О Т З Ы В

официального оппонента Глызина С. Д. о диссертации

Тахира Халида Мизхира Тахира

«Теоремы сравнения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений и их применение к исследованию вопросов существования и оценок решений»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Актуальность темы диссертации

Задачи исследования различных явлений, которые можно описать при помощи дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, начали вызывать интерес ученых, начиная с пятидесятых годов прошлого века. Решение данных задач положило в дальнейшем начало теории функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), которая успешно развивается благодаря работам Н.В. Азбелева, Р. Беллмана, А.И. Булгакова, Е.С. Жуковского, А.М. Зверкина, В.Б. Колмановского, Н.Н. Красовского, В.П. Максимова, А.Д. Мышкиса, С.Б. Норкина, В.Р. Носова, В.В. Обуховского, Л.Ф. Рахматуллиной, П.М. Симонова, А.Л. Скубачевского, С.Н. Шиманова, Л.Э. Эльсгольца.

Использование ФДУ при исследовании различных математических моделей объясняется необходимостью изучения явлений или процессов, значения которых зависят не только от настоящего состояния, но и от поведения процесса в прошлом. Поэтому ФДУ применимы при моделировании в различных областях, таких как механика, медицина, биология, популяционная динамика. Они используются при исследовании теплообмена, обработки сигналов, эволюции видов, транспортных потоков и изучении распространения эпидемий. В частности, в популяционной динамике одним из базовых экологических уравнений, описывающих плотность популяции млекопитающих, является уравнение с запаздыванием; это уравнение получило имя американского биолога Дж.Э. Хатчинсона.

К фундаментальным проблемам теории ФДУ относятся вопросы разрешимости и оценивания решений задачи Коши и краевых задач для линейных и нелинейных уравнений. Эти вопросы составляют основу диссертации Тахира Халида Мизхира Тахира. Автором получены новые теоремы сравнения для задачи Коши и краевых задач, исследуются такие свойства, как однозначная разрешимость, справедливость неравенства типа Чаплыгина, неотрицательность решения. Предлагаются оценки на разность между соответствующими линейными и нелинейными операторами, при которых нелинейное уравнение сохраняет требуемые свойства линейного: разрешимости, однозначной разрешимости и положительной разрешимости.

Полученные результаты могут найти приложения как в изучении проблем устойчивости и существования периодических решений ФДУ, так и при исследовании конкретных уравнений с запаздыванием, возникающих в различных областях естествознания.

Перейдем к обзору **основных результатов диссертации.**

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, 6 параграфов, разделенных на пункты, заключения и списка цитирумой литературы, содержащего 71 наименование. Общий объем работы составляет 124 страницы.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, приведен обзор работ предшественников и сформулированы основные полученные результаты.

В первой главе рассматриваются линейные ФДУ. В параграфе 1.1 сначала приведены необходимые сведения из монографии Н. В. Азбелева, В. П. Максимова, Л. Ф. Рахматуллиной «Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений» о линейном ФДУ общего вида. Также здесь получены основные результаты диссертации для линейных ФДУ — теоремы сравнения задач Коши и теоремы сравнения краевых задач. Эти утверждения позволяют для конкретных ФДУ получать условия однозначной разрешимости, неотрицательности функции Коши, функции Грина и нормального фундаментального решения соответствующего однородного уравнения.

В параграфах 1.2 – 1.4 полученные утверждения применяются к следующим «эталонным» уравнения с постоянным коэффициентом p :

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) - px(t-1) = f(t), \\ \dot{x}(t) - px(t/2) = f(t), \\ \dot{x}(t) - p\dot{x}(t/2) = f(t).\end{gathered}$$

Для каждого уравнения найдено общее решение, фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения и функция Коши. Получены условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи (в частности, периодической задачи), определена ее функция Грина. В терминах коэффициентов уравнений и длины промежутка «времени» получены условия положительности функции Коши и функции Грина. На основании полученных в §1.1 теорем сравнения из этих результатов выводятся соответствующие утверждения для уравнений с переменным коэффициентом $p(t)$.

Во второй главе исследуются нелинейные ФДУ вида

$$\mathcal{L}x = Fx, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}$ — линейный и $F : AC \to L$ — нелинейный оператор, для которых рассматривается начальная задача Коши. В первом параграфе главы автор вводит определение вольтеррово q-липшицевого оператора и исследует его свойства. Далее им показано, что свойства вольтеррово q-липшицевости и равномерной вольтеррово q-липшицевости играют важную роль при исследовании разрешимости и однозначной разрешимости задачи Коши (теоремы 2.1.1, 2.1.2). Также здесь получены условия существования решения задачи Коши, доказательство которых основано на принципе Шаудера неподвижной точки вполне непрерывного оператора (теоремы 2.1.3, 2.1.4), и найдены оценки этих решений. Перечисленные выше теоремы позволяют автору для конкретных нелинейных ФДУ получить условия существования, единственности решений и оценки этих решений.