

О Т З Ы В

официального оппонента на диссертационную работу
Сурначева Михаила Дмитриевича
“Эллиптические и параболические уравнения типа p -лапласиана”,
представленную на соискание учёной степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.02 –
дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление.

Актуальность темы. Основным объектом исследования в представленной диссертации служит нелинейное параболическое уравнение с p -Лапласианом, которое в модельном случае имеет вид

$$u_t = \operatorname{div}_x(\omega(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad p > 1, \quad (1)$$

а также различные его обобщения (включающие в себя также и уравнения пористой среды). Уравнения такого типа возникают в моделях нелинейной теплопроводности, нелинейной диффузии, движения газа в пористой среде и многих других. При этом, наличие положительной весовой функции $\omega(x)$ отражает неоднородность среды. В стационарном (эллиптическом) случае применима техника Мозера и ДиДжорджи (J. Moser, E. De Giorgi), с помощью которой выводится играющее ключевую роль неравенство Харнака. Метод Мозера-ДиДжорджи получил дальнейшее развитие в работах Э. Джусты, Г. Стампаккья, О.А. Ладыженской, Н.Н. Уралцевой, В.А. Солонникова, Дж. Серрина, Н. Трудингера, С.Н. Кружкова и других авторов. Неравенства Харнака для уравнений типа параболического p -лапласиана общего вида было получено сравнительно недавно в работах E. DiBenedetto, U. Gianazza, V. Vesprì 2008-2010 гг.

Линейные параболические уравнения с весами из классов Макенхаупта исследовались в работах F. Chiarenza, M. Frasca, R. Serapioni, И.И. Скрыпника. Позднее, в работах Ю.А. Алхутова и В.В. Жикова была разработана техника анализа гёльдеровской регулярности решений эллиптических уравнений с частично макенхауптовым весом. Распространение этих результатов на параболический случай наталкивается на определенные трудности и является актуальной задачей. Актуальным является также исследование более общих уравнений, в которых участвуют операторы

$$\operatorname{div}(\nu(x)|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad m \geq 1, \quad p \geq 2.$$

Указанной выше проблематике посвящена первая глава диссертации, в которой изучается регулярность решений уравнений вида (1). В первом разделе доказано неравенство Харнака и гёльдеровская регулярность решений с весом из класса Макенхаупта $A_{1+p/n}$. Во втором разделе аналогичные результаты получены для уравнения

$$\nu(x)u_t = \operatorname{div}(\nu(x)A(x, t, u, \nabla u)), \quad (2)$$

в котором вес $\nu(x)$ удовлетворяет условию p -допустимости, а $A(x, t, u, \xi)$ является вектором Каратеодори со свойствами

$$|A(x, t, u, \xi)| \leq C_0 |u|^{m-1} |\xi|^{p-1} + C_u, \quad A(x, t, u, \xi) \cdot \xi \geq C_1 |u|^{m-1} |\xi|^p - C_l,$$

$C_0, C_1, C_u, C_l = \text{const}$. В третьем разделе изучается уравнение (2) с оператором типа p -лапласиана ($m = 1, C_u = C_l = 0$) и кусочно-постоянным весом $\nu = \omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon & , x_n > 0, \\ 1 & , x_n < 0, \end{cases}$ зависящим от малого параметра $\varepsilon > 0$. Автором установлена равномерная по ε гёльдеровская непрерывность решений.

Одним из центральных вопросов теории параболических уравнений является асимптотическое поведение решений при неограниченном возрастании времени. Вопросы стабилизации решений линейных уравнений при больших временах достаточно хорошо изучены. В работе В.В. Жикова [Матем. сборник, 1977] были найдены критерии как равномерной так и поточечной стабилизации решений задачи Коши для линейных параболических уравнений дивергентного вида. Начально-краевые задачи в цилиндрических областях изучались Ф.Х. Мукминовым, Л.М. Кожевниковой, Р.Х. Каримовым и др., в том числе и для уравнений с p -лапласианом. В работах В.Н. Денисова для линейных дивергентных параболических уравнений установлен критерий стабилизации ограниченных решений задачи Дирихле в цилиндрической области с неограниченным основанием и с однородным краевым условием в терминах рядов Винера для бесконечно удалённой точки.

Актуальным является обобщение указанных результатов на случай нелинейных параболических уравнений типа p -лапласиана, чему посвящена вторая глава диссертации. В этой главе доказан критерий равномерной стабилизации при больших временах ограниченных решений задачи Коши, а также критерий поточечной стабилизации решений задачи Дирихле с однородным краевым условием в цилиндрической области с неограниченным основанием.

Кроме того, в первом разделе доказан интересный результат о монотонности нелинейных операторов вида $\xi \rightarrow |\xi|^{p-2} \mathcal{A}\xi$ на \mathbb{R}^n с постоянной матрицей \mathcal{A} .

Фундаментальным вопросом в теории эллиптических краевых задач является вопрос о единственности решений. Тесно связан с этим вопросом так называемый эффект Лаврентьева, появляющийся в случае, когда гладкие функции не плотны в соответствующем энергетическом пространстве. Для p -лапласиана с переменным показателем суммируемости $p = p(x)$ соответствующие примеры были построены В.В. Жиковым, им же было предложено простое достаточное условие (логарифмической гёльдеровости) плотности гладких функций в энергетических классах (пространствах Соболева-Орлича). Как отмечено в работах В.В. Жикова, вопрос о плотности гладких функций оказывается нетривиальным также для весовых пространств Соболева.

В третьей главе диссертации (1-ый раздел) автор доказывает важный результат о плотности гладких функций в весовых классах Соболева-Орлича

при требовании логарифмической непрерывности показателя $p(x)$ и условии Жикова на весовую функцию, известном для (линейного) случая $p = 2$.

Важной для приложений является задача о (стационарной) диффузии в несжимаемом потоке

$$-\operatorname{div}(\nabla u + au) = f, \quad (3)$$

где $a(x)$ – соленоидальное векторное поле. При достаточно общих предположениях уравнение (3) можно записать в виде

$$-\operatorname{div}(\nabla u + A\nabla u) = f \quad (4)$$

с кососимметричной матрицей $A = A(x)$. В общем случае единственность обобщенных решений однородной задачи Дирихле для уравнений (3), (4) может нарушаться. Поэтому, нахождение точных достаточных условий единственности является важной и актуальной задачей. Известно (В.В. Жиков), что условие $a \in L^2(\Omega)$ достаточно для единственности решения задачи (3). В.В. Жиков также установил, что при условии $A \in BMO(\Omega)$ верна единственность аппроксимационного решения задачи (4).

Во втором разделе третьей главы диссертации найдены новые условия единственности, которые значительно уточняют условия Жикова. При этих условиях также установлено энергетическое тождество $\|\nabla u\|_2^2 = (f, u)$. В случае, когда условия единственности нарушены, автором предложена процедура выделения единственного специального решения рассматриваемых задач.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций.

Основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Научные положения и выводы согласуются с полученными ранее результатами. Все утверждения корректно обоснованы и снабжены подробными доказательствами. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 15 научных статьях в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций, или входящих в международные базы данных и системы цитирования Scopus, Web of Science. Полученные в диссертации результаты многократно докладывались на международных научных конференциях и научных семинарах и получили одобрение ведущих специалистов.

Общие замечания по диссертационной работе.

1. Во второй главе в формулировке Теоремы 1 в неравенствах (9)-(11) несколько раз встречается ошибочный член $|a|^{a-2}$ вместо $|a|^{p-2}$. В тексте диссертации содержится много и других опечаток;

2. Доказательства элементарных лемм 2,3 (стр. 128–130) усложнены. Например, утверждение Леммы 2 непосредственно следует из равенства

$$|a + t(b - a)|^2 = (1 - t)^2|a|^2 + t^2|b|^2 + 2t(1 - t)(a, b).$$

