,1]$ представляет собой простое следствие указанного только что факта и полной непрерывности вложения пространства $L_1[0,1]$ в пространство $W_2^{-1}[0,1]$.

Во-вторых, мы будем использовать в проводимых рассуждениях числовую функцию $F\colon \operatorname{dom} F \to \mathbb{R}$, $\operatorname{dom} F \subseteq \mathbb{R} \times [0,1]$, неявно определённую условием

$$\lambda_0(F(\mu,\zeta)\boldsymbol{\delta}_\zeta) = \mu. \tag{1}$$

При этом имеют место следующие два факта.

2.2. *При любых значениях* $\mu \in \mathbb{R}$ *и* $\zeta \in [0,1]$ *уравнение* (1) *в случае своей разрешимости определяет величину* $F(\mu,\zeta)$ *однозначно.*

Доказательство. Независимо от выбора величин $a \in \mathbb{R}$, $b < a$ и $\zeta \in [0,1]$ найдётся [II. § 2.4.1] отвечающая собственному значению $\mu \rightleftharpoons \lambda_0(a\boldsymbol{\delta}_\zeta)$ положительная собственная функция $y \in \ker T_{a\boldsymbol{\delta}_\zeta}(\mu)$, которая будет удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned}\langle T_{b\boldsymbol{\delta}_\zeta}(\mu)y, y\rangle &= \langle T_{a\boldsymbol{\delta}_\zeta}(\mu)y, y\rangle + (b-a)\cdot y^2(\zeta)\\ &< 0,\end{aligned}$$

означающим выполнение неравенства $\lambda_0(b\boldsymbol{\delta}_\zeta) < \mu$. □

2.3. *Функция* F *строго возрастает по первому аргументу, непрерывна, а её область определения представляет собой подграфик*

$$\operatorname{dom} F = \{(\mu,\zeta) \in \mathbb{R}\times[0,1] \ : \ \mu < f(\zeta)\},$$

где $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *— некоторая положительная функция.*

Доказательство. Строгое возрастание функции F по первому аргументу установлено в ходе доказательства утверждения 2.2. Далее, для любой точки $(\mu_0,\zeta_0) \in \operatorname{dom} F$ найдутся две сколь угодно близких друг к другу величины $a^\pm$ со свойствами $a^- < F(\mu_0,\zeta_0) < a^+$. При этом для всякой точки $(\mu,\zeta) \in \mathbb{R}\times[0,1]$ из некоторой достаточно малой окрестности исходной точки (μ_0,ζ_0) будут выполняться неравенства $\lambda_0(a^-\boldsymbol{\delta}_\zeta) < \mu < \lambda_0(a^+\boldsymbol{\delta}_\zeta)$, означающие разрешимость уравнения (1) и справедливость соотношения $F(\mu,\zeta) \in (a^-,a^+)$. Не зависящие от выбора значений $a \in \mathbb{R}$ и $\zeta \in [0,1]$ равенства

$$\begin{aligned}\langle T_{a\boldsymbol{\delta}_\zeta}(a+k_0^2+k_1^2)1, 1\rangle &= a - (a+k_0^2+k_1^2) + k_0^2 + k_1^2\\ &= 0\end{aligned}$$

гарантируют справедливость оценки $\lambda_0(a\boldsymbol{\delta}_\zeta) \leqslant a + k_0^2 + k_1^2$, что означает неограниченность области определения функции $F(\cdot,\zeta)$ слева при любой фиксации параметра $\zeta \in [0,1]$. Учёт неравенств $\lambda_0(0\cdot\boldsymbol{\delta}_\zeta) \geqslant 0$ завершает доказательство [(1)]. □

3. Основными результатами настоящего параграфа выступают следующие три утверждения.

3.1. *В случае* $k_0^2 + k_1^2 \leqslant 1$ *величина* M^- *удовлетворяет равенству* $M^- = k_0^2 + k_1^2 - 1$ *и достигается на потенциале*

$$\hat{q} \rightleftharpoons -k_0^2 \boldsymbol{\delta}_0 - k_1^2 \boldsymbol{\delta}_1 - (1 - k_0^2 - k_1^2) \in -\Gamma.$$

В случае $k_0^2 + k_1^2 \geqslant 1$ *и* $k_1^2 - k_0^2 \leqslant 1$ *величина* M^- *представляет собой наименьшее собственное значение граничной задачи*

$$-y'' = \lambda y,$$
$$2y'(0) - [k_0^2 + k_1^2 - 1]\, y(0) = 2y'(1) + [k_0^2 + k_1^2 - 1]\, y(1) = 0$$

и достигается на потенциале

$$\hat{q} \rightleftharpoons -(1 + k_0^2 - k_1^2)\, \boldsymbol{\delta}_0/2 - (1 - k_0^2 + k_1^2)\, \boldsymbol{\delta}_1/2 \in -\Gamma.$$

В случае $k_1^2 - k_0^2 \geqslant 1$ *величина* M^- *представляет собой наименьшее собственное значение граничной задачи*

$$-y'' = \lambda y,$$
$$y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + (k_1^2 - 1) y(1) = 0$$

и достигается на потенциале

$$\hat{q} \rightleftharpoons -\boldsymbol{\delta}_1 \in -\Gamma.$$

Доказательство. Пусть некоторая положительная функция $y \in W_2^1[0,1]$ является отвечающей собственному значению $\lambda_0(\hat{q})$ собственной функцией пучка $T_{\hat{q}}$, причём носитель потенциала $\hat{q} \in -\Gamma$ сосредоточен внутри множества минимумов функции y. Тогда для любых потенциала $q \in -\Gamma$ и значения $\lambda > \lambda_0(\hat{q})$ будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned}\langle T_q(\lambda) y, y\rangle \leqslant \int_0^1 \left[|y'|^2 - \lambda\, |y|^2\right]\, dx - \\ - \inf_{x\in[0,1]} |y(x)|^2 + k_0^2\, |y(0)|^2 + k_1^2\, |y(1)|^2 \\ = \int_0^1 \left[|y'|^2 + (\hat{q} - \lambda)\, |y|^2\right]\, dx + k_0^2\, |y(0)|^2 + k_1^2\, |y(1)|^2 \\ < 0,\end{aligned}$$

означающие справедливость равенства $\lambda_0(\hat{q}) = M^-$. Таким образом, для установления справедливости доказываемого утверждения достаточно проверить, что указанные в формулировке утверждения потенциалы $\hat{q}$ обладают положительными собственными функциями, множества минимумов которых включают носитель соответствующего потенциала.

В случае $k_0^2 + k_1^2 \leqslant 1$ соответствующему потенциалу $\hat{q}$ отвечает пара из собственного значения $\lambda_0(\hat{q}) = k_0^2 + k_1^2 - 1$ и собственной функции $y \equiv 1$, множеством минимумов которой является весь отрезок $[0,1]$.

В случае $k_0^2 + k_1^2 \geqslant 1$ и $k_1^2 - k_0^2 \leqslant 1$ соответствующему потенциалу $\hat{q}$ отвечает собственная функция вида

$$y(x) \equiv \cos[\sqrt{\lambda_0(\hat{q})} \cdot (x - 1/2)],$$

множеством минимумов которой является двухточечное множество $\{0,1\}$.

В случае $k_1^2 - k_0^2 \geqslant 1$ соответствующему потенциалу $\hat{q}$ отвечает собственная функция вида

$$y(x) \equiv \cos[\sqrt{\lambda_0(\hat{q})} \cdot (x - \zeta)],$$

где параметр ζ удовлетворяет соотношению $\zeta \in [0,1/2]$ ввиду справедливости неравенства $k_1^2 - 1 \geqslant k_0^2$. Тем самым, единственная точка $x = 1$ носителя потенциала $\hat{q}$ является точкой минимума отвечающей ему собственной функции. $\square$

3.2. *Величина m^+ представляет собой наименьшее собственное значение граничной задачи*

$$-y'' = \lambda y,$$
$$y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + (k_1^2 + 1)y(1) = 0$$

и достигается на потенциале $\hat{q} \rightleftharpoons \boldsymbol{\delta}_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольный потенциал $q \in \Gamma$, а также произвольное значение $\lambda > \lambda_0(q)$. Пусть y — отвечающая собственному значению $\lambda_0(q)$ собственная функция пучка T_q. Тогда выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 0 > \int_0^1 \left[|y'|^2 + (q - \lambda)\,|y|^2\right]\,dx + k_0^2\,|y(0)|^2 + k_1^2\,|y(1)|^2 \\ \geqslant \int_0^1 \left[|y'|^2 - \lambda\,|y|^2\,\right]\,dx + \\ + \inf_{x\in[0,1]} |y(x)|^2 + k_0^2\,|y(0)|^2 + k_1^2\,|y(1)|^2, \end{aligned}$$

означающие возможность выбора точки $\zeta \in [0,1]$ со свойством

$$\int_0^1 \left[|y'|^2 + (\boldsymbol{\delta}_\zeta - \lambda)\,|y|^2\right]\,dx + k_0^2\,|y(0)|^2 + k_1^2\,|y(1)|^2 < 0.$$

Тем самым, независимо от выбора значения $\lambda > m^+$ найдётся точка $\zeta \in [0,1]$ со свойством $\lambda_0(\boldsymbol{\delta}_\zeta) < \lambda$. Иначе говоря, имеет место равенство $m^+ = \inf_{\zeta\in[0,1]} \lambda_0(\boldsymbol{\delta}_\zeta)$. Последнее, в свою очередь, равносильно [2 (1)] определённости значения $F(m^+,\zeta)$ при всех $\zeta \in [0,1]$ и выполнению равенства $\sup_{\zeta\in(0,1)} F(m^+,\zeta) = 1$.

Далее, согласно утверждению II. § 2.4.1 и регуляризациям из пункта II. § 1.6, для всякой принадлежащей области определения функции F пары значений $\mu \in \mathbb{R}$ и $\zeta \in (0,1)$ граничная задача

$$-y'' = \mu y \qquad \text{на } (0,\zeta)\cup(\zeta,1), \tag{1}$$

$$y'(\zeta+0) - y'(\zeta-0) = F(\mu,\zeta)y(\zeta), \tag{2}$$

$$y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0 \tag{3}$$

обладает непрерывным положительным решением. Используя обозначения 1 (3), на основе (1) и (3) немедленно устанавливаем, что с точностью до мультипликативной постоянной указанное решение имеет при $\mu > 0$ вид

$$y(x) = \begin{cases} \cos[\sqrt{\mu}\cdot(1-\beta_\mu-\zeta)]\cdot\cos[\sqrt{\mu}\cdot(x-\alpha_\mu)] & \text{при } x<\zeta, \\ \cos[\sqrt{\mu}\cdot(1-\beta_\mu-x)]\cdot\cos[\sqrt{\mu}\cdot(\zeta-\alpha_\mu)] & \text{при } x>\zeta. \end{cases}$$

Его знакоопределённость равносильна выполнению соотношений

$$\text{(4)} \qquad \sqrt{\mu}\cdot(\zeta-\alpha_\mu)\in(-\pi/2,\pi/2), \quad \sqrt{\mu}\cdot(1-\beta_\mu-\zeta)\in(-\pi/2,\pi/2).$$

Значения функции F при этом приобретают вытекающее из (2) представление

$$\text{(5)} \qquad F(\mu,\zeta)\equiv\sqrt{\mu}\cdot\left\{\mathrm{tg}[\sqrt{\mu}\cdot(\zeta-\alpha_\mu)]+\mathrm{tg}[\sqrt{\mu}\cdot(1-\beta_\mu-\zeta)]\right\}.$$

Объединяя сказанное, устанавливаем, что при $\mu=m^+$ независимо от выбора значения $\zeta\in(0,1)$ выполняются соотношения (4). При этом тождество

$$\text{(6)} \qquad \frac{\partial F(\mu,\zeta)}{\partial\zeta}\equiv\mu\cdot\frac{\cos^2[\sqrt{\mu}\cdot(1-\beta_\mu-\zeta)]-\cos^2[\sqrt{\mu}\cdot(\zeta-\alpha_\mu)]}{\cos^2[\sqrt{\mu}\cdot(\zeta-\alpha_\mu)]\,\cos^2[\sqrt{\mu}\cdot(1-\beta_\mu-\zeta)]} \qquad [(5)]$$

означает, что локальный экстремум $\zeta\in(0,1)$ функции $F(\mu,\cdot)$, удовлетворяющий условию $F(\mu,\zeta)>0$, возможен лишь [(5), (4)] в случае выполнения соотношений

$$\zeta>\alpha_\mu, \qquad \zeta<1-\beta_\mu, \qquad \zeta=(1-\beta_\mu+\alpha_\mu)/2.$$

Тем самым, такой экстремум является [(6)] строгим минимумом. Последнее автоматически означает справедливость равенства $m^+ = \inf\{\lambda_0(\boldsymbol{\delta}_0),\lambda_0(\boldsymbol{\delta}_1)\}$. Учёт получаемых прямым вычислением равенств

$$\frac{\lambda_0(\boldsymbol{\delta}_i)-k_0^2k_1^2-k_{1-i}^2}{k_0^2+k_1^2+1}=\sqrt{\lambda_0(\boldsymbol{\delta}_i)}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{\lambda_0(\boldsymbol{\delta}_i)},$$

где $i\in\{0,1\}$, завершает доказательство. $\square$

3.3. *В случае, когда для некоторых значений $\mu \geqslant -k_0^4$ и $\zeta \in (0,1)$ существует непрерывное положительное решение граничной задачи*

$$-y'' = \mu y \qquad \text{на } (0,\zeta) \cup (\zeta,1), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} y'(0) - k_0^2 y(0) = 2y'(\zeta - 0) - y(\zeta) = \\ = 2y'(\zeta + 0) + y(\zeta) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

величина m^- удовлетворяет равенству $m^- = \mu$ и достигается на потенциале $\hat{q} \rightleftharpoons -\boldsymbol{\delta}_\zeta$. В противном случае она является наименьшим собственным значением граничной задачи

$$-y'' = \lambda y,$$
$$y'(0) - (k_0^2 - 1)y(0) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0$$

и достигается на потенциале $\hat{q} \rightleftharpoons -\boldsymbol{\delta}_0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный потенциал $q \in -\Gamma$, а также произвольное значение $\lambda > \lambda_0(q)$. Пусть y — отвечающая собственному значению $\lambda_0(q)$ собственная функция пучка T_q. Тогда выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 0 &> \int_0^1 \left[|y'|^2 + (q - \lambda)\,|y|^2\right]\,dx + k_0^2\,|y(0)|^2 + k_1^2\,|y(1)|^2 \\ &\geqslant \int_0^1 \left[|y'|^2 - \lambda\,|y|^2\,\right]\,dx - \\ &\qquad - \sup_{x\in[0,1]} |y(x)|^2 + k_0^2\,|y(0)|^2 + k_1^2\,|y(1)|^2, \end{aligned}$$

означающие возможность выбора точки $\zeta \in [0,1]$ со свойством

$$\int_0^1 \left[|y'|^2 + (-\boldsymbol{\delta}_\zeta - \lambda)\,|y|^2\right]\,dx + k_0^2\,|y(0)|^2 + k_1^2\,|y(1)|^2 < 0.$$

Тем самым, независимо от выбора значения $\lambda > m^-$ найдётся точка $\zeta \in [0,1]$ со свойством $\lambda_0(-\boldsymbol{\delta}_\zeta) < \lambda$. Иначе говоря, имеет место равенство

$$m^- = \inf_{\zeta\in[0,1]} \lambda_0(-\boldsymbol{\delta}_\zeta), \tag{9}$$

а потому [2.3] и равенство $\sup_{\zeta\in[0,1]} F(m^-,\zeta) = -1$.

Исследуем возможные точки $\zeta \in (0,1)$ локального экстремума функций $F(\mu,\cdot)$, удовлетворяющие условию $F(\mu,\zeta) < 0$. При этом, помимо справедливых в случае $\mu > 0$ соотношений (5) и (6), мы будем опираться на тождество

$$F(0,\zeta) \equiv -\frac{k_0^2}{1+k_0^2\zeta} - \frac{k_1^2}{1+k_1^2(1-\zeta)}, \tag{10}$$

а также справедливое при $\mu < 0$ тождество

$$F(\mu,\zeta) \equiv -\sqrt{|\mu|}\cdot\{G(\sqrt{|\mu|},k_0^2,\zeta) + G(\sqrt{|\mu|},k_1^2,1-\zeta)\}, \tag{11}$$

где положено

$$G(\nu,\varkappa,x) \rightleftharpoons \begin{cases} \operatorname{th}\left(\nu x + \ln\sqrt{\dfrac{\nu+\varkappa}{\nu-\varkappa}}\right) & \text{при } \nu > \varkappa, \\ 1 & \text{при } \nu = \varkappa, \\ \operatorname{cth}\left(\nu x + \ln\sqrt{\dfrac{\varkappa+\nu}{\varkappa-\nu}}\right) & \text{при } \nu < \varkappa. \end{cases}$$

Пусть $\mu > 0$. Тогда произвольная $\zeta \in (0,1)$ является стационарной точкой функции $F(\mu,\cdot)$, удовлетворяющей условию $F(\mu,\zeta) < 0$, в том и только том случае [(6), (5), (2)], когда существует непрерывное положительное решение граничной задачи

$$-y'' = \mu y \qquad \text{на } (0,\zeta)\cup(\zeta,1), \tag{12}$$

$$y'(0) - k_0^2 y(0) = 2y'(\zeta-0) + F(\mu,\zeta)y(\zeta) = \tag{13}$$

$$= 2y'(\zeta+0) - F(\mu,\zeta)y(\zeta) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0.$$

При этом выполняются соотношения $\zeta < \alpha_\mu$ и $\zeta > 1-\beta_\mu$, означающие [(6), (4)], что рассматриваемая стационарная точка является строгим максимумом. Наконец, справедливость при всяком выборе точки $x \in [0,1]$ неравенств

$$-\pi/2 < -\sqrt{\mu}\alpha_\mu \leqslant \sqrt{\mu}\cdot(x-\alpha_\mu) < \sqrt{\mu}\cdot(x-1+\beta_\mu) \leqslant \sqrt{\mu}\beta_\mu < \pi/2$$

гарантирует [(4)] определённость функции $F(\mu,\cdot)$ на всём отрезке $[0,1]$.

Пусть $\mu = 0$. Тогда произвольная $\zeta \in (0,1)$ является стационарной точкой функции $F(\mu,\cdot)$, удовлетворяющей условию $F(\mu,\zeta) < 0$, также в том и только том случае [(10), (2)], когда существует непрерывное положительное решение граничной задачи (12), (13). Тот факт, что эта стационарная точка является строгим максимумом, немедленно вытекает из отрицательности второй производной функции (10).

Пусть $\mu \in (-k_0^4, 0)$. Тогда справедливо [(11)] тождество

$$\frac{\partial F(\mu,\zeta)}{\partial\zeta} \equiv -\mu\left\{\operatorname{sh}^{-2}\left(\sqrt{|\mu|}\zeta + \alpha_\mu\right) - \operatorname{sh}^{-2}\left(\sqrt{|\mu|}(1-\zeta) + \beta_\mu\right)\right\},$$

где положено

$$\alpha_\mu \rightleftharpoons \frac{1}{2}\ln\frac{k_0^2 + \sqrt{|\mu|}}{k_0^2 - \sqrt{|\mu|}}, \qquad \beta_\mu \rightleftharpoons \frac{1}{2}\ln\frac{k_1^2 + \sqrt{|\mu|}}{k_1^2 - \sqrt{|\mu|}}.$$

Соответственно, произвольная $\zeta \in (0,1)$ является стационарной точкой функции $F(\mu,\cdot)$, удовлетворяющей условию $F(\mu,\zeta) < 0$, в том и только том случае [(11), (2)], когда существует непрерывное положительное решение граничной задачи (12), (13). Отрицательность второй производной функции $F(\mu,\cdot)$ означает при этом, что рассматриваемая стационарная точка является строгим максимумом.

Пусть $0 > \mu = -k_0^4 = -k_1^4$. Тогда функция $F(\mu,\cdot)$ постоянна, и любая точка $\zeta \in (0,1)$ допускает непрерывное положительное решение граничной задачи (12), (13).

Пусть $\mu \in [-k_1^4, -k_0^4]$, причём $\mu < 0$ и $k_1 > k_0$. Тогда производная функции $F(\mu,\cdot)$ отрицательна [(11)], а граничная задача (12), (13) не имеет непрерывных положительных решений ни при каком значении $\zeta \in (0,1)$.

Пусть $\mu < -k_1^4$. Тогда справедливо [(11)] тождество

$$\frac{\partial F(\mu,\zeta)}{\partial\zeta} \equiv \mu\left\{\operatorname{ch}^{-2}\left(\sqrt{|\mu|}\zeta + \alpha_\mu\right) - \operatorname{ch}^{-2}\left(\sqrt{|\mu|}(1-\zeta) + \beta_\mu\right)\right\},$$

где положено

$$\alpha_\mu \rightleftharpoons \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{|\mu|} + k_0^2}{\sqrt{|\mu|} - k_0^2}, \qquad \beta_\mu \rightleftharpoons \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{|\mu|} + k_1^2}{\sqrt{|\mu|} - k_1^2}.$$

Соответственно, произвольная $\zeta \in (0,1)$ является стационарной точкой функции $F(\mu,\cdot)$, удовлетворяющей условию $F(\mu,\zeta) < 0$, в том и только том случае [(11), (2)], когда существует непрерывное положительное решение граничной задачи (12), (13). Положительность второй производной функции $F(\mu,\cdot)$ означает при этом, что рассматриваемая стационарная точка является строгим минимумом.

Объединяя сказанное, устанавливаем, что наличие непрерывного положительного решения граничной задачи (7), (8) при некоторых $\mu \geqslant -k_0^4$ и $\zeta \in (0,1)$ гарантирует выполнение равенства $F(\mu,\zeta) = -1$, определённость [2.3] функции $F(\mu,\cdot)$ на всём отрезке $[0,1]$ и невозможность для этой функции принять превосходящее -1 значение. Аналогичным образом, невозможность построения указанного решения означает выполнение равенства $m^- = \inf\{\lambda_0(-\boldsymbol{\delta}_0), \lambda_0(-\boldsymbol{\delta}_1)\}$. Учёт получаемых прямым вычислением равенств

$$\lambda_0(-\boldsymbol{\delta}_i) - k_0^2k_1^2 + k_{1-i}^2 = (k_0^2 + k_1^2 - 1)\cdot\psi(\lambda_0(-\boldsymbol{\delta}_i)),$$

где $i \in \{0,1\}$ и положено

$$\psi(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \sqrt{x}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{x} & \text{при } x > 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \\ \sqrt{|x|}\,\mathrm{cth}\,\sqrt{|x|} & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

завершает доказательство. □

Следует отметить, что равенства вида (9) были переоткрыты в ряде позднейших работ (см., например, [94, 96]).

4. В заключение параграфа сделаем некоторое замечание относительно разрешимости фигурирующей в формулировке утверждения 3.3 граничной задачи 3 (7), 3 (8). Пусть $\mu_0(\zeta)$, где $\zeta \in (0,1]$, есть наименьшее собственное значение граничной задачи

$$-y'' = \lambda y, \tag{1}$$

$$y'(0) - k_0^2 y(0) = 2y'(\zeta) - y(\zeta) = 0, \tag{2}$$

а $\mu_1(\zeta)$, где $\zeta \in [0,1)$ — наименьшее собственное значение граничной задачи

$$-y'' = \lambda y,$$
$$2y'(\zeta) + y(\zeta) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0.$$

Очевидным образом, пара величин $\mu \in \mathbb{R}$ и $\zeta \in (0,1)$ удовлетворяет соотношениям 3 (7), 3 (8) в том и только том случае, когда выполнены равенства $\mu_0(\zeta) = \mu_1(\zeta) = \mu$.

4.1. *В случае $k_0^2 = 1/2$ справедливо тождество $\mu_0(\zeta) \equiv -1/4$.*

В случае $k_0^2 > 1/2$ функция μ_0 строго убывает и удовлетворяет соотношениям $\lim_{\zeta\to 0}\mu_0(\zeta) = +\infty$ и $\mu_0(1) > -1/4$.

В случае $k_0^2 < 1/2$ при всех $\zeta \in (0,1]$ выполняется неравенство $\mu_0(\zeta) < -1/4$.

Доказательство. В случае $k_0^2 = 1/2$ независимо от выбора значения $\zeta \in (0,1)$ задача (1), (2) обладает отвечающей собственному значению $-1/4$ положительной собственной функцией вида $y(x) \equiv e^{x/2}$.

В случае $k_0^2 > 1/2$ из очевидного факта возрастания собственных значений граничных задач (1), (2) при увеличении параметра k_0^2 немедленно вытекают неравенства $\mu_0(\zeta) > -1/4$. Далее, пусть $y \in W_2^1[0,\zeta]$ есть отвечающая собственному значению $\mu_0(\zeta)$ собственная функция задачи (1), (2). Продолжая её при произвольно фиксированном $\theta \in (\zeta, 1]$ на полуинтервал $(\zeta,\theta]$ в виде $y(x) \rightleftharpoons y(\zeta)e^{(x-\zeta)/2}$, устанавливаем для полученной таким образом функции $y \in W_2^1[0,\theta]$ соотношения

$$\begin{aligned}\int_0^\theta \left[(y')^2 - \mu_0(\zeta)\, y^2\right]\, dx + k_0^2\, y^2(0) - \frac{y^2(\theta)}{2} = \\ &= [-1/4 - \mu_0(\zeta)]\cdot[e^{\theta-\zeta} - 1]\cdot y^2(\zeta) \\ &< 0,\end{aligned}$$

означающие справедливость неравенства $\mu_0(\theta) < \mu_0(\zeta)$. Наконец, при $\zeta \to 0$ справедливы равномерные по $y \in W_2^1[0,\zeta]$ асимптотические оценки

$$\int_0^\zeta (y')^2\, dx + k_0^2\, y^2(0) - \frac{y^2(\zeta)}{2} =$$

$$= 2\int_0^\zeta \frac{(y')^2}{2}\,dx + (k_0^2 - 1/2)\,y^2(0) + \frac{y^2(0) - y^2(\zeta)}{2}$$
$$\geqslant \frac{k_0^2 - 1/2 + o(1)}{\zeta}\int_0^\zeta y^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\zeta y^2\,dx,$$

влекущие оценку $\mu_0(\zeta) \geqslant [k_0^2 - 1/2 + o(1)] \cdot \zeta^{-1}$.

Случай $k_0^2 < 1/2$ рассматривается аналогично случаю $k_0^2 > 1/2$. $\square$

4.2. *В случае* $k_1^2 = 1/2$ *справедливо тождество* $\mu_1(\zeta) \equiv -1/4$.

В случае $k_1^2 > 1/2$ *функция* μ_1 *строго возрастает и удовлетворяет соотношениям* $\lim_{\zeta\to 1}\mu_1(\zeta) = +\infty$ *и* $\mu_1(0) > -1/4$.

В случае $k_1^2 < 1/2$ *при всех* $\zeta \in [0,1)$ *выполняется неравенство* $\mu_1(\zeta) < -1/4$.

Утверждение 4.2 доказывается полностью аналогичным утверждению 4.1 образом. Объединяя эти два утверждения, легко устанавливаем, что удовлетворяющие соотношениям 3 (7), 3 (8) величины $\mu \geqslant -k_0^4$ и $\zeta \in (0,1)$ существуют в точности тогда, когда выполнено хотя бы одно из соотношений $k_0^2 > 1/2$ или $k_0^2 = k_1^2 = 1/2$.

§ 3. Оценки оператора Штурма–Лиувилля на геометрическом графе

1. *Геометрическим графом* мы далее будем называть совокупность Γ из множества $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{i\}\times[0,\ell_i]$ и конечного (возможно, пустого) списка «склеивающих» точки этого множества равенств вида $(i,x_i) = (j,x_j)$, где $i,j \in 1\,..\,n$, $x_i \in \{0,\ell_i\}$ и $x_j \in \{0,\ell_j\}$. Без существенного ограничения общности рассмотрения мы также будем предполагать выполненным равенство $\sum_{i=1}^n \ell_i = 1$.

Для любой (частично определённой) функции $y\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ через y_i мы далее будем обозначать соответствующие отображения $y_i\colon [0,\ell_i] \to \mathbb{R}$ вида $y_i(x) \equiv y(i,x)$.

Под суммируемой функцией, определённой почти всюду на Γ, естественным образом понимается частичное отображение $y\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее соотношениям $y_i \in L_1[0,\ell_i]$. Интегралом такой функции считается при этом величина

$$\int_\Gamma y\,dx \rightleftharpoons \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} y_i\,dx.$$

Под $W_2^1(\Gamma)$ мы далее будем понимать пространство непрерывных функций $y\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношениям $y_i \in W_2^1[0,\ell_i]$. Норма функции $y \in W_2^1(\Gamma)$ определяется при этом равенством

$$\|y\|^2_{W_2^1(\Gamma)} = \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} \left(|y_i'|^2 + |y_i|^2\right) dx.$$

В случае, когда $\mathfrak{b}$ есть некоторый список вершин графа Γ, через $W_2^1(\Gamma,\mathfrak{b})$ мы будем обозначать подпространство в $W_2^1(\Gamma)$, выделенное условием $y|_{\mathfrak{b}} = 0$.

Под $W_2^{-1}(\Gamma,\mathfrak{b})$ мы далее будем понимать пополнение пространства $L_2(\Gamma)$ по норме

$$\|y\|_{W_2^{-1}(\Gamma,\mathfrak{b})} \rightleftharpoons \sup_{\|z\|_{W_2^1(\Gamma,\mathfrak{b})}=1} \int_\Gamma yz\,dx.$$

Через $\langle y,z\rangle$, где $y = \lim_{n\to\infty} y_n \in W_2^{-1}(\Gamma,\mathfrak{b})$, $y_n \in L_2(\Gamma)$ и $z \in W_2^1(\Gamma,\mathfrak{b})$, при этом будет обозначаться предел последовательности интегралов $\int_\Gamma y_n z\,dx$. Несложно видеть, что введённое указанным образом пространство $W_2^{-1}(\Gamma,\mathfrak{b})$ с точностью до очевидной изометрии совпадает с сопряжённым к пространству $W_2^1(\Gamma,\mathfrak{b})$ гильбертовым пространством полулинейных функционалов.

2. Рассмотрим семейство $P(\Gamma,\mathfrak{b})$ непрерывных функций $y\colon\Gamma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $y|_{\mathfrak{b}} = 0$ и таких, что каждая из функций $y_i \in C[0,\ell_i]$ кусочно-линейна. Имеет место следующий простой факт.

2.1. *Множество $P(\Gamma,\mathfrak{b})$ плотно в пространстве $W_2^1(\Gamma,\mathfrak{b})$.*

Далее, обозначим для произвольно фиксированной функции $y \in P(\Gamma,\mathfrak{b})$ через $\{\zeta_k\}_{k=0}^m$ упорядоченный по возрастанию набор её значений в точках её излома (включая в число таковых вершины графа Γ). Независимо от выбора индекса $k \in 1\,..\,m$ полный прообраз интервала $\Lambda_k \rightleftharpoons (\zeta_{k-1}, \zeta_k)$ допускает представление

$$y^{-1}(\Lambda_k) = \bigsqcup_{l=1}^{s_k} \{i_{k,l}\} \times (\alpha_{k,l}, \beta_{k,l}),$$

в котором каждый из интервалов $(\alpha_{k,l}, \beta_{k,l})$ линейно отображается соответствующей функцией $y_{i_{k,l}}$ на интервал Λ_k. Тем самым, равноизмеримая с y неубывающая функция $Y \in L_1[0,1]$ непрерывна и кусочно-линейна, а также удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}
\inf s_k^2 \times \int_0^1 |Y'|^2\,dx &= \inf s_k^2 \times \sum_{k=1}^{m} \frac{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}{\sum_{l=1}^{s_k} (\beta_{k,l} - \alpha_{k,l})} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{s_k} \frac{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}{\beta_{k,l} - \alpha_{k,l}} \\
&= \int_\Gamma |y'|^2\,dx.
\end{aligned}$$

При этом в случае выполнения условия

(1) *«каждое ребро графа Γ может быть включено в бесповторную цепь рёбер, связывающую некоторые вершины из списка $\mathfrak{b}$»*

заведомо справедлива оценка $\inf s_k \geqslant 2$.

Условие (1) было использовано также при формулировке теоремы [29: Теорема 1].

3. Далее всегда будет предполагаться, что граф Γ связен, а список $\mathfrak{b}$ непуст. Следуя обычной для настоящей диссертации методологии главы II, свяжем с формальной граничной задачей

$$-y'' = \lambda r y,$$

$$y|_{\mathfrak{b}} = 0,$$

где $r \in W_2^{-1}(\Gamma)$ — некоторая неотрицательная обобщённая функция, линейный операторный пучок $L\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(W_2^1(\Gamma, \mathfrak{b}), W_2^{-1}(\Gamma, \mathfrak{b}))$ вида

$$\langle L(\lambda)y, y\rangle \equiv \int_\Gamma |y'|^2\, dx - \lambda\langle r, y^2\rangle.$$

Согласно результатам предыдущего пункта, независимо от выбора функции $y \in P(\Gamma, \mathfrak{b})$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\langle L(\lambda)y, y\rangle &\geqslant \int_\Gamma \left[|y'|^2 - \lambda y^2\right] dx - \lambda m \cdot \sup_{x\in\Gamma} y^2(x)\\ &\geqslant \int_0^1 \left[\theta^2\, |Y'|^2 - \lambda Y^2\right] dx - \lambda m \cdot \sup\{Y^2(0),\, Y^2(1)\},\end{aligned} \tag{1}$$

где $\theta = 1$ в общем случае и $\theta = 2$ в случае выполнения условия 2 (1). С учётом утверждения 2.1 и заведомого существования точки $a \in [0, 1]$ со свойством $Y(a) = 0$, это означает неотрицательность оператора $L(\lambda)$ в случае, когда величина $\lambda \in \mathbb{R}$ минорирует наименьшие собственные значения всех граничных задач вида

$$-\theta^2 y'' = \lambda(1 + m\boldsymbol{\delta}_0)y,$$
$$y'(0) = y(a) = 0, \quad a \in (0, 1],$$

а также всех граничных задач вида

$$-\theta^2 y'' = \lambda(1 + m\boldsymbol{\delta}_1)y,$$
$$y(a) = y'(1) = 0, \quad a \in [0, 1).$$

Переписывая первые из указанных задач в эквивалентной форме

$$-\theta^2 y'' = \lambda y,$$
$$y'(0) + \frac{\lambda m}{\theta^2}\, y(0) = y(a) = 0, \quad a \in (0, 1],$$

а вторые — в эквивалентной форме

$$-\theta^2 y'' = \lambda y,$$
$$y(a) = y'(1) - \frac{\lambda m}{\theta^2}\, y(1) = 0, \quad a \in [0, 1),$$

легко устанавливаем, что операторы $L(\lambda)$ неотрицательны при всех $\lambda \leqslant \lambda_0$, где через λ_0 обозначено решение уравнения

$$\sqrt{\lambda}/\theta = \operatorname{arcctg}\left(m\sqrt{\lambda}/\theta\right). \tag{2}$$

Тем самым, имеет место следующий факт.

3.1. *Наименьшее собственное значение пучка L с весом $r = 1 + m\rho$, где $m \geqslant 0$, а $\rho \in W_2^{-1}(\Gamma)$ неотрицательна и удовлетворяет равенству $\langle \rho, 1 \rangle = 1$, минорируется решением уравнения (2).*

Утверждение 3.1 представляет собой уточнение и обобщение установленной в [29: п. 5] для $\rho \in W_2^{-1}(\Gamma)$ некоторого специального вида оценки наименьшего собственного значения пучка L величиной $\pi^2\theta^2 \cdot (2 + 2m)^{-2}$.

4. Аналогичные проведённым в предыдущем пункте рассуждения позволяют оценить снизу также второе собственное значение пучка L. А именно, заметим, что никакое двумерное подпространство линейного множества $P(\Gamma, \mathfrak{b})$ не может не содержать нетривиальной функции y со свойством $\sup_{x\in\Gamma} y(x) + \inf_{x\in\Gamma} y(x) = 0$. При этом равноизмеримая с функцией $y \in P(\Gamma, \mathfrak{b})$ неубывающая функция $Y \in W_2^1[0, 1]$ удовлетворяет равенству $Y(0) + Y(1) = 0$. Вместе с соотношениями 3 (1) и утверждением 2.1 это означает, что квадратичная форма оператора $L(\lambda)$ не может быть отрицательно определена на каком-либо двумерном подпространстве пространства $W_2^1(\Gamma, \mathfrak{b})$, если справедливо неравенство $\lambda \leqslant \lambda_0$, где через λ_0 обозначено наименьшее собственное значение граничной задачи

$$-\theta^2 y'' = \lambda(1 + m\boldsymbol{\delta}_1)y,$$
$$y(0) + y(1) = y'(0) + y'(1) = 0.$$

Тем самым, справедливо следующее утверждение.

4.1. *Второе собственное значение пучка L с весом $r = 1 + m\rho$, где $m \geqslant 0$, а $\rho \in W_2^{-1}(\Gamma)$ неотрицательна и удовлетворяет равенству $\langle \rho, 1 \rangle = 1$, минорируется решением уравнения*

$$\sqrt{\lambda}/[2\theta] = \operatorname{arcctg}\left(m\sqrt{\lambda}/[2\theta]\right).$$

Глава IV

ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С АФФИННО САМОПОДОБНЫМИ ВЕСАМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО ПОРЯДКА

Основной целью последних трёх глав настоящей диссертации является изучение асимптотических свойств спектра граничной задачи

$$-y'' - \lambda\rho y = 0,$$
$$y(0) = y(1) = 0,$$

где весовая обобщённая функция $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ представляет собой обобщённую производную *самоподобной* функции $P \in L_2[0,1]$. Точные определения соответствующих понятий будут даны нами далее. В случае знакоопределённости веса — иначе говоря, в случае, когда вес представляет собой плотность некоторой заданной на отрезке $[0,1]$ борелевской меры — данная задача хорошо известна и является в некотором роде классической. В частности, оценка порядка спектральной асимптотики для случая, когда вес $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ представляет собой плотность канторовской меры — или, что то же самое, когда первообразная $P \in L_2[0,1]$ представляет собой канторову лестницу, — была установлена уже в работе [101]. Применение к рассматриваемой задаче метода теории восстановления [68, 92] — в настоящее время стандартного метода исследования спектральных задач, связанных с самоподобными объектами — было применительно к случаю произвольной возрастающей самоподобной функции $P \in C[0,1]$ осуществлено в работе [98], и позволило установить для считающей функции $\mathcal{N}\colon (0+\infty) \to \mathbb{N}$ собственных значений рассматриваемой задачи асимптотику

$$\mathcal{N}(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln\lambda) + o(1)] \qquad \text{при } \lambda \to +\infty. \tag{1}$$

Здесь s — некоторая полунепрерывная периодическая функция, а D — некоторое неотрицательное вещественное число (мы не приводим аккуратную формулировку соответствующих результатов, поскольку они будут сформулированы в несколько большей общности и точности далее). Результаты работы [98] были повторены также в ряде позднейших публикаций (см., например, [80]). Основные направления, по которым осуществляется нами развитие теории задач Штурма–Лиувилля с самоподобным весом, состоят в следующем:

1°. Включение в рассмотрение случая, когда весовая функция индефинитна и имеет разрывную первообразную.

2°. Установление факта двусторонней — а не только односторонней, как это имеет место в работах [98, 80] — непрерывности фигурирующей в асимптотической формуле (1) функции s.

3°. Установление факта непостоянности функции s для некоторого достаточно широкого класса весов.

4°. Включение в рассмотрение случая дискретности весовой обобщённой функции.

Пункт 1° связан, главным образом, с переходом от формулирования задачи в терминах так называемых *самоподобных мер* к её формулированию в терминах *самоподобных измеримых функций*. Методология исследования остаётся при этом в основном неизменной. Основным отличием выступает лишь необходимость использования в ряде случаев двумерных теорем восстановления вместо одномерных.

Пункт 2° связан с использованием более точных, чем в работах [98, 80], теорем восстановления — а именно, теорем, содержащих оценку остаточного слагаемого. Отметим, что факт двусторонней непрерывности коэффициентной функции в случае знакоопределённого веса был установлен — в том числе применительно к не рассматриваемым нами здесь задачам высших порядков — также в написанной одновременно с работами [20, 21], на которых основывается наше изложение материала, работе [49].

Исследования, связанные с пунктом 3°, применительно к конкретным весовым функциям могут проводиться путём комбинирования устанавливаемых нами оценок остатка асимптотики (1) с экспериментально определяемыми оценками собственных значений. Примеры такого рода будут указаны в заключительной части настоящей главы. Полностью же теоретическое установление соответствующих фактов требует выхода за рамки метода теории восстановления. Изложению соответствующей конструкции будет посвящена отдельная глава VI.

Пункт 4° примыкает к пункту 1°, поскольку с необходимостью требует рассмотрения разрывной первообразной веса. Он, однако, выделен нами в отдельное направление исследований, поскольку также требует выхода за рамки метода теории восстановления. Разработке этого направления будет посвящена глава V.

§ 1. Теоремы восстановления

1. Целью настоящего параграфа является формулировка в удобной для наших дальнейших целей форме теорем восстановления с оценкой остаточного слагаемого. Ввиду хрестоматийного характера соответствующей теории, мы не претендуем на полную оригинальность излагаемого в настоящем параграфе материала. Центральную часть этого материала составляют следующие пять фактов.

1.1. *Пусть набор положительных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ удовлетворяет равенству*

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = 1.$$

Пусть также набор положительных чисел $\{l_k\}_{k=1}^N$ линейно независим над полем $\mathbb{Q}$. Наконец, пусть непрерывная на $\mathbb{R}$ функция X удовлетворяет при $t \to \pm\infty$ условию

$$X(t) = o(t^{-2}).$$

Тогда существует и единственна непрерывная на $\mathbb{R}$ функция Z, удовлетворяющая уравнениям

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad Z(t) = X(t) + \sum_{k=1}^{N} u_k\, Z(t - l_k),$$
$$\lim_{t\to-\infty} Z(t) = 0.$$

При этом функция Z подчиняется соотношению

$$\lim_{t\to+\infty} Z(t) = \frac{1}{J}\int_{-\infty}^{+\infty} X\,dx,$$

где через J обозначена величина $J \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{N} u_k\, l_k$.

1.2. *Пусть наборы неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ и $\{v_k\}_{k=1}^N$ удовлетворяют соотношениям*

$$(\forall k \in 1\,..\,N) \qquad u_k + v_k > 0,$$
$$\sum_{k=1}^{N} v_k > 0,$$
$$\sum_{k=1}^{N}(u_k + v_k) = 1. \tag{1}$$

Пусть также набор положительных чисел $\{l_k\}_{k=1}^N$ линейно независим над полем $\mathbb{Q}$. Наконец, пусть непрерывные на $\mathbb{R}$ функции X_j, где $j \in \{1,2\}$, удовлетворяют при $t \to \pm\infty$ условиям

$$X_j(t) = o(t^{-2}). \tag{2}$$

Тогда существует и единственна пара непрерывных на $\mathbb{R}$ функций Z_j, где $j \in \{1,2\}$, удовлетворяющая уравнениям

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad Z_j(t) = X_j(t) + \sum_{k=1}^{N}(u_k\, Z_j(t - l_k) + v_k\, Z_{3-j}(t - l_k)), \tag{3}$$
$$\lim_{t\to-\infty} Z_j(t) = 0. \tag{4}$$

При этом функции Z_j подчиняются соотношениям

$$\lim_{t\to+\infty} Z_j(t) = \frac{1}{2J}\int_{-\infty}^{+\infty}(X_1 + X_2)\,dx, \tag{5}$$

где через J обозначена величина $J \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{N}(u_k + v_k)\, l_k$.

1.3. *Пусть фиксировано произвольное положительное вещественное число τ. Пусть также набор неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ удовлетворяет равенству*

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = 1,$$

причём наибольший общий делитель индексов k, для которых справедливо неравенство $u_k > 0$, равен 1. Наконец, пусть непрерывная на $\mathbb{R}$ функция X удовлетворяет условиям

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \qquad |X(t)| \leqslant \Pi\, e^{-\tau t},$$
$$(\forall t \in \mathbb{R}^-) \qquad X(t) = 0,$$

где $\Pi > 0$. Тогда существует и единственна непрерывная на $\mathbb{R}$ функция Z, удовлетворяющая уравнениям

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \qquad Z(t) = X(t) + \sum_{k=1}^{N} u_k\, Z(t-k),$$
$$(\forall t \in \mathbb{R}^-) \qquad Z(t) = 0.$$

При этом для функции Z справедлива оценка

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \qquad |Z(t) - s(t)| \leqslant \Pi \cdot C(t),$$

где исчезающая на бесконечности функция C не зависит от выбора функции X, а непрерывная 1-периодическая функция s имеет вид

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad s(t) = \frac{1}{J} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(t-k).$$

Через J здесь обозначена величина $J \eqqcolon \sum_{k=1}^{N} k u_k$.

1.4. *Пусть фиксировано произвольное положительное вещественное число τ. Пусть наборы неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ и $\{v_k\}_{k=1}^N$ удовлетворяют равенствам*

$$\sum_{k=1}^N (u_k + v_k) = 1, \qquad \sum_{k=1}^N v_k > 0,$$

причём наибольший общий делитель индексов k, для которых справедливо неравенство $u_k + v_k > 0$, равен 1. Пусть также найдётся либо нечётное $k \leqslant N$ со свойством $u_k > 0$, либо чётное $k \leqslant N$ со свойством $v_k > 0$. Наконец, пусть непрерывные на $\mathbb{R}$ функции X_j, где $j \in \{1,2\}$, удовлетворяют условиям

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \qquad |X_j(t)| \leqslant \Pi_j \, e^{-\tau t},$$
$$(\forall t \in \mathbb{R}^-) \qquad X_j(t) = 0.$$

Здесь Π_j, где $j \in \{1,2\}$, — положительные числа. Тогда существует и единственна пара непрерывных на $\mathbb{R}$ функций Z_j, где $j \in \{1,2\}$, удовлетворяющая уравнениям

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \qquad Z_j(t) = X_j(t) + \sum_{k=1}^N (u_k \, Z_j(t-k) + v_k \, Z_{3-j}(t-k)),$$
$$(\forall t \in \mathbb{R}^-) \qquad Z_j(t) = 0.$$

При этом для функций Z_j, где $j \in \{1,2\}$, справедливы оценки

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \qquad |Z_j(t) - s(t)| \leqslant (\Pi_1 + \Pi_2) \cdot C(t),$$

где исчезающая на бесконечности функция C не зависит от выбора функций X_j, где $j \in \{1,2\}$, а непрерывная 1-периодическая функция s имеет вид

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad s(t) = \frac{1}{2J} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(X_1(t-k) + X_2(t-k)\right).$$

Через J здесь обозначена величина $J \rightleftharpoons \sum_{k=1}^N k\,(u_k + v_k)$.

1.5. *Пусть фиксировано произвольное положительное вещественное число τ. Пусть наборы неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ и $\{v_k\}_{k=1}^N$ удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{k=1}^{N}(u_k + v_k) = 1, \qquad \sum_{k=1}^{N} v_k > 0,$$

причём наибольший общий делитель номеров k, для которых справедливо неравенство $u_k + v_k > 0$, равен 1. Пусть также при любом нечётном $k \leqslant N$ справедливо равенство $u_k = 0$, а при любом чётном $k \leqslant N$ справедливо равенство $v_k = 0$. Наконец, пусть непрерывные на $\mathbb{R}$ функции X_j, где $j \in \{1,2\}$, удовлетворяют условиям

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \qquad |X_j(t)| \leqslant \Pi_j \, e^{-\tau t},$$
$$(\forall t \in \mathbb{R}^-) \qquad X_j(t) = 0.$$

Здесь Π_j, где $j \in \{1,2\}$, — положительные числа. Тогда существует и единственна пара непрерывных на $\mathbb{R}$ функций Z_j, где $j \in \{1,2\}$, удовлетворяющая уравнениям

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \qquad Z_j(t) = X_j(t) + \sum_{k=1}^{N}(u_k \, Z_j(t-k) + v_k \, Z_{3-j}(t-k)),$$
$$(\forall t \in \mathbb{R}^-) \qquad Z_j(t) = 0.$$

При этом для функций Z_j, где $j \in \{1,2\}$, справедливы оценки

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \qquad |Z_j(t) - s(t-j+1)| \leqslant (\Pi_1 + \Pi_2) \cdot C(t),$$

где исчезающая на бесконечности функция C не зависит от выбора функций X_j, а непрерывная 2-периодическая функция s имеет вид

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad s(t) = \frac{1}{J} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(X_1(t-2k) + X_2(t-2k-1)\right).$$

Через J здесь обозначена величина $J \eqqcolon \sum_{k=1}^{N} k\,(u_k + v_k)$.

2. Введём в рассмотрение банаховы пространства $\ell_{1,r}$, где $r \in \mathbb{R}^+$, элементами которых являются последовательности $\theta = \{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$, ограниченные по норме

$$\|\theta\|_{\ell_{1,r}} \rightleftharpoons \sum_{k=0}^{\infty} r^k |\theta_k|.$$

Произвольному элементу $\theta \in \ell_{1,r}$ можно сопоставить определённую на круге $\{w \ : \ |w| < r\}$ аналитическую функцию Θ вида

$$\Theta(w) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k w^k.$$

В дальнейшем функцию Θ мы будем называть *производящей функцией* вектора θ.

2.1. *Пусть фиксированы произвольные $r < 1$ и $R > 1$. Пусть также набор неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^{N}$ удовлетворяет равенству*

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = 1,$$

причём наибольший общий делитель номеров k, для которых справедливо неравенство $u_k > 0$, равен 1. Тогда для любого $x \in \ell_{1,R}$ существует и единственно решение $z \in \ell_{1,r}$ системы

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad z_n = x_n + \sum_{k=1}^{\min(N,n)} u_k z_{n-k}.$$

При этом члены последовательности z удовлетворяют оценке

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \left| z_n - \frac{\omega}{J} \right| \leqslant \|x\|_{\ell_{1,R}} \cdot C_n,$$

где бесконечно малая последовательность $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ не зависит от выбора вектора x, а величины ω и J определены равенствами

$$\omega \rightleftharpoons \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \qquad J \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{N} k u_k.$$

Для доказательства утверждения 2.1 достаточно воспроизвести, с незначительными изменениями, рассуждения из доказательства утверждения [92: Lemma A.1]. Аналогичные рассуждения будут проведены далее при доказательстве утверждений 2.2 и 2.3.

2.2. *Пусть фиксированы произвольные $r<1$ и $R>1$. Пусть наборы неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ и $\{v_k\}_{k=1}^N$ удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{k=1}^{N}(u_k+v_k)=1, \qquad \sum_{k=1}^{N}v_k>0,$$

причём наибольший общий делитель номеров k, для которых справедливо неравенство $u_k+v_k>0$, равен 1. Пусть также найдётся либо нечётное $k\leqslant N$ со свойством $u_k>0$, либо чётное $k\leqslant N$ со свойством $v_k>0$. Тогда для любых $x_j\in\ell_{1,R}$, где $j\in\{1,2\}$, существует и единственна пара $z_j\in\ell_{1,r}$ решений системы

$$(\forall n\in\mathbb{N}) \quad z_{j,n}=x_{j,n}+\sum_{k=1}^{\min(N,n)}(u_k z_{j,n-k}+v_k z_{3-j,n-k}), \quad j\in\{1,2\}.$$

При этом члены последовательностей z_j, где $j\in\{1,2\}$, удовлетворяют оценке

$$(1) \qquad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad \left|z_{j,n}-\frac{\omega}{J}\right|\leqslant(\|x_1\|_{\ell_{1,R}}+\|x_2\|_{\ell_{1,R}})\cdot C_n, \quad j\in\{1,2\},$$

где бесконечно малая последовательность $\{C_k\}_{k=0}^\infty$ не зависит от выбора векторов x_j, а величины ω и J определены равенствами

$$(2) \qquad \omega \rightleftharpoons \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(x_{1,k}+x_{2,k}),$$

$$(3) \qquad J \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{N}k(u_k+v_k).$$

2.3. *Пусть фиксированы произвольные $r<1$ и $R>1$. Пусть наборы неотрицательных чисел $\{u_k\}_{k=1}^N$ и $\{v_k\}_{k=1}^N$ удовлетворяют соотношениям*

$$\sum_{k=1}^{N}(u_k+v_k)=1, \qquad \sum_{k=1}^{N}v_k>0,$$

причём наибольший общий делитель номеров k, для которых справедливо неравенство $u_k+v_k>0$, равен 1. Пусть также при любом нечётном $k\leqslant N$ справедливо равенство $u_k=0$, а при любом чётном $k\leqslant N$

справедливо равенство $v_k = 0$. Тогда для любых $x_j \in \ell_{1,R}$, где $j \in \{1,2\}$, существует и единственна пара $z_j \in \ell_{1,r}$ решений системы

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z_{j,n} = x_{j,n} + \sum_{k=1}^{\min(N,n)} (u_k z_{j,n-k} + v_k z_{3-j,n-k}), \quad j \in \{1,2\}.$$

При этом члены последовательностей z_j, где $j \in \{1,2\}$, удовлетворяют оценке

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \left| z_{j,n} - \frac{\omega - (-1)^{n+j}\chi}{J} \right| \leqslant (\|x_1\|_{\ell_{1,R}} + \|x_2\|_{\ell_{1,R}}) \cdot C_n, \ j \in \{1,2\},$$

где бесконечно малая последовательность $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ не зависит от выбора векторов x_j, а величины ω, χ и J определены равенствами

$$\omega \rightleftharpoons \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(x_{1,k} + x_{2,k}), \quad \chi \rightleftharpoons \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x_{1,k} - x_{2,k}),$$

$$J \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{N} k(u_k + v_k).$$

Доказательство утверждения 2.2. Обозначим через U и V многочлены вида

$$U(w) \equiv \sum_{k=1}^{N} u_k w^k, \qquad V(w) \equiv \sum_{k=1}^{N} v_k w^k.$$

Из условий доказываемого утверждения вытекает, что многочлен $1 - U - V$ имеет в круге $\{w \ : \ |w| \leqslant 1\}$ единственный, причём простой, нуль $w = 1$. Тем самым, рассматриваемый многочлен может быть представлен в виде $(1-w)\cdot Q(w)$, где Q есть многочлен вида

$$Q(w) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=n+1}^{N} (u_k + v_k) \right) w^n.$$

В свою очередь, Q может быть представлен в виде $(1-w)\cdot P(w) + J$, где P есть некоторый многочлен, а постоянная $J = Q(1)$ определена равенством (3).

Из условий доказываемого утверждения вытекает также, что при любом w, удовлетворяющем неравенству $|w| \leqslant 1$, справедливо неравенство

$$|U(w) - V(w)| < 1.$$

Объединяя этот факт со сказанным ранее, получаем, что при некотором $\hat{R} \in (1, R)$ круг $\{w \ : \ |w| < \hat{R}\}$ свободен от нулей многочленов Q и $1-U+V$.

Далее, производящие функции X_j и Z_j, где $j \in \{1, 2\}$, векторов x_j и z_j должны подчиняться равенствам

$$Z_j = X_j + UZ_j + VZ_{3-j}, \qquad j \in \{1, 2\},$$

из которых немедленно вытекают равенства

$$Z_j = \frac{X_1 + X_2}{2(1 - U - V)} + \frac{X_j - X_{3-j}}{2(1 - U + V)}, \qquad j \in \{1, 2\}. \tag{4}$$

Последние равенства гарантируют факт существования и единственности пары решений z_j, где $j \in \{1, 2\}$.

Равенства (4) гарантируют также, что при любом w из области определения функций Z_j справедливы равенства

$$Z_j(w) = \frac{X_1(1) + X_2(1)}{2J(1 - w)} + \left[\frac{(X_1(w) - X_1(1)) + (X_2(w) - X_2(1))}{2J(1 - w)} - \right.$$
$$\left. - \frac{P(w) \cdot (X_1(w) + X_2(w))}{2JQ(w)} + \frac{X_j(w) - X_{3-j}(w)}{2(1 - U(w) + V(w))}\right].$$

Слагаемое из правой части, заключённое в квадратные скобки, представляет собой аналитическую функцию в круге $\{w \ : \ |w| < \hat{R}\}$. Применяя к этой функции неравенства Коши, убеждаемся, что её коэффициенты Маклорена c_k, где $k \in \mathbb{N}$, подчиняются оценке

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad |c_k| \leqslant C_k(\|x_1\|_{\ell_{1,R}} + \|x_2\|_{\ell_{1,R}}),$$

где бесконечно малая последовательность $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ не зависит от выбора векторов x_j. Поскольку коэффициенты Маклорена функции

$$\frac{X_1(1) + X_2(1)}{2J(1 - w)}$$

тождественно равны ω/J, где постоянная ω определена равенством (2), то тем самым оценки (1) справедливы. $\square$

Доказательство утверждения 2.3. Для доказательства данного утверждения достаточно повторить, с незначительными изменениями, рассуждения из доказательства утверждения 2.2. Основное отличие состоит в том, что производящие функции Z_j, где $j \in \{1,2\}$, имеют в рассматриваемом случае не одну особенность на границе единичного круга (в точке $w = 1$), а две (в точках $w = \pm 1$). Учёт дополнительной особенности легко проводится, если принять во внимание, что при выполнении условий доказываемого утверждения справедливо тождество

$$(\forall w \in \mathbb{C}) \qquad (1 - U + V)(w) = (1 - U - V)(-w).$$

Данное тождество позволяет разложить значения многочлена $(1 - U + V)(w)$ на множители $1 + w$ и $Q(-w)$. Это, в свою очередь, позволяет установить, что последовательности $\{z_{j,n}\}_{n=0}^{\infty}$ асимптотически эквивалентны последовательностям коэффициентов Маклорена функций

$$\frac{X_1(1) + X_2(1)}{2J(1 - w)} + \frac{X_j(-1) - X_{3-j}(-1)}{2J(1 + w)}.$$

Отсюда и вытекает справедливость доказываемого утверждения. $\square$

Доказательство утверждения 1.4. Зафиксируем произвольное значение $R \in (1, e^{\tau})$. Тогда при любом $t \in [0,1)$ последовательности $x_j(t) = \{x_{j,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, где $j \in \{1,2\}$, вида

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad x_{j,k}(t) = X_j(t + k), \qquad j \in \{1,2\},$$

принадлежат пространству $\ell_{1,R}$. При этом равномерно по $t \in [0,1)$ справедливы оценки

$$\|x_j(t)\|_{\ell_{1,R}} \leqslant \frac{\Pi_j}{1 - Re^{-\tau}}, \qquad j \in \{1,2\}.$$

Пусть теперь $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность из утверждения 2.2. Зафиксируем исчезающую на бесконечности непрерывную функцию C, удовлетворяющую условию

$$(\forall t \in \mathbb{R}^+) \qquad C(t) > \frac{C_{[t]}}{1 - Re^{-\tau}},$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t. Справедливость доказываемого утверждения теперь легко устанавливается применением утверждения 2.2 к последовательностям $z_j(t) = \{z_{j,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, где $j \in \{1, 2\}$, вида

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad z_{j,k}(t) = Z_j(t + k),$$

где $t \in [0, 1)$. □

Утвержения 1.3 и 1.5 доказываются аналогично утверждению 1.4 с тем отличием, что вместо утверждения 2.2 в рассуждениях используются утверждения 2.1 и 2.3, соответственно.

3. В настоящем пункте мы установим справедливость утверждений 1.1 и 1.2. Непосредственно будет проведено доказательство второго из них. Первое может быть доказано аналогичным образом. Следует также отметить, что для случая экспоненциального убывания функции X справедливость этого утверждения установлена в работе [[92]].

3.1. *Пусть непрерывные на $\mathbb{R}$ функции X_j, где $j \in \{1, 2\}$, неотрицательны, и пусть непрерывные на $\mathbb{R}$ функции Z_j, где $j \in \{1, 2\}$, удовлетворяют уравнениям 1 (3), 1 (4). Тогда функции Z_j также неотрицательны.*

Доказательство. Предположим, что при некоторых $t \in \mathbb{R}$, $m \in \{1, 2\}$ и $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $Z_m(t) < -\varepsilon$. Если бы при всех $k \in 1\,..\,N$ и $j \in \{1, 2\}$ были справедливы неравенства $Z_j(t - l_k) \geqslant -\varepsilon$, то, в силу равенства 1 (1) и неотрицательности функций X_j, из уравнения 1 (3) вытекало бы противоречащее сделанному предположению неравенство $Z_m(t) \geqslant -\varepsilon$. Следовательно, при некоторых $k \in 1\,..\,N$ и $j \in \{1, 2\}$ должно выполняться неравенство $Z_j(t - l_k) < -\varepsilon$. Положительность величин l_k приводит теперь к противоречию с уравнением 1 (4). □

3.2. *Существует число $C > 0$ со следующим свойством: для любых непрерывных на $\mathbb{R}$ функций X_j и Z_j, где $j \in \{1,2\}$, удовлетворяющих уравнениям 1 (3), 1 (4) и оценкам*

$$(1) \qquad (\forall t \in \mathbb{R}) \qquad |X_j(t)| \leqslant \frac{\Pi}{t^2+1},$$

где Π — произвольно фиксированное неотрицательное число, справедливы также оценки

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad |Z_j(t)| \leqslant C \cdot \Pi.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию η вида

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad \eta(t) = \sum_{k=1}^{N} (u_k + v_k) \cdot (\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(t - l_k)).$$

Эта функция положительна и имеет при $t \to \pm\infty$ асимптотику $\eta \asymp t^{-2}$. Если теперь положить $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2 \rightleftharpoons \eta$ и

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad \tilde{Z}_1(t) = \tilde{Z}_2(t) \rightleftharpoons \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(t),$$

то подстановка функций $\tilde{X}_j$ и $\tilde{Z}_j$ в уравнения 1 (3), 1 (4) вместо, соответственно, функций X_j и Z_j, будет давать верные равенства.

Далее, зафиксируем постоянную $C > 0$ со свойством

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad C \geqslant \frac{\pi}{\eta(t) \cdot (t^2+1)}.$$

Тогда для функций X_j, удовлетворяющих условию (1), будут выполняться неравенства

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad |X_j(t)| \leqslant \frac{C \cdot \Pi}{\pi} \, \eta(t).$$

Из утверждения 3.1 и сказанного выше теперь вытекают оценки

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad |Z_j(t)| \leqslant \frac{C \cdot \Pi}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(t) \right),$$

означающие справедливость доказываемого утверждения. □

3.3. *Пусть непрерывные на* $\mathbb{R}$ *функции* X_j, *где* $j \in \{1,2\}$, *удовлетворяют при* $t \to \pm\infty$ *условиям* 1 (2). *Тогда существует и единственна пара непрерывных на* $\mathbb{R}$ *функций* Z_j, *где* $j \in \{1,2\}$, *удовлетворяющая уравнениям* 1 (3), 1 (4).

Доказательство. Единственность искомой пары решений легко выводится из утверждения 3.1. Докажем существование этой пары.

Если функции X_j, где $j \in \{1,2\}$, тождественно равны нулю левее некоторой точки t_0, то соответствующие решения Z_j находятся тривиальным образом: левее t_0 они полагаются тождественно равными нулю, а правее t_0 их значения определяются из уравнений 1 (3). Заметим теперь, что если функции X_j подчиняются асимптотике 1 (2), то найдутся такие последовательности исчезающих в окрестности точки $-\infty$ функций $\{X_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$, что будут справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(|X_{j,n}(t) - X_j(t)| \cdot (t^2+1) \Big) = 0. \tag{2}$$

Из утверждения 3.2 теперь вытекает, что последовательности $\{Z_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$ решений задач

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad Z_{j,n}(t) = X_{j,n}(t) + \\ + \sum_{k=1}^{N} (u_k\, Z_{j,n}(t-l_k) + v_k\, Z_{3-j,n}(t-l_k)), \tag{3}$$

$$\lim_{t\to-\infty} Z_{j,n}(t) = 0 \tag{4}$$

равномерно на $\mathbb{R}$ сходятся к некоторым решениям Z_j задачи 1 (3), 1 (4). □

3.4. *Для любых вещественных чисел* ζ_j, *где* $j \in \{1,2\}$, *удовлетворяющих неравенству* $\zeta_1 + \zeta_2 \neq 0$, *найдутся такие финитные непрерывные функции* X_j, *где* $j \in \{1,2\}$, *что будут справедливы равенства*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_j\, dx = \zeta_j,$$

а соответствующие решения Z_j *задачи* 1 (3), 1 (4) *будут подчиняться асимптотике* 1 (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем непрерывную функцию Z_1, тождественно равную 0 в некоторой окрестности $-\infty$, и тождественно равную $(\zeta_1 + \zeta_2)/2J$ в некоторой окрестности $+\infty$. Зафиксируем также функцию Z_2 вида

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad Z_2(t) = Z_1(t - \tau),$$

где τ — произвольная вещественная постоянная. Сопоставленные функциям Z_j на основе уравнений 1 (3) функции X_j, очевидно, являются финитными. При этом, как проверяется непосредственно, имеют место равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_1\,dx = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} + \frac{\tau\,(\zeta_1 + \zeta_2)}{2J} \sum_{k=1}^{N} \upsilon_k,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X_2\,dx = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} - \frac{\tau\,(\zeta_1 + \zeta_2)}{2J} \sum_{k=1}^{N} \upsilon_k.$$

Таким образом, если выбрать

$$\tau \rightleftharpoons \frac{J \cdot (\zeta_1 - \zeta_2)}{(\zeta_1 + \zeta_2)\, \sum\limits_{k=1}^{N} \upsilon_k},$$

то будут выполнены все поставленные условия. □

3.5. *Пусть финитные функции $X_j \in C_0^2(\mathbb{R})$, где $j \in \{1, 2\}$, удовлетворяют условию*

(5) $$\int_{-\infty}^{+\infty} (X_1 + X_2)\,dx = 0.$$

Тогда решения Z_j уравнений 1 (3), 1 (4) подчиняются асимптотике

$$\lim_{t \to +\infty} Z_j(t) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функции X_j финитны, их фурье-образы $\hat{X}_j$ вида

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad \hat{X}_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\cdot} X_j\,dx$$

являются бесконечно дифференцируемыми. При этом, ввиду гладкости функций X_j, фурье-образы $\hat{X}_j$ и все их производные имеют в окрестности точек $\pm\infty$ асимптотику $O(t^{-2})$. Кроме того, из предположения (5) вытекает равенство $\hat{X}_1(0) + \hat{X}_2(0) = 0$.

Зафиксируем теперь произвольную функцию $\varphi \in C_0^3(\mathbb{R})$, тождественно равную 1 в некоторой окрестности точки 0, и рассмотрим последовательности функций $\{\hat{X}_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$ вида

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad \hat{X}_{j,n}(t) = \varphi(t/n) \cdot \hat{X}_j(t).$$

Как несложно показать, последовательности $\{\hat{X}_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\hat{X}''_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся в пространстве $L_1(\mathbb{R})$ к функциям $\hat{X}_j$ и $\hat{X}''_j$, соответственно. Тем самым, для фурье-прообразов $X_{j,n}$ функций $\hat{X}_{j,n}$ будут выполняться соотношения (2).

Далее, обозначим через U и V квазимногочлены вида

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad U(t) = \sum_{k=1}^{N} u_k e^{-il_k t}, \quad V(t) = \sum_{k=1}^{N} v_k e^{-il_k t}.$$

Ввиду линейной независимости величин $\{l_k\}_{k=1}^{N}$ над полем $\mathbb{Q}$, квазимногочлен $1 - U - V$ имеет на $\mathbb{R}$ единственный (причём простой) нуль в точке 0, а квазимногочлен $1 - U + V$ не имеет на $\mathbb{R}$ ни одного нуля.

Рассмотрим теперь последовательности $\{\hat{Z}_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$ финитных функций класса $C_0^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих системам уравнений

$$(1 - U - V)(\hat{Z}_{1,n} + \hat{Z}_{2,n}) = \hat{X}_{1,n} + \hat{X}_{2,n},$$
$$(1 - U + V)(\hat{Z}_{1,n} - \hat{Z}_{2,n}) = \hat{X}_{1,n} - \hat{X}_{2,n}.$$

Существование таких функций гарантировано характером гладкости функции φ и равенствами $\hat{X}_{1,n}(0) + \hat{X}_{2,n}(0) = 0$. Несложно заметить, что фурье-прообразы $Z_{j,n}$ функций $\hat{Z}_{j,n}$ будут удовлетворять уравнениям (3), (4). Из сказанного выше и утверждения 3.2 — применяемого отдельно к вещественным и мнимым частям функций $Z_{j,n}$ и $X_{j,n}$ — вытекает теперь, что последовательности $\{Z_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно на $\mathbb{R}$ сходятся к решениям уравнений 1 (3), 1 (4). Однако при всех $j \in \{1, 2\}$ и $n \geqslant 1$ заведомо выполняются равенства

$$\lim_{t \to +\infty} Z_{j,n}(t) = 0.$$

Тем самым, доказываемое утверждение справедливо. □

Доказательство утверждения 1.2. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Зафиксируем также числа ζ_j, где $j \in \{1, 2\}$, удовлетворяющие неравенствам $\zeta_1 + \zeta_2 \neq 0$ и

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} X_j \, dx - \zeta_j \right| < \varepsilon.$$

Поскольку функции X_j, где $j \in \{1, 2\}$, удовлетворяют асимптотике 1 (2), они допускают представление

$$X_j = X_j^0 + X_j^1 + X_j^2,$$

где слагаемые из правой части удовлетворяют следующим условиям:

1°. Функции $X_j^0 \in C_0^2(\mathbb{R})$ подчиняются равенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (X_1^0 + X_2^0) \, dx = 0.$$

2°. Функции X_j^1 сопоставлены величинам ζ_j на основе утверждения 3.4.

3°. Функции X_j^2 подчиняются оценкам

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad |X_j^2(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{t^2 + 1}.$$

Комбинируя утверждения 3.2, 3.4 и 3.5, устанавливаем, что для функций Z_j асимптотически при $t \to +\infty$ справедливы оценки

$$\left| Z_j - \frac{1}{2J} \int_{-\infty}^{+\infty} (X_1 + X_2) \, dx \right| \leqslant \varepsilon \cdot \left(C + \frac{1}{J} \right),$$

где постоянная C определена утверждением 3.2. Поскольку значение ε выбрано произвольным образом, то тем самым доказываемое утверждение справедливо. □

§ 2. Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$

1. Содержание настоящего параграфа, как и предыдущего, не относится к числу основных результатов настоящей диссертации, однако необходимо для понимания дальнейшего материала. Оно принадлежит, главным образом, И. А. Шейпаку, в соответствии с работами которого [20, 71] и излагается.

2. Пусть фиксировано натуральное число $N > 1$, и пусть вещественные числа $a_k > 0$, d_k и β_k, где $k \in 1\,..\,N$, таковы, что

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = 1.$$

Данному набору чисел можно поставить в соответствие непрерывный нелинейный оператор $G\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ вида

$$G(f) \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{n} \left\{\beta_k \cdot \chi_{(\alpha_k,\alpha_{k+1})} + d_k \cdot G_k(f)\right\}, \tag{1}$$

где использованы следующие обозначения:

1°. Символы α_k, где $k \in 0\,..\,N$, маркируют числа $\alpha_0 \rightleftharpoons 0$ и $\alpha_k \rightleftharpoons \sum_{l=1}^{k} a_l$, где $k \in 1\,..\,N$.

2°. Символ χ_Γ обозначает индикатор интервала Γ, рассматриваемый как элемент пространства $L_2[0,1]$.

3°. Символы G_k, где $k \in 1\,..\,N$, обозначают непрерывные линейные операторы в пространстве $L_2[0,1]$, действующие на индикатор $\chi_{(\zeta,\xi)}$ произвольного интервала $(\zeta,\xi) \subset [0,1]$ согласно правилу

$$G_k(\chi_{(\zeta,\xi)}) \rightleftharpoons \chi_{(\alpha_k + a_k\zeta,\, \alpha_k + a_k\xi)}, \qquad k \in 1\,..\,N. \tag{2}$$

Это правило, как нетрудно видеть, определяет операторы G_k однозначно.

Операторы G вида (1) будут далее называться *операторами подобия*.

2.1. *Оператор подобия G является сжимающим в том и только том случае, когда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \, |d_k|^2 < 1. \tag{3}$$

Доказательство. Заметим, что при любом выборе функций $f_1, f_2 \in L_2[0,1]$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
\|G(f_1) - G(f_2)\|^2_{L_2[0,1]} &= \int_0^1 |G(f_1) - G(f_2)|^2 \, dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(|d_k|^2 \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} |G_k(f_1) - G_k(f_2)|^2 \, dx \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \, |d_k|^2 \right) \int_0^1 |f_1 - f_2|^2 \, dx \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \, |d_k|^2 \right) \|f_1 - f_2\|^2_{L_2[0,1]}.
\end{aligned}$$

Из них немедленно вытекает доказываемое утверждение. □

Из утверждения 2.1 и принципа сжимающих отображений немедленно вытекает следующий факт.

2.2. *Если справедливо неравенство (3), то существует и единственна функция $f \in L_2[0,1]$, удовлетворяющая уравнению $G(f) = f$.*

В дальнейшем нами всегда будет предполагаться, что неравенство (3) выполнено.

3. Если функция $f \in L_2[0,1]$ удовлетворяет уравнению $G(f) = f$, где G — некоторый оператор подобия, то такая функция будет называться *самоподобной*. При этом величины N, a_k, d_k и β_k, где $k \in 1 \,..\, N$, определяющие соответствующий оператор подобия G, будут называться *параметрами самоподобия* функции f.

Следует заметить, что различные операторы подобия могут определять одну и ту же самоподобную функцию. В качестве простейшего примера здесь можно привести функцию f вида $f(x) \equiv x$, одновременно обладающую следующими наборами параметров самоподобия:

1°. $N = 2$, $a_1 = a_2 = d_1 = d_2 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1/2$;

2°. $N = 2$, $a_1 = d_1 = (3 - \sqrt{5})/2$, $a_2 = d_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = (3 - \sqrt{5})/2$;

3°. $N = 2$, $a_1 = d_1 = 1/3$, $a_2 = d_2 = 2/3$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1/3$.

Помимо указанных, та же функция обладает бесчисленным множеством других наборов параметров самоподобия.

Функция $f \in L_2[0,1]$, для которой найдутся такие параметры самоподобия, что при некотором $\nu > 0$ будет справедливо соотношение

$$(1) \qquad (\forall k \in 1\,..\,N)\ (\exists l_k \in \mathbb{N}) \qquad (a_k\,|d_k|) \cdot (a_k\,|d_k| - e^{-l_k\,\nu}) = 0,$$

будет называться *арифметически самоподобной* функцией. Если для некоторых параметров самоподобия число $\hat{\nu}$ является максимальным среди чисел ν со свойством (1), то такое число $\hat{\nu}$ будет называться *шагом* самоподобия функции f.

Функция $f \in L_2[0,1]$, для которой найдутся такие параметры самоподобия, что при любом $\nu > 0$ условие (1) будет нарушено, будет называться *неарифметически самоподобной* функцией.

Следует заметить, что одна и та же функция может иметь различные шаги самоподобия, и даже может быть арифметически и неарифметически самоподобной одновременно. Так, уже упомянутая выше самоподобная функция f вида $f(x) \equiv x$ является в одно и то же время арифметически самоподобной с шагом $\ln 4$, арифметически самоподобной с шагом $\ln 2 - \ln(3 - \sqrt{5})$, а также неарифметически самоподобной.

4. Особое место среди самоподобных функций занимают функции, для которых существуют наборы параметров самоподобия со следующими свойствами:

1°. Среди чисел d_k, где $k \in 1\,..\,N$, не менее двух отличны от нуля.

2°. Среди чисел β_k, где $k \in 1\,..\,N$, по меньшей мере одно отлично от нуля.

Такие самоподобные функции будут называться *самоподобными функциями положительного спектрального порядка*. Прочие самоподобные функции, соответственно, будут называться *самоподобными функциями нулевого спектрального порядка*.

4.1. *Пусть f — самоподобная функция, и пусть N, a_k и d_k, где $k \in 1\,..\,N$, — её параметры самоподобия. Пусть при этом среди чисел d_k не менее двух отличны от нуля. Тогда существует и единственно положительное решение D уравнения*

$$\sum_{k=1}^{N} (a_k\,|d_k|)^D = 1.$$

При этом $D < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим заданную на полупрямой $(0, +\infty)$ функцию Υ вида

$$\Upsilon(x) \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{N} (a_k\,|d_k|)^x\,.$$

Из легко получаемых на основе неравенства Коши–Буняковского соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} a_k\,|d_k| &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k\,|d_k|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot 1^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N} a_k\,|d_k|^2\right)^{1/2} \\ &< 1 \end{aligned} \tag{1}$$

следует, что эта функция является убывающей, причём для любого $x \geqslant 1$ справедливо неравенство $\Upsilon(x) < 1$. С другой стороны, из условий доказываемого утверждения вытекает, что при достаточно близких к левой границе области определения функции Υ значениях аргумента значения $\Upsilon(x)$ превосходят 1. $\square$

Устанавливаемые далее результаты о спектральных асимптотиках задач Штурма–Лиувилля с самоподобными весами показывают, что решение D уравнения (1) не зависит от выбора параметров самоподобия и, тем самым, характеризует самоподобную функцию как таковую. Такое решение, отвечающее самоподобной функции положительного спектрального порядка, будет далее называться *спектральным порядком* указанной функции.

Спектральным порядком самоподобной функции, не являющейся самоподобной функцией положительного спектрального порядка, будет по определению считаться число 0.

5. Отметим, что указанная в формулировке утверждения 4.1 оценка $D < 1$ является неулучшаемой. Действительно, рассмотрим параметризованное значениями $a \in (0, 1/3)$ семейство функций $P_a \in L_2[0,1]$ с параметрами самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_3 = a$, $a_2 = 1-2a$, $\delta_1 = \delta_3 = (2-5a)^{-1} \cdot (1-2a)$, $\delta_2 = -(2-5a)^{-1}\, a$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = (2-5a)^{-1} \cdot (1-2a)$, $\beta_3 = (2-5a)^{-1} \cdot (1-3a)$. Спектральные порядки таких самоподобных функций имеют вид

$$D_a = \frac{\ln 3}{\ln(2-5a) - \ln a - \ln(1-2a)},$$

предел каковых величин при $a \to 1/3 - 0$ равен в точности 1. Таким образом, порядок устанавливаемых ниже асимптотик § 3.2 (2) может — в индефинитном случае — превосходить порядок соответствующей асимптотики для задачи с постоянным весом (которому отвечает равенство $D = 1/2$).

§ 3. Спектральные асимптотики

1. Перейдём теперь к изучению спектральных свойств граничных задач

$$-y'' - \lambda\rho y = 0,$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

где $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ есть обобщённая производная некоторой самоподобной функции $P \in L_2[0,1]$. Согласно изложенной в главе II теории, операторной интерпретацией такой граничной задачи является линейный пучок $T_\rho\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1], \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1])$ ограниченных операторов, удовлетворяющий тождеству

$$\langle T_\rho(\lambda)y, z\rangle \equiv \int_0^1 y'\overline{z'}\,dx - \lambda \cdot \langle \rho, \overline{y}z\rangle,$$

или, что то же самое, тождеству

$$\langle T_\rho(\lambda)y, z\rangle \equiv \int_0^1 \bigl\{y'\overline{z'} + \lambda P \cdot (y'\overline{z} + y\overline{z'})\bigr\}\,dx. \tag{1}$$

Из (1) с очевидностью вытекает также справедливость тождества

$$\langle T_\rho(0)y, y\rangle \equiv \|y'\|^2_{L_2[0,1]}. \tag{2}$$

Напомним, что собственное значение $\lambda \in \mathbb{C}$ гладкого пучка $S\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ самосопряжённых операторов считается *собственным значением положительного типа*, если справедливо соотношение

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall y \in \ker S(\lambda)) \quad \langle S'(\lambda)y, y\rangle \geqslant \varepsilon\,\|y\|^2_{\mathfrak{H}}.$$

Соответственно, выполнение соотношения

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall y \in \ker S(\lambda)) \quad \langle S'(\lambda)y, y\rangle \leqslant -\varepsilon\,\|y\|^2_{\mathfrak{H}}$$

означает, что рассматриваемое собственное значение является *собственным значением отрицательного типа*.

Имеет место следующий простой факт.

1.1. *Спектр пучка T_ρ чисто дискретен, причём все его собственные значения являются простыми.*

Все собственные значения пучка T_ρ, расположенные левее нуля, имеют положительный тип, а все собственные значения пучка T_ρ, расположенные правее нуля, имеют отрицательный тип. Для любого значения $\lambda > 0$ число собственных значений пучка T_ρ, принадлежащих интервалу $(0,\lambda)$, совпадает с индексом инерции $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$ оператора $T_\rho(\lambda)$.

Аналогичным образом, для любого значения $\lambda < 0$ число собственных значений пучка T_ρ, принадлежащих интервалу $(\lambda, 0)$, совпадает с индексом инерции $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$ оператора $T_\rho(\lambda)$.

Доказательство. Производная $T'_\rho(0)$ пучка T_ρ представляет собой вполне непрерывный оператор. Поэтому к пучку T_ρ могут быть приложены результаты работы [88].

Тождество (2) означает, что пучок T_ρ является сильно дефинизируемым (см. [88: Theorem 1]). Доказываемые утверждения вытекают потому из утверждения [88: Proposition 6], теоремы [88: Theorem 1], тождества (2) и простого свойства

$$(\forall \lambda \in \mathbb{C}) \qquad \dim\ker T_\rho(\lambda) \leqslant 1,$$

обусловленного, в частности, регуляризациями из пункта II. § 1.6.

Отметим, что переформулировка доказываемых утверждений в терминах спектра вполне непрерывного оператора $[T_\rho(0)]^{-1} T'_\rho(0)$ позволяет легко установить их справедливость и без обращения к теории операторных пучков. $\square$

Утверждение 1.1 показывает, что знание асимптотического при $\lambda \to \pm\infty$ поведения индекса инерции операторов $T_\rho(\lambda)$ равносильно знанию асимптотического при $\lambda \to \pm\infty$ поведения собственных значений пучка T_ρ. Тем самым, устанавливаемые ниже утверждения о поведении величины $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$ легко могут быть переформулированы в утверждения о спектре пучка T_ρ.

2. Основными результатами настоящего параграфа являются следующие три факта.

2.1. *Пусть $P \in L_2[0,1]$ — арифметически самоподобная с шагом ν функция, имеющая положительный спектральный порядок D. Пусть при этом найдётся номер $k \in 1\,..\,N$, для которого выполнено одно из следующих условий:*

1°. Справедливо неравенство $d_k > 0$, а отношение

$$-\frac{\ln(a_k\,|d_k|)}{\nu} \tag{1}$$

нечётно.

2°. Справедливо неравенство $d_k < 0$, а отношение (1) чётно.

Тогда для пучка 1 (1) справедливы следующие утверждения.

1°. Существуют такие непрерывные неотрицательные 1-периодические функции $s_\pm$, что при $\lambda \to \pm\infty$ справедливы асимптотические представления

$$\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) = |\lambda|^D \cdot \left[s_\pm\left(\frac{\ln|\lambda|}{\nu}\right) + o(1)\right]. \tag{2}$$

2°. Если при некотором $k \in 1\,..\,N$ имеет место неравенство $d_k < 0$, то справедливо тождество

$$s_+(t) \equiv s_-(t). \tag{3}$$

3°. Если для некоторой функции $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ имеет место неравенство $\langle\rho, |y|^2\rangle > 0$, то функция s_+ положительна. Аналогично, если для некоторой функции $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ имеет место неравенство $\langle\rho, |y|^2\rangle < 0$, то функция s_- положительна.

2.2. *Пусть $P \in L_2[0,1]$ — арифметически самоподобная с шагом ν функция, имеющая положительный спектральный порядок D. Пусть при этом для любого номера $k \in 1\,..\,N$ со свойством $d_k > 0$ отношение (1) является чётным, а для любого номера $k \in 1\,..\,N$ со свойством $d_k < 0$ отношение (1) является нечётным. Тогда существует такая непрерывная положительная 2-периодическая функция s, что при $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое представление*

$$\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) = \lambda^D \cdot \left[s\left(\frac{\ln\lambda}{\nu}\right) + o(1)\right],$$

а при $\lambda \to -\infty$ справедливо асимптотическое представление

$$\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) = (-\lambda)^D \cdot \left[s\left(\frac{\ln|\lambda|}{\nu} - 1\right) + o(1)\right].$$

2.3. *Пусть $P \in L_2[0,1]$ — неарифметически самоподобная функция, имеющая положительный спектральный порядок D. Тогда для пучка 1 (1) справедливы следующие утверждения.*

1°. Существуют такие неотрицательные числа $s_\pm$, что при $\lambda \to \pm\infty$ справедливы асимптотические представления

$$\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) = |\lambda|^D \cdot [s_\pm + o(1)] .$$

2°. Если при некотором $k \in 1\,..\,N$ имеет место неравенство $d_k < 0$, то справедливо равенство $s_+ = s_-$.

3°. Если для некоторой функции $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ имеет место неравенство $\langle \rho, |y|^2 \rangle > 0$, то число s_+ положительно. Аналогично, если для некоторой функции $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ имеет место неравенство $\langle \rho, |y|^2 \rangle < 0$, то число s_- положительно.

Непосредственно нами будет доказано утверждение 2.1. Утверждения 2.2 и 2.3 могут быть доказаны аналогичным образом.

Доказательство утверждения 2.1 будет опираться на следующий вспомогательный факт.

2.4. *Пусть функция $P \in L_2[0,1]$ самоподобна, и пусть N, a_k и d_k, где $k \in 1\,..\,N$, — её параметры самоподобия. Тогда для операторного пучка 1 (1) справедливо соотношение*

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \qquad 0 \leqslant \operatorname{ind} T_\rho(\lambda) - \sum_{k=1}^{N} \operatorname{ind} T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda) \leqslant N - 1. \tag{4}$$

Доказательство. На всём протяжении доказательства мы будем предполагать зафиксированным некоторое значение $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{M}_k$, где $k \in 1\,..\,N$ — произвольные подпространства пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$, удовлетворяющие при некотором $\varepsilon > 0$ условиям

$$(\forall k \in 1\,..\,N)\ (\forall y \in \mathcal{M}_k) \qquad \langle T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda) y, y \rangle \leqslant -\varepsilon \, \|y'\|^2_{L_2[0,1]}. \tag{5}$$

Рассмотрим в пространстве $\mathring{W}_2^1[0,1]$ подпространство

$$\mathcal{M} \rightleftharpoons \bigoplus_{k=1}^{N} G_k(\mathcal{M}_k),$$

где G_k — операторы подобия, определённые формулой § 2.2 (2). Размерность подпространства $\mathcal{M}$, очевидно, представляет собой сумму размерностей подпространств $\mathcal{M}_k$. С другой стороны, для любого набора функций $y_k \in \mathcal{M}_k$, где $k \in 1\,..\,N$, и построенной по нему функции $y \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{N} G_k(y_k) \in \mathcal{M}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
\langle T_\rho(\lambda)y, y\rangle &= \sum_{k=1}^{N} \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} \left\{|y'|^2 + \lambda P\cdot(y'\overline{y} + y\overline{y'})\right\}\,dx && [1\,(1)]\\
&= \sum_{k=1}^{N} \int_0^1 \left\{a_k^{-1}|y_k'|^2 + d_k\cdot\lambda P\cdot(y_k'\overline{y_k} + y_k\overline{y_k'})\right\}\,dx\\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k^{-1}\langle T_\rho(a_k d_k\cdot\lambda)y_k, y_k\rangle && [1\,(1)]\\
&\leqslant -\varepsilon \sum_{k=1}^{N} a_k^{-1}\,\|y_k'\|^2_{L_2[0,1]} && [(5)]\\
&= -\varepsilon\,\|y'\|^2_{L_2[0,1]}.
\end{aligned}$$

Тем самым, подпространство $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию

$$(\forall y \in \mathcal{M}) \qquad \langle T_\rho(\lambda)y, y\rangle \leqslant -\varepsilon\,\|y'\|^2_{L_2[0,1]}. \tag{6}$$

Ввиду произвольности выбора подпространств $\mathcal{M}_k$, сказанное означает справедливость левого неравенства в соотношении (4)

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — подпространство пространства $\mathring{W}_2^1[0,1]$, удовлетворяющее при некотором $\varepsilon > 0$ условию (6). Пусть также $\mathcal{M}_k$, где $k \in 1\,..\,N$, — подпространства пространства $\mathring{W}_2^1[0,1]$, удовлетворяющие при некоторых $\varepsilon_k > 0$ условию

$$(\forall k \in 1\,..\,N)\ (\forall y \in \mathcal{M}_k) \qquad \langle T_\rho(a_k d_k\cdot\lambda)y, y\rangle \leqslant -\varepsilon_k\,\|y'\|^2_{L_2[0,1]}. \tag{7}$$

Через $\mathcal{M}_k^\perp$ в дальнейшем будут обозначаться подпространства вида

$$\mathcal{M}_k^\perp \rightleftharpoons \{y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1] \ : \ (\forall z \in \mathcal{M}_k) \quad \langle T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda) z, y\rangle = 0\},$$

где $k \in 1\,..\,N$.

Предположим, что справедливо неравенство

$$\dim \mathcal{M} - \sum_{k=1}^{N} \dim \mathcal{M}_k > N - 1. \tag{8}$$

Поскольку подпространство

$$\tilde{\mathcal{M}} \rightleftharpoons \bigoplus_{k=1}^{N} G_k(\mathcal{M}_k^\perp)$$

имеет в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ коразмерность $\sum_{k=1}^N \dim \mathcal{M}_k + N - 1$, то подпространство $\mathcal{M} \cap \tilde{\mathcal{M}}$ является тогда нетривиальным. Следовательно, найдётся такой набор функций $y_k \in \mathcal{M}_k^\perp$, где $k \in 1\,..\,N$, что для отвечающей ему функции $y = \sum_{k=1}^N G_k(y_k)$ будет справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{N} a_k^{-1} \langle T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda) y_k, y_k\rangle = \langle T_\rho(\lambda) y, y\rangle < 0.$$

Тем самым, при некотором $m \in 1\,..\,N$ будет справедливо неравенство $\langle T_\rho(a_m d_m \cdot \lambda) y_m, y_m\rangle < 0$. Но в этом случае, как легко проверить непосредственно, подпространство $\mathcal{M}'_m \rightleftharpoons \mathcal{M}_m \oplus \mathrm{Lin}\{y_m\}$ должно удовлетворять условию

$$(\forall y \in \mathcal{M}'_m) \qquad \langle T_\rho(a_m d_m \cdot \lambda) y, y\rangle \leqslant -\varepsilon'_m \, \|y'\|^2_{L_2[0,1]}$$

при некотором $\varepsilon'_m > 0$. Сказанное означает, что, отправляясь от набора подпространств $\mathcal{M}_k$, где $k \in 1\,..\,N$, удовлетворяющего условиям (7) и (8), всегда можно построить набор подпространств $\mathcal{M}'_k$, где $k \in 1\,..\,N$, удовлетворяющий при некоторых $\varepsilon'_k > 0$ условию

$$(\forall k \in 1\,..\,N)\ (\forall y \in \mathcal{M}'_k) \qquad \langle T_\rho(a_k d_k \cdot \lambda) y, y\rangle \leqslant -\varepsilon'_k \, \|y'\|^2_{L_2[0,1]},$$

а также условию

$$\sum_{k=1}^{N} \dim \mathcal{M}'_k > \sum_{k=1}^{N} \dim \mathcal{M}_k.$$

Отсюда автоматически вытекает справедливость правого неравенства в соотношении (4). $\square$

Утверждение 2.4 представляет собой обобщение формулы (18) из работы [98].

Доказательство утверждения 2.1*.* Введём в рассмотрение функции $\Lambda_{\pm,\varepsilon} \in C(\mathbb{R})$ вида

$$\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) \rightleftharpoons \varepsilon^{-1} e^{-D\nu t} \cdot \int_t^{t+\varepsilon} \operatorname{ind} T_\rho \left(\pm e^{\nu\zeta}\right) \, d\zeta, \tag{9}$$

где ε — произвольно фиксированная положительная постоянная. Из утверждения 2.4 следует, что имеют место неравенства

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad \Bigl|\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) - \sum_{d_k>0} (a_k\,|d_k|)^D \Lambda_{\pm,\varepsilon}(t - l_k) - \\ - \sum_{d_k<0} (a_k\,|d_k|)^D \Lambda_{\mp,\varepsilon}(t - l_k)\Bigr| \leqslant e^{-D\nu t} \cdot (N-1), \tag{10}$$

где числа l_k определены соотношением § 2.3 (1). Кроме того, очевидным образом найдутся такие значения $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon_0 > 0$, что будут справедливы тождества

$$(\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0))\ (\forall t \leqslant t_0) \qquad \Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) = 0.$$

Применяя теперь теоремы восстановления § 1.1.3 и § 1.1.4 к функциям $\tilde{\Lambda}_{\pm,\varepsilon}$ вида

$$\tilde{\Lambda}_{\pm,\varepsilon}(t) \rightleftharpoons \Lambda_{\pm,\varepsilon}(t - t_0),$$

находим, что при $t \to +\infty$ функции $\Lambda_{\pm,\varepsilon}$ равномерно по параметру $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ стремятся к непрерывным 1-периодическим функциям $s_{\pm,\varepsilon}$. При этом в случае, когда среди коэффициентов d_k имеются отрицательные, справедливо тождество

$$(\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0))\ (\forall t \in \mathbb{R}) \qquad s_{+,\varepsilon}(t) = s_{-,\varepsilon}(t).$$

Далее, зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Зафиксируем также натуральное число M, для которого справедливы оценки $e^{-D\nu M} < \delta/4$ и

$$(\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0))\ (\forall t \in [M, M+1)) \quad |\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) - s_{\pm,\varepsilon}(t)| < \delta/4. \tag{11}$$

Из утверждения 1.1 следует, что для некоторого $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ будут справедливо соотношение

$$(\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1))\ (\forall t \in [M, M+1)) \quad |e^{D\nu t}\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) - \operatorname{ind} T_\rho(\pm e^{\nu t})| \leqslant 1.$$

Отсюда немедленно вытекает соотношение

$$(\forall \varepsilon, \varepsilon' \in (0, \varepsilon_1))\ (\forall t \in [M, M+1)) \quad |\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) - \Lambda_{\pm,\varepsilon'}(t)| < \delta/2,$$

объединяя которые с оценками (11), убеждаемся в справедливости соотношения

$$(\forall \varepsilon, \varepsilon' \in (0, \varepsilon_1))\ (\forall t \in [M, M+1)) \quad |s_{\pm,\varepsilon}(t) - s_{\pm,\varepsilon'}(t)| < \delta.$$

Объединяя сказанное, устанавливаем, что при $\varepsilon \searrow 0$ функции $s_{\pm,\varepsilon}$ равномерно на $\mathbb{R}$ сходятся к некоторым 1-периодическим функциям $s_\pm$, для которых справедливы асимптотики (2). При этом в случае, когда среди величин d_k имеются отрицательные, справедливо тождество (3). Тем самым, справедливость первых двух пунктов доказываемого утверждения установлена.

Итак, для завершения доказательства остаётся показать справедливость третьего пункта. Мы ограничимся рассмотрением случая функции s_+ (случай функции s_- рассматривается полностью аналогично).

Рассмотрим сначала случай, когда все коэффициенты d_k неотрицательны.

Пусть некоторая функция $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ удовлетворяет неравенству $\langle \rho, |y|^2 \rangle > 0$. Тогда, согласно определению пучка T_ρ, при $\lambda \gg 0$ будет справедливо неравенство $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) > 0$. Согласно утверждению 1.1, это означает наличие собственных значений пучка T_ρ на положительной полупрямой. Обозначим через λ_0 наименьшее положительное собственное значение пучка T_ρ. Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ на полуинтервале $t \in [\ln \lambda_0/\nu, \ln \lambda_0/\nu + 1 - \varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\Lambda_{+,\varepsilon}(t) - \sum_{d_k > 0} (a_k\, |d_k|)^D \Lambda_{+,\varepsilon}(t - l_k) \geqslant e^{-D\nu}\, \lambda_0^{-1}.$$

Согласно утверждениям § 1.1.3 и 2.4 это означает, что функция s_+ должна подчиняться соотношению

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad s_+(t) \geqslant \frac{e^{-D\nu}}{J\lambda_0},$$

где положено

$$J \rightleftharpoons \sum_{d_k \neq 0} l_k \, (a_k \, |d_k|)^D. \tag{12}$$

Соответственно, в рассматриваемом случае функция s_+ положительна.

Пусть теперь среди величин d_k имеются отрицательные. Обозначим через λ_0 наименьшую из абсолютных величин собственных значений пучка T_ρ. Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ на полуинтервале $t \in [\ln \lambda_1/\nu, \ln \lambda_0/\nu + 1 - \varepsilon)$ будет выполняться по меньшей мере одно из двух неравенств

$$\Lambda_{\pm,\varepsilon}(t) - \sum_{d_k > 0} (a_k \, |d_k|)^D \Lambda_{\pm,\varepsilon}(t - l_k) - \\ - \sum_{d_k < 0} (a_k \, |d_k|)^D \Lambda_{\mp,\varepsilon}(t - l_k) \geqslant e^{-D\nu} \, \lambda_0^{-1}.$$

Согласно утверждениям § 1.1.4 и 2.4 это означает, что функция s_+ должна подчиняться соотношению

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad s_+(t) \geqslant \frac{e^{-D\nu}}{2J\lambda_0},$$

где величина J определена равенством (12). Соответственно, в рассматриваемом случае функция s_+ также положительна. Тем самым, третий пункт доказываемого утверждения также справедлив. □

§ 4. Вычисление собственных значений

1. Вопрос об эффективном вычислении собственных значений задач изучаемого в настоящей главе вида с использованием технических средств возникает естественным образом и ставился неоднократно. Так, вычислительным вопросам — относящимся, однако, к достаточно узкому подклассу рассматриваемых в настоящей главе задач — посвящена заметная часть работы [77]. Применительно к задаче с весом, представляющим собой обобщённую производную канторовой лестницы (или, что то же самое, обобщённую плотность канторовой меры), расчёт собственных значений производился, в частности, в работе [102], на основе какового расчёта некоторыми авторами (см., например, [79]) был сделан вывод о непостоянности функции s в рассматриваемом случае. Однако, строго говоря, расчёт из [102] не является достаточно обоснованным, а при приложении к его результатам стандартных критериев интерпретации — требующих, чтобы погрешность результата не превосходила порядка последней указанной цифры — должен быть даже признан ошибочным. Действительно, для третьего собственного значения задачи Неймана в указанной работе приведено значение $61,26$, в то время как реальное значение заключено между границами $61,34$ и $61,35$ (см. Таблицу 1 из VI. § 6).

Целью настоящего параграфа является изложение вычислительной методики, позволяющей с любой наперёд заданной точностью определять верхние и нижние оценки собственных значений задач рассматриваемого в настоящей главе типа. Изложение материала следует работе [10] и ограничивается случаем граничных условий Дирихле. Перенесение методики на случай прочих граничных условий, однако, не представляет существенных затруднений. То же самое следует сказать и о возможности её распространения на случай граничных задач четвёртого и более высоких порядков.

На всём протяжении настоящего параграфа в качестве заданного в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ скалярного произведения будет рассматриваться величина

$$\langle y, z\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]} \rightleftharpoons \int_0^1 y'\overline{z'}\,dx.$$

2. Утверждение § 3.1.1 означает, что при наличии в нашем распоряжении метода вычисления достаточно точных оценок индексов инерции операторов из пучка T_ρ мы можем вычислять оценки собственных значений этого пучка на основе метода деления отрезка. Сведѐние задачи об определении индекса инерции оператора $T_\rho(\lambda)$ к допускающему непосредственное решение с использованием вычислительной техники вопросу об индексе инерции некоторой самосопряжённой матрицы мы будем проводить на основе следующего элементарного факта.

2.1. *Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — два гильбертовых пространства, а $\mathfrak{H}$ — ортогональная прямая сумма $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$. Пусть также $L\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — ограниченный самосопряжённый оператор с блочным представлением*

$$L = \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & C \end{pmatrix},$$

в котором оператор $C\colon \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_2$ равномерно положителен. Тогда выполняется равенство

$$\operatorname{ind} L = \operatorname{ind}[A - B^*C^{-1}B].$$

Для доказательства последнего утверждения достаточно совместить факт справедливости вытекающего из факторизации Фробениуса–Шура тождества

$$\left\langle L\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right\rangle \equiv \left\langle L_0 F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right\rangle,$$

где положено

$$L_0 \rightleftharpoons \begin{pmatrix} A - B^*C^{-1}B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \qquad F \rightleftharpoons \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C^{-1}B & 1 \end{pmatrix},$$

с теми двумя тривиальными фактами, что оператор F ограниченно обратим, а оператор L_0 удовлетворяет равенству

$$\operatorname{ind} L_0 = \operatorname{ind}[A - B^*C^{-1}B] + \operatorname{ind} C.$$

3. С произвольно фиксированным набором параметров самоподобия $N > 1$, $a_k > 0$, d_k и β_k, где $k \in 1\,..\,N$, определяющим обобщённую первообразную $P \in L_2[0,1]$ весовой функции $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$, может быть связано $(N-1)$-мерное подпространство $\mathfrak{H}_1 \subseteq \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$, базис которого составляется из векторов $y_k \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$, где $k \in 1\,..\,N-1$, вида

$$y_k(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \dfrac{x-\alpha_{k-1}}{a_k} & \text{при } x \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k], \\ \dfrac{\alpha_{k+1}-x}{a_{k+1}} & \text{при } x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Через $\mathfrak{H}_2$ мы при этом будем обозначать ортогональное дополнение подпространства $\mathfrak{H}_1$. Справедливо следующее несложное утверждение.

3.1. *Подпространство $\mathfrak{H}_2$ допускает представление*

$$\mathfrak{H}_2 = \{y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1] \ : \ (\forall k \in 1\,..\,N-1) \quad y(\alpha_k) = 0\}.$$

Обозначим теперь через $J\colon \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1] \to \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ изометрию

$$\langle Jy, z\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]} \equiv \langle y, z\rangle,$$

и введём в рассмотрение три линейных операторных пучка $A\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_1)$, $B\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ и $C\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_2)$, независимо от выбора значения $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяющих равенству

$$JT_\rho(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B^*(\lambda) \\ B(\lambda) & C(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Имеет место следующий факт.

3.2. *Пусть даны два вещественных числа $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих неравенствам $\varepsilon \geqslant 2\|B(\lambda)\|^2$ и $\|C(\lambda) - 1\| < 1/2$. Тогда выполняются также неравенства*

$$\operatorname{ind} A(\lambda) \leqslant \operatorname{ind} T_\rho(\lambda) \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - \varepsilon].$$

Действительно, с учётом оценок

$$0 \leqslant B^*(\lambda)C^{-1}(\lambda)B(\lambda) \leqslant \varepsilon,$$

очевидным образом выполняющихся при сделанных предположениях, справедливость утверждения 3.2 немедленно вытекает из утверждения 2.1.

4. Утверждение 3.2 позволяет свести задачу вычисления оценок индекса инерции оператора $T_\rho(\lambda)$ к допускающей непосредственное решение с использованием вычислительной техники задаче вычисления оценок индексов инерции действующих в конечномерном пространстве $\mathfrak{H}_1$ операторов $A(\lambda)$ и $A(\lambda) - \varepsilon$. Однако при этом встаёт вопрос об области применимости этого утверждения, а также о степени точности получаемых на его основе оценок величины $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$. К изучению этих вопросов мы теперь и переходим.

На протяжении настоящего пункта мы будем использовать сокращение

$$\theta \rightleftharpoons \sqrt{\sum_{k=1}^{N} a_k\,|d_k|^2}.$$

Ввиду принимаемого нами предположения § 2.2 (3), величина θ заведомо подчиняется оценке $\theta < 1$.

4.1. *Пусть дано вещественное число* $\lambda > 0$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\|B(\lambda)\| \leqslant \lambda\theta\,\|P\|_{L_2[0,1]}.$$

Доказательство. Из определения подпространства $\mathfrak{H}_1$, утверждения 3.1 и представления § 3.1 (1) оператора $T_\rho(\lambda)$ немедленно вытекает, что полуторалинейная форма оператора $B(\lambda)$ удовлетворяет тождеству

$$\langle B(\lambda)y, z\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]} \equiv \lambda\cdot\int_0^1 P\cdot(y\overline{z})'\,dx.$$

При этом, согласно утверждению 3.1, функция $y\overline{z}$ из подынтегрального выражения обращается в нуль во всех точках α_k, где $k \in 0\,..\,N$. Обозначив через $\tilde{P} \in L_2[0,1]$ функцию, на каждом из отрезков $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, где $k \in 1\,..\,N$, почти всюду совпадающую с функцией $P - \beta_k$, убеждаемся на основе сказанного в справедливости тождества

$$\langle B(\lambda)y, z\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]} \equiv \lambda\cdot\int_0^1 \tilde{P}\cdot(y\overline{z})'\,dx.$$

Далее, факт самоподобия функции P позволяет установить справедливость равенств

$$\begin{aligned}
\|\tilde{P}\|^2_{L_2[0,1]} &= \int_0^1 |\tilde{P}|^2\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{N} \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} |\tilde{P}|^2\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{N} \int_0^1 a_k\,|d_k|^2 \cdot |P|^2\,dx \\
&= \theta^2\,\|P\|^2_{L_2[0,1]},
\end{aligned}$$

а тогда и обусловленных неравенством Коши–Буняковского оценок

$$\begin{aligned}
(1)\qquad (\forall y\in\mathfrak{H}_1)\,(\forall z\in\mathfrak{H}_2)\quad & |\langle B(\lambda)y,z\rangle_{\overset{\circ}{W}{}^1_2[0,1]}| \leqslant \\
&\leqslant \lambda\theta\,\|P\|_{L_2[0,1]}\cdot\|(\overline{y}z)'\|_{L_2[0,1]}.
\end{aligned}$$

Как следует из стандартных вариационных принципов для самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве, при любом выборе параметра $\zeta\in(0,1)$ норма заданного на пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2[0,1]$ функционала, сопоставляющего каждой функции $y\in\overset{\circ}{W}{}^1_2[0,1]$ значение $y(\zeta)$, обратна арифметическому квадратному корню единственного собственного значения граничной задачи

$$\begin{gathered}
-y''-\lambda\boldsymbol{\delta}_\zeta y=0,\\
y(0)=y(1)=0.
\end{gathered}$$

Решая эту задачу, находим для искомой нормы значение $\sqrt{\zeta\cdot(1-\zeta)}$. Тем самым, справедлива неулучшаемая априорная оценка

$$(2)\qquad (\forall y\in\overset{\circ}{W}{}^1_2[0,1])\qquad \|y\|_{C[0,1]}\leqslant\frac{\|y\|_{W^1_2[0,1]}}{2}.$$

Возвращаясь к функциям $y\in\mathfrak{H}_1$ и $z\in\mathfrak{H}_2$, устанавливаем на основе полученной априорной оценки справедливость соотношений

$$\begin{aligned}
\|(\overline{y}z)'\|_{L_2[0,1]} &\leqslant \|\overline{y}z'\|_{L_2[0,1]}+\|\overline{y}'z\|_{L_2[0,1]} \\
&\leqslant \|y\|_{C[0,1]}\cdot\|z'\|_{L_2[0,1]}+\|z\|_{C[0,1]}\cdot\|y'\|_{L_2[0,1]} \\
&\leqslant \frac{\|y\|_{W^1_2[0,1]}}{2}\cdot\|z'\|_{L_2[0,1]}+\frac{\|z\|_{W^1_2[0,1]}}{2}\cdot\|y'\|_{L_2[0,1]} \\
&\leqslant \|y\|_{W^1_2[0,1]}\,\|z\|_{W^1_2[0,1]},
\end{aligned}$$

объединение которых с ранее полученными оценками (1) немедленно завершает доказательство. □

4.2. *Пусть дано вещественное число* $\lambda > 0$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\|C(\lambda) - 1\| \leqslant \lambda\theta \, \|P\|_{L_2[0,1]}.$$

Доказательство. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве утверждения 4.1, замечаем, что полуторалинейная форма оператора $C(\lambda) - 1$ удовлетворяет тождеству

$$\langle [C(\lambda) - 1] y, z \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]} = \lambda \cdot \int_0^1 P \cdot (y\overline{z})' \, dx.$$

Для завершения доказательства теперь остаётся лишь дословно повторить рассуждения из доказательства утверждения 4.1. □

Объединяя утверждения 3.2, 4.1 и 4.2, убеждаемся в справедливости следующего факта.

4.3. *Пусть даны два вещественных числа* $\lambda > 0$ *и* $\varepsilon > 0$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\varepsilon \geqslant 2\lambda^2\theta^2 \, \|P\|^2_{L_2[0,1]}, \qquad \lambda\theta \, \|P\|_{L_2[0,1]} < 1/2.$$

Тогда выполняются также неравенства

$$\operatorname{ind} A(\lambda) \leqslant \operatorname{ind} T_\rho(\lambda) \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - \varepsilon].$$

Возможность использования связанного с утверждением 4.3 способа оценивания величины $\operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$ при произвольно больших значениях параметра $\lambda > 0$ и произвольно малых значениях возмущения $\varepsilon > 0$ зависит, таким образом, исключительно от решения вопроса о возможности построения для фиксированной самоподобной функции $P \in L_2[0,1]$ такого набора её параметров самоподобия, который обладал бы произвольно малым значением характеристики θ. Это решение является положительным:

4.4. *Пусть дано вещественное число $\varepsilon > 0$. Тогда может быть указан набор параметров самоподобия функции $P \in L_2[0,1]$, удовлетворяющий неравенству $\theta < \varepsilon$.*

Доказательство. Рассмотрим два — возможно, совпадающих — набора $N_i > 1$, $a_{i,k} > 0$, $d_{i,k}$ и $\beta_{i,k}$, где $i = 1,2$ и $k \in 1\,..\,N_i$, параметров самоподобия функции P. Непосредственно из данных в пункте § 2.3 определений вытекает, что набор величин

$$
\begin{aligned}
&N \rightleftharpoons N_1 N_2,\\
&a_k \rightleftharpoons a_{1,[(k-1)/N_2]+1} \cdot a_{2,((k-1)\,\mathrm{mod} N_2)+1},\\
&d_k \rightleftharpoons d_{1,[(k-1)/N_2]+1} \cdot d_{2,((k-1)\,\mathrm{mod} N_2)+1},\\
&\beta_k \rightleftharpoons \beta_{1,[(k-1)/N_2]+1} + d_{1,[(k-1)/N_2]+1} \cdot \beta_{2,((k-1)\,\mathrm{mod} N_2)+1},
\end{aligned}
$$

где $k \in 1\,..\,N$, а через $[a]$ обозначена целая часть числа $a \in \mathbb{Q}$, также представляет собой набор параметров самоподобия функции P. При этом для вновь построенного набора выполняются равенства

$$
\begin{aligned}
\theta &= \sqrt{\sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} a_{1,k} a_{2,l} \left| d_{1,k} d_{2,l} \right|^2}\\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{N_1} a_{1,k} \left| d_{1,k} \right|^2} \sqrt{\sum_{l=1}^{N_2} a_{2,l} \left| d_{2,l} \right|^2}\\
&= \theta_1 \theta_2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, „итерирование“ произвольно фиксированного набора параметров самоподобия функции $P \in L_2[0,1]$ предоставляет в наше распоряжение последовательность аналогичных наборов, для которой соответствующие значения характеристики θ образуют бесконечно малую геометрическую прогрессию. □

5. Подведём теперь итоги проведённого исследования. Зафиксируем имеющее произвольный номер $n \in \mathbb{N}$ положительное собственное значение λ_n пучка T_ρ. Зафиксируем также произвольную точку $\lambda \in (0, \lambda_n)$. Из утверждения § 3.1.1 и того факта, что оператор $JT_\rho(\lambda)$ представляет собой вполне непрерывное возмущение единичного оператора, немедленно вытекает существование вещественного числа $\eta > 0$ со свойством

$$\operatorname{ind}[JT_\rho(\lambda) - \eta] \leqslant n.$$

Поэтому для любых вещественного числа $\varepsilon \in (0, \eta)$ и набора параметров самоподобия функции P, удовлетворяющего требованиям из утверждения 4.3, будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}[A(\lambda) - \varepsilon] &\leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - \eta] \\ &\leqslant \operatorname{ind}[JT_\rho(\lambda) - \eta] && [3\,(1)] \\ &\leqslant n. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, для любой точки $\lambda > \lambda_n$, согласно утверждению § 3.1.1, найдётся вещественное число $\varepsilon > 0$ со свойством

$$\operatorname{ind}[JT_\rho(\lambda) + \varepsilon] > n.$$

Соответственно, для любого набора параметров самоподобия функции $P \in L_2[0,1]$, удовлетворяющего требованиям из утверждения 4.3, будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} A(\lambda) &\geqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) + \varepsilon - B(\lambda)^* C^{-1}(\lambda) B(\lambda)] && [4.1,\ 4.2] \\ &\geqslant \operatorname{ind}[JT_\rho(\lambda) + \varepsilon] && [4.2,\ 2.1] \\ &> n. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых двух вещественных чисел $\lambda^- > 0$ и $\lambda^+ > \lambda^-$ на основе оценок из утверждений § 3.1.1 и 4.3 оказывается возможным, при надлежащем выборе набора параметров самоподобия функции P, установить верность по меньшей мере одного из двух неравенств $\lambda^- \leqslant \lambda_n$ и $\lambda^+ \geqslant \lambda_n$. Это означает, что при помощи метода деления отрезка могут быть найдены сколь угодно точные верхние и нижние оценки собственного значения λ_n.

6. В завершение параграфа укажем естественный способ вычисления индекса инерции конечномерных операторов $A(\lambda)$. Известно (см., например, [100]), что использование факта самоподобия функции $P \in L_2[0,1]$ позволяет легко определять её степенные моменты

$$\mathbf{P}_n \rightleftharpoons \int_0^1 P \cdot x^n \, dx,$$

где $n \in \mathbb{N}$. В частности, имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P \, dx &= \sum_{k=1}^N \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} P \, dx \\
&= \sum_{k=1}^N a_k \int_0^1 (d_k P + \beta_k) \, dx \\
&= \left(\sum_{k=1}^N a_k d_k \right) \cdot \int_0^1 P \, dx + \sum_{k=1}^N a_k \beta_k, \\
\int_0^1 P \cdot x \, dx &= \sum_{k=1}^N \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} P \cdot x \, dx \\
&= \sum_{k=1}^N a_k \int_0^1 (d_k P + \beta_k) \cdot (\alpha_{k-1} + a_k x) \, dx \\
&= \left(\sum_{k=1}^N a_k^2 d_k \right) \cdot \int_0^1 P \cdot x \, dx + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^N a_k \cdot \left(\alpha_{k-1} d_k \cdot \int_0^1 P \, dx + \alpha_{k-1} \beta_k + \frac{a_k \beta_k}{2} \right),
\end{aligned}$$

означающие, что интересующие нас далее моменты нулевой и первой степеней имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0 &= \frac{\sum_{k=1}^N a_k \beta_k}{1 - \sum_{k=1}^N a_k d_k}, \\
\mathbf{P}_1 &= \frac{\sum_{k=1}^N a_k \cdot \left(\alpha_{k-1} d_k \cdot \mathbf{P}_0 + \alpha_{k-1} \beta_k + \frac{a_k \beta_k}{2} \right)}{1 - \sum_{k=1}^N a_k^2 d_k}.
\end{aligned}$$

Прямым вычислением также легко устанавливается следующий факт.

6.1. *Пусть даны два вещественных числа $\lambda > 0$ и $\varepsilon \geqslant 0$. Тогда матрица квадратичной формы оператора $A(\lambda) - \varepsilon$ в ранее фиксированном базисе подпространства $\mathfrak{H}_1$ является трёхдиагональной и имеет элементы*

$$\begin{aligned} \langle (A(\lambda) - \varepsilon)\, y_k, y_{k-1} \rangle &= -(1-\varepsilon) \cdot a_k^{-1} - \lambda \cdot d_k \cdot (2\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0), \\ \langle (A(\lambda) - \varepsilon)\, y_k, y_k \rangle &= (1-\varepsilon) \cdot [a_k^{-1} + a_{k+1}^{-1}] + \\ &\qquad + \lambda \cdot [2d_{k+1} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + 2d_k \cdot \mathbf{P}_1 + \beta_k - \beta_{k+1}]\,, \end{aligned}$$

где $k \in 2\,..\,N-1$ в первом из указанных равенств и $k \in 1\,..\,N-1$ — во втором.

Сигнатура фигурирующей в утверждении 6.1 матрицы может быть вычислена различными способами — например, как число перемен знака в ряде её главных миноров.

§ **5. Примеры**

1. В таблице 1 представлены результаты численных расчётов для первых семнадцати собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная канторовой лестницы — представляющей собой арифметически самоподобную функцию спектрального порядка $D = \log_6 2$ с шагом $\nu = \ln 6$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 3.2.1.

Из соотношений § 3.2 (9) и § 3.2 (10) вытекает, что для любого значения $\lambda > 0$, не являющегося собственным значением рассматриваемого пучка T_ρ, справедливы оценки

$$\lambda^{-\log_6 2} \cdot [\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) - 2] \leqslant s_+(\log_6 \lambda) \leqslant \lambda^{-\log_6 2} \cdot [\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) + 2].$$

Подставляя сюда данные таблицы 1, немедленно устанавливаем справедливость неравенств

$$\begin{aligned} s_+(\log_6 \lambda_{13} + 0) &\geqslant 0{,}60, \\ s_+(\log_6 \lambda_{16} + 0) &\leqslant 0{,}56. \end{aligned}$$

k	λ_k	$(k+1)/\lambda_k^{\log_6 2}$
0	$1,44 \cdot 10^1\,(\pm 1\%)$	$0,356\,(\pm 10^{-3})$
1	$3,53 \cdot 10^1\,(\pm 1\%)$	$0,504\,(\pm 10^{-3})$
2	$1,41 \cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$0,442\,(\pm 10^{-3})$
3	$1,51 \cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$0,574\,(\pm 10^{-3})$
4	$3,26 \cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$0,533\,(\pm 10^{-3})$
5	$3,53 \cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$0,620\,(\pm 10^{-3})$
6	$8,76 \cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$0,509\,(\pm 10^{-3})$
7	$8,76 \cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$0,582\,(\pm 10^{-3})$
8	$1,58 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$0,521\,(\pm 10^{-3})$
9	$1,62 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$0,573\,(\pm 10^{-3})$
10	$2,03 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$0,578\,(\pm 10^{-3})$
11	$2,03 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$0,630\,(\pm 10^{-3})$
12	$2,27 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$0,654\,(\pm 10^{-3})$
13	$2,29 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$0,702\,(\pm 10^{-3})$
14	$5,26 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$0,545\,(\pm 10^{-3})$
15	$5,26 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$0,582\,(\pm 10^{-3})$
16	$9,27 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$0,497\,(\pm 10^{-3})$

Таблица 1. Оценки первых собственных значений для случая $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $d_1 = d_3 = 1/2$, $d_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta_3 = 1/2$.

Это наблюдение показывает, что в рассматриваемом случае функция s_+ заведомо не является постоянной.

2. В таблице 2 представлены результаты численных расчётов для первых двенадцати положительных и отрицательных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $d_1 = d_3 = -1/2$, $d_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta_3 = 1/2$. Эта функция имеет локально неограниченную вариацию. Спектральный порядок этой функции, как и у канторовой лестницы, есть $D = \log_6 2$, а шаг самоподобия есть $\nu = \ln 6$, причём величина

$$-\frac{\ln(a_1\,|d_1|)}{\ln 6} = -\frac{\ln(a_3\,|d_3|)}{\ln 6} = 1$$

является нечётной. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 3.2.2.

k	λ_k	$(k+1)/\lambda_k^{\log_6 2}$	λ_{-k}	$-(k+1)/\lambda_{-k}^{\log_6 2}$
0	$6,72 \cdot 10^0$ $(\pm 1\%)$	$0,478$ $(\pm 10^{-3})$	$-2,30 \cdot 10^1$ $(\pm 1\%)$	$0,297$ $(\pm 10^{-3})$
1	$9,75 \cdot 10^1$ $(\pm 1\%)$	$0,340$ $(\pm 10^{-3})$	$-2,58 \cdot 10^1$ $(\pm 1\%)$	$0,569$ $(\pm 10^{-3})$
2	$1,40 \cdot 10^2$ $(\pm 1\%)$	$0,443$ $(\pm 10^{-3})$	$-5,11 \cdot 10^2$ $(\pm 1\%)$	$0,269$ $(\pm 10^{-3})$
3	$1,50 \cdot 10^2$ $(\pm 1\%)$	$0,575$ $(\pm 10^{-3})$	$-5,82 \cdot 10^2$ $(\pm 1\%)$	$0,341$ $(\pm 10^{-3})$
4	$2,34 \cdot 10^2$ $(\pm 1\%)$	$0,605$ $(\pm 10^{-3})$	$-5,86 \cdot 10^2$ $(\pm 1\%)$	$0,425$ $(\pm 10^{-3})$
5	$2,89 \cdot 10^3$ $(\pm 1\%)$	$0,275$ $(\pm 10^{-3})$	$-8,12 \cdot 10^2$ $(\pm 1\%)$	$0,449$ $(\pm 10^{-3})$
6	$3,06 \cdot 10^3$ $(\pm 1\%)$	$0,313$ $(\pm 10^{-3})$	$-8,41 \cdot 10^2$ $(\pm 1\%)$	$0,517$ $(\pm 10^{-3})$
7	$3,06 \cdot 10^3$ $(\pm 1\%)$	$0,358$ $(\pm 10^{-3})$	$-9,03 \cdot 10^2$ $(\pm 1\%)$	$0,575$ $(\pm 10^{-3})$
8	$3,49 \cdot 10^3$ $(\pm 1\%)$	$0,383$ $(\pm 10^{-3})$	$-9,10 \cdot 10^2$ $(\pm 1\%)$	$0,645$ $(\pm 10^{-3})$
9	$3,49 \cdot 10^3$ $(\pm 1\%)$	$0,426$ $(\pm 10^{-3})$	$-1,41 \cdot 10^3$ $(\pm 1\%)$	$0,605$ $(\pm 10^{-3})$
10	$3,51 \cdot 10^3$ $(\pm 1\%)$	$0,467$ $(\pm 10^{-3})$	$-1,69 \cdot 10^4$ $(\pm 1\%)$	$0,254$ $(\pm 10^{-3})$
11	$3,53 \cdot 10^3$ $(\pm 1\%)$	$0,509$ $(\pm 10^{-3})$	$-1,73 \cdot 10^4$ $(\pm 1\%)$	$0,275$ $(\pm 10^{-3})$

Таблица 2. Оценки первых собственных значений для случая $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $d_1 = d_3 = -1/2$, $d_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta_3 = 1/2$.

Аналогичными проделанным при анализе таблицы 1 рассуждениями на основе данных таблицы 2 устанавливается справедливость оценок

$$0,29 \leqslant s(0) \leqslant 0,36,$$

$$0,60 \leqslant s(1) \leqslant 0,68.$$

Тем самым, удвоение периода функции s в описываемом утверждением § 3.2.2 случае представляет собой действительно наблюдаемое явление.

Глава V

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С АФФИННО САМОПОДОБНЫМИ ВЕСАМИ НУЛЕВОГО СПЕКТРАЛЬНОГО ПОРЯДКА

В настоящей главе мы подвергнем исследованию спектральные свойства граничных задач для дифференциального уравнения

$$(-1)^n y^{(2n)} - \lambda\rho y = 0,$$

где вес $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ представляет собой обобщённую производную самоподобной функции $P \in L_2[0,1]$ нулевого спектрального порядка. Простейший анализ проведённых в предыдущей главе рассуждений показывает неприменимость метода теории восстановления к этому случаю. Действительно, в рассматриваемой ситуации порядок «остатка» уравнения IV. § 3.2 (10) оказывается сравним с порядком «главного члена», каковое обстоятельство не позволяет изучить асимптотическое поведение функций $\Lambda_{\pm,\varepsilon}$ на основе сформулированных в параграфе IV. § 1 теорем восстановления. Иначе говоря, рассмотрение случая $D = 0$ требует разработки нового метода исследования.

Применительно к случаю задачи Штурма–Лиувилля такой метод, основная идея которого принадлежит И. А. Шейпаку [22], будет изложен в параграфе § 1. Распространению этого метода — что требует проведения значительной дополнительной работы — на случай задач высшего порядка посвящается параграф § 2. Изложение материала этого параграфа основано на работе [23].

На всём протяжении настоящей главы мы сохраняем введённые ранее обозначения параметров самоподобия квадратично суммируемых функций. Кроме того, мы дополнительно резервируем обозначение m для индекса единственного отличного от нуля коэффициента d_m.

§ 1. Случай $D = 0$ в задаче Штурма-Лиувилля

1. Рассмотрим два подпространства $\mathfrak{H}_1 \subseteq \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ и $\mathfrak{H}_2 \subseteq \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$, определяемые следующим образом. Подпространство $\mathfrak{H}_1$ имеет вид

$$\mathfrak{H}_1 \rightleftharpoons \{y \in \mathfrak{H} \ : \ (\forall x \notin (\alpha_{m-1}, \alpha_m)) \quad y(x) = 0\}.$$

Подпространство $\mathfrak{H}_2$ представляет собой $(N-1)$-мерную линейную оболочку функций $e_k \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$, где $k \in 1\,..\,N-1$, имеющих вид

$$e_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \gamma_k}{\alpha_k - \gamma_k} & \text{при } x \in [\gamma_k, \alpha_k], \\ \dfrac{\delta_k - x}{\delta_k - \alpha_k} & \text{при } x \in [\alpha_k, \delta_k], \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где положено

$$\gamma_k \rightleftharpoons \begin{cases} \alpha_{k-1} & \text{при } k \neq m, \\ \alpha_m - a_m a_n & \text{при } k = m, \end{cases}$$
$$\delta_k \rightleftharpoons \begin{cases} \alpha_{k+1} & \text{при } k \neq m-1, \\ \alpha_{m-1} + a_m a_1 & \text{при } k = m-1. \end{cases}$$

Справедливы следующие два утверждения.

1.1. *Дополнение*

$$\mathfrak{H}_3 \rightleftharpoons \left\{ y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1] \ : \ (\forall z \in \mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2) \quad \int_0^1 y' \overline{z'}\, dx = 0 \right\}$$

прямой суммы $\mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2$ допускает представление в виде

$$\mathfrak{H}_3 = \left\{ y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1] \ : \ \left(\forall x \in (\alpha_{m-1}, \alpha_m) \cup \bigcup_{k=1}^{N-1} \{\alpha_k\} \right) \quad y(x) = 0 \right\}.$$

Доказательство. Легко видеть, что производными функций $y \in \mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2$ являются в точности те ортогональные константам элементы пространства $L_2[0,1]$, которые сохраняют своё значение на каждом из интервалов (α_{k-1}, α_k), где $k \neq m$. Соответственно, дополнению $\mathfrak{H}_3$ принадлежат в точности те функции $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$, которые удовлетворяют соотношениям

$$y'(x) = 0 \qquad \text{при почти всех } x \in (\alpha_{m-1}, \alpha_m),$$
$$(\forall k \neq m) \qquad \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} y'\,dx = 0.$$

Полученный результат с очевидностью равносилен доказываемому утверждению. □

1.2. *Пусть* λ *— вещественное число, а* $\mathfrak{M} \subseteq \overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1]$ *— конечномерное подпространство, на котором квадратичная форма оператора* $T_\rho(\lambda)$ *отрицательна. Тогда существует подпространство* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2$ *размерности* $\dim \mathfrak{M}$*, на котором квадратичная форма оператора* $T_\rho(\lambda)$ *также отрицательна.*

Доказательство. Справедливость доказываемого утверждения с очевидностью вытекает из справедливого при любом выборе функций $y \in \mathfrak{H}_1 \dotplus \mathfrak{H}_2$ и $z \in \mathfrak{H}_3$ равенства

$$\langle T_\rho(\lambda)\,(y+z), (y+z)\rangle = \langle T_\rho(\lambda) y, y\rangle + \|z'\|^2_{L_2[0,1]},$$

легко устанавливаемого на основе определения IV. § 3.1 (1), утверждения 1.1 и факта самоподобия первообразной $P \in L_2[0,1]$ веса $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$. □

2. Рассмотрим теперь два линейных пучка $A\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1)$ и $C\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}_2)$ ограниченных операторов, удовлетворяющих тождествам

$$\langle A(\lambda) y, y\rangle_{W_2^1[0,1]} \equiv \int_0^1 \left(|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\,dx, \tag{1}$$
$$\langle C(\lambda) y, y\rangle_{W_2^1[0,1]} \equiv \int_0^1 \left(|y'|^2 + \lambda P \cdot (|y|^2)'\right)\,dx,$$

а также оператор $B\colon \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$, удовлетворяющий тождеству

$$\langle By, z\rangle_{W_2^1[0,1]} \equiv \int_0^1 y'\overline{z'}\,dx. \tag{2}$$

Имеют место следующие два факта.

2.1. *Пусть λ — вещественное число. Тогда выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} A(\lambda) = \operatorname{ind} T_\rho(a_m d_m \lambda).$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $S\colon \mathfrak{H}_1 \to \mathring{W}_2^1[0,1]$, определяемый тождеством

$$[Sy](x) \equiv \frac{y(\alpha_{m-1} + a_m x)}{\sqrt{a_m}}.$$

Из определений IV. § 3.1 (1) и (1) с учётом факта самоподобия функции $P \in L_2[0,1]$ легко выводится справедливость тождества

$$\langle A(\lambda)y, y\rangle_{W_2^1[0,1]} \equiv \langle T_\rho(a_m d_m \lambda) Sy, Sy\rangle,$$

имеющего доказываемое утверждение в качестве тривиального следствия. □

2.2. *Пусть λ — вещественное число, не принадлежащее спектру пучка C. Тогда выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) = \operatorname{ind}[A(\lambda) - B^*[C(\lambda)]^{-1}B] + \operatorname{ind} C(\lambda).$$

Доказательство. Прямым вычислением [IV. § 4.2.1] легко устанавливается, что для любых функций $y \in \mathfrak{H}_1$ и $z \in \mathfrak{H}_2$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}\langle T_\rho(\lambda)\,(y+z), (y+z)\rangle &= \\ &= \langle [A(\lambda) - B^*[C(\lambda)]^{-1}B]y, y\rangle_{W_2^1[0,1]} + \langle C(\lambda)u, u\rangle_{W_2^1[0,1]},\end{aligned}$$

где положено $u \rightleftharpoons z + [C(\lambda)]^{-1}By$. Доказываемое утверждение немедленно вытекает из этого равенства и утверждения 1.2. □

3. Рассмотрим величины ζ_k, где $k \in 1\,..\,N-1$, имеющие вид

$$(1) \qquad \zeta_k \rightleftharpoons \begin{cases} \beta_m - \beta_{m-1} + d_m\beta_1 & \text{при } k = m-1, \\ \beta_{m+1} - \beta_m - d_m\beta_N & \text{при } k = m, \\ \beta_{k+1} - \beta_k & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидным образом эти величины суть величины скачков самоподобной функции $P \in L_2[0,1]$ в точках α_k. Обозначим также через $\mathrm{Z}_\pm$ две величины

$$(2) \qquad \mathrm{Z}_\pm \rightleftharpoons \#\{k \in 1\,..\,N-1 \;:\; \pm\zeta_k > 0\}.$$

Имеют место следующие два факта.

3.1. *Для всякого достаточно большого вещественного числа* $\lambda > 0$ *выполняется равенство* $\operatorname{ind} C(\lambda) = \mathrm{Z}_+$.

Справедливость утверждения 3.1 немедленно вытекает из легко проверяемого тождества

$$(3) \qquad \langle C(\lambda)y, y\rangle_{W_2^1[0,1]} \equiv \|y'\|^2_{L_2[0,1]} - \lambda \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \zeta_k \cdot |y(\alpha_k)|^2.$$

3.2. *Пусть выполнено равенство* $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N-1$. *Тогда для всякого достаточно большого вещественного числа* $\lambda > 0$ *оператор* $C(\lambda)$ *является ограниченно обратимым, причём при* $\lambda \to +\infty$ *справедлива асимптотика*

$$\|[C(\lambda)]^{-1}\| = O(\lambda^{-1}).$$

Справедливость утверждения 3.2 также представляет собой простое следствие тождества (3).

4. Основными результатами настоящего параграфа выступают следующие три факта.

4.1. *Пусть выполняются соотношения* $d_m > 0$, $\mathrm{Z}_+ > 0$ *и* $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N - 1$. *Тогда существуют вещественные числа* $\mu_l > 0$, *где* $l \in 0\,..\,\mathrm{Z}_+ - 1$, *для которых последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ *занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений пучка* $T_\rho\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\overset{\circ}{W}{}_2^1[0,1], \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1])$ *вида* IV. § 3.1 (1) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+} = \mu_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство. Согласно утверждению 3.2, найдётся вещественное число $\hat\lambda > 0$, для которого при любом $\lambda > \hat\lambda$ будет выполняться неравенство $\|[C(\lambda)]^{-1}\| < \hat\lambda/(3\lambda)$. Отсюда и из очевидным образом получамой на основе определения 2 (2) оценки $\|B\| \leqslant 1$ следует, что при любом $\lambda > \hat\lambda$ будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned}(1)\qquad \operatorname{ind}[A(\lambda) + \hat\lambda/(3\lambda)] \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - B^*[C(\lambda)]^{-1}B] \leqslant \\ \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - \hat\lambda/(3\lambda)].\end{aligned}$$

С использованием немедленно вытекающих из определения 2 (1) равенств

$$A(\lambda \pm \hat\lambda/2) = \Bigl(1 \pm \hat\lambda/(2\lambda)\Bigr) \cdot \left[A(\lambda) \mp \frac{\hat\lambda}{2\lambda \pm \hat\lambda}\right]$$

из оценок (1) легко выводятся оценки

$$(2)\qquad \operatorname{ind} A(\lambda - \hat\lambda/2) \leqslant \operatorname{ind}[A(\lambda) - B^*[C(\lambda)]^{-1}B] \leqslant \operatorname{ind} A(\lambda + \hat\lambda/2).$$

Далее, рассмотрим неубывающую почти всюду определённую функцию $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$s(t) \rightleftharpoons \#\{k \geqslant 1 \;:\; \lambda_k < e^t\}.$$

Эта функция удовлетворяет тождеству

$$s(t) \equiv \operatorname{ind} T_\rho(e^t).$$

Объединяя последнее с оценками (2) и утверждениями 2.1, 2.2 и 3.1, устанавливаем, что при любом $t > \ln\hat{\lambda}$ будут справедливы соотношения

$$(3) \qquad s(t + \ln(a_m d_m) - \hat{\lambda}e^{-t}) + \mathrm{Z}_+ \leqslant s(t) \leqslant \\ \leqslant s(t + \ln(a_m d_m) + \hat{\lambda}e^{-t}) + \mathrm{Z}_+.$$

Из оценок (3) немедленно вытекает, что внутри некоторой окрестности точки $+\infty$ любой интервал длины $-\ln(a_m d_m)/2$ содержит не более Z_+ точек разрыва функции s. Тем самым, заведомо найдётся точка $t_0 > \ln\hat{\lambda}$, для которой окрестность радиуса $\hat{\lambda}e^{-t_0}/(1 - a_m d_m)$ будет свободна от таких точек разрыва. Как следует из оценок (3), указанным выбором точки t_0 мы добиваемся и того, чтобы при любом $k \in \mathbb{N}$ внутри имеющей радиус $\hat{\lambda}e^{-t_0} \cdot (a_m d_m)^k/(1 - a_m d_m)$ окрестности точки

$$t_k \rightleftharpoons t_0 - k \cdot \ln(a_m d_m)$$

также не было ни единого разрыва функции s. Объединяя полученные результаты с установленным в IV. § 3.1.1 фактом простоты собственных значений пучка T_ρ, убеждаемся, что при любом $k \in \mathbb{N}$ отрезок $[t_k, t_{k+1}]$ содержит ровно Z_+ точек разрыва функции s, причём каждая из них является внутренней точкой этого отрезка. Для завершения доказательства остаётся теперь лишь заметить, — в соответствии с оценками (3), — что при любых $k \in \mathbb{N}$ и $l \in 1\,..\,\mathrm{Z}_+$ расстояние между l-тыми слева точками разрыва функции s на отрезках $[t_k, t_{k+1}]$ и $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ отличается от величины $-\ln(a_m d_m)$ не более, чем на $\hat{\lambda}e^{-t_0} \cdot (a_m d_m)^{k+1}$. □

4.2. *Пусть выполняются соотношения* $d_m > 0$, $\mathrm{Z}_- > 0$ *и* $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N - 1$. *Тогда существуют вещественные числа* $\mu_l > 0$, *где* $l \in 0\,..\,\mathrm{Z}_- - 1$, *для которых последовательность* $\{\lambda_{-k}\}_{k=0}^{\infty}$ *занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений пучка* $T_\rho\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathring{W}_2^1[0,1], \mathring{W}_2^{-1}[0,1])$ *вида* IV. § 3.1 (1) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{-(l+k\mathrm{Z}_-)} = -\mu_l \cdot (a_m d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство утверждения 4.2 проводится аналогичным доказательству утверждения 4.1 способом.

4.3. *Пусть выполняются соотношения $d_m < 0$ и $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N - 1$. Тогда существуют вещественные числа $\mu_l > 0$, где $l \in 0\,..\,N-2$, для которых последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ занумерованных в порядке возрастания положительных собственных значений пучка $T_\rho\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathring{W}_2^1[0,1], \mathring{W}_2^{-1}[0,1])$ вида IV. § 3.1 (1) удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{l+k\cdot(N-1)} = \mu_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k} \cdot (1 + o(1)),$$

а последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=0}^{\infty}$ занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений того же пучка T_ρ удовлетворяет при $k \to \infty$ асимптотикам

$$\lambda_{-(l+\mathrm{Z}_-+k\cdot(N-1))} = -\mu_l \cdot (a_m |d_m|)^{-2k-1} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство утверждения 4.3 также проводится аналогичным доказательству утверждения 4.1 способом.

§ 2. Случай $D = 0$ в задаче высшего чётного порядка

1. Изложенный в предыдущем параграфе метод не допускает непосредственного перенесения на случай задачи высшего чётного порядка

$$(-1)^n y^{(2n)} - \lambda\rho y = 0, \tag{1}$$

$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1) = 0 \qquad \text{при } k \in 0\,..\,n-1,$$

которой отвечает операторный пучок $T_\rho\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathring{W}_2^n[0,1], \mathring{W}_2^{-n}[0,1])$ вида

$$\langle T_\rho(\lambda) y, z\rangle \equiv \int_0^1 \left\{ y^{(n)}\overline{z^{(n)}} + \lambda P \cdot (y'\overline{z} + y\overline{z'}) \right\} dx. \tag{2}$$

Говоря более аккуратно, его применение в случае таких задач — осуществлённое, в частности, в работе [97] — приводит к существенно менее точным результатам, чем в случае задачи Штурма–Лиувилля. Корректировке метода, позволяющей получать аналогичные указанным выше асимптотики собственных значений в задаче высших чётных порядков, и посвящается настоящий параграф.

На всём протяжении настоящего параграфа мы сохраняем использованные в предыдущем параграфе обозначения параметров самоподобия первообразной $P \in L_2[0,1]$ весовой функции. Мы также сохраняем обозначения ζ_k, где $k \in 1..N-1$, для величин § 1.3 (1), и обозначения $\mathrm{Z}_\pm$ для величин § 1.3 (2). При этом мы всегда предполагаем выполненным равенство $\mathrm{Z}_+ + \mathrm{Z}_- = N-1$. В дополнение к сказанному, мы резервируем символ n для обозначения половины порядка определяющего граничную задачу уравнения (1).

В качестве заданного в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$ скалярного произведения на протяжении настоящего параграфа будет рассматриваться величина

$$\langle y, z\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]} \rightleftharpoons \int_0^1 y^{(n)}\overline{z^{(n)}}\,dx.$$

2. Введём в рассмотрение последовательность $\{P_j\}_{j=0}^\infty$ ступенчатых функций, удовлетворяющую тождеству $P_0(x) \equiv 0$ и соотношениям

$$(\forall j \in \mathbb{N})\ (\forall k \in 1..N)\ (\forall x \in (0,1)) \quad P_{j+1}(\alpha_{k-1} + a_k x) = d_k P_j(x) + \beta_k.$$

Согласно результатам пункта IV. § 2.2, эта функциональная последовательность в среднем квадратичном сходится к обобщённой первообразной $P \in L_2[0,1]$ рассматриваемой нами весовой функции. Соответственно, последовательность $\{T_{\rho_j}(\lambda)\}_{j=0}^\infty$ операторов класса $\mathcal{B}(\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1], \overset{\circ}{W}{}_2^{-n}[0,1])$, определённых тождествами

$$(1) \qquad \langle T_{\rho_j}(\lambda)y, z\rangle \equiv \int_0^1 \left\{y^{(n)}\overline{z^{(n)}} + \lambda P_j \cdot \left(y'\overline{z} + y\overline{z'}\right)\right\} dx,$$

независимо от выбора значения параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ сходится в смысле равномерной операторной топологии к оператору $T_\rho(\lambda)$.

Символом $\mathfrak{H}_j$, где $j \in \mathbb{N}$, мы далее будем обозначать линейную оболочку системы всевозможных собственных функций пучка T_{ρ_j}. Каждое из таких подпространств пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$ очевидным образом конечномерно. Кроме того, имеют место следующие три факта.

2.1. *При любом выборе индекса $j \in \mathbb{N}$ ортогональное дополнение $\mathfrak{H}_j^\perp$ подпространства $\mathfrak{H}_j$ представляет собой совокупность всевозможных функций $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$, обращающихся в нуль на носителе* $\operatorname{supp}\rho_j \subseteq [0,1]$ *атомарного заряда $\rho_j \rightleftharpoons P_j'$.*

Доказательство. Из определения (1) и известных фактов теории самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве следует, что искомым дополнением является множество функций $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$, удовлетворяющих условию

$$(\forall z \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]) \qquad \int_0^1 P_j \cdot (y\overline{z})'\, dx = 0.$$

Последнее условие очевидным образом равносильно указанному в формулировке доказываемого утверждения. □

2.2. *Пусть фиксированы произвольный индекс $j \in \mathbb{N}$, а также произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$, не являющееся собственным значением пучка T_{ρ_j}. Тогда существует подпространство $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}_j$ размерности* $\operatorname{ind} T_{\rho_j}(\lambda)$, *удовлетворяющее условию*

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall y \in \mathfrak{M}) \qquad \langle T_{\rho_j}(\lambda)y, y\rangle \leqslant -\varepsilon\,\|y^{(n)}\|^2_{L_2[0,1]}.$$

Для доказательства утверждения 2.2 достаточно заметить, что для любых функции $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$ и её ортогональной проекции $z \in \mathfrak{H}_j$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\langle T_{\rho_j}(\lambda)y, y\rangle &= \langle T_{\rho_j}(\lambda)z, z\rangle + \|(y-z)^{(n)}\|^2_{L_2[0,1]} && [(1),\ 2.1]\\ &\geqslant \langle T_{\rho_j}(\lambda)z, z\rangle.\end{aligned}$$

2.3. *При любом выборе индекса* $j \in \mathbb{N}$ *для любой точки* $\xi \in \operatorname{supp} \rho_j$ *существует и единственна функция* $\varphi_{\xi,j} \in \mathfrak{H}_j$, *удовлетворяющая равенству* $\varphi_{\xi,j}(\xi) = 1$ *и обращающаяся в нуль на множестве* $\operatorname{supp} \rho_j \setminus \{\xi\}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом функцию $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$, удовлетворяющую равенству $f(\xi) = 1$ и обращающуюся в нуль на множестве $\operatorname{supp} \rho_j \setminus \{\xi\}$. На роль искомой функции $\varphi_{\xi,j}$ может быть теперь выбрана ортогональная проекция функции f на подпространство $\mathfrak{H}_j$ [2.1]. Для завершения доказательства остаётся лишь заметить, что любая функция $y \in \mathfrak{H}_j$ однозначно определяется своим ограничением на множество $\operatorname{supp} \rho_j$ [2.1]. □

3. Введём в рассмотрение подпространства $\mathfrak{H}_{j,1} \subseteq \mathfrak{H}_j$ и $\mathfrak{H}_{j,2} \subseteq \mathfrak{H}_j$, определяемые следующим образом:

1°. Подпространство $\mathfrak{H}_{j,1}$ образовано всевозможными функциями $y \in \mathfrak{H}_j$, обращающимися в нуль на множестве $\operatorname{supp} \rho_j \setminus (\alpha_{m-1}, \alpha_m)$.

2°. Подпространство $\mathfrak{H}_{j,2}$ представляет собой линейную оболочку функций $\varphi_{\xi,j}$ [2.3], отвечающих всевозможным точкам $\xi \in \operatorname{supp} \rho_j \setminus (\alpha_{m-1}, \alpha_m)$.

Рассмотрим также линейные пучки $A_j\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}_{j,1})$ и $C_j\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H}_{j,2})$, где $j \in \mathbb{N}$, ограниченных операторов, удовлетворяющих тождествам

$$\langle A_j(\lambda) y, y \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]} \equiv \int_0^1 \left\{ |y^{(n)}|^2 + \lambda P_j \cdot (|y|^2)' \right\} dx, \tag{1}$$

$$\langle C_j(\lambda) y, y \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]} \equiv \int_0^1 \left\{ |y^{(n)}|^2 + \lambda P_j \cdot (|y|^2)' \right\} dx, \tag{2}$$

и операторы $B_j\colon \mathfrak{H}_{j,1} \to \mathfrak{H}_{j,2}$, удовлетворяющие тождествам

$$\langle B_j y, z \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]} \equiv \int_0^1 y^{(n)} \overline{z^{(n)}}\, dx.$$

Имеют место следующие четыре факта.

3.1. *При любом выборе индекса $j \in \mathbb{N}$ существует неотрицательный оператор $E_j \colon \mathfrak{H}_{j+1} \to \mathfrak{H}_{j+1}$, удовлетворяющий следующим двум условиям:*

1°. Справедливо неравенство $\det(1+E_j) \leqslant \Gamma$, где Γ есть некоторая не зависящая от выбора индекса $j \in \mathbb{N}$ постоянная.

2°. Независимо от выбора значения $\lambda > 0$, для которого величина $a_m^{2n-1} d_m \lambda$ не является собственным значением пучка T_{ρ_j}, справедливо равенство

$$\operatorname{ind}[A_{j+1}(\lambda) + E_j] = \operatorname{ind} T_{\rho_j}(a_m^{2n-1} d_m \, \lambda).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом некоторую (не зависящую от выбора индекса $j \in \mathbb{N}$) функцию $\psi \in W_2^n[0,1]$, тождественно равную 1 на некоторой окрестности множества $(\operatorname{supp} \rho \setminus \{\alpha_{m-1}, \alpha_m\}) \cup \{0,1\}$ и тождественно обращающуюся в нуль на некоторой окрестности множества $\{\alpha_{m-1}, \alpha_m\} \setminus \{0,1\}$. Рассмотрим оператор $S \colon \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1] \to \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$ вида

$$[Sy](x) \rightleftharpoons \begin{cases} y((x-\alpha_{m-1})/a_m) & \text{при } x \in (\alpha_{m-1}, \alpha_m), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

а также оператор $R_j \colon \mathfrak{H}_{j+1,1} \to \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$, сопоставляющий каждой функции $y \in \mathfrak{H}_{j+1,1}$ ортогональную проекцию функции $z \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$ вида

$$z(x) \rightleftharpoons [\psi y](\alpha_{m-1} + a_m x)$$

на подпространство $\mathfrak{H}_j$. Из утверждения 2.1 и определения функциональной последовательности $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ следует, что для любой функции $y \in \mathfrak{H}_{j+1,1}$ справедливы следующие два положения:

1°. Ортогональная проекция функции SR_jy на подпространство $\mathfrak{H}_{j+1}$ совпадает с функцией y.

2°. Функция R_jy есть единственный элемент подпространства $\mathfrak{H}_j$, ортогональная проекция S-образа которого на подпространство $\mathfrak{H}_{j+1}$ совпадает с функцией y.

Соответственно, оператор $E_j \rightleftharpoons R_j^* S^* S R_j - 1$ является неотрицательным. Далее, из утверждения 2.1 вытекает, что любая функция $y \in \mathfrak{H}_{j+1}$ представляет собой принадлежащий пространству $C^{n-1}[0,1]$ полиномиальный сплайн степени $2n-1$, точками склейки для которого выступают точки множества $\operatorname{supp} \rho_{j+1}$. Соответственно, подпространство $\mathfrak{H}_{j+1}^{\circ} \subseteq \mathfrak{H}_{j+1}$, образованное функциями, тождественно обращающимися в нуль вне интервала (α_{m-1}, α_m), имеет не превосходящую $(N-1) \cdot n$ коразмерность относительно $\mathfrak{H}_{j+1}$. С другой стороны, для любой функции $y \in \mathfrak{H}_{j+1}^{\circ} \subseteq \mathfrak{H}_{j+1,1}$ непосредственной проверкой с учётом утверждения 2.1 и вышеуказанного положения 2° устанавливается справедливость тождества

$$[R_j y](x) \equiv y(\alpha_{m-1} + a_m x),$$

а потому и равенства $E_j y = 0$. Тем самым, ранг оператора E_j допускает не зависящую от выбора значения $j \in \mathbb{N}$ оценку. С другой стороны, независимость от выбора значения $j \in \mathbb{N}$ использованной при определении оператора R_j функции ψ обусловливает наличие не зависящей от выбора значения $j \in \mathbb{N}$ оценки нормы этого оператора. Объединяя сказанное, убеждаемся в существовании равномерной по $j \in \mathbb{N}$ оценки определителей $\det(1 + E_j)$.

Наконец, с учётом определения функциональной последовательности $\{P_j\}_{j=0}^{\infty}$ и утверждения 2.1 легко устанавливается, что для любых функции $y \in \mathfrak{H}_{j+1,1}$ и значения $\lambda > 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\langle T_{\rho_j}(a_m^{2n-1} d_m \lambda) y_j, y_j \rangle &= \int_0^1 \left\{ |y_j^{(n)}|^2 + a_m^{2n-1} d_m \lambda P_j \cdot \left(|y_j|^2\right)' \right\} \, dx \\
&= a_m^{2n-1} \int_0^1 \left\{ |(S y_j)^{(n)}|^2 + \lambda P_{j+1} \cdot \left(|S y_j|^2\right)' \right\} \, dx \\
&= a_m^{2n-1} \int_0^1 \left\{ |(S y_j)^{(n)}|^2 + \lambda P_{j+1} \cdot \left(|y|^2\right)' \right\} \, dx \\
&= a_m^{2n-1} \langle [A_{j+1}(\lambda) + E_j] y, y \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]},
\end{aligned} \qquad [(1)]$$

где использовано сокращение $y_j \rightleftharpoons R_j y$. Объединение этих равенств с утверждением 2.2 и вытекающим из сказанного ранее соотношением $\operatorname{im} R_j = \mathfrak{H}_j$ позволяет завершить доказательство. $\square$

3.2. *Существует не зависящая от выбора значения $j \geqslant 2$ величина $\hat{\lambda} > 0$, для которой при всяком вещественном $\lambda > \hat{\lambda}$ выполняется равенство*

$$\operatorname{ind} C_j(\lambda) = \mathrm{Z}_+.$$

Доказательство. Зафиксируем набор $\{f_k\}_{k=1}^{N-1}$ функций из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]$, каждая из которых принимает значение 1 в соответствующей точке α_k и обращается в нуль на множестве $\operatorname{supp} \rho \setminus \{\alpha_k\}$. Согласно утверждениям 2.1 и 2.3, независимо от выбора значения $j \geqslant 2$ пространство $\mathfrak{H}_{j,2}$ представляет собой ортогональную проекцию линейной оболочки системы $\{f_k\}_{k=1}^{N-1}$ на подпространство $\mathfrak{H}_j$. Тем самым, любая функция $y \in \mathfrak{H}_{j,2}$ подчиняется оценке

$$\|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{N-1} y(\alpha_k) \cdot f_k \right\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]},$$

а тогда и оценке

(3) $$\|y^{(n)}\|^2_{L_2[0,1]} \leqslant \Delta \cdot \sum_{k=1}^{N-1} |y(\alpha_k)|^2,$$

где $\Delta > 0$ есть не зависящая от выбора значения $j \geqslant 2$ спектральная норма матрицы Грама системы $\{f_k\}_{k=1}^{N-1}$.

Далее, заметим, что имеет место легко проверяемое тождество

$$\langle C_j(\lambda) y, y \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]} = \|y^{(n)}\|^2_{L_2[0,1]} - \lambda \sum_{k=1}^{N-1} \zeta_k \cdot |y(\alpha_k)|^2. \qquad [(2)]$$

С учётом соотношения (3) это означает, что для любых вещественного числа $\lambda > 0$ и вектора $y \in \mathfrak{H}_{j,2}$ справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^{N-1} (-\lambda \zeta_k) \cdot |y(\alpha_k)|^2 \leqslant \langle C_j(\lambda) y, y \rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]} \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} (\Delta - \lambda \zeta_k) \cdot |y(\alpha_k)|^2.$$

Тем самым, произвольная верхняя грань $\hat{\lambda} > 0$ числового набора $\{\Delta \zeta_k^{-1}\}_{k=1}^{N-1}$ удовлетворяет предъявленным в формулировке доказываемого утверждения требованиям. □

3.3. *Существуют не зависящие от выбора значения $j \geqslant 2$ величѝны $\hat{\lambda} > 0$ и $\Omega > 0$, для которых при всяком вещественном $\lambda > \hat{\lambda}$ оператор $C_j(\lambda)$ является ограниченно обратимым и подчиняется оценке*

$$\|[C_j(\lambda)]^{-1}\| \leqslant \Omega\lambda^{-1}.$$

Доказательство. Из проведённых при доказательстве предыдущего утверждения рассуждений вытекает, что матрица квадратичной формы оператора $C_j(\lambda)$ в базисе $\{\varphi_{\alpha_k,j}\}_{k=1}^{N-1}$ пространства $\mathfrak{H}_{j,2}$ имеет вид

$$-\lambda\,\mathrm{diag}\{\zeta_k\}_{k=1}^{N-1} + C_j^+,$$

причём спектральная норма возмущения C_j^+ не превосходит не зависящей от выбора значения $j \geqslant 2$ постоянной Δ [(3)]. Соответственно, фиксацией в качестве $\hat{\lambda} > 0$ верхней грани числового набора $\{2\Delta\,|\zeta_k|^{-1}\}_{k=1}^{N-1}$ мы добиваемся того, что при любом выборе значения $\lambda > \hat{\lambda}$ вышеуказанная матрица обладает обратной матрицей $H(\lambda)$, спектральная норма которой оценивается величиной

$$2\lambda^{-1} \cdot \sup_{k\in 1\,..\,N-1} |\zeta_k|^{-1}.$$

При этом для любой функции $y \in \mathfrak{H}_{j,2}$ функция $[C_j(\lambda)]^{-1}y$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{N-1} H_{kl}(\lambda)\,\langle y, \varphi_{\alpha_k,j}\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]}\,\varphi_{\alpha_l,j}.$$

С другой стороны, согласно оценкам (3), величина Δ представляет собой мажоранту спектральной нормы матрицы Грама базиса $\{\varphi_{\alpha_k,j}\}_{k=1}^{N-1}$. Тем самым, справедливы соотношения

$$\|C_j^{-1}(\lambda)y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]} \leqslant \sqrt{\Delta} \cdot \left(2\lambda^{-1} \cdot \sup_{k\in 1\,..\,N-1} |\zeta_k|^{-1}\right) \cdot \sqrt{\Delta}\,\|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]},$$

означающие, что величина

$$\Omega \rightleftharpoons 2\Delta \cdot \sup_{k\in 1\,..\,N-1} |\zeta_k|^{-1}$$

удовлетворяет предъявленным в формулировке доказываемого утверждения требованиям. □

3.4. *Существуют не зависящие от выбора значения* $j \geqslant 2$ *величины* $\hat{\lambda} > 0$ *и* $\omega > 0$, *для которых при всяком вещественном* $\lambda > \hat{\lambda}$ *справедливы неравенства*

$$\operatorname{ind} A_j(\lambda - \omega) \leqslant \operatorname{ind} T_{\rho_j}(\lambda) - \mathrm{Z}_+ \leqslant \operatorname{ind} A_j(\lambda + \omega).$$

Доказательство. Как и при доказательстве утверждения § 1.2.2, прямым вычислением легко устанавливается, что независимо от выбора функций $y \in \mathfrak{H}_{j,1}$ и $z \in \mathfrak{H}_{j,2}$ выполняется равенство

$$\langle T_{\rho_j}(\lambda)(y+z), (y+z)\rangle = \\ = \langle [A_j(\lambda) - B_j^*[C_j(\lambda)]^{-1} B_j] y, y\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]} + \langle C_j(\lambda) u, u\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0,1]},$$

где положено $u \rightleftharpoons z + [C_j(\lambda)]^{-1} B_j y$. Соответственно, для любого вещественного числа $\lambda > 0$, не принадлежащего спектру пучка C_j, справедливо равенство

$$\operatorname{ind} T_{\rho_j}(\lambda) = \operatorname{ind}[A_j(\lambda) - B_j^* C_j^{-1}(\lambda) B_j] + \operatorname{ind} C_j(\lambda).$$

Повторяя теперь с учётом утверждений 3.2 и 3.3 проведённые при выводе оценок § 1.4 (2) рассуждения, легко устанавливаем искомое. □

4. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие два утверждения, характеризующие поведение произведений собственных значений линейных пучков самосопряжённых операторов под действием возмущения свободного члена:

4.1. *Пусть* $\mathfrak{E}$ *— конечномерное гильбертово пространство,* $D\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ *— неотрицательный оператор, а* $F\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ *— эрмитов оператор. Пусть также* $\{\mu_k\}_{k=1}^r$ *и* $\{\lambda_k\}_{k=1}^r$, *где положено* $r \rightleftharpoons \operatorname{rank} F$ *— списки сосчитанных с учётом кратности собственных значений пучков* $1 - \lambda F$ *и* $1 + D - \lambda F$, *соответственно. Тогда выполняется неравенство*

$$(1) \qquad \prod_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \leqslant \det(1 + D).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим пространство $\mathfrak{E}$ в прямую сумму $\ker F \oplus \operatorname{im} F$ и рассмотрим отвечающие этому разложению блочные представления

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что спектр пучка $1 - \lambda F$ совпадает со спектром пучка $1 - \lambda F_{22}$, а спектр пучка $1 + D - \lambda F$ совпадает со спектром пучка $1 + D_{22} - D_{21}(1 + D_{11})^{-1} D_{12} - \lambda F_{22}$. Соответственно, имеют место равенства

$$\prod_{k=1}^{r} \mu_k = \frac{1}{\det F_{22}},$$
$$\prod_{k=1}^{r} \lambda_k = \frac{\det[1 + D_{22} - D_{21}(1 + D_{11})^{-1} D_{12}]}{\det F_{22}},$$

а потому и равенства

$$\prod_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k}{\mu_k} = \det[1 + D_{22} - D_{21}(1 + D_{11})^{-1} D_{12}]$$
$$= \frac{\det(1 + D)}{\det(1 + D_{11})}.$$

Отсюда и из факта неотрицательности операторов D и D_{11} немедленно вытекает справедливость доказываемого утверждения. $\square$

4.2. *Пусть $\mathfrak{E}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $D\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ — неотрицательный оператор конечного ранга, а $F\colon \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ — вполне непрерывный эрмитов оператор. Пусть также $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательности занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений пучков $1 - \lambda F$ и $1 + D - \lambda F$, соответственно. Тогда последовательность частичных произведений бесконечного произведения*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \tag{2}$$

является неубывающей и ограниченной сверху величиной $\det(1 + D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\operatorname{ind}[1 + D - \lambda F] \leqslant \operatorname{ind}[1 - \lambda F]$. Заметим также, что все положительные собственные значения пучков $1 - \lambda F$ и $1 + D - \lambda F$ имеют отрицательный тип. Из вариационных принципов для самосопряжённых оператор-функций потому следует, что при любом $k \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение $\lambda_k \geqslant \mu_k$. Тем самым, последовательность частичных произведений бесконечного произведения (2) является неубывающей.

Далее, зафиксируем последовательность $\{Q_l\}_{l=1}^{\infty}$ имеющих конечный ранг ортопроекторов, сходящуюся в смысле сильной операторной топологии к единичному оператору и удовлетворяющую тождеству $Q_l D Q_l \equiv D$. Обозначим через $\{\mu_{k,l}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\lambda_{k,l}\}_{k=0}^{\infty}$ последовательности — частично определённые — занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений пучков $1 - \lambda Q_l F Q_l$ и $1 + D - \lambda Q_l F Q_l$, соответственно. Аналогичным образом, через $\{\mu_{-k,l}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\lambda_{-k,l}\}_{k=0}^{\infty}$ обозначим последовательности занумерованных в порядке убывания отрицательных собственных значений тех же пучков. Из упоминавшихся выше вариационных принципов вытекает, что количество $r_{+,l}$ положительных и количество $r_{-,l}$ отрицательных собственных значений пучка $1 - \lambda Q_l F Q_l$ совпадают с таковыми для пучка $1 + D - \lambda Q_l F Q_l$, причём выполняются неравенства

$$\begin{aligned} (\forall k \in 0 \,..\, r_{+,l} - 1) \qquad \lambda_{k,l} &\geqslant \mu_{k,l}, \\ (\forall k \in 0 \,..\, r_{-,l} - 1) \qquad \lambda_{-k,l} &\leqslant \mu_{-k,l}. \end{aligned}$$

С учётом этого обстоятельства, вытекающее из утверждения 4.1 соотношение

$$\prod_{k=0}^{r_{+,l}-1} \frac{\lambda_{k,l}}{\mu_{k,l}} \times \prod_{k=0}^{r_{-,l}-1} \frac{\lambda_{-k,l}}{\mu_{-k,l}} \leqslant \det(1 + D)$$

означает, что при любом выборе индекса $r < r_{+,l}$ выполняются неравенства

$$\prod_{k=0}^{r} \frac{\lambda_{k,l}}{\mu_{k,l}} \leqslant \det(1 + D).$$

При помощи предельного перехода отсюда немедленно выводится справедливость не зависящих от выбора индекса $r \in \mathbb{N}$ оценок

$$\prod_{k=0}^{r} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \leqslant \det(1 + D),$$

означающих ограниченность последовательности частичных произведений бесконечного произведения (2). □

В случае, когда оператор F имеет плотный образ, результаты настоящего пункта могут быть усилены. А именно:

1°. Оценка (1) очевидным образом превращается в равенство.

2°. Раскладывая в условиях утверждения 4.2 пространство $\mathfrak{E}$ в прямую сумму $\mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2$ инвариантных подпространств оператора F таким образом, что на конечномерном подпространстве $\mathfrak{E}_1$ оператор F ограниченно обратим, а для соответствующего блочного разложения

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

оператор

$$D_\circ \rightleftharpoons \begin{pmatrix} 0 & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

мал по ядерной норме, после чего применяя утверждение 4.2 и уточнённое вышеуказанным образом утверждение 4.1 к трём парам пучков

$$\begin{gathered} 1 - \lambda F, \qquad 1 + (D - D_\circ) - \lambda F, \\ 1 - \lambda F_1, \qquad 1 + D_1 - \lambda F_1, \\ 1 - \lambda F_2, \qquad 1 + D_2 - \lambda F_2, \end{gathered}$$

где положено

$$\begin{aligned} F_1 &\rightleftharpoons (1 + D - D_\circ)^{-1/2} F \cdot (1 + D - D_\circ)^{-1/2}, \\ D_1 &\rightleftharpoons (1 + D - D_\circ)^{-1/2} D_\circ^{+} \cdot (1 + D - D_\circ)^{-1/2}, \\ F_2 &\rightleftharpoons (1 + D)^{-1/2} F \cdot (1 + D)^{-1/2}, \\ D_2 &\rightleftharpoons (1 + D)^{-1/2} D_\circ^{-} \cdot (1 + D)^{-1/2}, \end{aligned}$$

легко устанавливаем факт сколь угодно точной близости достаточно далёких частичных произведений бесконечного произведения (2) к определителю $\det(1 + D)$. Соответственно, этот определитель в точности совпадает с бесконечным произведением (2).

Для случая положительности оператора F результат, эквивалентный последнему, был установлен в работе [50].

5. Основными результатами настоящего параграфа выступают следующие три факта.

5.1. *Пусть выполняются соотношения* $d_m > 0$ *и* $\mathrm{Z}_+ > 0$. *Тогда существуют вещественные числа* $\tau_l > 0$, *где* $l \in 0\,..\,\mathrm{Z}_+ - 1$, *для которых последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ *занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений пучка* $T_\rho \colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathring{W}_2^n]0,1], \mathring{W}_2^{-n}[0,1])$ *вида* 1 (2) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+} = \tau_l \cdot (a_m^{2n-1} d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство. Обозначим через $\{\lambda_{k,j}\}_{k=0}^{\infty}$, где $j \in \mathbb{N}$, частично определённые последовательности занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений пучков T_{ρ_j}. Ввиду сходимости относительно равномерной операторной топологии последовательностей $\{T_{\rho_j}(\lambda)\}_{j=0}^{\infty}$ к операторам $T_\rho(\lambda)$, при этом имеют место асимптотические соотношения

(1) $$\lim_{j\to\infty} \lambda_{k,j} = \lambda_k.$$

Аналогичным образом, обозначим через $\{\mu_{k,j}\}_{k=0}^{\infty}$, где $j \in \mathbb{N}$, частично определённые последовательности занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений пучков A_j вида 3 (1).

Зафиксируем произвольный индекс $l \in 0\,..\,\mathrm{Z}_+ - 1$. Из утверждения 3.4 и равенств (1) вытекает существование значений $\hat{k}, \hat{\jmath} \in \mathbb{N}$ и $\omega > 0$, для которых при всех $k \geqslant \hat{k}$ и $j \geqslant \hat{\jmath}$ будут справедливы оценки

(2) $$\lambda_{l+(k+1)\mathrm{Z}_+,j} - \omega \leqslant \mu_{l+k\mathrm{Z}_+,j} \leqslant \lambda_{l+(k+1)\mathrm{Z}_+,j} + \omega.$$

При этом, ввиду тривиальной оценки $a_m^{2n-1} d_m < 1$ [IV. § 2.4 (1)], можно одновременно добиться выполнения при некотором $\varepsilon > 0$ неравенств

$$\lambda_{l+(k+1)\mathrm{Z}_+,j} \geqslant \frac{(a_m^{2n-1} d_m) \cdot \omega}{1 - \varepsilon - (a_m^{2n-1} d_m)} > 2\omega. \tag{3}$$

Далее, из утверждений 3.1 и 4.2 вытекает, что для произвольно фиксированного $r \in \mathbb{N}$ и всех $j \gg \hat{\jmath}$ справедливы оценки

$$1 \leqslant \prod_{k=\hat{k}}^{\hat{k}+r} \frac{\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+,j}}{(a_m^{2n-1} d_m) \cdot \mu_{l+k\mathrm{Z}_+,j+1}} \leqslant \Gamma.$$

С учётом соотношений (2), (3) и (1), это означает выполнение при всех $r \in \mathbb{N}$ неравенств

$$\prod_{k=\hat{k}}^{\hat{k}+r} \frac{\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+}}{(1-\varepsilon)\lambda_{l+(k+1)\mathrm{Z}_+}} \leqslant \Gamma,$$

а потому и неравенств

$$\lambda_{l+(\hat{k}+r)\mathrm{Z}_+} \geqslant \Gamma^{-1} (1-\varepsilon)^{-r} \cdot \lambda_{l+\hat{k}\mathrm{Z}_+}.$$

Объединяя полученные соотношения, устанавливаем сходимость ряда

$$\sum_{k=\hat{k}}^{\infty} \ln \left[\frac{\lambda_{l+(k+1)\mathrm{Z}_+} + \omega}{\lambda_{l+(k+1)\mathrm{Z}_+} - \omega} \right],$$

а также монотонность и ограниченность последовательности частичных произведений бесконечного произведения

$$\prod_{k=\hat{k}}^{\infty} \left[\frac{\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+}}{(a_m^{2n-1} d_m) \cdot \lambda_{l+(k+1)\mathrm{Z}_+}} \cdot \frac{\lambda_{l+(k+1)\mathrm{Z}_+}}{\lambda_{l+(k+1)\mathrm{Z}_+} - \omega} \right].$$

Для завершения доказательства остаётся лишь выбрать предел бесконечного произведения

$$(a_m^{2n-1} d_m)^{\hat{k}} \lambda_{l+\hat{k}\mathrm{Z}_+} \cdot \prod_{k=\hat{k}}^{\infty} \frac{(a_m^{2n-1} d_m) \lambda_{l+(k+1)\mathrm{Z}_+}}{\lambda_{l+k\mathrm{Z}_+}}$$

на роль коэффициента τ_l. □

5.2. *Пусть выполняются соотношения* $d_m > 0$ *и* $\mathrm{Z}_- > 0$*. Тогда существуют вещественные числа* $\tau_l > 0$*, где* $l \in 0\,..\,\mathrm{Z}_- - 1$*, для которых последовательность* $\{\lambda_{-k}\}_{k=0}^{\infty}$ *занумерованных в порядке убывания (с учётом кратности) отрицательных собственных значений пучка* $T_\rho \colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathring{W}_2^n]0,1],\mathring{W}_2^{-n}[0,1])$ *вида* 1 (2) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{-(l+k\mathrm{Z}_-)} = -\tau_l \cdot (a_m^{2n-1} d_m)^{-k} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство утверждения 5.2 проводится аналогичным доказательству утверждения 5.1 способом.

5.3. *Пусть выполняется неравенство* $d_m < 0$*. Тогда существуют вещественные числа* $\tau_l > 0$*, где* $l \in 0\,..\,N - 2$*, для которых последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ *занумерованных в порядке возрастания (с учётом кратности) положительных собственных значений пучка* $T_\rho \colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(\mathring{W}_2^n]0,1],\mathring{W}_2^{-n}[0,1])$ *вида* 1 (2) *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{l+k(N-1)} = \tau_l \cdot (a_m^{2n-1}\,|d_m|)^{-2k} \cdot (1 + o(1)),$$

а последовательность $\{\lambda_{-k}\}_{k=0}^{\infty}$ *занумерованных в порядке убывания (с учётом кратности) отрицательных собственных значений того же пучка* T_ρ *удовлетворяет при* $k \to \infty$ *асимптотикам*

$$\lambda_{-(l+\mathrm{Z}_-+k(N-1))} = -\tau_l \cdot (a_m^{2n-1}\,|d_m|)^{-2k-1} \cdot (1 + o(1)).$$

Доказательство утверждения 5.3 также проводится аналогичным доказательству утверждения 5.1 способом.

6. Изложенное доказательство основных результатов настоящего параграфа представляет собой конструктивизированную версию рассуждения из работы [23]. В последней работе вместо ортогонального проектирования на конечномерные подпространства $\mathfrak{H}_j$ рассматривалось ортогональное проектирование на *бесконечномерное* замыкание линейной оболочки системы собственных функций пучка T_ρ, законность каковой операции с точки зрения конструктивного математического анализа не очевидна [70: § 13.4]. В этой работе, однако, была отмечена и возможность — как раз и осуществлённого в настоящем параграфе — видоизменения проводимых рассуждений, превращающего их в конструктивистски приемлемые. Тем не менее, описание коэффициентов τ_l посредством пределов монотонных ограниченных последовательностей остаётся, по-видимому, неустранимым. С точки зрения конструктивного математического анализа это означает отнесение таких коэффициентов τ_l к классу так называемых *псевдочисел* [40: Гл. 2, § 2, Определение 7]. Данное обстоятельство коренным образом отличает результаты настоящего параграфа от результатов предыдущего, где соответствующие коэффициенты заведомо являлись *конструктивными вещественными числами*: в случае задачи Штурма–Лиувилля операторы E_j из утверждения 3.1 являются нулевыми, что позволяет полностью избежать апелляции к утверждению 4.2.

Вопрос о том, представляют ли собой коэффициенты τ_l полученных в настоящем параграфе асимптотик „настоящие“ псевдочисла, или же неудача решения вопроса о возможности их сколь угодно точной рациональной аппроксимации на основе единого алгорифма является лишь дефектом применённого метода, представляет некоторый интерес также по той причине, что „настоящие“ псевдочисла не допускают сколь угодно точного оценивания ни в каком непротиворечивом расширении формальной арифметики (в частности, в традиционных аксиоматических теориях множеств [69: Гл. II] — если предположить их непротиворечивость). Мы, однако, не располагаем решением этого вопроса.

§ 3. Примеры

1. Таблицы 1–3 иллюстрируют полученные результаты об асимптотиках собственных значений задачи Штурма–Лиувилля.

В таблице 1 представлены результаты численных расчётов для первых восьми положительных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщённая произ-

l	k	λ_{l+2k}	$6^{-k}\cdot\lambda_{l+2k}$
0	0	$4,93\cdot 10^0\,(\pm 1\%)$	$4,9341\,(\pm 10^{-4})$
1	0	$1,36\cdot 10^1\,(\pm 1\%)$	$13,6598\,(\pm 10^{-4})$
0	1	$4,94\cdot 10^1\,(\pm 1\%)$	$8,2322\,(\pm 10^{-4})$
1	1	$8,85\cdot 10^1\,(\pm 1\%)$	$14,7576\,(\pm 10^{-4})$
0	2	$2,96\cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$8,2330\,(\pm 10^{-4})$
1	2	$5,31\cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$14,7577\,(\pm 10^{-4})$
0	3	$1,78\cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$8,2330\,(\pm 10^{-4})$
1	3	$3,19\cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$14,7577\,(\pm 10^{-4})$

Таблица 1. Оценки первых собственных значений для случая $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2/3$, $\beta_3 = 1$.

l	k	$\lambda_{-(l+k)}$	$-6^{-k}\cdot\lambda_{-(l+k)}$
0	0	$-5,10\cdot 10^0\,(\pm 1\%)$	$5,1005\,(\pm 10^{-4})$
0	1	$-2,60\cdot 10^1\,(\pm 1\%)$	$4,3459\,(\pm 10^{-4})$
0	2	$-1,56\cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$4,3458\,(\pm 10^{-4})$
0	3	$-9,39\cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$4,3458\,(\pm 10^{-4})$

Таблица 2. Оценки первых собственных значений для случая $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$.

водная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2/3$, $\beta_3 = 1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = 2/3$, $\zeta_2 = 1/3$, $\mathrm{Z}_+ = 2$, $\mathrm{Z}_- = 0$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 1.4.1.

В таблице 2 представлены результаты численных расчётов для первых четырёх отрицательных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, $\mathrm{Z}_+ = \mathrm{Z}_- = 1$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 1.4.2.

В таблице 3 представлены результаты численных расчётов для первых шести положительных и семи отрицательных (исключая наимень-

l	k	λ_{l+2k}	$6^{-2k}\cdot\lambda_{l+2k}$
0	0	$4,31\cdot 10^0\,(\pm 1\%)$	$4,3146\,(\pm 10^{-4})$
1	0	$3,81\cdot 10^1\,(\pm 1\%)$	$38,0536\,(\pm 10^{-4})$
0	1	$1,53\cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$4,2572\,(\pm 10^{-4})$
1	1	$1,37\cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$38,0535\,(\pm 10^{-4})$
0	2	$5,52\cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$4,2572\,(\pm 10^{-4})$
1	2	$4,93\cdot 10^4\,(\pm 1\%)$	$38,0535\,(\pm 10^{-4})$

l	k	$\lambda_{-(l+1+2k)}$	$-6^{-2k-1}\cdot\lambda_{-(l+1+2k)}$
0	0	$-2,55\cdot 10^1\,(\pm 1\%)$	$4,2572\,(\pm 10^{-4})$
1	0	$-2,28\cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$38,0535\,(\pm 10^{-4})$
0	1	$-9,19\cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$4,2572\,(\pm 10^{-4})$
1	1	$-8,22\cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$38,0535\,(\pm 10^{-4})$
0	2	$-3,31\cdot 10^4\,(\pm 1\%)$	$4,2572\,(\pm 10^{-4})$
1	2	$-2,96\cdot 10^5\,(\pm 1\%)$	$38,0535\,(\pm 10^{-4})$

Таблица 3. Оценки первых собственных значений для случая $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = -1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$.

шее по абсолютное величине) собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = -1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, $\mathrm{Z}_+ = \mathrm{Z}_- = 1$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 1.4.3.

2. Таблицы 4–6 иллюстрируют результаты об асимптотиках собственных значений задач высшего чётного порядка с самоподобным весом нулевого спектрального порядка.

В таблице 4 представлены результаты численных расчётов для первых собственных значений задачи четвёртого порядка, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2/3$, $\beta_3 = 1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = 2/3$, $\zeta_2 = 1/3$, $\mathrm{Z}_+ = 2$, $\mathrm{Z}_- = 0$.

l	k	λ_{l+2k}	$54^{-k} \cdot \lambda_{l+2k}$
0	0	$2,86 \cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$286,10\,(\pm 10^{-2})$
1	0	$1,38 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$1377,99\,(\pm 10^{-2})$
0	1	$1,48 \cdot 10^4\,(\pm 1\%)$	$273,71\,(\pm 10^{-2})$
1	1	$6,83 \cdot 10^4\,(\pm 1\%)$	$1265,31\,(\pm 10^{-2})$
0	2	$7,91 \cdot 10^5\,(\pm 1\%)$	$271,33\,(\pm 10^{-2})$
1	2	$3,69 \cdot 10^6\,(\pm 1\%)$	$1264,04\,(\pm 10^{-2})$

Таблица 4. Оценки первых собственных значений для случая $n = 2$, $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 2/3$, $\beta_3 = 1$.

l	k	$\lambda_{-(l+k)}$	$-54^{-k} \cdot \lambda_{-(l+k)}$
0	0	$-3,70 \cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$369,75\,(\pm 10^{-2})$
0	1	$-8,51 \cdot 10^3\,(\pm 1\%)$	$157,53\,(\pm 10^{-2})$
0	2	$-4,58 \cdot 10^5\,(\pm 1\%)$	$157,20\,(\pm 10^{-2})$
0	3	$-2,48 \cdot 10^7\,(\pm 1\%)$	$157,20\,(\pm 10^{-2})$

Таблица 5. Оценки первых собственных значений для случая $n = 2$, $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$.

В таблице 5 представлены результаты численных расчётов для первых четырёх отрицательных собственных значений задачи четвёртого порядка, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = 1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, $\mathrm{Z}_+ = \mathrm{Z}_- = 1$.

В таблице 6 представлены результаты численных расчётов для первых четырёх положительных и пяти отрицательных (исключая наименьшее по абсолютной величине) собственных значений задачи четвёртого порядка, весовой функцией в которой выступает обобщённая производная квадратично суммируемой функции с параметрами самоподобия $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = -1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$. В этом случае выполняются равенства $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, $\mathrm{Z}_+ = \mathrm{Z}_- = 1$.

l	k	λ_{l+2k}	$54^{-2k} \cdot \lambda_{l+2k}$
0	0	$3,04 \cdot 10^2\,(\pm 1\%)$	$304,08\,(\pm 10^{-2})$
1	0	$1,38 \cdot 10^4\,(\pm 1\%)$	$13820,11\,(\pm 10^{-2})$
0	1	$8,72 \cdot 10^5\,(\pm 1\%)$	$299,00\,(\pm 10^{-2})$
1	1	$4,01 \cdot 10^7\,(\pm 1\%)$	$13764,02\,(\pm 10^{-2})$

l	k	$\lambda_{-(l+1+2k)}$	$-54^{-2k-1} \cdot \lambda_{-(l+1+2k)}$
0	0	$-1,61 \cdot 10^4\,(\pm 1\%)$	$299,04\,(\pm 10^{-2})$
1	0	$-7,43 \cdot 10^5\,(\pm 1\%)$	$13764,22\,(\pm 10^{-2})$
0	1	$-4,71 \cdot 10^7\,(\pm 1\%)$	$299,00\,(\pm 10^{-2})$
1	1	$-2,17 \cdot 10^9\,(\pm 1\%)$	$13764,02\,(\pm 10^{-2})$

Таблица 6. Оценки первых собственных значений для случая $n = 2$, $N = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$, $m = 3$, $d_3 = -1/2$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = -1$.

Глава VI

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ О СПЕКТРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С АФФИННО САМОПОДОБНЫМИ ВЕСАМИ

В настоящей главе мы завершаем начатое в главе IV изучение спектральных асимптотик граничной задачи

$$\begin{gathered} -y'' - \lambda\rho y = 0, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где вес $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ представляет собой обобщённую плотность самоподобной сингулярной меры. В работе [49] — а также, например, в более поздней статье [80] — была сформулирована гипотеза о том, что фигурирующая в установленной утверждением IV. § 3.2.1 асимптотике

$$\mathcal{N}(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln\lambda) + o(1)] \qquad \text{при } \lambda \to +\infty \tag{2}$$

считающей функции собственных значений рассматриваемой граничной задачи периодическая функция $s \in C(\mathbb{R})$ является непостоянной для произвольного неравномерного веса с арифметически самоподобной первообразной. В пункте IV. § 5.1 на основе данных численных расчётов было показано, что в случае, когда весовая функция является обобщённой производной канторовой лестницы, соответствующая функция $s \in C(\mathbb{R})$ действительно непостоянна. Одной из центральных задач настоящей главы является теоретическое установление факта такой непостоянности в случае, когда обобщённая первообразная $P \in C[0,1]$ весовой функции $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ имеет *канторовский тип* самоподобия. Точные определения соответствующих понятий будут даны далее.

В отличие от главы IV, в которой основным рабочим инструментом при изучении граничных задач с самоподобными весами положительного спектрального порядка выступала теория восстановления, в настоящей главе мы будем опираться главным образом на осцилляционную теорию для задач Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами, развитую ранее в главе II. Основной упор при этом будет делаться нами на изучение осцилляционных свойств собственных функций не первой, а второй и третьей граничных задач для уравнения (1). Именно для ряда граничных задач такого типа будет установлено наличие эффекта *спектральной периодичности*, играющего ключевую роль при последующем уточнении характеристик асимптотики (2). Получаемые на таком пути результаты об асимптотическом поведении спектра, очевидным образом, являются справедливыми и для произвольных самосопряжённых граничных условий.

Структура главы имеет следующий вид. В § 1 приводятся необходимые для дальнейшего свѐдения о самоподобных функциях канторовского типа и связанных с ними сингулярных граничных задачах. В § 2 устанавливается факт спектральной периодичности для некоторых из таких граничных задач. В § 3, носящем вспомогательный характер, устанавливается применяемый в дальнейшем критерий сингулярности монотонной функции. В § 4 проводится основанное на использовании спектральной периодичности уточнение характеристик коэффициента s из асимптотики (2). Основным источником излагаемых в указанных параграфах результатов выступает работа [24]. В § 5 полученные результаты переносятся на случай дифференциального оператора четвёртого порядка (что требует дополнительного изучения осцилляционных свойств собственных функций операторов такого рода). Основным источником при этом выступает работа [12]. Наконец, в § 6 приводятся иллюстрирующие явление спектральной периодичности для второго и четвёртого порядков расчётные данные.

Отметим, что в случае задач Штурма–Лиувилля приводимые далее результаты в настоящее время не являются наиболее широкими из известных. В качестве примера здесь можно указать работу [56], в которой развитый в работе [24] метод распространён на случай арифметически самоподобных весов несколько более общего, нежели рассматриваемые далее, вида.

§ 1. Самоподобные функции канторовского типа

1. Пусть фиксировано некоторое натуральное число $\varkappa > 1$, а также два вещественных числа $a \in (0, 1/\varkappa)$ и $b \rightleftharpoons (1-\varkappa a)/(\varkappa-1)$. Свяжем с этими числами набор точек $\alpha_{2k} \rightleftharpoons k(a+b)$ и $\alpha_{2k+1} \rightleftharpoons \alpha_{2k} + a$, где $k \in 0\,..\,\varkappa - 1$. Функцию $f \in C[0,1]$, удовлетворяющую равенствам $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, мы будем называть *самоподобной функцией канторовского типа* с параметрами $\varkappa$, a и b, если при любом выборе индекса $k \in 1\,..\,\varkappa - 1$ она постоянна на интервале $(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$, и если при любом выборе индекса $k \in 0\,..\,\varkappa - 1$ функция $f_k \in C[0,1]$ вида

$$f_k(x) \rightleftharpoons \varkappa f(\alpha_{2k} + ax)$$

совпадает с функцией f с точностью до аддитивной постоянной.

Классическая канторова лестница представляет собой самоподобную функцию канторовского типа с параметрами $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$.

На основе результатов параграфа IV. § 2 (или, что то же самое, непосредственной проверкой с использованием теоремы о сжимающем отображении) легко устанавливается, что каждый допустимый набор параметров $\varkappa$, a и b однозначным образом определяет некую самоподобную функцию класса $C[0,1]$. При этом такая функция является арифметически самоподобной с шагом $\nu = \ln(\varkappa/a)$, а её спектральный порядок определяется равенством $D = \nu^{-1} \ln \varkappa \in (0, 1/2)$.

Легко видеть также, что для любой самоподобной функции f канторовского типа функция $x \mapsto 1 - f(1-x)$ представляет собой самоподобную функцию канторовского типа с теми же параметрами $\varkappa$, a и b, что и исходная. Тем самым, справедливо следующее утверждение.

1.1. *Пусть $f \in C[0,1]$ — самоподобная функция канторовского типа. Тогда выполняется тождество $f(x) \equiv 1 - f(1-x)$.*

2. В отличие от случая задачи Дирихле, где вес $\rho \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$ полностью задаётся своей квадратично суммируемой обобщённой первообразной $P \in L_2[0,1]$, в случае второй и третьей граничных задач для определения веса $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ формулой

$$(\forall y \in W_2^1[0,1]) \qquad \langle \rho, y \rangle = -\int_0^1 P\overline{y'}\,dx + P\overline{y}\Big|_0^1$$

требуется также указание „граничных значений“ $P(0)$ и $P(1)$ [II. § 1.5 (1)]. Если обобщённая первообразная P является непрерывной, то на роль таких значений естественным образом выбираются „обычные“ граничные значения функции P. Соответственно, полуторалинейная форма операторов $T_\rho(\lambda)$ из пучка $T_\rho\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(W_2^1[0,1], W_2^{-1}[0,1])$, отвечающего граничной задаче

$$-y'' - \lambda\rho y = 0, \tag{1}$$

$$y'(0) - \gamma_0 y(0) = y'(1) + \gamma_1 y(1) = 0, \tag{2}$$

где $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$, а вес $\rho \in W_2^1[0,1]$ представляет собой обобщённую первообразную самоподобной функции $P \in C[0,1]$ канторовского типа, принимает вид

$$\langle T_\rho(\lambda)y, z \rangle \equiv \int_0^1 \left\{ y'\overline{z'} + \lambda P \cdot (y\overline{z})' \right\} dx + \\ + \gamma_0\, y(0)\overline{z(0)} + (\gamma_1 - \lambda)\, y(1)\overline{z(1)}. \tag{3}$$

С учётом утверждения II. § 1.5.3, любая функция $y \in W_2^1[0,1]$, принадлежащая ядру определённого тождеством (3) оператора $T_\rho(\lambda)$, обладает абсолютно непрерывной квазипроизводной $y^{[1]} \rightleftharpoons y' + \lambda P y$, удовлетворяющей понимаемым в смысле обобщённого дифференцирования равенствам

$$(y^{[1]})' = -\lambda^2 P^2 y + \lambda P y^{[1]},$$
$$y^{[1]}(0) - \gamma_0 y(0) = y^{[1]}(1) + (\gamma_1 - \lambda) y(1) = 0.$$

Ввиду непрерывности функции P, отсюда немедленно вытекает непрерывная дифференцируемость функции $y \in W_2^1[0,1]$ и связанная с этим возможность прямого понимания граничных условий (2). Отсюда же и из утверждения II. § 2.4.1 может быть получен следующий важный для дальнейшего факт.

2.1. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений операторного пучка* $T_\rho\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(W_2^1[0,1], W_2^{-1}[0,1])$ *вида* (3). *Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}$ *собственное значение* λ_n *является простым, причём любая отвечающая ему собственная функция не обращается в нуль на границе отрезка* $[0,1]$ *и имеет внутри этого отрезка в точности* n *различных, причём простых, нулей.*

3. Легко видеть [2 (3)], что замена коэффициентов γ_0 и γ_1 в граничных условиях 2 (2) приводит к возмущению каждого из соответствующих операторов $T_\rho(\lambda)$ некоторым оператором ранга 2. Из общей вариационной теории пучков самосопряжённых операторов потому следует, что считающие функции собственных значений различных третьих граничных задач, отвечающих одному и тому же уравнению 2 (1), не могут различаться более, чем на 2. Аналогичная связь имеется между считающими функциями третьей граничной задачи и задачи Дирихле — квадратичная форма которой получается из квадратичной формы третьей граничной задачи сужением на подпространство коразмерности 2. Тем самым, установленная утверждением IV. § 3.2.1 асимптотика считающей функции справедлива для спектров всех рассматриваемых далее граничных задач.

§ 2. Спектральная периодичность

1. Имеют место следующие два факта.

1.1. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений отвечающей уравнению* § 1.2 (1) *граничной задачи*

$$y'(0) = y'(1) = 0. \tag{1}$$

Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\lambda_{\varkappa n} = (\varkappa/a)\,\lambda_n. \tag{2}$$

Доказательство. Зафиксируем отвечающую собственному значению λ_n собственную функцию y_n, не обращающуюся в нуль на границе отрезка $[0,1]$ и имеющую внутри него в точности n различных нулей [§ 1.2.1]. Сопоставим ей нетривиальную функцию $z \in C[0,1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

1°. При любом выборе индекса $k \in 1\,..\,\varkappa-1$ функция z постоянна на интервале $(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$.

2°. При любом выборе индекса $k \in 0\,..\,\varkappa-1$ функция z_k вида

$$z_k(x) \rightleftharpoons z(\alpha_{2k} + ax)$$

совпадает с функцией y_n с точностью до мультипликативной постоянной.

С учётом сделанных в пункте § 1.2 замечаний, граничные условия (1) гарантируют непрерывную дифференцируемость функции z. При этом факт самоподобия функции $P \in C[0,1]$ позволяет легко проверить, что квазипроизводная $z^{[1]} \rightleftharpoons z' + (\varkappa/a)\,\lambda_n P z$ абсолютно непрерывна и подчиняется понимаемым в смысле обобщённого дифференцирования соотношениям

$$(z^{[1]})' = -(\varkappa/a)^2\,\lambda_n^2 P^2 z + (\varkappa/a)\,\lambda_n P z^{[1]},$$
$$z^{[1]}(0) = z^{[1]}(1) - (\varkappa/a)\,\lambda_n z(1) = 0.$$

Тем самым, функция z представляет собой собственную функцию граничной задачи § 1.2 (1), (1), отвечающую собственному значению $(\varkappa/a)\,\lambda_n$. При этом она имеет на интервале $(0,1)$ в точности $\varkappa n$ различных нулей, что и означает [§ 1.2.1] выполнение равенства (2). □

1.2. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений отвечающей уравнению* § 1.2 (1) *граничной задачи*

$$by'(0) - 2y(0) = by'(1) + 2y(1) = 0,$$

а $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи*

$$by'(0) - 2ay(0) = by'(1) + 2ay(1) = 0.$$

Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\lambda_{\varkappa(n+1)-1} = (\varkappa/a)\,\mu_n.$$

Доказательство проводится аналогичным доказательству утверждения 1.1 способом. Основное отличие заключается в том, что используемые при „сшивке“ копий исходной собственной функции горизонтальные отрезки заменяются на наклонные с нулями в центрах соответствующих интервалов $(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$.

Следует заметить, что утверждение 1.1, в отличие от утверждения 1.2, отмечалось в разное время многими авторами (см., например, [19, 80]).

§ 3. Критерий сингулярности

1. Имеют место следующие три факта.

1.1. *Пусть* A *и* B *— два различных вещественных числа, а* $f \in L_2[0,1]$ *— неубывающая функция, почти всюду на отрезке* $[0,1]$ *удовлетворяющая неравенствам* $A \leqslant f(x) \leqslant B$*. Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *найдётся ступенчатая функция* f_n *с не более чем* 2^n *точками разрыва на интервале* $(0,1)$*, тождественно равная* A *на некоторой правой окрестности точки* 0*, тождественно равная* B *на некоторой левой окрестности точки* 1*, и удовлетворяющая неравенству*

$$\|f - f_n\|_{L_2[0,1]} < 2^{-n} \cdot (B - A).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что функция f непрерывна, строго возрастает и удовлетворяет равенствам $f(0) = A$ и $f(1) = B$. Зафиксируем точки $\tau_k \in [0, 1)$, где $k \in 0\,..\,2^n$, определённые условиями $f(\tau_k) = A + k \cdot (B - A)/(2^n + 1)$, и рассмотрим ступенчатую функцию f_n, принимающую на каждом из полуинтервалов $[\tau_k, \tau_{k+1})$, где $k < 2^n$, значение $f(\tau_k)$, а также значение B на отрезке $[\tau_{2^n}, 1]$. При почти всех $x \in [0, 1]$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leqslant (B - A)/(2^n + 1)$, что означает справедливость оценки

$$\|f - f_n\|_{L_2[0,1]} \leqslant (2^n + 1)^{-1}(B - A).$$

Для завершения доказательства теперь остаётся заметить, что произвольную неубывающую и существенно ограниченную постоянными A и B функцию можно сколь угодно точно приблизить в смысле метрики пространства $L_2[0, 1]$ непрерывной функцией рассмотренного выше вида. $\square$

1.2. *Пусть $f \in L_2[0, 1]$ — ограниченная неубывающая чисто сингулярная функция. Тогда найдётся последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ неубывающих ступенчатых функций, удовлетворяющая при $n \to \infty$ асимптотическому соотношению*

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2) \cdot \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1),$$

где через $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ обозначена последовательность множеств точек разрыва функций f_n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем вещественное число $\varepsilon > 0$ и представим [61: Теорема 13.3] сингулярную функцию f в виде суммы двух ограниченных неубывающих функций g и h следующего вида:

1°. Найдётся вещественное число C, почти всюду на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяющее соотношениям $C \leqslant g(x) \leqslant C + \varepsilon$.

2°. Найдётся система $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{m}$ попарно непересекающихся интервалов, содержащая все точки роста функции h и имеющая не превосходящую ε^2 суммарную длину.

Обозначим через a_k длины интервалов Γ_k, а через d_k — приращения функции h на этих интервалах. Согласно утверждению 1.1, при любом $n \in \mathbb{N}$ найдётся ступенчатая функция h_n со следующими свойствами:

1°. Все точки разрыва функции h_n содержатся в объединении интервалов Γ_k.

2°. На каждом из интервалов Γ_k, где $k \in 1 \,..\, m$, функция h_n имеет не более $2^n d_k + 1$ точек разрыва.

3°. Выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\|h - h_n\|^2_{L_2[0,1]} &\leqslant \sum_{k=1}^{m} (2^{n-1} d_k + 1/2)^{-2} \cdot 4 a_k\, d_k^2 \\ &\leqslant 4^{2-n} \cdot \sum_{k=1}^{m} a_k \\ &\leqslant 4^{2-n} \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Аналогичным образом, найдётся имеющая на интервале $(0,1)$ не более 2^n точек разрыва ступенчатая функция g_n со свойством

$$\|g - g_n\|_{L_2[0,1]} < 2^{1-n} \varepsilon.$$

При этом функция $f_n \rightleftharpoons h_n + g_n$ имеет не более

$$2^n \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{m} d_k\right) + m$$

точек разрыва на интервале $(0,1)$ и аппроксимирует в смысле среднего квадратичного функцию f с точностью не хуже $2^{3-n}\varepsilon$. Соответственно, при достаточно больших значениях n произведение увеличенного на 2 числа точек разрыва функции f_n и величины $\|f - f_n\|_{L_2[0,1]}$ заведомо допускает оценку $8\varepsilon \cdot (2 + B - A)$, где A и B — произвольным образом фиксированные нижняя и верхняя существенные грани функции f. Ввиду произвольности выбора величины $\varepsilon > 0$, полученные результаты означают справедливость доказываемого утверждения. $\square$

1.3. *Пусть* $f \in L_2[0,1]$ *— ограниченная неубывающая функция,* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность неубывающих ступенчатых функций, а* $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность множеств точек разрыва функций* f_n*. Пусть также при* $n \to \infty$ *выполняется асимптотическое соотношение*

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2) \cdot \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1).$$

Тогда монотонная функция f *является чисто сингулярной.*

Доказательство. Заметим, что без ограничения общности рассмотрения можно считать, что при любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} \neq 0, \\ 2(n+1)^4 \cdot (\#\mathfrak{A}_n + 2) \cdot \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} < 1. \end{gathered} \tag{1}$$

Это и будет далее предполагаться.

Введём в рассмотрение функции $\varphi_n \colon [0,1] \to [0,1]$ вида

$$\varphi_n(x) \coloneqq \inf\bigl\{1,\ \|f - f_n\|_{L_2[0,1]}^{-1} \operatorname{dist}(x, \mathfrak{A}_n \cup \{0,1\})\bigr\}. \tag{2}$$

Независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ функция φ_n является абсолютно непрерывной, и абсолютная величина её производной φ_n' почти всюду мажорируется величиной $\|f - f_n\|_{L_2[0,1]}^{-1}$. Кроме того, при любом $n \in \mathbb{N}$ функция φ_n тождественно равна 1 на некотором открытом множестве, мера дополнения которого не превосходит [(1)] величины $(n+1)^{-4}$. Соответственно, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_n\, df &= \int_0^1 \varphi_n\, df_n + \int_0^1 \varphi_n\, d(f - f_n) \\ &= \int_0^1 \varphi_n\, d(f - f_n) && [(2)] \\ &= -\int_0^1 (f - f_n)\varphi_n'\, dx && [(2)] \\ &\leqslant \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} \cdot \|\varphi_n'\|_{L_2[0,1]} \end{aligned}$$

$$\leqslant (n+1)^{-2},$$

$$\int_0^1 (1-\varphi_n)\,dx \leqslant (n+1)^{-4},$$

означающие сходимость числовых рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \varphi_n\,df, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (1-\varphi_n)\,dx.$$

Тогда, согласно теореме Б. Леви, множество точек сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$$

пренебрежимо по линейной мере Лебега и обладает дополнением, пренебрежимым по мере с функцией распределения f. □

Отметим, что в литературе известны некоторые близкие по стилю к установленному в настоящем параграфе критерию сингулярности монотонной функции результаты об аппроксимации гладких функций сплайнами (см., например, [63]). Аналогичным образом, вопросы точности приближений случайных величин их конечнозначными функциями рассматривались в монографии [81: § I.3].

§ 4. Уточнение характеристик спектра

1. Основной целью настоящего параграфа является установление применительно к рассматриваемым нами граничным задачам с весом канторовского типа следующего факта.

1.1. *Коэффициент s из установленной утверждением IV. § 3.2.1 асимптотики*

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{ind} T_\rho(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln\lambda) + o(1)]$$

допускает представление

$$(\forall t \in [0,\nu]) \qquad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t),$$

где σ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.

Этот факт обладает, в частности, таким тривиальным следствием:

1.2. *Коэффициент s из асимптотики (1) не является постоянной функцией.*

Действительно, постоянность функции s равносильна выполнению на отрезке $[0,\nu]$ тождества $\sigma(t)\equiv\mathrm{const}\cdot e^{Dt}$, гарантирующего абсолютную непрерывность функции σ.

2. При доказательстве утверждения 1.1 нами будет использоваться следующий факт.

2.1. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи*

$$-y''-\lambda\rho y=0, \tag{1}$$

$$y'(0)=y'(1)=0, \tag{2}$$

а $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ — аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи

$$y'(0)-\gamma_0 y(0)=y'(1)+\gamma_1 y(1)=0,$$

где $\gamma_0,\ \gamma_1\geqslant 0$. Тогда последовательность частичных сумм числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\ln\mu_n-\ln\lambda_n|$$

является ограниченной.

Доказательство. Обозначим через $J\colon W_2^{-1}[0,1]\to W_2^1[0,1]$ изометрию

$$\langle Jy,z\rangle_{W_2^1[0,1]}\equiv\langle y,z\rangle,$$

Зафиксируем также произвольное значение $\varepsilon>0$. Из тождества § 1.2 (3) вытекает, что квадратичная форма оператора $JT_\rho(-\varepsilon)\colon W_2^1[0,1]\to W_2^1[0,1]$, отвечающего граничной задаче (1), (2), является неотрицательной, а оператор $JT_\rho(-\varepsilon)-1$ является вполне непрерывным. При этом любая функция $y\in\ker JT_\rho(-\varepsilon)$ должна удовлетворять равенству

$$\int_0^1|y'|^2\,dx+\varepsilon\int_0^1|y|^2\,dP=0,$$

означающему тождественное обращение её в нуль. Объединяя сказанное, устанавливаем, что $JT_\rho(-\varepsilon)$ представляет собой равномерно положительный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $W_2^1[0,1]$. Введя обозначение $S \rightleftharpoons [JT_\rho(-\varepsilon)]^{-1/2}$, находим теперь, что последовательности $\{\lambda_n+\varepsilon\}_{n=0}^\infty$ и $\{\mu_n+\varepsilon\}_{n=0}^\infty$ образуют, соответственно, спектры линейных пучков

$$1-\lambda SJ\rho S, \tag{3}$$

$$(1+K)-\lambda SJ\rho S, \tag{4}$$

где K — неотрицательный оператор конечного ранга с квадратичной формой

$$\langle Ky,y\rangle_{W_2^1[0,1]} \equiv \gamma_0\,|[Sy](0)|^2+\gamma_1\,|[Sy](1)|^2.$$

Знак ρ использован в (3) и (4) для обозначения действующего из $W_2^1[0,1]$ в $W_2^{-1}[0,1]$ ограниченного оператора умножения на обобщённую весовую функцию. Согласно утверждению V. § 2.4.2, полученные результаты означают, что последовательность частичных сумм числового ряда

$$\sum_{n=1}^\infty \ln\left(\frac{\mu_n+\varepsilon}{\lambda_n+\varepsilon}\right)=\sum_{n=1}^\infty\left[\ln\frac{\mu_n}{\lambda_n}+\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\mu_n}\right)-\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{\lambda_n}\right)\right]$$

является неубывающей и ограниченной. Отсюда, с учётом известной из IV. § 3.2.1 асимптотики 1 (1) и неравенства $D<1$ [§ 1.1], немедленно получаем искомое. □

3. Перейдём теперь к доказательству собственно утверждения 1.1. Через $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ при этом мы, как и при доказательстве утверждения 2.1, будем обозначать последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи 2 (1), 2 (2).

Заметим [1 (1)], что при почти всех $t\in[0,\nu]$ выполняется равенство $\sigma(t)=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k(t)$, где положено $\sigma_k(t)\rightleftharpoons \varkappa^{-k}\operatorname{ind}T_\rho(e^{k\nu+t})$. Заметим также, что независимо от выбора индекса $k\in\mathbb{N}$ для всех $t\in[0,\nu]$, удовлетворяющих при некотором $n\in\mathbb{N}$ неравенствам

$$\lambda_{\varkappa(n+1)-1}<e^{(k+1)\nu+t}<\lambda_{\varkappa(n+1)},$$

значения функций σ_k и σ_{k+1} совпадают [§ 2.1.1], а для почти всех прочих $t \in [0,\nu]$ различаются не более чем на $\varkappa^{-k}$. При этом последовательность частичных сумм ряда

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\ln \lambda_{\varkappa(n+1)-1} - \ln \lambda_{\varkappa n}|$$

является ограниченной [§ 2.1.1, § 2.1.2, 2.1], а потому при $k \to \infty$ меры множеств

$$(2) \qquad \{t \in [0,\nu] \ : \ \sigma_{k+1}(t) \neq \sigma_k(t)\}$$

имеют асимптотику $o(1)$. Соответственно, справедливы оценки

$$\|\sigma_{k+1} - \sigma_k\|_{L_2[0,\nu]} = o(\varkappa^{-k}),$$

а тогда и вытекающая из этих оценок асимптотика

$$\|\sigma_k - \sigma\|_{L_2[0,\nu]} = o(\varkappa^{-k}) \qquad \text{при } k \to \infty.$$

С учётом того факта, что число точек разрыва функций σ_k заведомо [1 (1)] допускает при $k \to \infty$ оценку класса $O(\varkappa^k)$, это и означает [§ 3.1.3] справедливость доказываемого утверждения.

4. Как уже отмечалось, с точки зрения конструктивного математического анализа ограниченность последовательности частичных сумм ряда 3 (1) не гарантирует возможности эффективной оценки скорости сходимости мер множеств 3 (2) к нулю. В отличие от ситуации из параграфа V. § 2, однако, в данном случае это обстоятельство не оказывает влияния на конструктивный статус окончательного результата ввиду заведомой возможности выбора из квазисходящейся к нулю последовательности величин $\varkappa^k \cdot \|\sigma_k - \sigma\|_{L_2[0,\nu]}$ эффективно бесконечно малой подпоследовательности (и дальнейшего применения конструктивного варианта признака § 3.1.3 к соответствующей функциональной подпоследовательности $\{\sigma_{k_n}\}_{n=0}^{\infty}$).

§ 5. Задача четвёртого порядка

1. Распространим теперь развитую выше конструкцию на случай граничных задач для уравнения

$$y^{(4)} - \lambda\rho y = 0,$$
$$(U-1)y^{\vee} + i(U+1)y^{\wedge} = 0,$$

где, как и ранее, $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ есть плотность самоподобной сингулярной меры канторовского типа. Как и в случае задачи второго порядка, граничные условия мы в ходе исследования будем рассматривать не в максимальной общности, а допускающими запись в виде

$$\begin{aligned} y''(0) + \alpha y(0) - \beta y'(0) = -\beta y'''(0) + \alpha y''(0) = \\ = y''(1) + \alpha y(1) + \beta y'(1) = -\beta y'''(1) - \alpha y''(1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha \geqslant 0$ и $\beta > 0$. Указанной граничной задаче отвечает линейный пучок $T_\rho\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(W_2^2[0,1], W_2^{-2}[0,1])$ операторов вида

$$\begin{aligned} \langle T_\rho(\lambda)y, y\rangle \equiv \int_0^1 |y''|^2\,dx + \\ + \frac{|\alpha y(0) - \beta y'(0)|^2 + |\alpha y(1) + \beta y'(1)|^2}{\beta} - \lambda\,\langle \rho, |y|^2\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом пара $\{\lambda, y\}$, составленная из числа $\lambda \in \mathbb{C}$ и нетривиальной функции $y \in W_2^2[0,1]$, является собственной парой пучка T_ρ в том и только том случае, когда функции y'' и $y''' - \lambda P y$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют уравнению

$$[y''' - \lambda P y]' + \lambda P y' = 0 \tag{3}$$

совместно с граничными условиями (1).

2. Осцилляционные теоремы для граничных задач четвёртого порядка, как уже отмечалось ранее в главе II, хорошо известны в литературе (см., например, [91, 41, 76]). В настоящем пункте мы приведём их в удобной для наших целей форме (давая необходимые ссылки при прямом заимствовании известных фактов).

2.1. *Пусть* $\lambda > 0$*, а* $y \in C^3[0,1]$ *есть нетривиальное решение уравнения* 1 (3)*, удовлетворяющее при некотором* $a \in [0,1)$ *неравенствам*

$$y(a) \geqslant 0, \qquad y'(a) \geqslant 0, \qquad y''(a) \geqslant 0, \qquad y'''(a) \geqslant 0.$$

Тогда выполняются также неравенства

$$y(1) > 0, \qquad y'(1) > 0, \qquad y''(1) > 0, \qquad y'''(1) > 0.$$

Доказательство. Пусть $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность функций класса $C^1[0,1]$, равномерно стремящихся к функции P, удовлетворяющих равенствам $P_n(a) = P(a)$ и имеющих равномерно на отрезке $[0,1]$ положительные производные. Пусть также $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность решений начальных задач

$$\begin{gathered} [y_n''' - \lambda P_n y_n]' + \lambda P_n y_n' = 0, \\ y_n^{(k)}(a) = y^{(k)}(a), \qquad k \in 0\,..\,3. \end{gathered}$$

Стандартными методами теории линейных дифференциальных уравнений для вектор-функций [51: § 16] легко устанавливается факт равномерной на отрезке $[0,1]$ сходимости последовательностей $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n'\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n''\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n''' - \lambda P_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$ к функциям y, y', y'' и $y''' - \lambda P y$, соответственно.

Согласно [91: Lemma 2.1], каждая из функций y_n, y_n', y_n'' и y_n''' строго положительна и возрастает на полуинтервале $(a,1]$. Соответственно, независимо от выбора точки $x \in (a,1)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y_n'''(1) &\geqslant \int_x^1 y_n^{(4)}(t)\,dt \\ &= \int_x^1 \lambda P_n'(t) y_n(t)\,dt \\ &\geqslant \int_x^1 \lambda P_n'(t)\,dt \cdot y_n(x) \\ &= \lambda \cdot [P_n(1) - P_n(x)]\, y_n(x). \end{aligned}$$

Посредством предельного перехода теперь немедленно устанавливается факт неотрицательности и неубывания на полуинтервале $(a,1]$ каждой из функций y, y', y' и y''', а также справедливость оценок

$$(\forall x \in (a,1)) \qquad y'''(1) \geqslant \lambda \cdot [P(1) - P(x)]y(x). \tag{1}$$

При этом, ввиду нетривиальности функции y, заведомо найдется величина $\gamma > 0$ со свойством

$$(\forall x \in (a,1]) \qquad y(x) \geqslant \gamma \cdot (x-a)^3. \tag{2}$$

Объединяя оценки (1) и (2) с немедленно вытекающим из данного в пункте § 1.1 определения самоподобной функции канторовского типа фактом непостоянности функции P в любой левой окрестности точки 1, убеждаемся в выполнении неравенства $y'''(1) > 0$. Тогда, в силу теоремы Лагранжа о среднем значении, верны и прочие искомые неравенства. □

2.2. *Пусть $\lambda > 0$, а $y \in C^3[0,1]$ есть нетривиальное решение уравнения 1 (3), удовлетворяющее при некотором $a \in (0,1]$ неравенствам*

$$y(a) \geqslant 0, \qquad y'(a) \leqslant 0, \qquad y''(a) \geqslant 0, \qquad y'''(a) \leqslant 0.$$

Тогда выполняются также неравенства

$$y(0) > 0, \qquad y'(0) < 0, \qquad y''(0) > 0, \qquad y'''(0) < 0.$$

Утверждение 2.2 доказывается полностью аналогичным утверждению 2.1 образом.

3. Имеют место следующие два факта.

3.1. *Спектр пучка* $T_\rho\colon \mathbb{C}\to\mathcal{B}(W_2^2[0,1],W_2^{-2}[0,1])$ *вида* 1 (2) *составлен последовательностью* $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ *неотрицательных — а в случае* $\alpha>0$ *даже строго положительных — простых собственных значений. Независимо от выбора индекса* $n\in\mathbb{N}$ *отвечающая собственному значению* λ_n *собственная функция* y_n *имеет только простые нули и удовлетворяет условиям* $y_n(0)\neq 0$ *и* $y_n(1)\neq 0$.

Доказательство. Из представления 1 (2) немедленно вытекает, что ядро оператора $T_\rho(0)$ образовано линейными функциями, удовлетворяющими равенствам

$$\alpha y(0)-\beta y'(0)=\alpha y(1)+\beta y'(1)=0.$$

В случае $\alpha>0$ единственной такой функцией является тождественно нулевая. Соответственно, в этом случае все собственные значения пучка T_ρ строго положительны. В случае $\alpha=0$ такие функции образуют одномерное подпространство постоянных функций.

Пусть некоторое собственное значение $\lambda>0$ пучка T_ρ обладает собственной функцией y со свойством $y(0)=0$. Тогда без ограничения общности рассмотрения можно считать, что функция y вещественнозначна, а знаки величин $y'(0)$, $y''(0)$ и $y'''(0)$ совпадают [1 (1)]. Однако это влечёт противоречащее граничным условиям 1 (1) совпадение знаков величин $y''(1)\neq 0$ и $y'''(1)\neq 0$ [2.1].

Пусть некоторое собственное значение $\lambda>0$ пучка T_ρ обладает собственной функцией y со свойством $y(1)=0$. Тогда без ограничения общности рассмотрения можно считать, что функция y вещественнозначна, а знаки величин $-y'(1)$, $y''(1)$ и $-y'''(1)$ совпадают [1 (1)]. Однако это влечет противоречащее граничным условиям 1 (1) совпадение знаков величин $y''(0)\neq 0$ и $-y'''(0)\neq 0$ [2.2].

Пусть некоторое собственное значение $\lambda>0$ пучка T_ρ является кратным. Тогда ему должна соответствовать собственная функция y со свойством $y(0)=0$, что противоречит сказанному ранее.

Наконец, пусть для некоторого собственного значения $\lambda>0$ пучка T_ρ существует кратный нуль $a\in(0,1)$ соответствующей собственной функции y. Совпадение знаков величин $y''(a)$ и $y'''(a)$ означает противоречащее граничным условиям 1 (1) совпадение знаков величин $y''(1) \neq 0$ и $y'''(1) \neq 0$ [2.1]. Различие указанных знаков означает противоречащее граничным условиям 1 (1) совпадение знаков величин $y''(0) \neq 0$ и $-y'''(0) \neq 0$ [2.2]. □

3.2. *В случае $\alpha > 0$ оператор $[T_\rho(0)]^{-1}T'_\rho(0)\colon W_2^2[0,1] \to W_2^2[0,1]$ не увеличивает числа перемен знака никакой вещественнозначной функции.*

Доказательство. Ввиду непрерывной в смысле равномерной операторной топологии зависимости оператора $[T_\rho(0)]^{-1}T'_\rho(0)$ от выбора весовой функции $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$, достаточно рассмотреть случай, когда функция ρ непрерывна и равномерно положительна. Иначе говоря, достаточно установить, что независимо от выбора натуральных чисел $n > 0$ и m наличие у удовлетворяющей граничным условиям 1 (1) вещественнозначной функции $y \in C^4[0,1]$ не менее $n + (4-m)^+$ перемен знака влечет наличие не менее n перемен знака у функции $y^{(4)}$. В случае $m = 0$ этот факт немедленно вытекает из теоремы Лагранжа о среднем значении. Общий случай будет сейчас рассмотрен нами на основе индукции по параметру m.

Итак, предположим, что независимо от значения $n > 0$ наличие у произвольной удовлетворяющей граничным условиям 1 (1) вещественнозначной функции $y \in C^4[0,1]$ не менее $n + 1 + (4-m)^+$ перемен знака заведомо влечет наличие не менее n перемен знака у функции $y^{(4)}$. Пусть также некоторая вещественнозначная функция $y \in C^4[0,1]$ удовлетворяет граничным условиям 1 (1), и пусть найдутся $n+1+(4-m)^+$ упорядоченных по возрастанию точек

$$0 < \xi_{0,1} < \ldots < \xi_{0,n+1+(4-m)^+} < 1$$

со свойствами $y(\xi_{0,k}) \cdot y(\xi_{0,k+1}) < 0$, где $k \in 1\,.\,.\,n + 1 + (4-m)^+$. Согласно теореме Лагранжа, найдутся $n + (4-m)^+$ точек $\xi_{1,k} \in (\xi_{0,k}, \xi_{0,k+1})$ со свойствами $y'(\xi_{1,k}) \cdot y(\xi_{0,k}) < 0$. При этом либо найдется точка $\xi \in (0, \xi_{0,1})$ со свойством $y(\xi) \cdot y(\xi_{0,1}) < 0$, либо $y'(0) \cdot y'(\xi_{1,1}) < |y'(\xi_{1,1})|^2$, либо $y''(0) \cdot y'(\xi_{1,1}) > 0$.

Обоснование указанной альтернативы использует фигурирующее среди граничных условий 1 (1) выражение величины $y''(0)$ через $y(0)$ и $y'(0)$. В первом случае функция y имеет не менее $n+1+(4-m)^+$ перемен знака, что, по предположению индукции, означает наличие не менее n перемен знака у функции $y^{(4)}$. Во втором и третьем случаях найдется точка $\xi_{2,1} \in (0, \xi_{1,1})$ со свойством $y''(\xi_{2,1}) \cdot y'(\xi_{1,1}) > 0$. Аналогичным образом, либо найдется точка $\xi \in (\xi_{0,n+1+(4-m)^+}, 1)$ со свойством $y(\xi) \cdot y(\xi_{0,n+1+(4-m)^+}) < 0$, либо $y'(1) \cdot y'(\xi_{1,n+(4-m)^+}) < |y'(\xi_{1,n+(4-m)^+})|^2$, либо $y''(1) \cdot y'(\xi_{1,n+(4-m)^+}) < 0$. В первом случае функция y имеет не менее $n+1+(4-m)^+$ перемен знака. Во втором и третьем случаях найдется точка $\xi_{2,n+1+(4-m)^+} \in (\xi_{1,n+(4-m)^+}, 1)$ со свойством $y''(\xi_{2,n+1+(4-m)^+}) \cdot y'(\xi_{1,n+(4-m)^+}) < 0$.

Объединяя сказанное, получаем, что либо функция $y^{(4)}$ имеет не менее n перемен знака, либо найдутся $n+1+(4-m)^+$ упорядоченных по возрастанию точек

$$0 < \xi_{2,1} < \ldots < \xi_{2,n+1+(4-m)^+} < 1$$

со свойствами $y''(\xi_{2,k}) \cdot y''(\xi_{2,k+1}) < 0$. Во втором случае, согласно граничным условиям 1 (1), выполняется либо неравенство $y''(0) \cdot y''(\xi_{2,1}) < |y''(\xi_{2,1})|^2$, либо неравенство $y'''(0) \cdot y''(\xi_{2,1}) > 0$. В обоих подслучаях найдется точка $\xi_{3,0} \in (0, \xi_{2,1})$ со свойством $y'''(\xi_{3,0}) \cdot y''(\xi_{2,1}) > 0$. Аналогичным образом, выполняется либо неравенство $y''(1) \cdot y''(\xi_{2,n+1+(4-m)^+}) < |y''(\xi_{2,n+1+(4-m)^+})|^2$, либо неравенство $y'''(1) \cdot y''(\xi_{2,n+1+(4-m)^+}) < 0$. В обоих подслучаях найдется точка $\xi_{3,n+1+(4-m)^+} \in (\xi_{2,n+1+(4-m)^+}, 1)$ со свойством $y'''(\xi_{3,n+1+(4-m)^+}) \cdot y''(\xi_{2,n+1+(4-m)^+}) < 0$. Соответственно, функция y''' имеет не менее $n+1+(4-m)^+$ перемен знака, что, согласно теореме Лагранжа, означает наличие не менее $n+(4-m)^+ \geqslant n$ перемен знака у функции $y^{(4)}$. Шаг индукции тем самым завершён. $\square$

4. Имеют место следующие два факта.

4.1. *Пусть вещественнозначная функция $f \in W_2^2[0,1]$ удовлетворяет неравенствам $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 0$ и имеет на интервале $(0,1)$ ровно n, причем простых, нулей. Тогда существует величина $\varepsilon > 0$, для которой любая вещественнозначная функция $y \in W_2^2[0,1]$ со свойством $\|y - f\|_{W_2^2[0,1]} < \varepsilon$ также имеет на интервале $(0,1)$ ровно n простых нулей.*

Это утверждение тривиальным образом вытекает из факта непрерывности естественного вложения $W_2^2[0,1] \hookrightarrow C^1[0,1]$.

4.2. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений пучка T_ρ. Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ отвечающая собственному значению λ_n собственная функция y_n имеет в точности n нулей на интервале $(0,1)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\alpha > 0$. Заметим, что с каждой вещественнозначной функцией вида

$$f = \sum_{k=0}^{n} c_k y_k \tag{1}$$

можно связать [3.1] функциональную последовательность $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ вида

$$f_m \rightleftharpoons \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda_k^m \lambda_n^{-m} y_k .$$

Эта последовательность очевидным образом удовлетворяет равенствам $f_m = \lambda_n \cdot [T_\rho(0)]^{-1} T'_\rho(0) f_{m+1}$, а ее пределом в пространстве $W_2^2[0,1]$ является [3.1] функция $c_n y_n$. Соответственно [3.2, 3.1, 4.1], при $c_n \neq 0$ число знакоперемен функции f минорирует число нулей функции y_n. Однако, ввиду линейной независимости семейства собственных функций пучка T_ρ, заведомо найдется функция вида (1), удовлетворяющая условию $c_n \neq 0$ и имеющая не менее n перемен знака на интервале $(0,1)$. Тем самым, функция y_n имеет не менее n нулей.

Далее, зафиксируем нетривиальный вещественнозначный многочлен Q не превышающей n степени, принадлежащий инвариантному подпространству оператора $[T_\rho(0)]^{-1}T'_\rho(0)$, которое отвечает дополнительной к набору $\{\lambda_k\}_{k=0}^{n-1}$ части спектра. Ввиду бесконечности носителя весовой функции ρ, многочлен Q не может быть элементом ядра оператора $[T_\rho(0)]^{-1}T'_\rho(0)$. Соответственно, существует номер $N \geqslant n$, для которого функциональная последовательность $\{Q_m\}_{m=0}^{\infty}$ вида

$$Q_m \rightleftharpoons \lambda_N^m\{[T_\rho(0)]^{-1}T'_\rho(0)\}^m Q$$

сойдется в пространстве $W_2^2[0,1]$ к нетривиальному кратному собственной функции y_N. При этом [3.2, 3.1, 4.1] число нулей функции y_N не может превосходить числа знакоперемен многочлена Q, а тогда и величину n. Объединяя сказанное, убеждаемся в выполнении равенства $N = n$ и наличии у собственной функции y_n в точности n нулей на интервале $(0,1)$.

Распространение полученных результатов на общий случай $\alpha \geqslant 0$ проводится предельным переходом с учетом утверждений 3.1 и 4.1. □

5. Перейдём теперь к установлению свойства спектральной периодичности для задач четвёртого порядка. Имеют место следующие два факта.

5.1. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений линейного операторного пучка $T_\rho\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(W_2^2[0,1], W_2^{-2}[0,1])$ вида 1 (2) при $\alpha = 0$, $\beta = 2/b$, а $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ — аналогичная последовательность для пучка того же вида при $\alpha = 0$, $\beta = 2a/b$. Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство*

$$\lambda_{\varkappa n} = (\varkappa/a^3)\,\mu_n.$$

Доказательство. Ввиду очевидного выполнения искомого равенства для собственных значений $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, достаточно ограничиться рассмотрением случая $n > 0$.

Зафиксируем отвечающую собственному значению $\mu_n > 0$ собственную функцию $y \in W_2^2[0,1]$, имеющую на интервале $(0,1)$ в точности n

различных нулей и не обращающуюся в нуль на границе этого интервала [4.2, 3.1]. Ввиду простоты собственного значения μ_n, тождество $P(x) \equiv 1 - P(1-x)$ [§ 1.1.1] гарантирует, что удовлетворяющая уравнению

$$[y''' - \mu_n P y]' + \mu_n P y' = 0$$

и граничным условиям 1 (1) собственная функция y является относительно точки $1/2$ либо четной, либо нечетной. Это наблюдение позволяет построить функцию $z \in C^3[0,1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

1°. При любом выборе индекса $k \in 0\,..\,\varkappa - 1$ функция z_k вида

$$z_k(x) \rightleftharpoons z(k[a+b] + ax)$$

совпадает с функцией y с точностью до знака.

2°. При любом выборе индекса $k \in 1\,..\,\varkappa - 1$ на интервале $(k[a+b] - b, k[a+b])$ выполняется тождество

$$|z(x)| \equiv \left| y(0) + \frac{y''(0)}{2a^2} \cdot (x - k[a+b] + b) \cdot (x - k[a+b]) \right|.$$

Непосредственным вычислением с учетом факта самоподобия функции $P \in C[0,1]$ устанавливается, что функция z удовлетворяет уравнению

$$[z''' - (\varkappa/a^3)\,\mu_n P z]' + (\varkappa/a^3)\,\mu_n P z = 0.$$

Кроме того, из неравенства $y(0) \cdot y''(0) < 0$ [1 (1), 2.1] вытекает наличие у функции z в точности $\varkappa n$ нулей на интервале $(0,1)$. Тем самым, доказываемое утверждение справедливо [4.2]. □

5.2. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений линейного операторного пучка* $T_\rho\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(W_2^2[0,1], W_2^{-2}[0,1])$ *вида* 1 (2) *при* $\alpha = 12/b^2$, $\beta = 6/b$, *а* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— аналогичная последовательность для пучка того же вида при* $\alpha = 12a^2/b^2$, $\beta = 6a/b$. *Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\lambda_{\varkappa(n+1)-1} = (\varkappa/a^3)\,\mu_n.$$

Доказательство. Данное утверждение доказывается аналогичным утверждению 5.1 образом с тем основным отличием, что при „сшивке“ копий исходной собственной функции используются не квадратичные, а кубические параболы видов

$$\zeta_k \cdot \left[\frac{y''(0)}{3a^2b} \cdot \left(\zeta_k^2 - \frac{b^2}{4}\right) + \frac{2y(0)}{b}\right], \tag{1}$$

где положено $\zeta_k \rightleftharpoons x - k[a+b] + b/2$. Ввиду заведомого различия знаков величин $y(0)$ и $y''(0)$ [1 (1), 2.1], каждая из парабол (1) имеет на отвечающем ей интервале $(k[a+b]-b, k[a+b])$ единственный нуль. Последнее означает наличие у функции z в точности $\varkappa(n+1)-1$ нулей на интервале $(0,1)$. $\square$

6. Основным результатом настоящего параграфа выступает следующее утверждение.

6.1. *При $\lambda \to +\infty$ справедливо асимптотическое соотношение*

$$\operatorname{ind} T_\rho(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln\lambda) + o(1)], \tag{1}$$

где $D \rightleftharpoons \nu^{-1}\ln\varkappa$, $\nu \rightleftharpoons \ln\varkappa - 3\ln a$, а $s \in C(\mathbb{R})$ — ν-периодическая функция, допускающая на периоде $[0,\nu]$ представление

$$s(t) \equiv e^{-Dt}\sigma(t), \tag{2}$$

в котором σ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.

Доказательство. Заметим [1 (2)], что замена значений параметров α и β приводит к возмущению операторов пучка T_ρ некоторым оператором не превосходящего 4 ранга. Соответственно, главный член асимптотики считающей функции $\lambda \mapsto \operatorname{ind} T_\rho(\lambda)$ не зависит от выбора указанных значений. На протяжении оставшейся части доказательства в качестве основной будет рассматриваться задача вида $\alpha = 0$, $\beta = 2a/b$ с последовательностью собственных значений $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$. Последовательность собственных значений задачи $\alpha = 0$, $\beta = 2/b$ при этом будет обозначаться через $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$.

Введем в рассмотрение последовательность заданных на отрезке $[0,\nu]$ функций вида $\sigma_k(t) \rightleftharpoons \varkappa^{-k} \operatorname{ind} T_\rho(e^{k\nu+t})$. Заметим, что независимо от выбора значений $k, n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0,\nu]$ выполнение неравенств

$$\mu_n < e^{k\nu+t} \leqslant \mu_{n+1}$$

влечёт [5.1, 1 (2)] выполнение неравенств

$$\mu_{\varkappa n} \leqslant \lambda_{\varkappa n} < e^{(k+1)\nu+t} \leqslant \lambda_{\varkappa(n+1)} \leqslant \mu_{\varkappa(n+1)+2}.$$

Таким образом, при любых $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [0,\nu]$ выполняется неравенство

$$|\sigma_{k+1}(t) - \sigma_k(t)| \leqslant \varkappa^{-k}, \tag{3}$$

которое автоматически означает равномерную сходимость последовательности $\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ к некоторой функции σ со свойствами (1), (2).

Далее, независимо от выбора значений $k, n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0,\nu]$ выполнение неравенств

$$\sup\{\mu_{\varkappa(n+1)-1}, \lambda_{\varkappa n}\} < e^{(k+1)\nu+t} \leqslant \mu_{\varkappa(n+1)}$$

влечёт выполнение равенства $\sigma_{k+1}(t) = \sigma_k(t)$. При этом, путём почти дословного повторения рассуждений из пункта § 4.3, устанавливается [5.1, 5.2] ограниченность последовательностей частичных сумм рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln \mu_{\varkappa(n+1)-1} - \ln \mu_{\varkappa n}|, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\ln \lambda_{\varkappa n} - \ln \mu_{\varkappa n}|.$$

Соответственно, последовательность мер множеств вида

$$\{t \in [0,\nu] \ : \ \sigma_{k+1}(t) \neq \sigma_k(t)\}$$

имеет при $k \to \infty$ асимптотику $o(1)$, что влечёт [(3)] справедливость асимптотических соотношений

$$\|\sigma_{k+1} - \sigma_k\|_{L_2[0,1]} = o(\varkappa^{-k}),$$
$$\|\sigma_k - \sigma\|_{L_2[0,1]} = o(\varkappa^{-k}).$$

Поскольку, ввиду отмеченной ранее [(3)] равномерной по $k \in \mathbb{N}$ ограниченности функций σ_k, число точек разрыва этих функций имеет при $k \to \infty$ асимптотику $O(\varkappa^k)$, то для завершения доказательства остаётся лишь учесть признак сингулярности § 3.1.3. $\square$

n	λ_n	$6\lambda_n$	λ_{2n}
1	$7,0974\,(\pm 10^{-4})$	$42,584\,(\pm 10^{-3})$	$42,584\,(\pm 10^{-3})$
2	$42,584\,(\pm 10^{-3})$	$255,51\,(\pm 10^{-2})$	$255,51\,(\pm 10^{-2})$
3	$61,344\,(\pm 10^{-3})$	$368,06\,(\pm 10^{-2})$	$368,06\,(\pm 10^{-2})$
4	$255,51\,(\pm 10^{-2})$	$1533,0\,(\pm 10^{-1})$	$1533,0\,(\pm 10^{-1})$
5	$272,98\,(\pm 10^{-2})$	$1637,9\,(\pm 10^{-1})$	$1637,9\,(\pm 10^{-1})$
6	$368,06\,(\pm 10^{-2})$	$2208,4\,(\pm 10^{-1})$	$2208,4\,(\pm 10^{-1})$
7	$383,55\,(\pm 10^{-2})$	$2301,3\,(\pm 10^{-1})$	$2301,3\,(\pm 10^{-1})$
8	$1533,0\,(\pm 10^{-1})$	$9198,2\,(\pm 10^{-1})$	$9198,2\,(\pm 10^{-1})$
9	$1548,0\,(\pm 10^{-1})$	$9288,3\,(\pm 10^{-1})$	$9288,3\,(\pm 10^{-1})$

Таблица 1. Оценки первых собственных значений задачи Неймана для случая $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$.

n	μ_n	$6\mu_n$	λ_{2n+1}
0	$3,2983\,(\pm 10^{-4})$	$19,790\,(\pm 10^{-3})$	$19,790\,(\pm 10^{-3})$
1	$12,558\,(\pm 10^{-3})$	$75,349\,(\pm 10^{-3})$	$75,349\,(\pm 10^{-3})$
2	$48,946\,(\pm 10^{-3})$	$293,67\,(\pm 10^{-2})$	$293,67\,(\pm 10^{-2})$
3	$65,832\,(\pm 10^{-3})$	$394,99\,(\pm 10^{-2})$	$394,99\,(\pm 10^{-2})$
4	$261,64\,(\pm 10^{-2})$	$1569,8\,(\pm 10^{-1})$	$1569,8\,(\pm 10^{-1})$

Таблица 2. Оценки первых собственных значений задачи $y'(0) - 2y(0) = 0$, $y'(1) + 2y(1) = 0$ для случая $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$.

§ 6. Примеры

1. Все таблицы из настоящего параграфа содержат данные, относящиеся к задачам второго и четвёртого порядков, весовой функцией в которых выступает обобщённая производная канторовой лестницы.

В таблице 1 представлены результаты численных расчётов для первых девяти положительных собственных значений задачи Неймана. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 2.1.1.

В таблице 2 представлены результаты численных расчётов для первых пяти собственных значений граничной задачи $y'(0) - 2y(0) = y'(1) + 2y(1) = 0$. Четвёртый столбец содержит собственные значения граничной

n	μ_n	$54\mu_n$	λ_n
1	$2,213\cdot 10^1\,(\pm 10^{-2})$	$1,195\cdot 10^3\,(\pm 10^0)$	$4,096\cdot 10^1\,(\pm 10^{-2})$
2	$8,172\cdot 10^2\,(\pm 10^{-1})$	$4,413\cdot 10^4\,(\pm 10^1)$	$1,195\cdot 10^3\,(\pm 10^0)$
3	$3,175\cdot 10^3\,(\pm 10^0)$	$1,714\cdot 10^5\,(\pm 10^2)$	$3,867\cdot 10^3\,(\pm 10^0)$
4	$3,849\cdot 10^4\,(\pm 10^1)$	$2,078\cdot 10^6\,(\pm 10^3)$	$4,412\cdot 10^4\,(\pm 10^1)$

Таблица 3. Оценки первых собственных значений задач четвёртого порядка с $\alpha = 0$, $\beta = 2$ и $\alpha = 0$, $\beta = 6$ для случая $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$.

n	μ_n	$54\mu_n$	λ_n
0	$8,299\cdot 10^0\,(\pm 10^{-3})$	$4,481\cdot 10^2\,(\pm 10^{-1})$	$4,096\cdot 10^1\,(\pm 10^{-2})$
1	$1,378\cdot 10^2\,(\pm 10^{-1})$	$7,443\cdot 10^3\,(\pm 10^0)$	$4,481\cdot 10^2\,(\pm 10^{-1})$
2	$1,631\cdot 10^3\,(\pm 10^0)$	$8,808\cdot 10^4\,(\pm 10^1)$	$3,867\cdot 10^3\,(\pm 10^0)$
3	$4,380\cdot 10^3\,(\pm 10^0)$	$2,365\cdot 10^5\,(\pm 10^2)$	$7,443\cdot 10^3\,(\pm 10^0)$
4	$4,586\cdot 10^4\,(\pm 10^1)$	$2,476\cdot 10^6\,(\pm 10^3)$	$6,251\cdot 10^4\,(\pm 10^1)$
5	$6,465\cdot 10^4\,(\pm 10^1)$	$3,491\cdot 10^6\,(\pm 10^3)$	$8,808\cdot 10^4\,(\pm 10^1)$

Таблица 4. Оценки первых собственных значений задач четвёртого порядка с $\alpha = 12$, $\beta = 6$ и $\alpha = 108$, $\beta = 18$ для случая $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$.

задачи $y'(0) - 6y(0) = y'(1) + 6y(1) = 0$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 2.1.2.

В таблице 3 представлены результаты численных расчётов для первых четырёх положительных собственных значений задач четвёртого порядка с $\alpha = 0$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 5.5.1.

Наконец, в таблице 4 представлены результаты численных расчётов для первых шести собственных значений задач четвёртого порядка с $\alpha \neq 0$. Данные таблицы иллюстрируют утверждение § 5.5.2.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Как отмечалось в начале главы IV, одним из направлений, по которому нами осуществляется развитие спектральной теории задач Штурма–Лиувилля с самоподобным весом, является включение в рассмотрение индефинитного случая. Однако одним из основных приложений такой теории выступает теория малых уклонений гауссовских случайных процессов относительно самоподобных мер (см., например, [93, 49]), каковая проблематика в её обычной постановке приводит к вопросу о спектральных свойствах лишь дефинитных задач Штурма–Лиувилля. Целью настоящего приложения является описание конструкции, потенциально связывающей с теоретико-вероятностной проблематикой также и индефинитные задачи. Изложение материала основано на работе [14].

§ 1. Общие конструкции

1. Обозначим через $\mathfrak{H}$ вещественное гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом [26: Гл. V, § 1]. Рассмотрим непрерывный в смысле нормы пространства $\mathfrak{H}$ центрированный гауссовский случайный процесс $\xi\colon [0,1] \to \mathfrak{H}$, и обозначим через K действующий в вещественном пространстве $L_2[0,1]$ интегральный оператор, ядром которого выступает ковариационная функция

$$\mathcal{K}(t,s) \rightleftharpoons \langle \xi(s), \xi(t) \rangle_{\mathfrak{H}}$$

процесса ξ. Далее всегда будет предполагаться, что образ оператора K является плотным в $L_2[0,1]$. Из этого предположения, в частности, вытекает инъективность оператора K. Обозначим через $\mathfrak{D}$ пространство $\operatorname{im} K^{1/2}$, снабжённое нормой

$$\|y\|_{\mathfrak{D}} \rightleftharpoons \|K^{-1/2}y\|_{L_2[0,1]}, \tag{1}$$

а через $\mathfrak{D}^*$ — двойственное к $\mathfrak{D}$ относительно $L_2[0,1]$ пространство, получаемое пополнением $L_2[0,1]$ по норме

$$\begin{aligned} \|y\|_{\mathfrak{D}^*} &\rightleftharpoons \sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}}=1} \langle y, z\rangle_{L_2[0,1]} \\ &= \langle Ky, y\rangle_{L_2[0,1]}^{1/2}. \end{aligned} \qquad [(1)]$$

Оператор K при этом продолжается по непрерывности до изометрии $J\colon \mathfrak{D}^* \to \mathfrak{D}$ со свойством

$$\langle y, Jz\rangle \equiv \langle y, z\rangle_{\mathfrak{D}^*}. \tag{2}$$

Заметим [26: Гл. V, § 1], что при любом выборе функции $\varphi \in C[0,1]$ интеграл

$$\xi_\varphi \rightleftharpoons \int_0^1 \varphi \cdot \xi \, dt$$

корректно определён как бохнеровский (и даже римановский) интеграл от $\mathfrak{H}$-значной функции. При этом выполняются не зависящие от выбора $\varphi \in C[0,1]$ соотношения

$$\begin{aligned} \|\xi_\varphi\|_{\mathfrak{H}}^2 &= \int_{[0,1]^2} \mathcal{K}(t,s)\varphi(s)\varphi(t)\, dt\, ds \\ &= \|\varphi\|_{\mathfrak{D}^*}^2, \end{aligned}$$

означающие возможность продолжения соответствия $\varphi \mapsto \xi_\varphi$ по непрерывности до изометрического вложения пространства $\mathfrak{D}^*$ в пространство $\mathfrak{H}$. Это наблюдение позволяет сопоставить каждому ортонормированному базису $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ пространства $\mathfrak{D}$ ортонормированное семейство $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$ случайных величин $\xi_k \rightleftharpoons \xi_{J^{-1}f_k}$, удовлетворяющее при любом выборе обобщённой функции $\varphi \in \mathfrak{D}^*$ равенству

$$\xi_\varphi = \sum_{k=0}^\infty \langle \varphi, f_k\rangle\, \xi_k. \tag{3} \qquad [(2)]$$

В частности, независимо от выбора значения $t \in [0,1]$ дельта-функция $\boldsymbol{\delta}_t$ с сосредоточенным в точке t носителем заведомо принадлежит пространству $\mathfrak{D}^*$ ввиду непрерывности ядра $\mathcal{K}$. Отвечающей этой дельта-функции случайной величиной является значение процесса $\xi(t)$, что автоматически влечёт [(3)] справедливость разложения

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\, \xi_k, \tag{4}$$

хорошо известного как ряд Карунена–Лоева. При этом, ввиду компактности множества дельта-функций в пространстве $\mathfrak{D}^*$, сходимость ряда (4) является равномерной по параметру $t \in [0,1]$.

2. Обозначим через M действующий в пространстве $L_2[0,1]$ интегральный оператор, ядром которого выступает ковариационная функция

$$\mathcal{M}(t,s) \rightleftharpoons \langle \xi^2(s), \xi^2(t) \rangle_{\mathfrak{H}}$$

квадрата рассматриваемого процесса ξ. Обозначим через $\mathfrak{M}$ пополнение пространства $L_2[0,1]$ по норме $\|y\|_{\mathfrak{M}} \rightleftharpoons \langle My, y \rangle^{1/2}_{L_2[0,1]}$. Повторяя рассуждения из предыдущего пункта, легко убеждаемся в возможности изометрического вложения пространства $\mathfrak{M}$ в пространство $\mathfrak{H}$ посредством соответствия

$$\tau_\rho \rightleftharpoons \int_0^1 \rho \cdot \xi^2 \, dt. \tag{1}$$

Имеет место следующий факт.

2.1. *При любом выборе функции $\rho \in C[0,1]$ и ортонормированного базиса $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ пространства $\mathfrak{D}$ последовательность $\{\tau_{\rho,n}\}_{n=0}^{\infty}$ случайных величин вида*

$$\tau_{\rho,n} \rightleftharpoons \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} r_{kl}(\rho) \cdot \xi_k \xi_l, \qquad r_{kl}(\rho) \rightleftharpoons \int_0^1 \rho \cdot f_k f_l \, dt,$$

сходится в пространстве $\mathfrak{H}$ к интегралу (1).

Доказательство. Заметим, что для любой пары случайных величин ζ, η с центральным нормальным совместным распределением выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\|\zeta^2-\eta^2\|_{\mathfrak{H}}^2 &= \langle(\zeta-\eta)^2,(\zeta+\eta)^2\rangle_{\mathfrak{H}}\\ &\leqslant \|(\zeta-\eta)^2\|_{\mathfrak{H}}\cdot\|(\zeta+\eta)^2\|_{\mathfrak{H}}\\ &= 3\|\zeta-\eta\|_{\mathfrak{H}}^2\cdot\|\zeta+\eta\|_{\mathfrak{H}}^2.\end{aligned}$$

Соответственно, последовательность квадратов частичных сумм ряда из правой части равенства 1 (4) равномерно по параметру $t\in[0,1]$ сходится в пространстве $\mathfrak{H}$ к случайной величине $\xi^2(t)$. Последний факт немедленно влечёт справедливость доказываемого утверждения. □

3. Имеют место следующие два факта, связанные с понятиями *ядерного* оператора и оператора *Гильберта–Шмидта* [[28]: Гл. III, §§ 8–9].

3.1. *Пусть R — самосопряжённый ядерный оператор в арифметическом гильбертовом пространстве ℓ_2, а $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$ — система независимых стандартных нормальных случайных величин. Тогда двойной ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\sum_{\{i,j\}\in\mathbb{N}^2}R_{ij}\zeta_i\zeta_j \tag{1}$$

сходится в пространстве $\mathfrak{H}$, причём норма его суммы не превосходит ядерной нормы оператора R.

Доказательство. Для любого конечного множества $\mathbb{F}\subset\mathbb{N}^2$ равенства $\|\zeta_i^2\|_{\mathfrak{H}}=\sqrt{3}$ и ортонормированность системы $\{\zeta_i\zeta_j\}_{i>j}$ означают справедливость оценки

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{\{i,j\}\in\mathbb{F}}R_{ij}\zeta_i\zeta_j\right\|_{\mathfrak{H}} &\leqslant \sqrt{3}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}|R_{ii}|+\left(2\cdot\sum_{\{i,j\}\in\mathbb{N}^2}|R_{ij}|^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\|R\|_1,\end{aligned}$$

где через $\|R\|_1$ обозначена ядерная норма оператора R. Поскольку последовательность $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ операторов с матричными элементами

$$(R_n)_{ij} \rightleftharpoons \begin{cases} R_{ij} & \text{при } \max(i,j) \leqslant n, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

сходится по ядерной норме к оператору R, полученный результат означает сходимость ряда (1) вместе с выполнением требуемой оценки нормы суммы. $\square$

3.2. *Пусть R — самосопряжённый оператор Гильберта–Шмидта в арифметическом гильбертовом пространстве ℓ_2, удовлетворяющий тождеству $R_{ii} \equiv 0$, а $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$ — система независимых стандартных нормальных случайных величин. Тогда двойной ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\{i,j\} \in \mathbb{N}^2} R_{ij} \zeta_i \zeta_j$$

сходится в пространстве $\mathfrak{H}$, причём норма его суммы совпадает с нормой Гильберта–Шмидта оператора R.

Справедливость данного утверждения немедленно вытекает из факта ортонормированности системы случайных величин $\{\zeta_i \zeta_j\}_{i>j}$.

§ 2. Винеровский процесс

1. Как хорошо известно, винеровский процесс определяется ковариационной функцией

$$\mathcal{K}(t,s) \equiv \inf(t,s),$$

представляющей собой функцию Грина граничной задачи

$$-y'' - \lambda y = 0,$$
$$y(0) = y'(1) = 0.$$

Соответственно, пространство $\mathfrak{D}$ в этом случае имеет вид

$$\mathfrak{D} = \{y \in W_2^1[0,1] : y(0) = 0\}, \qquad \|y\|_{\mathfrak{D}} = \|y'\|_{L_2[0,1]}.$$

Ковариационная функция квадрата винеровского процесса имеет вид

$$\mathcal{M}(t,s) \equiv 2\inf(t,s)^2 + ts.$$

Непосредственным вычислением легко проверяется справедливость следующего утверждения.

1.1. *Для любых функции $y \in L_2[0,1]$ и её первообразной Y вида*

$$Y(x) \equiv -\int_x^1 y\,dt$$

выполняются равенства

$$\|y\|_{\mathfrak{D}^*} = \|Y\|_{L_2[0,1]}, \tag{1}$$

$$\|y\|^2_{\mathfrak{M}} = \left(\int_0^1 Y\,dt\right)^2 + 4\int_0^1 t\,Y^2\,dt. \tag{2}$$

Также имеют место следующие два факта.

1.2. *Пространство $\mathfrak{D}^*$ непрерывным образом вложено в пространство $\mathfrak{M}$* [(1), (2)].

1.3. *Любой элемент пространства $\mathfrak{M}$ представляет собой мультипликатор из пространства $\mathfrak{D}$ в пространство $\mathfrak{D}^*$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $\rho \in C[0,1]$ и отвечающую ей первообразную P вида

$$P(x) \equiv -\int_x^1 \rho\,dt. \tag{3}$$

Тогда норма соответствующего самосопряжённого оператора умножения $R\colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}^*$ допускает оценки

$$\begin{aligned}\|R\| &= \sup_{\|y\|_{\mathfrak{D}}=1}\left|\int_0^1 \rho\cdot y^2\,dt\right| \\ &= 2\sup_{\|y'\|_{L_2[0,1]}=1}\left|\int_0^1 P\cdot yy'\,dt\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant 2 \sup_{\|y'\|_{L_2[0,1]}=1} \int_0^1 \sqrt{t}|P| \cdot |y'|\,dt$$

$$= 2\left(\int_0^1 tP^2\,dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \|\rho\|_{\mathfrak{M}}, \qquad [(2)]$$

что немедленно влечёт справедливость доказываемого утверждения. □

2. Имеет место следующий факт.

2.1. *Пусть обобщённая функция* $\rho \in \mathfrak{D}^*$ *определяет ядерный мультипликатор класса* $\mathcal{B}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*)$*. Пусть также последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ *перечисляет без повторений всевозможные собственные значения граничной задачи*

$$-y'' - \lambda\rho y = 0,$$

$$y(0) = y'(1) = 0,$$

а последовательность $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ *составлена отвечающими собственным значениям* λ_n *нормированными в пространстве* $\mathfrak{D}$ *собственными функциями. Тогда выполняется равенство*

$$\int_0^1 \rho \cdot \xi^2\,dt = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n^{-1} \xi^2_{J^{-1}y_n}. \tag{1}$$

Доказательство. Зафиксируем в пространстве $\mathfrak{D}$ ортонормированный базис $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ вида

$$f_k(x) \equiv \frac{\sqrt{8}\,\sin[\pi \cdot (k+1/2)x]}{\pi \cdot (2k+1)}$$

и свяжем с ним систему $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$ независимых стандартных нормальных случайных величин $\xi_k \rightleftharpoons \xi_{J^{-1}f_k}$. Сопоставим произвольной обобщённой функции $\rho \in \mathfrak{D}^*$ две случайные величины

$$\tau_\rho^{\mathbf{d}} \rightleftharpoons \sum_{i=0}^\infty r_{ii}(\rho) \cdot \xi_i^2,$$

$$\tau_\rho^{\mathbf{n}} \rightleftharpoons \sum_{\{i,j\}\in\mathbb{N}^2} r_{ij}(\rho) \cdot (1-\delta_{ij}) \cdot \xi_i\xi_j,$$

где положено $r_{ij}(\rho) \rightleftharpoons \langle\rho, f_i f_j\rangle$ и использован стандартный символ Кронекера δ_{ij}. Соотношения

$$\begin{aligned} r_{kk}(\rho) &= \frac{8}{\pi^2 \cdot (2k+1)^2} \cdot \langle\rho,\, \sin^2[\pi \cdot (k+1/2)x]\rangle \\ &= -\frac{4}{\pi \cdot (2k+1)} \int_0^1 P \cdot \sin[\pi \cdot (2k+1)x]\, dx \end{aligned} \qquad [1\,(3)]$$

вкупе с равенством $\|P\|_{L_2[0,1]} = \|\rho\|_{\mathfrak{D}^*}$ гарантируют корректность определения случайной величины $\tau_\rho^{\mathbf{d}}$ и выполнение оценки

$$\|\tau_\rho^{\mathbf{d}}\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \sqrt{3} \cdot \|\rho\|_{\mathfrak{D}^*}.$$

Кроме того, действующий из пространства $\mathfrak{D}$ в пространство $\mathfrak{D}^*$ оператор умножения на функцию ρ изометрично подобен действующему в пространстве $L_2[0,1]$ интегральному оператору с ядром $-P(\sup(t,s))$, а потому представляет собой оператор Гильберта–Шмидта. Это гарантирует [§ 1.3.2] корректность определения случайной величины $\tau_\rho^{\mathbf{n}}$ и выполнение оценок

$$\begin{aligned} \|\tau_\rho^{\mathbf{n}}\|_{\mathfrak{H}} &\leqslant \left(2 \int_{[0,1]^2} P^2(\sup(t,s))\, dt\, ds\right)^{1/2} \\ &\leqslant 2 \cdot \|\rho\|_{\mathfrak{D}^*}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что для любой функции $\rho \in C[0,1]$ выполняется [§ 1.2.1] равенство

$$\tau_\rho = \tau_\rho^{\mathbf{d}} + \tau_\rho^{\mathbf{n}}. \qquad (2)$$

Ввиду плотности линейного множества $C[0,1]$ в пространстве $\mathfrak{D}^*$ и непрерывности характера зависимости каждой из случайных величин τ_ρ, $\tau_\rho^{\mathbf{d}}$ и $\tau_\rho^{\mathbf{n}}$ от параметра $\rho \in \mathfrak{D}^*$, это означает выполнение равенства (2) и для всякой $\rho \in \mathfrak{D}^*$. Иначе говоря, выполняется равенство

$$\tau_\rho = \sum_{\{i,j\} \in \mathbb{N}^2} r_{ij}(\rho) \cdot \xi_i \xi_j.$$

При этом в случае ядерности порождённого обобщённой функцией ρ мультипликатора последний может быть представлен в виде суммы сходящегося по ядерной норме операторного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle J^{-1} y_n, \cdot \rangle \, J^{-1} y_n,$$

что вкупе с равенствами

$$\sum_{\{i,j\} \in \mathbb{N}^2} \langle J^{-1} y_n, f_i \rangle \cdot \langle J^{-1} y_n, f_j \rangle \cdot \xi_i \xi_j = \xi^2_{J^{-1} y_n} \qquad [\S\, 1.1\,(3)]$$

как раз и означает [§ 1.3.1] справедливость доказываемого утверждения. □

В случае неотрицательности мультипликатора ρ утверждение 2.1 хорошо известно и как раз и составляет — вместе с асимптотиками бесконечномерных χ^2-распределений — основу упомянутой ранее теории малых уклонений винеровского процесса.

3. Фигурирующее в формулировке утверждения 2.1 условие ядерности задаваемого обобщённой функцией $\rho \in \mathfrak{D}^*$ мультипликатора носит содержательный характер: существуют обобщённые функции, для которых левая сторона равенства 2 (1) осмыслена, в то время как ряд из правой стороны расходится в пространстве $\mathfrak{H}$. Установлению этого факта посвящается следующий параграф.

§ 3. Пример неядерного мультипликатора

1. Обозначим через ρ_n, где $n \geqslant 1$, обобщённые функции вида

$$\rho_n \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{\delta}_{(k-1/2)/n} - \boldsymbol{\delta}_{k/n} \right).$$

Имеет место следующий факт.

1.1. *Пусть $\lambda_{m,n}$ есть m-ое снизу положительное собственное значение граничной задачи*

$$-y'' - \lambda\rho_n y = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

Тогда независимо от выбора величины $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\lambda_{m,n} < 2\pi m + \varepsilon$.

Доказательство. Введём обозначения

$$\omega_{k,n}(\lambda) \rightleftharpoons y_n(\lambda, k/n), \qquad \omega^+_{k,n}(\lambda) \rightleftharpoons y'_n(\lambda, [k/n] + 0),$$

где $y_n(\lambda, \cdot)$ есть решение уравнения (1) при начальных условиях $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$. Как легко проверяется прямым вычислением, для всех $k \in 0\,..\,n-1$ справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} \omega_{k+1,n}(\lambda) \\ \omega^+_{k+1,n}(\lambda) \end{pmatrix} = \left[1 + \frac{1}{2n}\begin{pmatrix} -\lambda & 2 - \lambda/(2n) \\ -\lambda^2 & \lambda - \lambda^2/(2n) \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \omega_{k,n}(\lambda) \\ \omega^+_{k,n}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Это немедленно влечёт выполнение тождества

$$\begin{pmatrix} \omega_{n,n}(\lambda) \\ \omega^+_{n,n}(\lambda) \end{pmatrix} = \left[1 + \frac{1}{2n}\begin{pmatrix} -\lambda & 2 - \lambda/(2n) \\ -\lambda^2 & \lambda - \lambda^2/(2n) \end{pmatrix}\right]^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а тогда и равномерную внутри $\mathbb{R}$ сходимость функциональной последовательности $\{y_n(\cdot, 1)\}_{n=1}^{\infty}$ к функции $\omega \in C(\mathbb{R})$ вида

$$\omega(\lambda) \rightleftharpoons \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda = 0, \\ \dfrac{2\sin(\lambda/2)}{\lambda} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Последнее, однако, автоматически означает справедливость доказываемого утверждения. □

Отметим без доказательства, что несколько более детальное исследование позволило бы установить, что m-ые снизу положительные собственные значения граничных задач (1), (2) при $n \to \infty$ в точности стремятся к величине $2\pi m$.

2. Обозначим через $\rho_{N,n}$, где N, $n \geqslant 1$, обобщённые функции вида

$$\rho_{N,n} \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{\delta}_{(n+k-1/2)/(2^N n)} - \boldsymbol{\delta}_{(n+k)/(2^N n)}\right).$$

Тривиальным образом [§ 2.1.1] имеют место равенства

$$\|\rho_{N,n}\|^2_{\mathfrak{D}^*} = 2^{-N-1},$$

означающие сходимость ряда

$$\rho_\nu \rightleftharpoons \sum_{N=1}^{\infty} \rho_{N,\nu_N}$$

в пространстве $\mathfrak{D}^*$ независимо от выбора последовательности $\{\nu_N\}_{N=1}^{\infty}$. Символы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}^*$ здесь использованы для обозначения тех же пространств, что и в параграфе § 2.

Вариационные принципы для уравнения Штурма–Лиувилля с сингулярным весом показывают, что m-ое снизу положительное собственное значение граничной задачи

$$-y'' - \lambda\rho_\nu y = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y'(1) = 0 \tag{2}$$

заведомо мажорируется m-ым снизу положительным собственным значением граничной задачи

$$-y'' - \lambda\rho_{N,\nu_N} y = 0,$$
$$y(2^{-N}) = y(2^{-N+1}) = 0.$$

Тем самым [1.1], выбором последовательности $\{\nu_N\}_{N=1}^{\infty}$ можно добиться того, чтобы при всяком $m \geqslant 10$ соответствующее собственное значение задачи (1), (2) мажорировалось величиной $2\pi m \ln m$. Это означает отсутствие безусловной сходимости ряда из величин, обратных к собственным значениям задачи (1), (2), а потому и неядерность определяемого функцией ρ_ν мультипликатора класса $\mathcal{B}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ф. Аткинсон. *Дискретные и непрерывные граничные задачи.* М.: Мир, 1968.

[2] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1966.

[3] Ф. А. Березин, М. А. Шубин. *Уравнение Шрёдингера.* М.: Изд-во МГУ, 1983.

[4] Дж.–Г. Бак, А. А. Шкаликов. *Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шрёдингера с потенциалами-распределениями* // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, № 5. — С. 643–651.

[5] Ж. Бен Амара, А. А. Владимиров, А. А. Шкаликов. *Спектральные и осцилляционные свойства одного линейного пучка дифференциальных операторов четвёртого порядка* // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 1. — С. 55–67.

[6] А. В. Боровских, Ю. В. Покорный. *Системы Чебышёва–Хаара в теории разрывных ядер Келлога* // Успехи матем. наук. — 1994. — Т. 49, № 3. — С. 3–42.

[7] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий. *О границах изменения собственного значения при изменении потенциала* // Доклады Акад. Наук. — 2003. — Т. 392, № 5. — С. 592–597.

[8] А. А. Владимиров. *Оценки числа собственных значений самосопряжённых оператор-функций* // Матем. заметки. — 2003. — Т. 74, № 6. — С. 838–847.

[9] А. А. Владимиров. *О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов* // Матем. заметки. — 2004. — Т. 75, № 6. — С. 941–943.

[10] А. А. Владимиров. *О вычислении собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с фрактальным индефинитным весом* // Журнал выч. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, № 8. — С. 1350–1355.

[11] А. А. Владимиров. *К осцилляционной теории задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами* // Журнал выч. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1609–1621.

[12] А. А. Владимиров. *Осцилляционный метод в задаче о спектре дифференциального оператора четвёртого порядка с самоподобным весом* // Алгебра и анализ. — 2015. — Т. 27, № 2 — С. 83–95.

[13] А. А. Владимиров. *Замечания о минорантах лапласиана на геометрическом графе* // Матем. заметки. — 2015. — Т. 98, № 3. — С. 467–469.

[14] А. А. Владимиров. *Некоторые замечания об интегральных характеристиках винеровского процесса* // Дальневост. матем. журнал. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 156–165.

[15] А. А. Владимиров. *К вопросу об осцилляционных свойствах положительных дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами* // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 6. — С. 800–806.

[16] А. А. Владимиров. *Теоремы о представлении и вариационные принципы для самосопряжённых операторных матриц* // Матем. заметки. — 2017. — Т. 101, № 4. — С. 516–530.

[17] А. А. Владимиров. *О мажорантах собственных значений задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из шаров весовых пространств* // Матем. сборник. — 2017. — Т. 208, № 9. –С. 42–55.

[18] А. А. Владимиров. *Об одном подходе к определению сингулярных дифференциальных операторов* // `arXiv:1701.08017`.

[19] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Особенности условий Неймана в задаче Штурма–Лиувилля с сингулярным весом* // Международная конференция, посвящённая 103-ой годовщине И. Г. Петровского. Тезисы докладов. М.: 2004. С. 238–239.

[20] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом* // Матем. сборник. — 2006. — Т. 197, № 11. — С. 13–30.

[21] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Индефинитная задача Штурма–Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов* // Труды. матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2006. — Т. 255. — С. 88–98.

[22] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом* // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, № 5. — С. 662–672.

[23] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Асимптотика собственных значений задачи высшего чётного порядка с дискретным самоподобным весом* // Алгебра и анализ. — 2012. — Т. 24, № 2. — С. 104–119.

[24] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа* // Функциональный анализ и его приложения. — 2013. — Т. 47, № 4. — С. 18–30.

[25] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*. М.: ГТТИ, 1950.

[26] И. И. Гихман, А. В. Скороход. *Введение в теорию случайных процессов*. М.: Наука, 1977.

[27] И. М. Глазман. *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов*. М.: Физматлит, 1963.

[28] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве*. М.: Наука, 1965.

[29] А. Т. Диаб, П. А. Кулешов, О. М. Пенкин. *Оценка первого собственного значения лапласиана на графе* // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96, № 6. — С. 885–895.

[30] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев. *Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля* // Успехи матем. наук. — 1984. — Т. 39, № 2. — С. 151–152.

[31] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев. *Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля* // Успехи матем. наук. — 1996. — Т. 51, № 3 (309). — С. 73–144.

[32] С. С. Ежак. *Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле* / В кн.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 517–559.

[33] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* М.: Физматлит, 1959.

[34] И. С. Кац, М. Г. Крейн. *О спектральных функциях струны* / В кн.: [1: С. 648–733].

[35] Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир, 1972.

[36] А. И. Козко, А. Ю. Попов. *Оценка снизу собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля в $L_2(\mathbb{R}^+)$ с граничным условием $y'(0) = 0$* // Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 17-й междунар. Саратовской зимней школы, посв. 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова. 2014. С. 122-124.

[37] Р. Ч. Кулаев. *Условия осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи для уравнения четвертого порядка* // Владикавк. матем. журн. — 2015. — Т. 17, № 1. — С. 47–59.

[38] Р. Ч. Кулаев. *Об осцилляционности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка* // Дифф. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 445–458.

[39] Р. Ч. Кулаев. *К вопросу об осцилляционности функции Грина разрывной краевой задачи четвёртого порядка* // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 3. — С. 375–387.

[40] Б. А. Кушнер. *Лекции по конструктивному математическому анализу.* М.: Наука, 1973.

[41] А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов. *Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака* // Сиб. матем. журнал. — 1976. — Т. 17, № 3–4. — С. 606–625; 813–830.

[42] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. М.: Мир, 1971.

[43] А. А. Марков. *Теория алгорифмов* // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1954. — Т. 42. — С. 3–375.

[44] А. А. Марков. *О конструктивной математике* // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1962. — Т. 67. — С. 8–14.

[45] А. А. Марков. *О нормальных алгорифмах, связанных с вычислением булевых функций* // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1967. — Т. 31, № 1. — С. 161–208.

[46] А. А. Марков, Н. М. Нагорный. *Теория алгорифмов*. Изд. 2. — М.: ФАЗИС, 1996.

[47] К. А. Мирзоев, А. А. Шкаликов. *Двучленные дифференциальные операторы с сингулярным коэффициентом* // Международная конференция, посвящённая 110-ой годовщине И. Г. Петровского. Тезисы докладов. М.: 2011. С. 274–275.

[48] К. А. Мирзоев, А. А. Шкаликов. *Дифференциальные операторы чётного порядка с коэффициентами–распределениями* // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 788–793.

[49] А. И. Назаров. *Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры* // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. 311. — С. 190–213.

[50] А. И. Назаров. *Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций* // Теория вероятностей и прилож. — 2009. — Т. 54, № 2. — С. 209–225.

[51] М. А. Наймарк. *Линейные дифференциальные операторы*. М.: Наука, 1969.

[52] М. И. Нейман-заде, А. М. Савчук. *Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами* // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2002. — Т. 236. — С. 262–271.

[53] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов. *Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов* // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 5. — С. 599–609.

[54] Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. *Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах.* М.: Физматлит, 2009.

[55] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин и др. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*. М.: Физматлит, 2005.

[56] Н. В. Растегаев. *Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом обобщённого канторовского типа* // Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2014. — Т. 425. — С. 86–98.

[57] Ф. Рисс, Б. Сёкефальви–Надь. *Лекции по функциональному анализу,* изд. 2. М.: Мир, 1979.

[58] Ф. С. Рофе–Бекетов, А. М. Холькин. *Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств.* Мариуполь, 2001.

[59] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов. *Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897–912.

[60] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов. *Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями* // Труды Моск. матем. общества. — 2003. — Т. 64. — С. 159–212.

[61] С. Сакс. *Теория интеграла*. М.: ИЛ, 1949.

[62] Г. Д. Степанов. *Эффективные критерии знакорегулярности и осцилляционности функций Грина двухточечных краевых задач* // Матем. сборник. — 1997. — Т. 188, № 11. — С. 121–159.

[63] Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. *Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций* // Матем. заметки. — 1970. — Т. 7, № 1. — С. 31–42.

[64] М. Ю. Тельнова. *Об оценках сверху первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с весовым интегральным условием* // Вестник Самарского госуд. университета. — 2015. — № 6 (128). — С. 124–129.

[65] Ю. В. Тихонов. *О скорости приближения сингулярных функций кусочно-постоянными* // Матем. заметки. — 2014. — Т. 95, № 4. — С. 590–604.

[66] Ю. В. Тихонов, С. В. Шапошников, И. А. Шейпак. *О сингулярности функций и квантовании вероятностных мер* // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, № 4. — С. 628–631.

[67] В. А. Треногин. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1980.

[68] В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и её приложения.* Том 2. М.: 1967.

[69] А. А. Френкель, И. Бар-Хиллел. *Основания теории множеств.* М.: Мир, 1966.

[70] Н. А. Шанин. *Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства* // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1962. — Т. 67. — С. 15–294.

[71] И. А. Шейпак. *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах* $L_p[0,1]$ // Матем. заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 924–938.

[72] И. А. Шейпак. *Особые точки самоподобной функции нулевого спектрального порядка. Самоподобная струна Стилтьеса* // Матем. заметки. — 2010. — Т. 88, № 2. — С. 303–316.

[73] И. А. Шейпак. *О спектре оператора Якоби с экспоненциально растущими матричными элементами* // Вестник Моск. Унив. Серия 1: Математика, механика. — 2011. — № 6. — С. 16–21.

[74] Е. А. Ширяев, А. А. Шкаликов. *Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы* // Матем. заметки. — 2007. — Т. 81, № 4. — С. 636–640.

[75] А. А. Шкаликов, Ж. Бен Амара. *Осцилляционные теоремы для задач Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями* // Вестник МГУ. Серия 1: Матем., мех. — 2009. — № 3. — С. 40–43.

[76] D. Banks, G. Kurowski. *A Prüfer transformation for the equation of vibrating beam subject to axial forces* // Jour. Diff. Eq. — 1977. — V. 24. — P. 57–74.

[77] E. J. Bird, S.-M. Ngai, A. Teplyaev. *Fractal laplacians on the unit interval* // Ann. Sci. Math. Quèbec. — 2003. — V. 27, № 2. — P. 135–168.

[78] K. J. Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications.* Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1990.

[79] U. Freiberg. *Prüfer angle methods in spectral analysys of Krein–Feller operators*

[80] U. Freiberg. *Refinement of the spectral asymptotics of generalized Kerin Feller operators* // Forum Math. — 2011. — V. 23, № 2. — P. 427–445.

[81] S. Graf, H. Luschgy. *Foundations of Quantization for Probability Distributions.* Springer-Verlag: Berlin etc, 2000.

[82] M. Homa, R. Hryniv. *Comparison and oscillation theorems for singular Sturm–Liouville operators* // Opuscula Mathematica. — 2014. — V. 34, № 1. — P. 97–113.

[83] A. I. Karol, A. I. Nazarov. *Small ball probabilities for smooth Gaussian fields and tensor products of compact operators* // Math. Nachr. — 2014. — V. 287, № 5–6. — P. 595–609.

[84] E. S. Karulina, A. A. Vladimirov. *The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue* // Tatra Mountains Math. Publ. — 2013. — V. 54. — P. 101–118.

[85] J. Kigami. *Harmonic calculus on p. c. f. self-similar sets* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1993. — V. 335. — P. 721–755.

[86] J. Kigami, M. L. Lapidus. *Weyl's problem for the spectral distributions of Laplacians on p. c. f. self-similar fractals* // Comm. Math. Phys. — 1993. — V. 158. — P. 93–125.

[87] M. Kraus, M. Langer, C. Tretter. *Variational principles and eigenvalue estimates for unbounded block operator matrices and applications*// Journ. of Comput. and Appl. Math. — 2004. — V. 171. — P. 311–334.

[88] P. Lancaster, A. Shkalikov, Qiang Ye. *Strongly definitizable linear pencils in Hilbert space* // Integr. Equat. Oper. Th. — 1993. — V. 17. — P. 338–360.

[89] P. Lancaster, A. Shkalikov. *Damped vibrations of beams and related spectral problems* // Canad. Appl. Math. Quart. — 1994. — V. 2, № 1. — P. 45–90.

[90] H. Langer, M. Langer, C. Tretter. *Variational principles for eigenvalues of block operator matrices* // Indiana Univ. Math. Jour. — 2002. — V. 51, № 6. — P. 1427–1459.

[91] W. Leighton, Z. Nehari. *On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order* // Trans. of AMS. — 1958. — V. 89. — P. 325–377.

[92] M. Levitin, D. Vassiliev. *Spectral asymptotics, renewal theorem, and the Berry conjecture for a class of fractals* // Proc. Lond. Math. Soc. — 1996. — V. 72. — P. 188–214.

[93] M. A. Lifshits. *On the lower tail probabilities of some random series* // Ann. Prob. — 1997. — V. 25, № 1. — P. 424–442.

[94] G. Meng. *Extremal problems for eigenvalues of measure differential equations* // Proc. Amer. Math. Soc. — 2015. — V. 143. — P. 1991–2002.

[95] G. Meng. *The optimal upper bound for the first eigenvalue of the fourth order equation* // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2017. — V. 37, № 12. — P. 6369–6382.

[96] G. Meng, P. Yan. *Optimal lower bound for the first eigenvalue of the fourth order equation* // Journ. Diff. Equat. — 2016. — V. 261. — P. 3149–3168.

[97] A. I. Nazarov, I. A.Sheipak. *Degenerate self-similar measures, spectral asymptotics and small ball deviations of Gaussian processes* // Bull. of London Math. Soc. — 2012. — V. 44. — P. 12–24.

[98] M. Solomyak, E. Verbitsky. *On a spectral problem related to self-similar measures* // Bull. London Math. Soc. — 1995. — V. 27, № 3. — P. 242–248.

[99] R. S. Strichartz. *Analysis on fractals* // Notices AMS. — 1999. — V. 46. — P. 1199–1208.

[100] R. S. Strichartz. *Evaluating integrals using self-similarity* // Amer. Math. Monthly. — 2000. — V. 107. — P. 316–326.

[101] T. Uno, I. Hong. *Some consideration os asymptotic distibution of eigenvalues for the equation* $d^2u/dx^2 + \lambda\rho(x)u = 0$ // Japan. journ. of Math. — 1959. — V. 29. — P. 152–164.

[102] H. Volkmer. *Eigenvalues associated with Borel sets* // Real Analysis Exchange. — 2005/2006. — V. 31, № 1. — P. 111–124.

[103] Q. Wei, G. Meng, M. Zhang. *Extremal values of eigenvalues of Sturm–Liouville operators with potentials in* L_1 *balls* // Journ. Diff. Equat. — 2009. — V. 247. — P. 364–400.