

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

На правах рукописи



Петренко Ирина Анатольевна

Оптимизация распределенного воздействия на стационарный поток

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Давыдов Алексей Александрович

Владимир — 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	3
ГЛАВА 1. Постановка задач оптимизации	12
1.1. Формулировка задач оптимизации	18
1.1.1. Разрешимость задачи P_1	20
1.1.2. Разрешимость задачи P_2	23
ГЛАВА 2. Оптимизация выброса в одномерный поток	26
2.1. Модель реакции-адвекции-диффузии	26
2.1.1. Оптимальное постоянное управление	29
2.1.2. Оптимальное измеримое управление	32
2.1.3. Оптимальное обобщенное управление	42
2.2. Модель реакции-адвекции	46
2.2.1. Оптимальное постоянное управление	47
2.2.2. Оптимальное измеримое управление	49
ГЛАВА 3. Оптимизация отбора из одномерного потока	56
3.1. Модель билинейной реакции-диффузии	56
3.1.1. Оптимальное постоянное управление	58
3.1.2. Оптимальное измеримое управление	61
Список использованных источников	70

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена задачам моделирования и оптимального управления системами, описываемыми уравнениями с диффузией, течением и реакцией, возникающими в различных областях науки и техники. Круг таких систем достаточно обширен. Так, в работе [27] исследуется модель переноса загрязняющего вещества в потоке, приведены аналитические и численные подходы к решению поставленных модельных уравнений, а также примеры приложений построенных численных решений. В работе [38] модель Фишера, которая представляет собой уравнение диффузии-реакции с нелинейной (логистической) функцией роста, изучается для моделирования популяционной экологии, в которой организмы предполагаются движущимися согласно броуновскому закону. В этой же работе рассмотрено уравнение с диффузией и линейной функцией роста, представляющее собой модель KISS изменения размера ареала питания фитопланктона, необходимого для поддержания его цветения. Для обеих моделей построены фазовые траектории и выявлено их асимптотическое поведение при больших временах. Ранее изучались также и подобные модели систем с управлением. Попытки численной оптимизации таких управляемых систем были сделаны достаточно давно (см., например, [24, 26]) и вполне успешно. Также активное развитие получили методы симуляции поведения системы при тех или иных параметрах для выработки системы ограничений и методов управления для достижения поставленных целей [25, 33]).

В настоящей работе проводится качественный анализ таких моделей и в ряде случаев строится аналитическое решение задач оптимального управления. В конкретных прикладных задачах практическое применение методов теории оптимального управления (см., например, [4, 20, 31]) наталкивается на ряд трудностей. Например, в случае минимаксного функционала встает вопрос о существовании оптимального управления и только после этого – о его

структуре.

Более сложными оказываются системы, описываемые уравнениями в многомерном пространстве с диффузией, течением и реакцией. В этом случае нами рассмотрена модель, имеющая распределенное на некотором конечном участке управление, для которой доказано существование оптимального решения в случаях интегрального и минимаксного функционалов при наличии ограничений (технологических и/или ёмкостных) как на управляющее воздействие, так и на параметры среды.

В диссертации рассматривается задача оптимизации распределенного воздействия на однородную сплошную среду, движущуюся с постоянной скоростью. Под воздействием мы понимаем или насыщение среды некоторым веществом (например, выброс загрязнения) или отбор какой-либо ее компоненты (например, фильтрация фитопланктона аквакультурой) с помощью размещения имеющегося ресурса в заданной ограниченной области D потока с гладкой или кусочно-гладкой границей.

Обозначая через w концентрацию изучаемого вещества в потоке, а через v – постоянную положительную скорость течения, которую считаем направленной вдоль оси Ox_1 , получим следующее уравнение изменения этой концентрации

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x_1} = a^2 \Delta w - \gamma(w - Y) - u_1 w + u_2.$$

Здесь t – время, a^2 – коэффициент диффузии, Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным x , $x = (x_1, \dots, x_d)$, γ – коэффициент, характеризующий скорость естественного восстановления фонового значения концентрации Y , а u_1 и u_2 – измеримые компоненты вектора управления u , характеризующие распределённые ресурсы отбора и выброса вещества, соответственно.

Предполагается, что среда совпадает со всем пространством \mathbb{R}^d , где и контролируются ее показатели.

Начальная концентрация вещества в потоке задана функцией

$$w(x, 0) = w_0(x),$$

у которой отклонение от фонового (постоянного) значения Y , $Y \geq 0$, предполагается ограниченным в норме $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Поставленная задача заменой $\tilde{w} = w - Y$ (и, соответственно, $\tilde{w}_0 = w_0 - Y$, для начальной концентрации) сводится к задаче

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x_1} = a^2 \Delta w - (\gamma + u_1)w + u_2 - u_1 Y, \quad (1)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad (2)$$

где знак «тильда» у новой переменной опущен.

Компоненты управления мы предполагаем зависящими лишь от пространственной переменной x , измеримыми и ограниченными, то есть такими, что выполнены неравенства

$$0 \leq u_1(x) \leq \bar{u}_1, \quad 0 \leq u_2(x) \leq \bar{u}_2. \quad (3)$$

Такие управления будем называть *допустимыми*.

Теорема (см. теорему 1.1). *Задача Коши (1), (2) однозначно разрешима для любого допустимого управления и любой начальной функции $w_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Более того, при $t \rightarrow \infty$ её решение стабилизируется на решении y соответствующего стационарного уравнения*

$$a^2 \Delta y - v \frac{\partial y}{\partial x_1} - (\gamma + u_1)y = -u_2 + u_1 Y. \quad (4)$$

Это решение принадлежит пространству $W_2^1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и удовлетворяет неравенствам $\|y\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ и $\|y\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \max \left\{ \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}, 1 \right\}$ с некоторой константой C , где $f = -u_2 + u_1 Y$.

В силу данной теоремы разумно решать оптимизационные задачи для предельного распределения вещества в среде, удовлетворяющего эллиптическому уравнению (4). Это распределение мы и будем понимать всюду далее

под состоянием среды. Для него формулируются две оптимизационные задачи, отличающиеся по своему прикладному содержанию.

Задача P₁: Найти управляющее воздействие с заданной L_1 -нормой (ёмкостью) компонент управления

$$C_i = \int_D u_i dx \left(= \int_{\mathbb{R}^d} u_i dx \right), \quad i = 1, 2,$$

удовлетворяющей (технологическому) ограничению по размещению управления

$$C_i \leq \bar{u}_i \int_D dx, \quad i = 1, 2,$$

вытекающему из (3), для которого максимальное значение абсолютной величины соответствующего решения y будет минимальным. Это приводит к следующей задаче оптимизации

$$I(u, y) \rightarrow \min,$$

где

$$I(u, y) = \max_{x \in \mathbb{R}^d} |y(x)|.$$

Прикладной смысл данной задачи заключается в минимизации максимума изменения естественного состояния среды (показателя y) за счет распределения заданных ёмкостей выброса C_2 и отбора C_1 .

Задача P₂: В этой задаче разрешены лишь управляющие воздействия, при которых соответствующее решение y отклоняется от нуля не более, чем на заданное значение $\bar{y} \geq 0$, то есть

$$|y| \leq \bar{y}.$$

Целью же оптимизации является максимизация функционала

$$J(u, y) = k_1 \|u_1\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} + k_2 \|u_2\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} = \int_D (k_1 u_1 + k_2 u_2) dx.$$

При заданных значениях констант k_1 и k_2 (каждая из которых, вообще говоря, может быть и положительной – в случае, если соответствующая компонента управления приносит прибыль – и неположительной – в противном случае) получаем следующую задачу оптимизации

$$J(u, y) \rightarrow \max.$$

Прикладной смысл этой задачи следующий: необходимо максимизировать доход – результат выброса и отбора, – при наличии ограничения на предельную допустимую концентрацию исследуемого вещества в потоке. При этом доход является линейной функцией от объёма управления, заданного нормой в пространстве $L_1(\mathbb{R}^d)$, а знаки коэффициентов k_1 и k_2 отвечают за то, приносят соответственно отбор и выброс доход или расходы. В частности, известны примеры, когда в прикладных задачах один из этих коэффициентов положителен, а другой – нет.

Управления, удовлетворяющие ограничениям той или иной задачи, будем называть *допустимыми для этой задачи*.

Основным результатом первой главы является следующая **Теорема** (см. теоремы 1.2 и 1.3). *Для каждой из задач P_1 и P_2 существует допустимое управление, доставляющее ее решение.*

Во **второй главе** для задач P_1 и P_2 дано аналитическое решение в одномерном случае при отсутствии отбора, то есть при $\bar{u}_1 = C_1 = k_1 = 0$. При этом в качестве области D выбран отрезок $[x_1, x_2]$, а уравнение имеет вид

$$a^2 y'' - v y' - \gamma y = -u.$$

Вне интервала $[x_1, x_2]$ это уравнение является однородным и его решение имеет вид

$$y(x) = A_1 e^{\varphi_1 x} + A_2 e^{\varphi_2 x},$$

где A_1 и A_2 – произвольные постоянные, $\varphi_{1,2}$ – корни характеристического уравнения:

$$\varphi_{1,2} = \frac{v}{2a^2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4a^4} + \frac{\gamma}{a^2}},$$

которые в силу положительности v и γ имеют разный знак. Мы упорядочим их следующим образом

$$\varphi_1 < 0 < \varphi_2.$$

При таком порядке, в силу ограниченности решения на бесконечности и знаков собственных чисел, получим

$$y(x) = \begin{cases} A_2 e^{\varphi_2 x}, & x \leq x_1, \\ A_1 e^{\varphi_1 x}, & x \geq x_2, \end{cases}$$

и, следовательно, выполнены равенства

$$y'(x_1) = \varphi_2 y(x_1), \quad y'(x_2) = \varphi_1 y(x_2).$$

Для задач P_1 и P_2 найдена структура оптимального решения в классах постоянных, измеримых и обобщенных управлений при наличии либо отсутствии диффузии.

Для задачи P_1 постоянное управление определяется однозначно и имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \frac{C}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

В частности, решение задачи P_1 в классе постоянных управлений существует лишь при $C \leq 2\bar{u}b$ и совпадает с единственным допустимым управлением из этого класса.

Теорема (см. теорему 2.1). *В классе постоянных управлений оптимальным в задаче P_2 является управление, задаваемое формулой*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \bar{u}, & x \in [x_1, x_2], \end{cases} \quad (5)$$

с \bar{u} равным $\frac{\bar{y}\gamma}{1 - e^{\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}(x_1 - x_2)}}$, если $\bar{y} \leq \frac{\bar{u}}{\gamma} \left(1 - e^{\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}(x_1 - x_2)}\right)$, и \bar{u} в противном случае.

Если постоянное управление с максимальной плотностью \bar{u} недопустимо, то значение функционала можно увеличить, отказавшись от постоянства управления.

Теорема (см. теорему 2.4). *Оптимальным в задаче P_1 является управление*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \bar{u}, & x \in [x_1, \alpha) \cup (\beta, x_2], \\ \gamma\bar{y}, & x \in [\alpha, \beta], \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\alpha = x_1 + \frac{1}{\varphi_1} \ln \left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}} \right), \quad \beta = x_2 + \frac{1}{\varphi_2} \ln \left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}} \right), \quad (7)$$

а величина \bar{y} , задающая оптимальное значение функционала этой задачи, вычисляется как

$$\bar{y} = \frac{\bar{u}}{\gamma} \left(1 - \frac{\frac{\gamma(x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}})}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)}}{W \left(\frac{\gamma(x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}})}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} e^{\frac{\gamma(x_2 - x_1)}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)}} \right)} \right),$$

где W – W -функция Ламберта.

Теорема (см. теорему 2.2). *Оптимальное управление в задаче P_2 кусочно-постоянно и имеет вид (6), (7).*

Заметим, что при ослаблении ограничения (3), то есть при увеличении \bar{u} , отрезки $[x_1, \alpha)$ и $(\beta, x_2]$ уменьшаются, превращаясь в точки при $\bar{u} \rightarrow +\infty$, а объём управления, распределенного на этих отрезках, равен $\bar{y} \sqrt{v^2 + 4a^2\gamma} \ln \left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}} \right)^{-\frac{\bar{u}}{\gamma\bar{y}}}$, что при $\bar{u} \rightarrow +\infty$ стремится к $\bar{y} \sqrt{v^2 + 4a^2\gamma}$. При этом внутри интервала (α, β) управление u по-прежнему принимает значение $\gamma\bar{y}$. Таким образом, при снятии ограничения (3), получаем оптимальные управления из класса обобщенных функций, которые определяются следующим утверждением (здесь δ_ξ обозначает дельта-функцию, сосредоточенную в точке ξ , а $\chi_{[x_1, x_2]}$ – характеристическую функцию отрезка $[x_1, x_2]$):

Теорема (см. теорему 2.5). *Управление $u = -\frac{\gamma\bar{y}}{\varphi_1} \delta_{x_1} + \frac{\gamma\bar{y}}{\varphi_2} \delta_{x_2} + \gamma\bar{y} \chi_{[x_1, x_2]}$ является оптимальным в классе обобщенных управлений в задаче P_2 .*

Теорема (см. теорему 2.6). *Управление*

$$u = \frac{C}{x_2 - x_1 + \frac{\sqrt{v^2 + 4\gamma a^2}}{\gamma}} \left(\frac{\delta_{x_2}}{\varphi_2} - \frac{\delta_{x_1}}{\varphi_1} + \chi_{[x_1, x_2]} \right)$$

является оптимальным в классе обобщенных управлений в задаче P_1 .

Аналогичные теоремы доказаны для случая отсутствия диффузии.

Наконец, в последней, **третьей главе** для задач P_1 и P_2 дано аналитическое решение в одномерном случае при отсутствии выброса и течения, то есть при $\bar{u}_2 = C_2 = k_2 = 0$ и $v = 0$. При этом в качестве области D выбран отрезок $[-b, b]$, а уравнение и граничные условия имеет вид

$$a^2 y'' - (\gamma + u) y = uY, \quad y'(-b) = \frac{\sqrt{\gamma}}{a} y(-b), \quad y'(b) = \frac{\sqrt{\gamma}}{a} y(b).$$

Для этих задач найдена структура оптимального решения в классах постоянных и измеримых управлений.

Для задачи P_1 постоянное управление определяется однозначно и имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-b, b], \\ \frac{C}{2b}, & x \in [-b, b]. \end{cases}$$

Значит, решение задачи P_1 в классе постоянных управлений существует лишь при $C \leq 2\bar{u}b$ и совпадает с единственным допустимым управлением из этого класса.

Теорема (см. теорему 3.1). *Оптимальным в классе постоянных управлений в задаче P_2 является управление, задаваемое формулой*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-b, b], \\ u, & x \in [-b, b]. \end{cases}$$

где u – корень уравнения

$$\frac{uY}{\gamma + u} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{\gamma+u}b}{a} \right) + \sqrt{\gamma+u} \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{\gamma+u}b}{a} \right)} - 1 \right) = -\bar{y},$$

если

$$\frac{\bar{u}Y}{\gamma + \bar{u}} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{\gamma+\bar{u}}b}{a} \right) + \sqrt{\gamma+\bar{u}} \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{\gamma+\bar{u}}b}{a} \right)} - 1 \right) \leq -\bar{y},$$

и \bar{u} в противном случае.

Теорема (см. теорему 3.4). *Оптимальным в классе измеримых управлений в задаче P_1 является управление*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-b, b], \\ \bar{u}, & x \in [-b, \alpha) \cup (\beta, b], \\ \frac{\gamma\bar{y}}{Y-\bar{y}}, & x \in [\alpha, \beta], \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\alpha = -b + \frac{a}{\sqrt{\gamma + \bar{u}}} \left(\operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{\gamma\bar{u}}Y}{\bar{u}(Y - \bar{y}) - \gamma\bar{y}} - \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{\gamma}{\bar{u}}} \right), \quad \beta = -\alpha, \quad (9)$$

а величина \bar{y} , задающая оптимальное значение функционала этой задачи, вычисляется согласно равенству

$$\frac{2a}{\sqrt{\gamma + \bar{u}}} \left(\bar{u} - \frac{\gamma\bar{y}}{Y - \bar{y}} \right) \left[\operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{\gamma\bar{u}}Y}{\bar{u}(Y - \bar{y}) - \gamma\bar{y}} - \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{\gamma}{\bar{u}}} \right] + \frac{2b\gamma\bar{y}}{Y - \bar{y}} = C.$$

Теорема (см. теорему 3.2). *В случае $\bar{y} < \frac{Y}{2}$ оптимальное измеримое управление в задаче P_2 кусочно-постоянно и имеет вид (8), (9).*

ГЛАВА 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Основная задача, рассматриваемая в данной работе, – это оптимизация распределенного воздействия на однородную сплошную среду, движущуюся с постоянной скоростью. Под воздействием понимаем или насыщение среды некоторым веществом (например, выброс загрязнения) или отбор какой-либо ее компоненты (например, фильтрация фитопланктона аквакультурой) с помощью размещения имеющегося ресурса в заданной ограниченной области D потока с гладкой или кусочно-гладкой границей. Такая область в приложениях может быть, например, территорией аквафермы или областью, доступной для выброса очищающего реагента.

Обозначив через w концентрацию изучаемого вещества в потоке, а через v – постоянную положительную скорость течения, которую считаем направленной вдоль оси Ox_1 , получим следующее уравнение изменения этой концентрации

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x_1} = a^2 \Delta w - \gamma(w - Y) - u_1 w + u_2.$$

Здесь t – время, a^2 – коэффициент диффузии, Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным x , $x = (x_1, \dots, x_d)$, γ – коэффициент, характеризующий скорость естественного распада или восстановления вещества, Y – фоновое значение его концентрации, а u_1 и u_2 – измеримые компоненты управления u , характеризующие распределённые ресурсы отбора и выброса вещества, соответственно. Данная модель, описывающая состояние среды, была предложена, например, в [21, 29, 30, 34], а ее анализ представлен в работах [14–18, 39].

Предполагается, что среда совпадает со всем пространством \mathbb{R}^d , где и контролируются ее показатели.

Начальная концентрация вещества в потоке задана функцией

$$w(x, 0) = w_0(x),$$

у которой отклонение от фонового (постоянного) значения Y , $Y \geq 0$, предполагается ограниченным в норме $L_2(\mathbb{R}^d)$, то есть

$$w_0 - Y \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

где $L_2(\mathbb{R}^d)$ – пространство Лебега с нормой $\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} y^2(x) dx}$.

Поставленная задача заменой $\tilde{w} = w - Y$ (и, соответственно, $\tilde{w}_0 = w_0 - Y$) сводится к задаче

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x_1} = a^2 \Delta w - (\gamma + u_1)w + u_2 - u_1 Y, \quad (1.1)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad (1.2)$$

где знак «тильда» опущен.

Измеримые компоненты управления, как и в работах [13, 37], будем считать зависящими лишь от пространственной переменной x и ограниченными, то есть такими, что выполнены неравенства

$$0 \leq u_1(x) \leq \bar{u}_1, \quad 0 \leq u_2(x) \leq \bar{u}_2, \quad (1.3)$$

которые в прикладных задачах отражают ограничения на технологические возможности принудительной очистки и выброса, соответственно. Кроме того, предполагается, что управления могут отличаться от нуля лишь в заданной ограниченной области D .

Решение задачи (1.1), (1.2) разложим в сумму функций y , $y = y(x)$, и z , $z = z(x, t)$, которые являются решениями стационарного уравнения

$$y \in W_2^1(\mathbb{R}^d), \quad a^2 \Delta y - v \frac{\partial y}{\partial x_1} - (\gamma + u_1)y = -u_2 + u_1 Y \in L_2(\mathbb{R}^d) \quad (1.4)$$

и задачи Коши

$$z \in W_2^{1,0}(\mathbb{R}_+^{d+1}), \quad a^2 \Delta z - v \frac{\partial z}{\partial x_1} - \frac{\partial z}{\partial t} - (\gamma + u_1)z = 0, \quad (1.5)$$

$$z(x, 0) = w_0(x) - y(x) \in L_2(\mathbb{R}^d),$$

соответственно.

Здесь

- $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ – это соболевское пространство, определяемое как замыкание множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ по норме $\sqrt{\|y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2}$,

- $W_2^{1,0}(\mathbb{R}_+^{d+1})$ – это соболевское пространство, определяемое как замыкание множества $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1})$ по норме $\sqrt{\|y\|_{L_2(\mathbb{R}_+^{d+1})}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+^{d+1})}^2}$.

Решения уравнения (1.4) и задачи Коши (1.5) понимаются в смысле выполнения интегральных тождеств

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[a^2 (\nabla y, \nabla \eta) + \eta \left(v \frac{\partial y}{\partial x_1} + (\gamma + u_1) y \right) \right] dx = \int_{\mathbb{R}^d} f \eta dx, \quad (1.6)$$

$$\forall \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}_+^{d+1}} \left[a^2 (\nabla z, \nabla \eta) + \eta \left(v \frac{\partial z}{\partial x_1} + (\gamma + u_1) z \right) - z \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] dx dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (w_0(x) - y(x)) \eta(x, 0) dx, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1})$$

соответственно, где оператор ∇ задает вектор частных производных $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right)$, $(\nabla y, \nabla \eta)$ – скалярное произведение векторов ∇y и $\nabla \eta$, а $f = u_2 - u_1 Y$.

В силу того, что оператор

$$Lz = \frac{\partial z}{\partial t} - a^2 \Delta z + v \frac{\partial z}{\partial x_1} + (\gamma + u_1) z$$

является равномерно параболическим с ограниченными коэффициентами, решение задачи Коши (1.5) существует и единственно для любой начальной функции $w_0(x) - y(x) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ (см., например, [23], [8]). Более того (см.,

например, [23]), для любого $T > 0$ найдется неотрицательное число λ такое, что выполнено неравенство

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda|x|^2} z(x, t) dx dt < \infty.$$

и решение $z(x, t)$ равномерно сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$ (см., например, [3]). Значит, решение параболического уравнения (1.1) стабилизируется на решении уравнения (1.4).

Докажем теперь разрешимость задачи (1.4). Для этого отметим, что в силу ограниченности компонент управления билинейная форма $B[y, \eta]$,

$$B[y, \eta] = \int_{\mathbb{R}^d} \left[a^2 (\nabla y, \nabla \eta) + \eta \left(v \frac{\partial y}{\partial x_1} + (\gamma + u_1) y \right) \right] dx,$$

ограничена в $W_2^1(\mathbb{R}^d)$, то есть

$$|B[y, \eta]| \leq c \|y\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} \|\eta\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)}$$

с некоторой константой c .

Действительно, в силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla y, \nabla \eta)| dx &\leq \| |\nabla y| \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \| |\nabla \eta| \|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \\ \int_{\mathbb{R}^d} \left| \eta \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| dx &\leq \|\eta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left\| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\eta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \| |\nabla y| \|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \\ \int_{\mathbb{R}^d} |(\gamma + u_1) \eta y| dx &\leq (\gamma + \bar{u}_1) \|y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|\eta\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

где $|\nabla y| = \sqrt{(\nabla y, \nabla y)}$. В итоге

$$|B[y, \eta]| \leq (a^2 + v + \gamma + \bar{u}_1) \|y\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} \|\eta\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Для любой функции $y \in W_2^1(\mathbb{R}^d)$ выполнено

$$\begin{aligned} B[y, y] &= a^2 \|\nabla y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + v \int_{\mathbb{R}^d} y \frac{\partial y}{\partial x_1} dx + \int_{\mathbb{R}^d} (\gamma + u_1) y^2 dx = \\ &= a^2 \|\nabla y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} (\gamma + u_1) y^2 dx \geq a^2 \|\nabla y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \gamma \|y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \geq \\ &\geq \min\{a^2, \gamma\} \|y\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)}^2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

и, значит билинейная форма $B[y, \eta]$ коэрцитивна. По лемме Лакса-Мильграма [1] решение уравнения (1.4) существует и единственно.

Полагая теперь в интегральном тождестве (1.6) пробную функцию η равной решению y

$$B[y, y] = (f, y),$$

и, используя элементарное неравенство

$$|\alpha\beta| \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\beta^2,$$

которое справедливо для любых чисел α и β и любого $\varepsilon > 0$, получим оценку

$$B[y, y] \leq \varepsilon \|y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

из которой совместно с оценкой (1.7) сразу следует энергетическое неравенство

$$a^2 \|\nabla y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \gamma \|y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \varepsilon \|y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

где ε – произвольное положительное число. Данное неравенство дает возможность оценить $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ -норму решения через $L_2(\mathbb{R}^d)$ -норму правой части:

$$\|y\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.8)$$

Для получения оценки решения в $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ определим функцию g , $g = g(x)$, как срезку [41]

$$g = \begin{cases} y - k, & y > k, \\ 0, & |y| \leq k, \\ y + k, & y < -k. \end{cases}$$

Согласно следствию А.5 из [6] она принадлежит пространству $W_2^1(\mathbb{R}^d)$, и, значит её можно использовать в качестве пробной функции в (1.6). Для этого заметим, что обобщенные частные производные первого порядка функции g совпадают с соответствующими производными функции y на множестве $A_k = \{x \in \mathbb{R}^d : y(x) \geq k\}$ и равны нулю в $\mathbb{R}^d \setminus A_k$. Подставим эту функцию в уравнение (1.6) и оценим снизу модуль суммы первого и третьего слагаемых в его левой части:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} [a^2 (\nabla y, \nabla g) + (\gamma + u_1)yg] dx \right| &= \int_{\mathbb{R}^d} (a^2 (\nabla y, \nabla g) + (\gamma + u_1)yg) dx \geq \\ &\geq a^2 \|\nabla g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \gamma \int_{\mathbb{R}^d} |y||g| dx, \end{aligned}$$

Второе слагаемое перенесем вправо и оценим модуль полученной правой части оценим сверху:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(f - v \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) g dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f||g| dx + v \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla y||g| dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f||g| dx + v \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g||g| dx.$$

Из неравенства Юнга следует

$$v \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g||g| dx \leq \frac{v^2}{2a^2} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{a^2}{2} \|\nabla g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$$

В результате получим

$$a^2 \|\nabla g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \gamma \int_{\mathbb{R}^d} |y||g| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f||g| dx + \frac{v^2}{2a^2} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{a^2}{2} \|\nabla g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

или, что то же самое

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} \|\nabla g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(|f| + \frac{v^2}{2a^2} |g| - \gamma |y| \right) |g| dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(|f| + \frac{v^2}{2a^2} |g| - \gamma |g| - \gamma k \right) |g| dx \end{aligned}$$

Подынтегральная функция в правой части отлична от нуля лишь в области A_k , где $|y| \geq k$. Выбирая число k так, чтобы было выполнено неравенство $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \gamma k$, добъёмся того, что при $\gamma > \frac{v^2}{2a^2}$ правая часть будет неположительной и, значит $\|\nabla g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = 0$.

Проведём аналогичные вычисления для получения неравенства

$$\frac{\gamma}{2} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \int_{\mathbb{R}^d} (|f| - \gamma k) |g| dx,$$

в котором правая часть также неположительна и, значит, $\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0$, то есть функция g равна нулю почти всюду в \mathbb{R}^d .

Получили оценку

$$\|y\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.9)$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.1. *Задача Коши (1.1), (1.2) однозначно разрешима для любых стационарных ограниченных измеримых функций u_1, u_2 с финитным носителем D и любой начальной функции $w_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Более того, при $t \rightarrow \infty$ ее решение стабилизируется на решении соответствующего стационарного уравнения (1.4), которое при $\gamma > \frac{v^2}{2a^2}$ принадлежит пространству $W_2^1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и удовлетворяет неравенствам (1.8) и (1.9).*

В силу данной теоремы разумно решать оптимизационные задачи для предельного распределения вещества в среде, удовлетворяющего эллиптическому уравнению (1.4). Это распределение мы и будем понимать всюду далее под состоянием среды.

1.1. Формулировка задач оптимизации

В этом параграфе мы сформулируем две оптимизационные задачи, отличающиеся по своему прикладному содержанию.

Задача P₁: Найти управляющее воздействие на среду с заданной L_1 -нормой (ёмкостью) компонент управления

$$C_i = \int_D u_i dx \left(= \int_{\mathbb{R}^d} u_i dx \right), \quad i = 1, 2, \quad (1.10)$$

удовлетворяющей (технологическому) ограничению по размещению управления

$$C_i \leq \bar{u}_i \int_D dx, \quad i = 1, 2,$$

вытекающему из (3), для которого максимальное значение абсолютной величины соответствующего решения y будет минимальным. Это приводит к следующей задаче оптимизации

$$I(u, y) \rightarrow \min,$$

где

$$I(u, y) = \max_{x \in \mathbb{R}^d} |y(x)|.$$

Прикладной смысл данной задачи заключается в минимизации максимума изменения естественного состояния среды (показателя y) за счет распределения заданных ёмкостей выброса C_2 и отбора C_1 .

Задача P₂: Во этой задаче разрешены лишь управляющие воздействия, для которых соответствующее решение y отклоняется от нуля не более чем на заданное значение $\bar{y} \geq 0$, то есть

$$|y| \leq \bar{y}. \quad (1.11)$$

Целью же оптимизации является максимизация функционала

$$J(u, y) = k_1 \|u_1\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} + k_2 \|u_2\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} = \int_D (k_1 u_1 + k_2 u_2) dx.$$

При заданных значениях констант k_1 и k_2 (каждая из которых, вообще говоря, может быть и положительной – в случае, если соответствующая

компонента управления приносит прибыль – и неположительной – в противном случае) получаем следующую задачу оптимизации

$$J(u, y) \rightarrow \max.$$

Прикладной смысл этой задачи следующий: необходимо максимизировать доход – результат выброса и отбора, – при наличии ограничения на предельную допустимую концентрацию исследуемого вещества в потоке. При этом доход является линейной функцией от объёма управления, заданного нормой в пространстве $L_1(\mathbb{R}^d)$, а знаки коэффициентов k_1 и k_2 отвечают за то, приносят соответственно отбор и выброс доход или расходы.

1.1.1. Разрешимость задачи P_1 Прежде чем исследовать разрешимость задачи P_1 отметим, что и компоненты управления u , и решение y далее будут рассматриваются нами как функции рефлексивного банахова пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$, а функционал I , $I(u, y) \equiv I(y) \equiv \max_{x \in \mathbb{R}^d} |y|$, – как отображение из пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ в \mathbb{R} .

Определение 1. *Допустимым управлением и задачи P_1 будем называть такую пару измеримых функций (u_1, u_2) , что выполнены условия (1.3), (1.10). Множество решений y уравнения (1.4), соответствующих допустимым управлениям, будем обозначать как \mathcal{Y} .*

Теорема 1.2. *Существует допустимое управление, доставляющее решение задачи P_1 .*

Доказательство теоремы основано на существенных свойствах множества допустимых решений \mathcal{Y} и функционала I и проводится как в работе [19].

Покажем, что множество \mathcal{Y} непусто и ограничено. Для этого заметим, что множество допустимых управлений u , $u = (u_1, u_2)$, ограничено в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d) \times L_2(\mathbb{R}^d)$. В частности, оно вложено в ограниченное в

$L_2(\mathbb{R}^d) \times L_2(\mathbb{R}^d)$ множество $\left\{ (u_1, u_2) : \|u_i\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \bar{u}_i \sqrt{\int_D dx}, i = 1, 2 \right\}$. Из этого факта, а также неравенства (1.8), следует, что

$$\|y\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|y\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} \leq K,$$

где величина K задается равенством $K = (\bar{u}_2 + \bar{u}_1 Y) \cdot \sqrt{\int_D dx}$ и конечна. Значит, множество \mathcal{Y} и, тем более, любое его подмножество ограничено в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $W_2^1(\mathbb{R}^d)$.

Покажем теперь, что предел любой слабо сходящейся последовательности $y^n \in \mathcal{Y}$ принадлежит \mathcal{Y} . Функции y^n являются решениями уравнения (1.4) с некоторыми допустимыми управлениями u^n , $u^n = (u_1^n, u_2^n)$. Так как для множеств $\{u_i^n\}$, $i = 1, 2$, выполнены неравенства $\|u_i^n\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \bar{u}_i \cdot \sqrt{\int_D dx}$, то из них можно выбрать подпоследовательности $\{u_i^{n_k}\}$, сходящиеся слабо к $u_i \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Представим, что предельное управление недопустимо, т.е. либо на некотором множестве Ω ненулевой меры $u_i < 0$ или $u_i > \bar{u}_i$, либо $\int_{\mathbb{R}^d} u_i dx \neq C_i$. В этом случае либо

$$0 > \int_{\Omega} u_i dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_i \chi_{\Omega} dx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_i^{n_k} \chi_{\Omega} dx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_i^{n_k} dx \geq 0,$$

либо

$$\bar{u}_i \int_{\Omega} dx < \int_{\mathbb{R}^d} u_i \chi_{\Omega} dx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_i^{n_k} \chi_{\Omega} dx \leq \bar{u}_i \int_{\Omega} dx,$$

либо

$$C_i \neq \int_{\mathbb{R}^d} u_i dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_i \chi_D dx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_i^{n_k} \chi_D dx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_i^{n_k} dx = C_i,$$

чего не может быть. Следовательно, предельное управление u , $u = (u_1, u_2)$, является допустимым.

Из неравенства $\|y^{n_k}\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} \leq K$ следует равномерная ограниченность множества $\{y^{n_k}\}$ в $W_2^1(\mathbb{R}^d)$. Вложение $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\Omega)$ по теореме Реллиха компактно для любой ограниченной области Ω в \mathbb{R}^d (см., например, [10], [40]).

Выберем эту область совпадающей с носителем управлений D . После выделения подпоследовательности (не изменяя нумерации) получим сильную в $L_2(D)$ сходимость y^{n_k} к своему слабому пределу y .

Известно (см., например, [22], [32]), что если $u_1^{n_k}$ сходится слабо к u_1 в $L_2(D)$, а y^{n_k} сходится сильно к y в $L_2(D)$, то произведение $u_1^{n_k} y^{n_k}$ сходится слабо к $u_1 y$ в $L_1(D)$, то есть для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции η выполнено равенство

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_1^{n_k} y^{n_k} \eta dx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_D u_1^{n_k} y^{n_k} \eta dx = \int_D u_1 y \eta dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_1 y \eta dx.$$

Используя данный факт и слабую сходимость функций y^{n_k} и $u_2^{n_k}$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ получим, что для предельных функций y , u_1 и u_2 выполнено равенство (1.6) и, значит, функция y является решением уравнения (1.4) с допустимым управлением $u = (u_1, u_2)$, то есть принадлежит множеству \mathcal{Y} .

Пусть теперь

$$\mu = \inf_{y \in \mathcal{Y}} I(y).$$

Согласно определению точной нижней грани существует такая последовательность $y^n \in \mathcal{Y}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(y^n) = \mu.$$

В силу ограниченности множества y^n из него можно выбрать слабо сходящуюся в $L_2(\mathbb{R}^d)$ подпоследовательность, а из доказанного выше следует, что функция y , которая является слабым пределом этой подпоследовательности (будем обозначать ее y^n , не изменяя нумерации), принадлежит множеству допустимых решений \mathcal{Y} . Для того, чтобы показать, что на предельной функции y достигается искомый минимум функционала μ , предположим обратное. А именно, что $I(y) > \mu$. Это значит, что существует множество Ω ненулевой меры такое, что $|y| > \mu$ на этом множестве. Следовательно,

$$\mu \int_{\Omega} dx < \int_{\Omega} |y| dx = \int_{\mathbb{R}^d} |y| \chi_{\Omega} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |y^n| \chi_{\Omega} dx \leq$$

$$\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |y^n| \chi_{\Omega} dx \leq \mu \int_{\Omega} dx,$$

где χ_{Ω} – это характеристическая функция области Ω . Получили противоречие. И, значит, $I(y) \leq \mu$.

Так как I – это норма в пространстве $L_{\infty}(\mathbb{R}^d)$, то $I(y) \geq 0 > -\infty$ для всех $y \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и, значит, величина μ конечна и $I(y) = \mu$, то есть предельная функция y минимизирующей последовательности есть точка абсолютного минимума функционала I на множестве допустимых решений \mathcal{U} . ■

1.1.2. Разрешимость задачи P_2 Отметим, что, как и ранее, и компоненты управления u , и решение y рассматриваются нами как функции пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$. Функционал J , $J(u, y) \equiv J(u) \equiv k_1 \|u_1\|_{L_1(\mathbb{R}^d)} + k_2 \|u_2\|_{L_1(\mathbb{R}^d)}$, является отображением из рефлексивного банахова пространства $L_2(\mathbb{R}^d) \times L_2(\mathbb{R}^d)$ в \mathbb{R} .

Определение 2. *Допустимым управлением и задачи P_2* будем называть такую пару измеримых функций (u_1, u_2) , что выполнены условия (1.3), (1.11). Множество допустимых управлений u будем обозначать как \mathcal{U} .

Теорема 1.3. *Существует допустимое управление, доставляющее решение задачи P_2 .*

Доказательство теоремы осуществляется аналогичным с предыдущим параграфом способом и основано на существенных свойствах множества допустимых управлений \mathcal{U} и функционала J .

Покажем сначала, что множество допустимых управлений \mathcal{U} непусто и ограничено. Для этого заметим, что оно вложено в ограниченное в $L_2(\mathbb{R}^d) \times L_2(\mathbb{R}^d)$ множество $\left\{ (u_1, u_2) : \|u_i\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \bar{u}_i \cdot \sqrt{\int_D dx}, i = 1, 2 \right\}$, и, значит, является ограниченным, как и любое его подмножество.

Отметим теперь, что множество допустимых управлений \mathcal{U} непусто, т.к. содержит как минимум один элемент u , $u(x) \equiv (0, 0)$.

Покажем теперь, что предел любой слабо сходящейся в $L_2(\mathbb{R}^d) \times L_2(\mathbb{R}^d)$ последовательности $u^n \in \mathcal{U}$ принадлежит \mathcal{U} . Для этого рассмотрим слабо сходящиеся к функциям u_1 и u_2 последовательности $u_i^n, u_i^n \in L_2(\mathbb{R}^d), u^n = (u_1^n, u_2^n)$ и соответствующие им решения y^n уравнения (1.4). Так как для функций y^n выполнено неравенство $|y^n|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)} \leq K$, то множество $\{y^n\}$ равномерно ограничено в $W_2^1(\mathbb{R}^d)$, и, как и ранее, из него можно выбрать подпоследовательность $\{y^{n_k}\}$, сходящуюся сильно к своему слабому пределу на ограниченной области Ω (которую мы выберем совпадающей с носителем управлений D). Известно, что если $u_1^{n_k}$ сходится слабо к u_1 в $L_2(D)$, а y^{n_k} сходится сильно к y в $L_2(D)$, то произведение $u_1^{n_k} y^{n_k}$ сходится слабо к $u_1 y$ в $L_1(D)$, то есть для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции η выполнено равенство (1.6) и, значит, функция y является решением уравнения (1.4) с управлением $u = (u_1, u_2)$, то есть принадлежит множеству \mathcal{U} .

Представим теперь, что предельное управление недопустимо, т.е. либо на некотором множестве Ω ненулевой меры $u_i < 0$ или $u_i > \bar{u}_i$, либо $|y| > \bar{y}$. В этом случае либо

$$0 > \int_{\Omega} u_i dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_i \chi_{\Omega} dx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_i^{n_k} \chi_{\Omega} dx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_i^{n_k} dx \geq 0,$$

либо

$$\bar{u}_i \int_{\Omega} dx < \int_{\mathbb{R}^d} u_i \chi_{\Omega} dx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_i^{n_k} \chi_{\Omega} dx \leq \bar{u}_i \int_{\Omega} dx,$$

либо

$$\bar{y} \int_{\Omega} dx < \int_{\mathbb{R}^d} |y| \chi_{\Omega} dx = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |y^{n_k}| \chi_{\Omega} dx \leq \bar{y} \int_{\Omega} dx,$$

чего не может быть. Следовательно, предельное управление $u, u = (u_1, u_2)$, является допустимым и принадлежит \mathcal{U} .

Пусть теперь

$$\mu = \sup_{u \in \mathcal{U}} J(u).$$

Согласно определению точной верхней грани существует такая последовательность $u^n \in \mathcal{U}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u^n) = \mu.$$

В силу ограниченности множества u^n из него можно выбрать слабо сходящуюся в $L_2(\mathbb{R}^d) \times L_2(\mathbb{R}^d)$ подпоследовательность, а из доказанного выше следует, что вектор u , который является слабым пределом этой подпоследовательности (будем обозначать ее u^n , не изменяя нумерации), принадлежит множеству допустимых решений \mathcal{U} . Для того, чтобы показать, что на предельной функции u достигается искомый максимум функционала μ , предположим обратное. А именно, что $J(u) < \mu$. Это значит,

$$\begin{aligned} \mu > J(u) &= \int_{\mathbb{R}^d} (k_1 u_1 + k_2 u_2) \chi_D dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} (k_1 u_1^n + k_2 u_2^n) \chi_D dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} J(u^n) = \mu, \end{aligned}$$

Получили противоречие. И, значит, $J(u) \geq \mu$.

Так как J – это линейная комбинация норм ограниченных функций, то величина μ конечна и $J(u) = \mu$, то есть предельный вектор u максимизирующей последовательности есть точка абсолютного максимума функционала J на множестве допустимых управлений \mathcal{U} . ■

ГЛАВА 2

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБРОСА В ОДНОМЕРНЫЙ ПОТОК

В этой главе для задач P_1 и P_2 , сформулированных ранее (в предыдущей главе в пункте 1.4) дано аналитическое решение в одномерном случае при отсутствии отбора, то есть при $\bar{u}_1 = C_1 = k_1 = 0$. При этом в качестве области D выбран отрезок $[x_1, x_2]$. В заданных условиях найдена структура оптимального решения задач P_1 и P_2 в классах постоянных, измеримых и обобщенных управлений с финитным носителем в случаях наличия либо отсутствия диффузии. Эти результаты представлены в работах [2, 12, 13].

2.1. Модель реакции-адвекции-диффузии

Сначала сформулируем задачу P_2 при положительных a , v и γ :
В классах постоянных, измеримых и обобщенных функций найти управление u , удовлетворяющее условию

$$0 \leq u \leq \bar{u}, \quad (2.1)$$

и такое, что соответствующее ему решение y уравнения¹

$$a^2 y'' - v y' - \gamma y = -u \quad (2.2)$$

удовлетворяет ограничению

$$|y| \leq \bar{y} \quad (2.3)$$

и максимизирует функционал

$$J(u, y) = \int_{x_1}^{x_2} u(x) dx. \quad (2.4)$$

Вне интервала $[x_1, x_2]$ модельное уравнение (2.2) является однородным и его решение имеет вид

$$y(x) = A_1 e^{\varphi_1 x} + A_2 e^{\varphi_2 x},$$

¹Здесь и далее штрихами обозначены производные по пространственной переменной.

где A_1 и A_2 – произвольные постоянные, $\varphi_{1,2}$ – корни характеристического уравнения для (2.2):

$$\varphi_{1,2} = \frac{v}{2a^2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4a^4} + \frac{\gamma}{a^2}},$$

которые мы упорядочим следующим образом

$$\varphi_1 < 0 < \varphi_2$$

в силу положительности v и γ .

При такой нумерации, в силу ограниченности решения на бесконечности и знаков собственных чисел, получим

$$y(x) = \begin{cases} A_2 e^{\varphi_2 x}, & x \leq x_1, \\ A_1 e^{\varphi_1 x}, & x \geq x_2, \end{cases} \quad (2.5)$$

и, следовательно, выполнены равенства

$$y'(x_1) = \varphi_2 y(x_1), \quad y'(x_2) = \varphi_1 y(x_2). \quad (2.6)$$

Общее решение неоднородного уравнения (2.2) найдем методом вариации произвольных постоянных. Для этого запишем его в виде

$$B_1(x)e^{\varphi_1 x} + B_2(x)e^{\varphi_2 x}.$$

Функции B_1 и B_2 определяются из системы двух уравнений

$$\begin{cases} B_1'(x)e^{\varphi_1 x} + B_2'(x)e^{\varphi_2 x} = 0, \\ \varphi_1 B_1'(x)e^{\varphi_1 x} + \varphi_2 B_2'(x)e^{\varphi_2 x} = -\frac{u}{a^2}, \end{cases}$$

и имеют вид

$$B_1(x) = C_1 + \frac{\int_{-\infty}^x u(\xi)e^{-\varphi_1 \xi} d\xi}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$B_2(x) = C_2 - \frac{\int_{-\infty}^x u(\xi)e^{-\varphi_2 \xi} d\xi}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{\varphi_1 x} + C_2 e^{\varphi_2 x} + f(x), \quad (2.7)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \left(e^{\varphi_1 x} \int_{-\infty}^x u(\xi) e^{-\varphi_1 \xi} d\xi - e^{\varphi_2 x} \int_{-\infty}^x u(\xi) e^{-\varphi_2 \xi} d\xi \right).$$

Склеивая функцию (2.7) с (2.5) в точках x_1 и x_2 , которые являются точками непрерывности и непрерывной дифференцируемости решения, с помощью равенств (2.6) получаем значения постоянных C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = \frac{1}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) e^{-\varphi_2 \xi} d\xi. \end{cases}$$

и следующий вид ограниченного решения уравнения (2.2):

$$y(x) = \begin{cases} \frac{e^{\varphi_2 x}}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{x_1}^{x_2} u(\xi) e^{-\varphi_2 \xi} d\xi, & x < x_1, \\ \frac{1}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \left(e^{\varphi_1 x} \int_{x_1}^x u(\xi) e^{-\varphi_1 \xi} d\xi + e^{\varphi_2 x} \int_x^{x_2} u(\xi) e^{-\varphi_2 \xi} d\xi \right), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ \frac{e^{\varphi_1 x}}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \int_{x_1}^{x_2} u(\xi) e^{-\varphi_1 \xi} d\xi, & x > x_2, \end{cases}$$

или, что то же самое

$$y(x) = \frac{1}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \left(e^{\varphi_1 x} \int_{-\infty}^x u(\xi) e^{-\varphi_1 \xi} d\xi + e^{\varphi_2 x} \int_x^{+\infty} u(\xi) e^{-\varphi_2 \xi} d\xi \right). \quad (2.8)$$

Это решение неотрицательно на всей вещественной оси и, следовательно,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |y(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} y(x).$$

Сформулируем теперь задачу P₁: Найти управление u , удовлетворяющее ограничению (2.1) и имеющее заданную ёмкость

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) dx = C, \quad (2.9)$$

для которого соответствующее решение (2.8) задачи (2.2), (2.6) доставляет минимум функционала

$$I(u, y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} y(x).$$

2.1.1. Оптимальное постоянное управление Сначала решим задачи P_1 и P_2 в случае постоянного управления, то есть управления вида

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ u, & x \in [x_1, x_2], \end{cases} \quad (2.10)$$

где u - это константа, удовлетворяющая условию $0 \leq u \leq \bar{u}$.

Для задачи P_1 в силу условия (2.9) такое управление определяется однозначно и имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \frac{C}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Значит, решение задачи P_1 в классе постоянных управлений существует лишь при выполнении неравенства $C \leq \bar{u}(x_2 - x_1)$ и совпадает с единственным допустимым управлением из этого класса.

Зависимость значения функционала I от общего объема управления C при оптимальном постоянном управлении изображена на Рис. 2.1.

Теорема 2.1. *Оптимальным в классе постоянных управлений в задаче P_2 является управление, задаваемое формулой (2.10), с*

$$u = \frac{\bar{y}\gamma}{1 - e^{\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}(x_1 - x_2)}},$$

если

$$\bar{y} \leq \frac{\bar{u}}{\gamma} \left(1 - e^{\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}(x_1 - x_2)} \right),$$

и \bar{u} в противном случае.

Доказательство. Согласно (2.8) ограниченное решение уравнения (2.2)

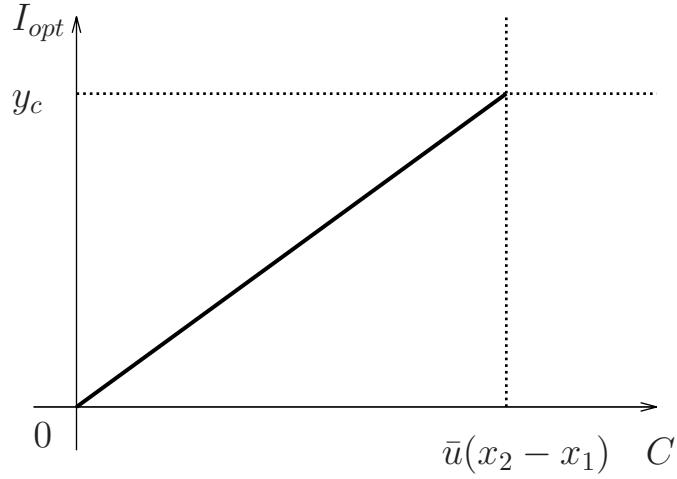


Рис. 2.1. Зависимость I_{opt} от C при постоянном управлении (при $a = 0.1$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.05$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

задается формулой

$$y(x) = \begin{cases} \frac{u}{\gamma} \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_2} (e^{-\varphi_2 x_1} - e^{-\varphi_2 x_2}) e^{\varphi_2 x}, & x \in (-\infty, x_1), \\ \frac{u}{\gamma} \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} e^{\varphi_1(x-x_1)} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_2(x-x_2)} + 1 \right), & x \in [x_1, x_2], \\ \frac{u}{\gamma} \frac{\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} (e^{-\varphi_1 x_1} - e^{-\varphi_1 x_2}) e^{\varphi_1 x}, & x \in (x_2, +\infty). \end{cases}$$

Это решение неотрицательно, стремится к нулю на бесконечности и имеет единственную точку экстремума – максимум в точке $x_{\max} = \frac{\varphi_2 x_2 - \varphi_1 x_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$. В этой точке первая производная решения равна нулю, а вторая производная имеет вид

$$-\frac{u}{a^2} e^{\frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} (x_2 - x_1)}$$

и отрицательна, поскольку $u > 0$. Само решение в этой точке принимает значение

$$y_{\max} = \frac{u}{\gamma} \left(1 - e^{\frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} (x_2 - x_1)} \right).$$

Нетрудно видеть, что это значение линейно зависит от u и, следовательно, существует единственное постоянное управление вида (2.10), доставляющее

максимум функционалу (2.4), точнее:

$$u = \begin{cases} \bar{u}, & y_c \leq \bar{y}, \\ \frac{\bar{y}\gamma}{1 - e^{\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}(x_1 - x_2)}}, & y_c > \bar{y}, \end{cases}$$

где $y_c = y_{\max}|_{u=\bar{u}} = \frac{\bar{u}}{\gamma} \left(1 - e^{\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}(x_1 - x_2)}\right)$. ■

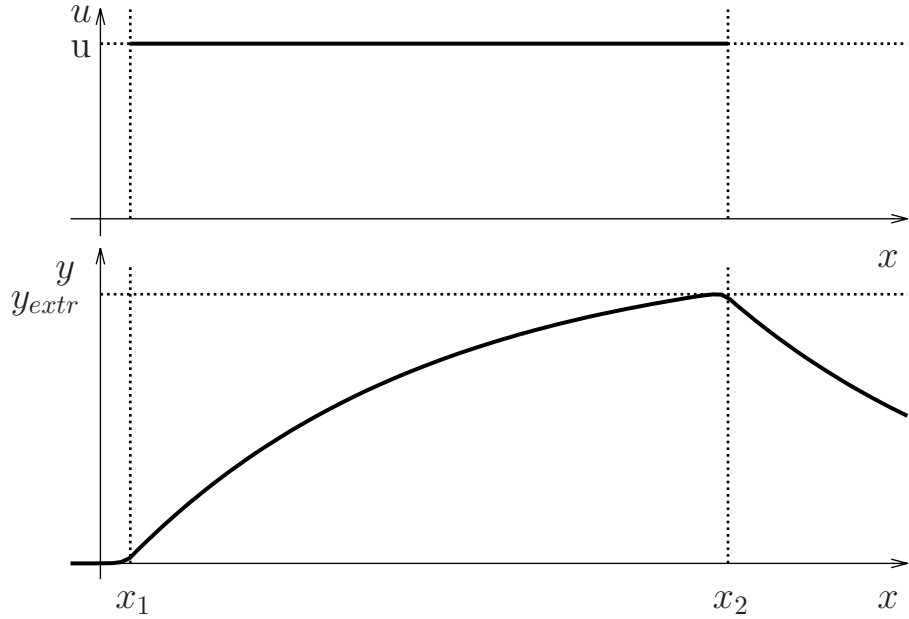


Рис. 2.2. Постоянное управление u и соответствующее ему решение y (при $a = 0.1$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.5$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

На Рис. 2.2 изображены график постоянного управления u и соответствующее ему решение уравнения (2.2) y (при $a = 0.1$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.5$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$), а Рис. 2.3 иллюстрирует зависимость от \bar{y} значения функционала J – ёмкости выброса, при оптимальном постоянном управлении.

Понятно, что в случае $y_c \leq \bar{y}$ оптимальным управлением не только в классе постоянных, а также измеримых управлений, будет управление с максимальным допустимым значением \bar{u} .

Рассмотрим теперь случай, когда $y_c > \bar{y}$. Отметим, что в этом случае выполняется неравенство $\gamma < \frac{\bar{u}}{\bar{y}}$.

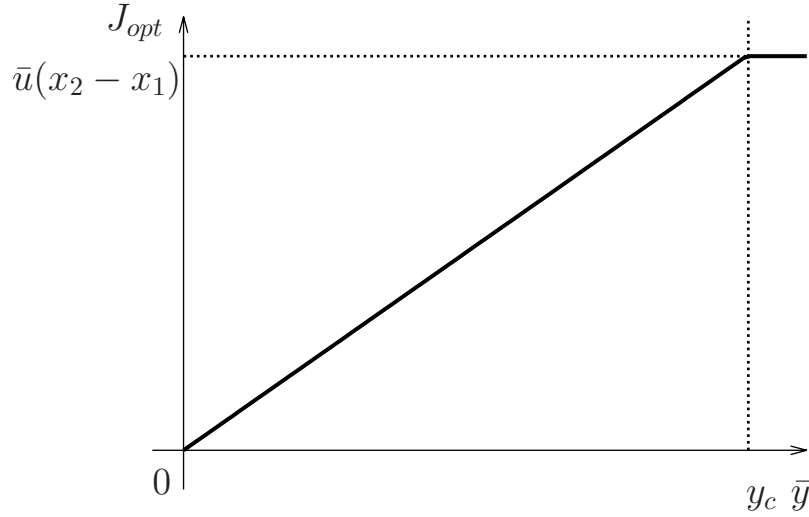


Рис. 2.3. Зависимость J_{opt} от \bar{y} при постоянном управлении (при $a = 0.1$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.05$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

2.1.2. Оптимальное измеримое управление Найдем теперь решение задач P_1 и P_2 для управлений из класса измеримых функций, предполагая, что y_c , вычисленное выше, превосходит ограничение \bar{y} . Отметим, что для измеримого управления u решение y по-прежнему задается равенством (2.8), и, согласно теореме Каратеодори (см., например, [5]), является непрерывной дифференцируемой функцией, производные которой на концах интервала (x_1, x_2) удовлетворяют равенствам (2.6).

Теорема 2.2. *Оптимальное управление в задаче P_2 кусочно-постоянно и имеет вид*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \bar{u}, & x \in [x_1, \alpha) \cup (\beta, x_2], \\ \gamma \bar{y}, & x \in [\alpha, \beta], \end{cases} \quad (2.11)$$

где $\alpha = x_1 + \frac{1}{\varphi_1} \ln \left(1 - \frac{\gamma \bar{y}}{\bar{u}}\right)$, $\beta = x_2 + \frac{1}{\varphi_2} \ln \left(1 - \frac{\gamma \bar{y}}{\bar{u}}\right)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы полезна

Лемма 2.3. *Ограниченное решение y уравнения (2.2), соответствующее оптимальному управлению задачи P_2 , принимает максимально возможное допустимое значение, то есть выходит на ограничение $y = \bar{y}$. Более того,*

если решение y выходит на ограничение в двух точках отрезка $[x_1, x_2]$, то $y \equiv \bar{y}$ между этими точками.

Утверждение леммы обоснуем ниже, а сейчас воспользуемся ей для доказательства теоремы.

Перепишем уравнение (2.2) в виде системы, обозначая функцию y как y_1 и введя новую функцию $y_2 = y'$, получим

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \frac{v}{a^2}y_2 + \frac{\gamma}{a^2}y_1 - \frac{1}{a^2}u, \end{cases}$$

Теперь необходимо найти измеримое управление u , максимизирующее значение функционала

$$J = \int_{x_1}^{x_2} u(x)dx$$

при прежнем ограничении на управление

$$0 \leq u \leq \bar{u}$$

и условию, что решение полученной системы удовлетворяет фазовому ограничению

$$y_1 \leq \bar{y}, \tag{2.12}$$

и граничным условиям

$$y_2(x_1) = \varphi_2 y_1(x_1), \quad y_2(x_2) = \varphi_1 y_1(x_2). \tag{2.13}$$

Замечание. Фазовое ограничение (2.12) является ограничением второго порядка и удовлетворяет условию регулярности² (действительно, вторая производная функции $y_1 - \bar{y}$ по x содержит управление u в явном виде и частная производная $\frac{\partial}{\partial u}(y_1 - \bar{y})''$ отлична от нуля при $y_1 = \bar{y}$). Кроме того, вблизи концов отрезка $[x_1, x_2]$ это ограничение неактивно, т.к. в силу условий (2.13) производная решения y_1 положительна на левом конце и отрицательна

²Определение порядка ограничения и условия регулярности можно найти, например, в [31], [35]

на правом и при равенстве y_1 ограничению на каком-либо из концов отрезка решение сразу же нарушит ограничение при входе на него на этом конце. Таким образом, существуют полуинтервалы $[x_1, \alpha)$, $(\beta, x_2]$, и $(\beta, x_2] \subset [x_1, x_2]$, где ограничение (2.12) неактивно.

Теперь воспользуемся принципом максимума Понтрягина для решения поставленной задачи. Для этого введём функции Гамильтона

$$H = H(u, y, \lambda) = u + \lambda_1 y_2 + \lambda_2 \left(\frac{v}{a^2} y_2 + \frac{\gamma}{a^2} y_1 - \frac{1}{a^2} u \right)$$

и Лагранжа

$$L = L(u, y, \lambda, \mu, \nu) = H + \mu_1(\bar{u} - u) + \mu_2 u + \nu(\bar{y} - y_1),$$

где $\lambda, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, - сопряженная переменная, $\mu, \mu = (\mu_1, \mu_2)$, - векторная функция и ν - функциональный множитель, определяемые с помощью следующих соотношений:

$$\begin{cases} \lambda'_1 = -\frac{\partial L}{\partial y_1} = \nu - \frac{\gamma}{a^2} \lambda_2, \\ \lambda'_2 = -\frac{\partial L}{\partial y_2} = -\lambda_1 - \frac{v}{a^2} \lambda_2, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad \mu_1(\bar{u} - u) = \mu_2 u = 0,$$

$$\nu \geq 0, \quad \nu(\bar{y} - y_1) = 0.$$

Выпишем необходимое условие экстремума в форме принципа максимума в точках, где управление u является производной своего интеграла:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 1 - \frac{1}{a^2} \lambda_2 - \mu_1 + \mu_2 \equiv 0. \quad (2.15)$$

Принимая во внимание граничные условия (2.13) и неактивность ограничения (2.12) вблизи концов интервала $[x_1, x_2]$, получим следующие условия на сопряженный вектор:

$$\lambda_1(x_1) = -\varphi_2 \lambda_2(x_1), \quad \lambda_1(x_2) = -\varphi_1 \lambda_2(x_2).$$

При выходе на уровень ограничения \bar{y} решение y_1 в силу непрерывной дифференцируемости должно иметь нулевую производную, иначе оно нарушит ограничение (2.12) вблизи точки выхода. Пусть α теперь является самой левой точкой выхода на границу оптимального решения, а β – самой правой. Тогда в силу леммы 2.3 решение постоянно и остается на ограничении на этом отрезке. Соответствующее такому решению управление можно вычислить из уравнения (2.2), подставляя значения $y = \bar{y}$, $y'' = y' = 0$. Получим, что управление u равно $\gamma\bar{y}$ на всем интервале (α, β) .

Определим теперь значения сопряженного вектора на этом интервале. В силу того, что $u = \gamma\bar{y}$, а $\gamma\bar{y} \in (0, \bar{u})$, ограничения на управление неактивны и $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Из уравнения (2.15) получим $1 - \frac{1}{a^2}\lambda_2 = 0$ или, что то же самое,

$$\lambda_2 \equiv a^2,$$

и, значит,

$$\lambda_2' \equiv 0.$$

Отсюда и из (2.14) получаем

$$\lambda_1 \equiv -v, \quad \lambda_1' = \nu - \gamma,$$

и, дифференцируя,

$$\lambda_1' \equiv 0.$$

В результате имеем $\nu \equiv \gamma$.

Найдем теперь оптимальное решение на полуинтервале $[x_1, \alpha)$ (на полуинтервале $(\beta, x_2]$ рассуждение проводится аналогично), на котором ограничение неактивно и, следовательно, $\nu \equiv 0$. В этом случае система уравнений на сопряженный вектор имеет вид

$$\begin{cases} \lambda_1' = -\frac{\gamma}{a^2}\lambda_2, \\ \lambda_2' = -\lambda_1 - \frac{v}{a^2}\lambda_2, \end{cases}$$

а её общее решение принимает следующую форму

$$\begin{cases} \lambda_1(x) = C_1 e^{-\varphi_1 x} + C_2 e^{-\varphi_2 x}, \\ \lambda_2(x) = \frac{a^2}{\gamma} \varphi_1 C_1 e^{-\varphi_1 x} + \frac{a^2}{\gamma} \varphi_2 C_2 e^{-\varphi_2 x}. \end{cases}$$

В силу принципа максимума сопряженный вектор на концах полуинтервала $[x_1, \alpha)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_1) &= -\varphi_2 \lambda_2(x_1), \\ \lambda_1(\alpha^-) &= \lambda_1(\alpha^+) - \eta, \quad \eta \geq 0 \\ \lambda_2(\alpha^-) &= \lambda_2(\alpha^+). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Из первого из этих условий получим $C_2 = 0$, $C_1 = \lambda_1(x_1) e^{\varphi_1 x_1}$ и, соответственно, решение системы на сопряженную переменную принимает вид

$$\begin{cases} \lambda_1(x) = \lambda_1(x_1) e^{\varphi_1(x_1-x)}, \\ \lambda_2(x) = \frac{a^2}{\gamma} \varphi_1 \lambda_1(x_1) e^{\varphi_1(x_1-x)}. \end{cases}$$

Отсюда и из условия (2.16) отсутствия скачка у второй компоненты сопряженной переменной в точке $x = \alpha$, получим

$$\lambda_2(\alpha^-) = \frac{a^2}{\gamma} \varphi_1 \lambda_1(x_1) e^{\varphi_1(x_1-\alpha)} = a^2 = \lambda_2(\alpha^+).$$

Следовательно,

$$\lambda_1(x_1) = \frac{\gamma}{\varphi_1} e^{\varphi_1(\alpha-x_1)}.$$

Таким образом при $x \in [x_1, \alpha)$ сопряженный вектор имеет вид

$$\begin{cases} \lambda_1(x) = \frac{\gamma}{\varphi_1} e^{\varphi_1(\alpha-x)}, \\ \lambda_2(x) = a^2 e^{\varphi_1(\alpha-x)}. \end{cases}$$

Теперь из необходимого условия экстремума (2.15) получаем

$$\mu_1 - \mu_2 = 1 - \frac{1}{a^2} \lambda_2 = 1 - e^{\varphi_1(\alpha-x)} > 0.$$

Следовательно, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$ и $u \equiv \bar{u}$ на $[x_1, \alpha)$.

Аналогичные рассуждения приводят к такому же результату на полуинтервале $(\beta, x_2]$.

Для завершения доказательства теоремы осталось вычислить значения α и β . Для этого используем вид решения (2.8) и равенства $y(\alpha) = \bar{y}$ и $y'(\alpha) = 0$:

$$\frac{1}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \left(e^{\varphi_1 \alpha} \int_{x_1}^{\alpha} u(\xi) e^{-\varphi_1 \xi} + e^{\varphi_2 \alpha} \int_{\alpha}^{x_2} u(\xi) e^{-\varphi_2 \xi} \right) = \bar{y},$$

$$\frac{1}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \left(\varphi_1 e^{\varphi_1 \alpha} \int_{x_1}^{\alpha} u(\xi) e^{-\varphi_1 \xi} d\xi + \varphi_2 e^{\varphi_2 \alpha} \int_{\alpha}^{x_2} u(\xi) e^{-\varphi_2 \xi} d\xi \right) = 0.$$

Из второго из них получаем

$$e^{\varphi_2 \alpha} \int_{\alpha}^{x_2} u(\xi) e^{-\varphi_2 \xi} d\xi = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} e^{\varphi_1 \alpha} \int_{x_1}^{\alpha} u(\xi) e^{-\varphi_1 \xi} d\xi.$$

Подставляя это значение в первое равенство, заменяя $u(\xi)$ на \bar{u} и сокращая на $\varphi_2 - \varphi_1$, имеем

$$\frac{\bar{u}}{a^2 \varphi_2} e^{\varphi_1 \alpha} \int_{x_1}^{\alpha} e^{-\varphi_1 \xi} d\xi = \bar{y}.$$

Следовательно,

$$\alpha = x_1 + \frac{1}{\varphi_1} \ln \left(1 - \frac{\gamma \bar{y}}{\bar{u}} \right).$$

Аналогичные рассуждения на интервале $(\beta, x_2]$ приводят к значению

$$\beta = x_2 + \frac{1}{\varphi_2} \ln \left(1 - \frac{\gamma \bar{y}}{\bar{u}} \right).$$

Таким образом, оптимальное управление имеет вид (2.11) и является кусочно-постоянным.

Теорема 2.2 доказана по модулю леммы. ■

На Рис. 2.4 изображен график оптимального управления и соответствующего ему решения при некоторых (академических) значениях параметров.

Доказательство (леммы 2.3). Допустим, что решение, соответствующее оптимальному управлению, всюду меньше \bar{y} . Тогда в силу того, что постоянное управление с максимальным значением не является допустимым, найдется множество точек положительной меры на $[x_1, x_2]$, на котором $u < \bar{u}$.

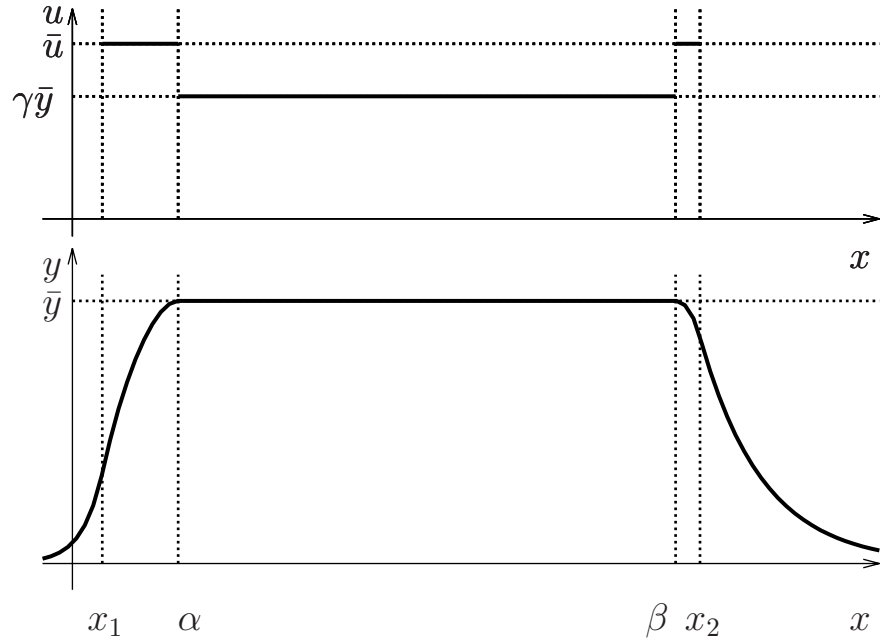


Рис. 2.4. Оптимальное управление и соответствующее ему решение (при $a = 0.1$, $v = 0.1$, $\gamma = 0.7$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

Возьмем отрезок $[\alpha, \beta] \subset (x_1, x_2)$, где мера таких точек положительна и обозначим через $\chi_{[\alpha, \beta]}$ характеристическую функцию этого отрезка.

Теперь при малом $\theta > 0$ рассмотрим управление \tilde{u} , $\tilde{u} = u + \theta(\bar{u} - u)\chi_{[\alpha, \beta]}$, и соответствующее ему решение задачи (2.2), (2.6). Легко проверить, что это решение представляется в виде

$$\tilde{y} = y + \theta y_1,$$

где y_1 – абсолютно непрерывная на отрезке $[x_1, x_2]$ функция, дифференцируемая вблизи его концов в силу выбора $[\alpha, \beta]$. Очевидно, что при достаточно малом θ решение \tilde{y} также не принимает значения \bar{y} , и, следовательно, управление \tilde{u} является допустимым. Полученное управление доставляет большее значение целевого функционала в силу

$$J(\tilde{u}, \tilde{y}) - J(u, y) = \int_{x_1}^{x_2} [\tilde{u}(x) - u(x)] dx = \theta \int_{\alpha}^{\beta} [\bar{u}(x) - u(x)] dx > 0.$$

Это противоречит предположению о том, что управление u было оптималь-

ным. Значит, решение y должно принимать свое максимальное значение. Таким образом, справедливо первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения также допустим противное, а именно, что для оптимального управления u и соответствующего ему решения y задачи (2.2), (2.6) имеем $y(\alpha) = y(\beta) = \bar{y}$, $x_1 < \alpha < \beta < x_2$, но y отлично от \bar{y} на множестве ненулевой меры внутри отрезка $[\alpha, \beta]$. В силу дифференцируемости решения имеем $y'(\alpha) = 0$, $y'(\beta) = 0$. Отсюда и в силу уравнения (2.2) получаем

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 (y'(\beta) - y'(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} a^2 y''(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (vy'(x) + \gamma y(x) - u(x)) dx = \\ &= vy(\beta) - vy(\alpha) + \gamma \int_{\alpha}^{\beta} y(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx. \end{aligned}$$

Но $y(\beta) - y(\alpha) = 0$ и $y < \bar{y}$ на множестве ненулевой меры на $[\alpha, \beta]$. Поэтому

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx = \gamma \int_{\alpha}^{\beta} y(x) dx < \gamma \int_{\alpha}^{\beta} \bar{y} dx = \gamma(\beta - \alpha)\bar{y}.$$

Следовательно, изменение на $[\alpha, \beta]$ изучаемой пары (u, y) на пару $(\gamma\bar{y}, \bar{y})$, оставляет управление в классе допустимых и увеличивает значение функционала. Это противоречит оптимальности исходного управления u и доказывает лемму. ■

Нетрудно посчитать, что получаемое при оптимальном измеримом управлении значение J_{opt} функционала задачи P_2 равно

$$J_{opt} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 \varphi_2} \ln \left(1 - \frac{\gamma \bar{y}}{\bar{u}} \right) (\bar{u} - \gamma \bar{y}) + (x_2 - x_1) \gamma \bar{y}.$$

Оно зависит от величины \bar{y} нелинейно и растет с ростом \bar{y} в силу

$$\frac{\partial J_{opt}}{\partial \bar{y}} = \gamma \left(\beta - \alpha - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 \varphi_2} \right) > 0.$$

Эту зависимость при некоторых академических значениях параметров иллюстрирует Рис. 2.5. Отметим, что в силу оптимальности соответствующего

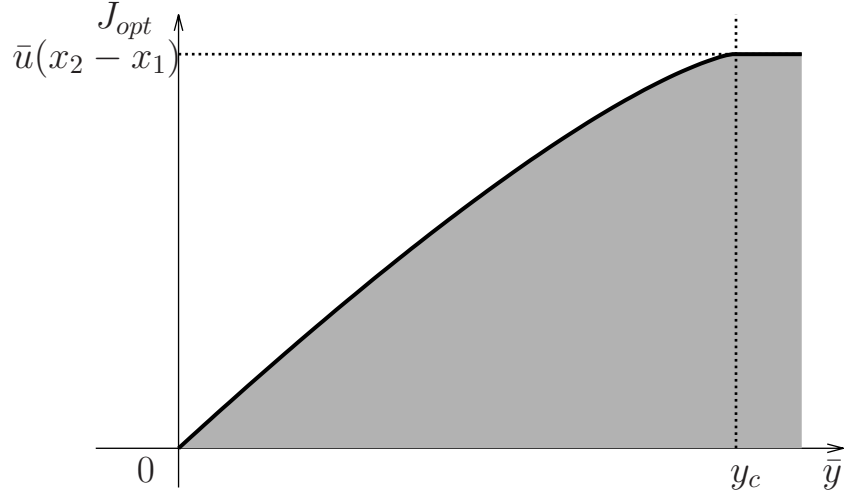


Рис. 2.5. Зависимость J_{opt} от \bar{y} при управлении (при $a = 0.1$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.7$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

управления, значение J_{opt} функционала является максимальным. Следовательно, значения функционалов, соответствующих остальным допустимым управлениям, находятся в области, затуманенной на рисунке.

Теорема 2.4. *Оптимальным в задаче P_1 является управление*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \bar{u}, & x \in [x_1, \alpha) \cup (\beta, x_2], \\ \gamma\bar{y}, & x \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

где

$$\alpha = x_1 + \frac{1}{\varphi_1} \ln \left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}} \right), \quad \beta = x_2 + \frac{1}{\varphi_2} \ln \left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}} \right), \quad (2.17)$$

а величина \bar{y} , задающая оптимальное значение функционала I_{opt} этой задачи, вычисляется как

$$\bar{y} = \frac{\bar{u}}{\gamma} \left(1 - \frac{\frac{\gamma(x_2 - x_1 - \frac{c}{\bar{u}})}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)}}{W \left(\frac{\gamma(x_2 - x_1 - \frac{c}{\bar{u}})}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} e^{\frac{\gamma(x_2 - x_1)}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)}} \right)} \right),$$

где W – W -функция Ламберта³.

³ W -функция Ламберта есть обратная функция к $f(w) = we^w$. Обозначается $W(z)$ и при $W(z) \geq -1$ однозначно определяется функциональным уравнением: $z = W(z)e^{W(z)}$ [36]

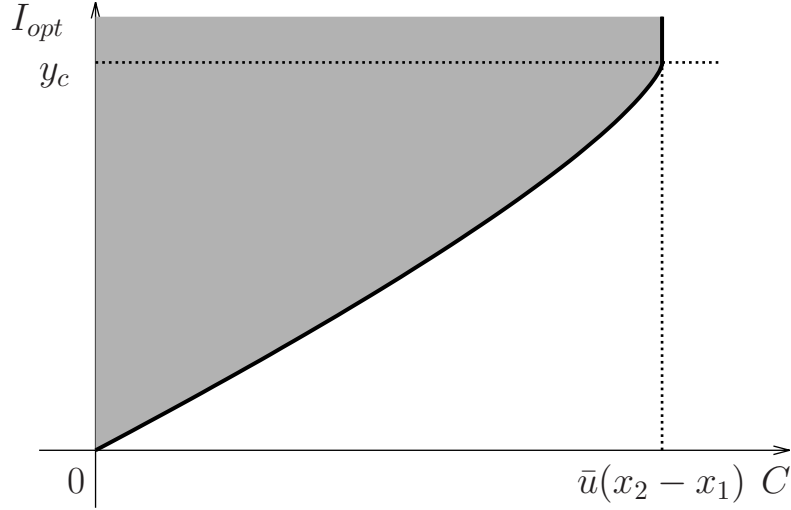


Рис. 2.6. Зависимость I_{opt} от C (при $a = 0.1$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.7$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

Доказательство. При заданном допустимом управляющем воздействии зависимость значения функционала задачи P_1 от величины C является обратной к зависимости величины J от \bar{y} . При этом множество возможных значений функционала в этой задаче затушевано на Рис. 2.6. Следовательно, задача P_1 разрешима лишь при $C \leq \bar{u}(x_2 - x_1)$ и минимум ее функционала достигается при той же структуре допустимого управления, что и в задаче P_2 . Искомое значение \bar{y} этого минимума вычисляется напрямую из условия $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx = C$, что приводит к уравнению

$$(\alpha - x_1 + x_2 - \beta)\bar{u} + (\beta - \alpha)\gamma\bar{y} = C.$$

Подставим в это уравнение значения α и β из (2.17) и умножим полученное равенство на $\frac{\varphi_1\varphi_2}{(\varphi_2 - \varphi_1)\bar{u}}$. Теперь, перенеся в правую часть слагаемые, не зависящие от \bar{y} , получим соотношение

$$\left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) \ln\left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) + \frac{\gamma(x_2 - x_1)}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} \left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) = \frac{\gamma\left(x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}}\right)}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Из него следует, что

$$\ln\left(\left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) e^{\frac{\gamma(x_2 - x_1)}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)}}\right) \left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) e^{\frac{\gamma(x_2 - x_1)}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)}} = \frac{\gamma\left(x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}}\right)}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)} e^{\frac{\gamma(x_2 - x_1)}{a^2(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$

Откуда, используя правило $\ln a^a = b \Rightarrow a = \frac{b}{W(b)}$, получим

$$\left(1 - \frac{\gamma \bar{y}}{\bar{u}}\right) e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)}} = \frac{\frac{\gamma(x_2-x_1-\frac{C}{\bar{u}})}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)} e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)}}}{W\left(\frac{\gamma(x_2-x_1-\frac{C}{\bar{u}})}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)} e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)}}\right)},$$

и, следовательно,

$$\bar{y} = \frac{\bar{u}}{\gamma} \left(1 - \frac{\frac{\gamma(x_2-x_1-\frac{C}{\bar{u}})}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)}}{W\left(\frac{\gamma(x_2-x_1-\frac{C}{\bar{u}})}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)} e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{a^2(\varphi_2-\varphi_1)}}\right)}\right). \quad \blacksquare$$

2.1.3. Оптимальное обобщенное управление В данном параграфе мы решаем задачи P_1 и P_2 для управлений из класса обобщенных функций. Такие управления естественно рассматривать после снятия ограничения (2.1). Напомним, что обобщенная функция определяется как функционал

$$(u, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\eta(x)dx,$$

заданный на пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций η . Финитность управления в этом случае понимается как равенство интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\eta(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x)\eta(x)dx$$

для всех допустимых η , то есть всё управление сконцентрировано на отрезке $[x_1, x_2]$.

В этом случае решение уравнения (2.2) ищется в классе обобщенных функций и определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a^2\eta'' + v\eta' - \gamma\eta)u dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u\eta dx,$$

для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции η . Учитывая, что в классе обобщенных управлений возможны сингулярные управления, которые могут привести к разрыву производной, выполнение условий (2.6) не

гарантировано при подходе к границе изнутри отрезка $[x_1, x_2]$. Однако при подходе к границам из области вне отрезка условие (2.6) остается справедливым и принимает вид

$$y'(x_1-) = \varphi_2 y(x_1-), \quad y'(x_2+) = \varphi_1 y(x_2+), \quad (2.18)$$

где x_1- означает «при стремлении к x_1 слева», x_2+ – «при стремлении к x_2 справа».

Обозначим через δ_ξ дельта-функцию, сосредоточенную в точке ξ , то есть для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции η имеет место равенство $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\xi(x) \eta(x) dx = \eta(\xi)$, а через $\chi_{[x_1, x_2]}$ характеристическую функцию отрезка $[x_1, x_2]$.

Теорема 2.5. *Управление*

$$u = -\frac{\gamma \bar{y}}{\varphi_1} \delta_{x_1} + \frac{\gamma \bar{y}}{\varphi_2} \delta_{x_2} + \gamma \bar{y} \chi_{[x_1, x_2]}, \quad (2.19)$$

является оптимальным в классе обобщенных управлений в задаче P_2 .

Доказательство. В задаче P_2 функционал имеет вид

$$J = \int_{x_1}^{x_2} u(x) dx$$

Учитывая уравнение (2.2) для любого допустимого управления u и соответствующего ему решения y получаем

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} u(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} (-a^2 y''(x) + v y'(x) + \gamma y(x)) dx = \\ &= -a^2 (y'(x_2+) - y'(x_1-)) + v (y(x_2+) - y(x_1-)) + \gamma \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условия (2.18), находим, что

$$J = a^2 (\varphi_2 y(x_2+) - \varphi_1 y(x_1-)) + \gamma \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx \leq a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \bar{y} + \gamma \bar{y} (x_2 - x_1), \quad (2.20)$$

где последнее неравенство справедливо в силу $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$ и $0 \leq y \leq \bar{y}$.

Для указанного в формулировке теоремы управления значение функционала равно

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{\gamma \bar{y}}{\varphi_1} \delta_{x_1}(x) + \frac{\gamma \bar{y}}{\varphi_2} \delta_{x_2}(x) + \gamma \bar{y} \chi_{[x_1, x_2]}(x) \right) dx = a^2(\varphi_2 - \varphi_1) \bar{y} + \gamma \bar{y}(x_2 - x_1),$$

то есть правой части соотношения (2.20). Таким образом, это управление, действительно, является оптимальным обобщенным управлением в задаче P_2 . ■

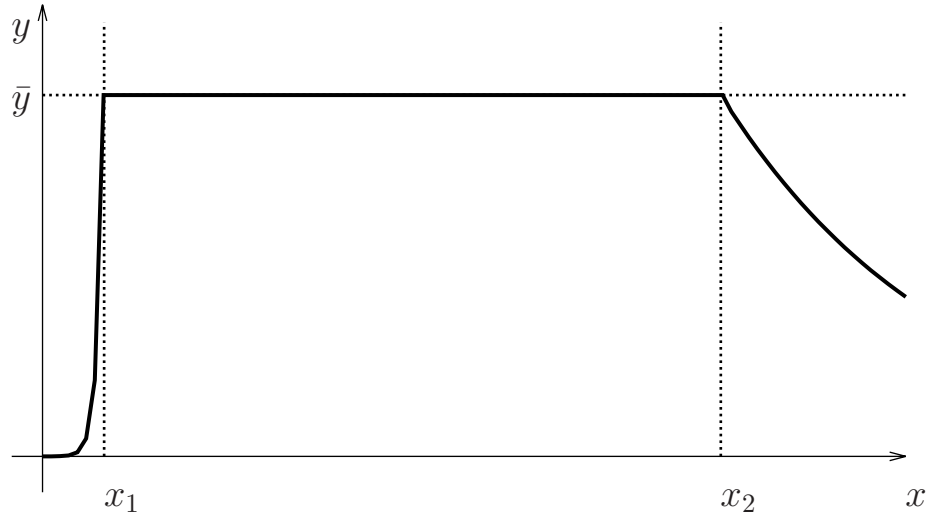


Рис. 2.7. Решение, соответствующее оптимальному обобщенному управлению (при $a = 0.1$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.7$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

Замечание. Значение функционала J , доставляемое обобщенным оптимальным управлением (2.19) равно

$$J_{opt} = \gamma \bar{y} \left(x_2 - x_1 + \frac{\sqrt{v^2 + 4\gamma a^2}}{\gamma} \right), \quad (2.21)$$

а соответствующее этому управлению обобщенное решение уравнения (2.2) имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} \bar{y} e^{\varphi_2(x-x_1)}, & x \in (-\infty, x_1), \\ \bar{y}, & x \in [x_1, x_2], \\ \bar{y} e^{\varphi_1(x-x_2)}, & x \in (x_2, +\infty), \end{cases}$$

что нетрудно посчитать. ■

Рис. 2.7 иллюстрирует это решение. Наличие дельта-функций в оптимальном управлении приводит к разрывам производной на концах отрезка $[x_1, x_2]$, а внутри отрезка это решение принимает наибольшее допустимое значение \bar{y} .

На рисунке 2.8 область возможных значений функционала J при допустимых управлениях затушевана. Эта область ограничена сверху прямой оптимальных значений функционала задачи P_2 , заданной уравнением (2.21).

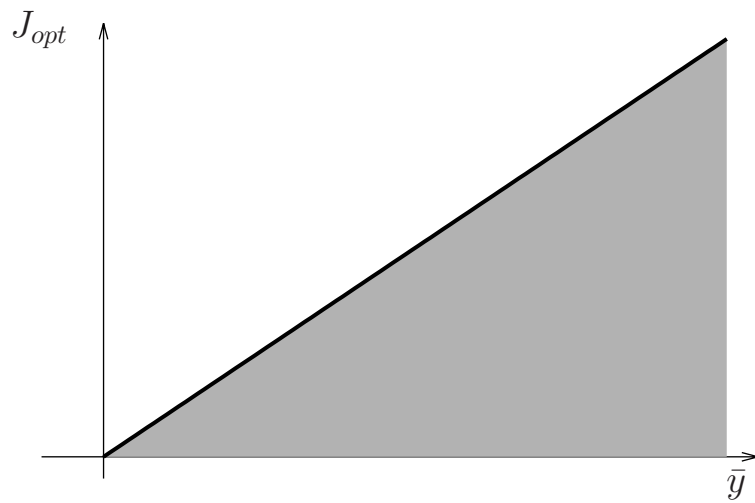


Рис. 2.8. Зависимость J_{opt} от \bar{y} при обобщенном управлении (при $a = 0.1$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.7$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

Обратная зависимость функционала I задачи P_1 от величины C из формулы (2.9) изображена на Рис. 2.9, где затушеванная область содержит все возможные значения функционала I при допустимых обобщенных управлениях. Минимум функционала I будет достигаться на ограничивающей снизу эту область прямой, которая соответствует управлению вида (2.19) и задается равенством

$$I_{opt} = \frac{C}{\gamma \left(x_2 - x_1 + \frac{\sqrt{v^2 + 4\gamma a^2}}{\gamma} \right)}.$$

Следовательно, верна

Теорема 2.6. *Управление*

$$u = \frac{C}{x_2 - x_1 + \frac{\sqrt{v^2 + 4\gamma a^2}}{\gamma}} \left(\frac{\delta_{x_2}}{\varphi_2} - \frac{\delta_{x_1}}{\varphi_1} + \chi_{[x_1, x_2]} \right).$$

является оптимальным в классе обобщенных управлений в задаче P_1 .

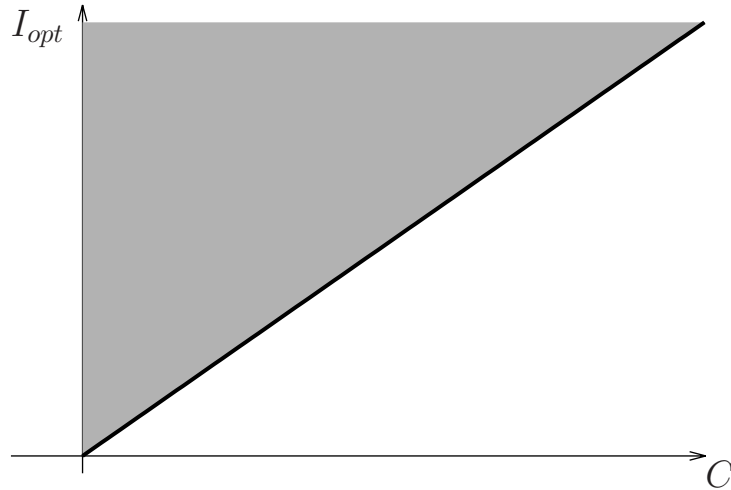


Рис. 2.9. Зависимость I_{opt} от C при обобщенном управлении (при $a = 0.1$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.7$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

2.2. Модель реакции-адвекции

Теперь сформулируем и решим задачи P_1 и P_2 в случае, когда диффузия в потоке отсутствует, то есть $a = 0$ при положительных константах v и γ :

Задача P_2 : Найти финитное с носителем $[x_1, x_2]$ управление u , удовлетворяющее условию (2.1) и такое, что соответствующее ему решение y задачи

$$vy' + \gamma y = u, \quad y(\pm\infty) = 0, \quad (2.22)$$

удовлетворяет ограничению (2.3) и максимизирует функционал (2.4).

Общее решение задачи (2.22) имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^x u(\xi) e^{\frac{\gamma}{v}(\xi-x)} d\xi,$$

или, что то же самое,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, x_1), \\ \frac{1}{v} \int_{x_1}^x u(\xi) e^{\frac{\gamma}{v}(\xi-x)} d\xi, & x \in [x_1, x_2], \\ \frac{1}{v} \int_{x_1}^{x_2} u(\xi) e^{\frac{\gamma}{v}(\xi-x)} d\xi, & x \in (x_2, +\infty). \end{cases} \quad (2.23)$$

Очевидно, что данное решение является ограниченным и неотрицательным при любой неотрицательной финитной функции u и, значит, как и ранее,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |y(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} y(x).$$

Сформулируем теперь задачу P_1 : Найти управление u , удовлетворяющее ограничениям (2.1) и (2.9), для которого соответствующее решение задачи (2.22) доставляет минимум функционалу

$$I(u, y) = \sup_{x \in R} y(x).$$

2.2.1. Оптимальное постоянное управление Сначала решим задачи P_1 и P_2 в случае постоянного управления, то есть управления вида (2.10).

Единственным допустимым постоянным управлением в задаче P_1 является управление

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \frac{C}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Значит, решение задачи P_1 в классе постоянных управлений существует лишь при выполнении неравенства $C \leq \bar{u}(x_2 - x_1)$ и совпадает с единственным допустимым управлением из этого класса.

Зависимость значения функционала I от общего объема управления C при оптимальном постоянном управлении изображена на Рис.2.10.

Теорема 2.7. *Оптимальным в классе постоянных управлений в задаче P_2 является управление, задаваемое формулой (2.10), с u равным $\frac{\bar{y}\gamma}{1 - e^{\frac{\gamma}{v}(x_1 - x_2)}}$, если $\bar{y} < \frac{\bar{u}}{\gamma} (1 - e^{\frac{\gamma}{v}(x_1 - x_2)})$, и \bar{u} в противном случае.*

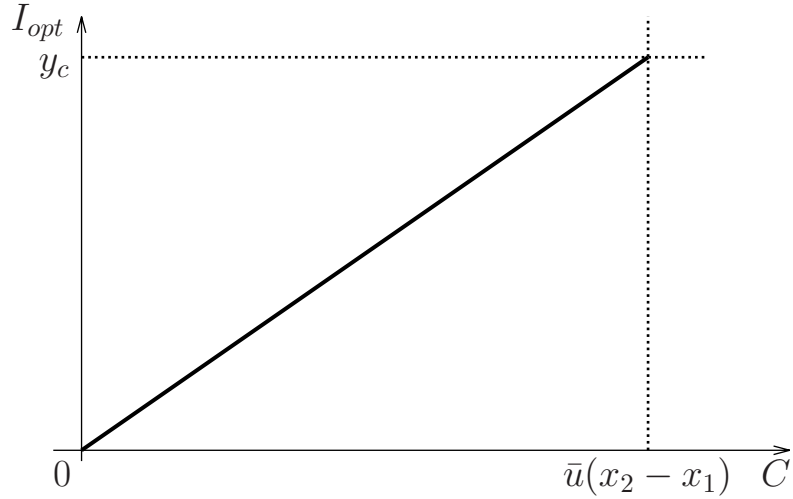


Рис. 2.10. Зависимость I_{opt} от C при постоянном управлении (при $a = 0$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.05$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

Доказательство. Согласно (2.23) ограниченное решение задачи (2.22) при постоянном управлении задается формулой

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, x_1), \\ \frac{u}{\gamma} (1 - e^{\frac{\gamma}{v}(x_1-x)}), & x \in [x_1, x_2], \\ \frac{u}{\gamma} (e^{\frac{\gamma}{v}(x_2-x)} - e^{\frac{\gamma}{v}(x_1-x)}), & x \in (x_2, +\infty). \end{cases}$$

Это решение неотрицательно, стремится к нулю на бесконечности и имеет максимум в точке x_2 . Значение функции y в этой точке равно

$$y_{\max} = y(x_2) = \frac{u}{\gamma} (1 - e^{\frac{\gamma}{v}(x_1-x_2)}).$$

Нетрудно видеть, что этот максимум зависит от величины u линейно и, значит, существует единственное постоянное управление вида (2.10), доставляющее максимум функционалу (2.4):

$$u = \begin{cases} \bar{u}, & y_c \leq \bar{y}, \\ \frac{\bar{y}\gamma}{1 - e^{\frac{\gamma}{v}(x_1-x_2)}}, & y_c > \bar{y}, \end{cases}$$

где $y_c = y_{extr}|_{u=\bar{u}} = \frac{\bar{u}}{\gamma} (1 - e^{\frac{\gamma}{v}(x_1-x_2)})$. ■

На Рис. 2.11 изображен график решения задачи (2.22) при постоянном

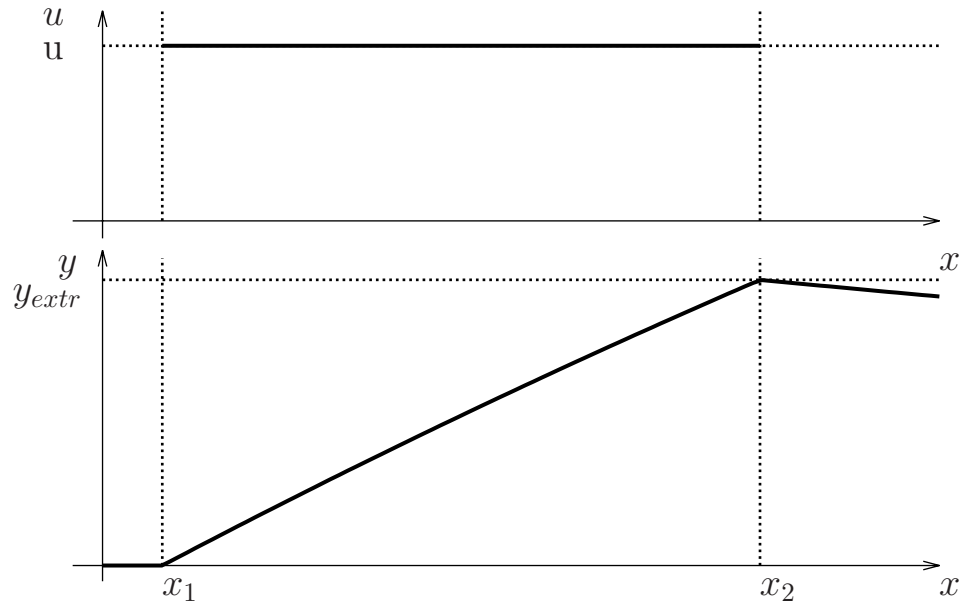


Рис. 2.11. Постоянное управление и соответствующее ему решение (при $a = 0$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.05$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

управлении, а Рис. 2.12 иллюстрирует зависимость от \bar{y} значения функционала J – ёмкости выброса при оптимальном постоянном управлении.

Понятно, что в случае $y_c \leq \bar{y}$ оптимальным управлением не только в классе постоянных, но и измеримых управлений, будет управление с максимальным допустимым значением \bar{u} .

Рассмотрим теперь случай, когда $y_c > \bar{y}$. Отметим, что в этом случае выполняется неравенство $\gamma < \frac{\bar{u}}{\bar{y}}$.

2.2.2. Оптимальное измеримое управление Найдем теперь решение задач P_1 и P_2 для управлений из класса измеримых функций, предполагая, что y_c , вычисленное выше, превосходит ограничение \bar{y} . Отметим, что для измеримого управления u решение y по-прежнему задается равенством (2.23) и является непрерывной функцией, которая удовлетворяет условию непрерывности на левом конце отрезка $y(x_1) = 0$.

Теорема 2.8. *Оптимальное в классе измеримых управлений в задаче P_2*

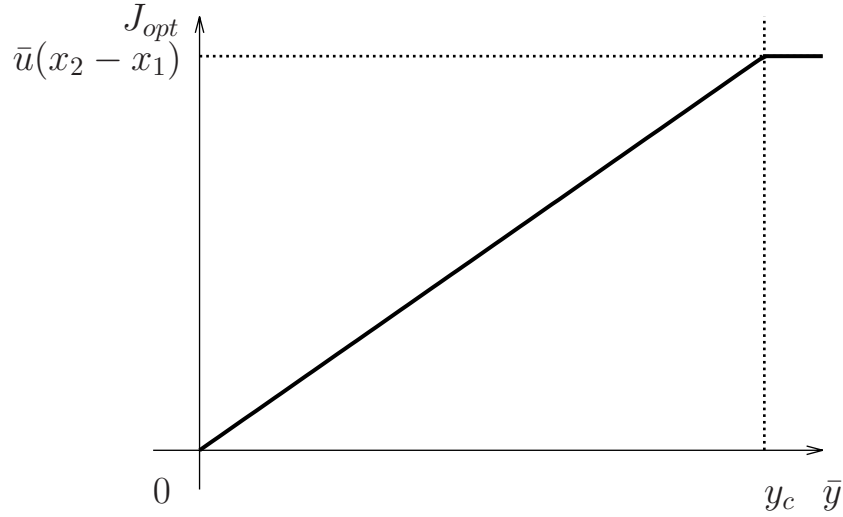


Рис. 2.12. Зависимость J_{opt} от \bar{y} при постоянном управлении (при $a = 0$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.05$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

кусочно-постоянно и имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \bar{u}, & x \in [x_1, \alpha), \\ \gamma \bar{y}, & x \in [\alpha, x_2], \end{cases}$$

где $\alpha = x_1 - \frac{v}{\gamma} \ln \left(1 - \frac{\gamma \bar{y}}{\bar{u}}\right)$.

Доказательство. Решение, соответствующее указанному в условии теоремы управлению, имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, x_1), \\ \frac{\bar{u}}{\gamma} (1 - e^{\frac{\gamma}{v}(x_1-x)}), & x \in [x_1, \alpha], \\ \bar{y}, & x \in (\alpha, x_2], \\ \bar{y} e^{\frac{\gamma}{v}(x_2-x)}, & x \in (x_2, +\infty). \end{cases}$$

Данное решение непрерывно и удовлетворяет условию $0 \leq y \leq \bar{y}$. Следовательно, указанное в условии теоремы управление является допустимым.

Покажем теперь, что оно является оптимальным. Для этого используем интегральное равенство

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x) dx = v y(x_2) + \gamma \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx$$

для заданного управления u и

$$\int_{x_1}^{x_2} \tilde{u}(x) dx = v\tilde{y}(x_2) + \gamma \int_{x_1}^{x_2} \tilde{y}(x) dx$$

для некоторого другого управления \tilde{u} и соответствующего ему решения \tilde{y} .

Тогда разность функционалов $J(u, y) - J(\tilde{u}, \tilde{y})$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(u, y) - J(\tilde{u}, \tilde{y}) = \int_{x_1}^{x_2} (u(x) - \tilde{u}(x)) dx = \\ &= vy(x_2) - v\tilde{y}(x_2) + \gamma \int_{x_1}^{x_2} (y(x) - \tilde{y}(x)) dx = \\ &= v(\bar{y} - \tilde{y}(x_2)) + \gamma \left(\int_{x_1}^{\alpha} (y(x) - \tilde{y}(x)) dx + \int_{\alpha}^{x_2} (y(x) - \tilde{y}(x)) dx \right). \end{aligned}$$

Разность вне интегралов неотрицательна в силу допустимости решения \tilde{y} , а именно, в силу выполнения неравенства $0 \leq \tilde{y} \leq \bar{y}$ на всей числовой прямой, а, следовательно, и в точке $x = x_2$.

Для оценки первого интеграла в скобках оценим подынтегральное выражение, используя формулу (2.23) решения поставленной задачи. Тогда

$$\begin{aligned} y(x) - \tilde{y}(x) \Big|_{[x_1, \alpha]} &= \frac{1}{v} \int_{x_1}^x (u(\xi) - \tilde{u}(\xi)) e^{\frac{\gamma}{v}(\xi-x)} d\xi = \\ &= \frac{1}{v} \int_{x_1}^x (\bar{u} - \tilde{u}(\xi)) e^{\frac{\gamma}{v}(\xi-x)} d\xi \geq 0 \end{aligned}$$

в силу допустимости управления и выполнения неравенства $0 \leq \tilde{u} \leq \bar{u}$.

Второй интеграл неотрицателен в силу того, что $y \equiv \bar{y}$ на $[\alpha, x_2]$, а решение \tilde{y} допустимо.

Таким образом, мы получили неравенство

$$\Delta J \geq 0,$$

которое влечет за собой оптимальность указанного в условии теоремы управления. ■

Графики оптимального управления и соответствующего ему решения при некоторых (академических) значениях параметров изображены на Рис. 2.13 вверху и внизу, соответственно.

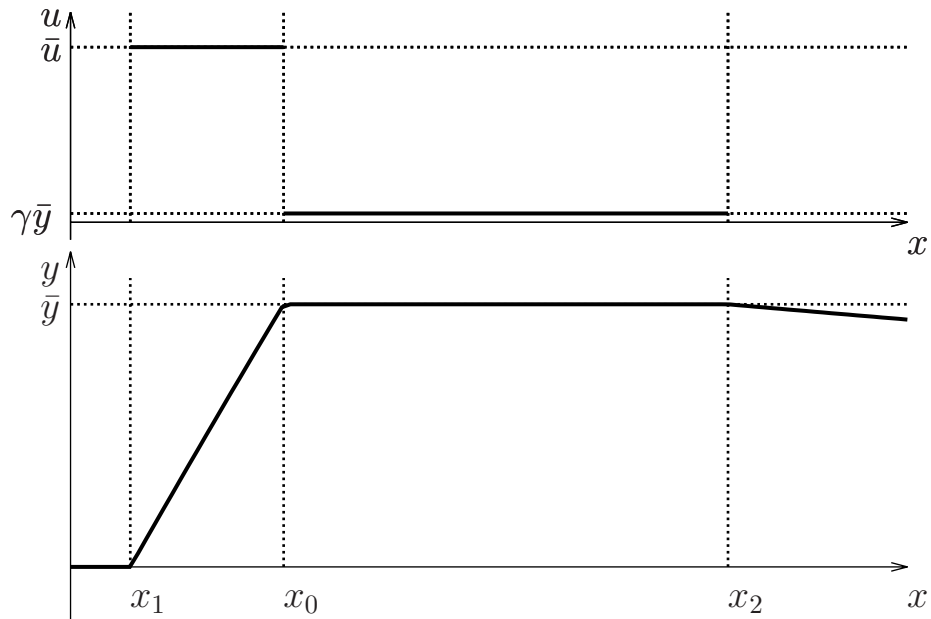


Рис. 2.13. Оптимальное измеримое управление u и соответствующее ему решение y (при $a = 0$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.05$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

Нетрудно посчитать, что получаемое при оптимальном измеримом управлении значение функционала J_{opt} задачи P_2 равно

$$J_{opt} = -\frac{v}{\gamma} \ln \left(1 - \frac{\gamma \bar{y}}{\bar{u}} \right) (\bar{u} - \gamma \bar{y}) + (x_2 - x_1) \gamma \bar{y}.$$

Оно зависит от \bar{y} нелинейно и растёт с ростом этой величины, так как

$$\frac{\partial J_{opt}}{\partial \bar{y}} = v \left(1 - \ln \left(1 - \frac{\gamma \bar{y}}{\bar{u}} \right) \right) + (x_2 - x_1) \gamma > 0$$

в силу того, что $\gamma \bar{y} < \bar{u}$.

Эту зависимость при некоторых академических значениях параметров иллюстрирует Рис. 2.14. Отметим, что в силу оптимальности соответствующего

управления, значение функционала J_{opt} является максимальным. Следовательно, значения функционалов, соответствующих остальным допустимым управлениям, находятся в области, затушеванной на рисунке.

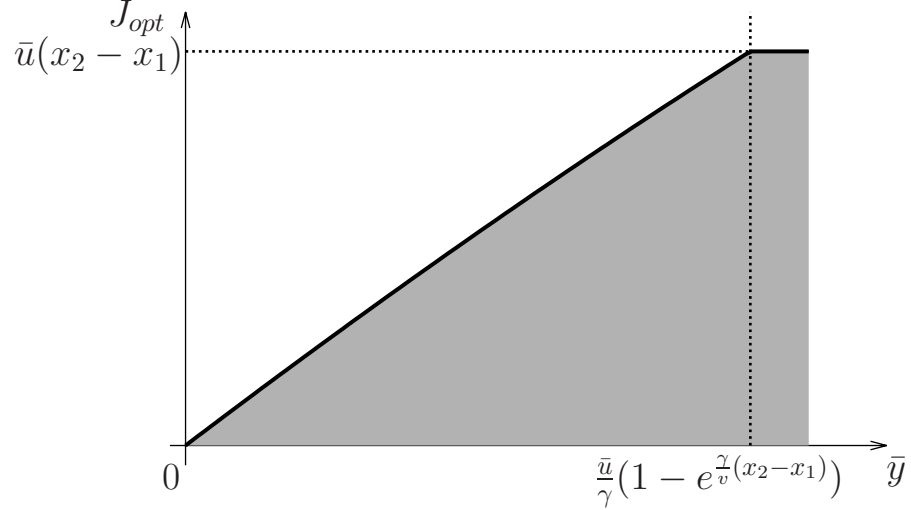


Рис. 2.14. Зависимость J_{opt} от \bar{y} (при $a = 0$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.05$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$).

Теорема 2.9. *Оптимальным в классе измеримых управлений в задаче P_1 является управление вида*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_1, x_2], \\ \bar{u}, & x \in [x_1, \alpha), \\ \gamma\bar{y}, & x \in [\alpha, x_2], \end{cases}$$

где $\alpha = x_1 - \frac{v}{\gamma} \ln \left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}} \right)$, а величина \bar{y} , задающая оптимальное значение функционала I_{opt} , $I_{opt} = \bar{y}$, вычисляется как

$$\bar{y} = \frac{\bar{u}}{\gamma} \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{v} \left(x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}} \right)}{W \left(\frac{\gamma}{v} \left(x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}} \right) e^{\frac{\gamma}{v} (x_2 - x_1)} \right)} \right),$$

где $W(\cdot)$ – W -функция Ламберта.

Доказательство. При заданном допустимом управляющем воздействии зависимость значения функционала задачи P_1 от величины C является обратной к зависимости величины J от \bar{y} . При этом множество возможных

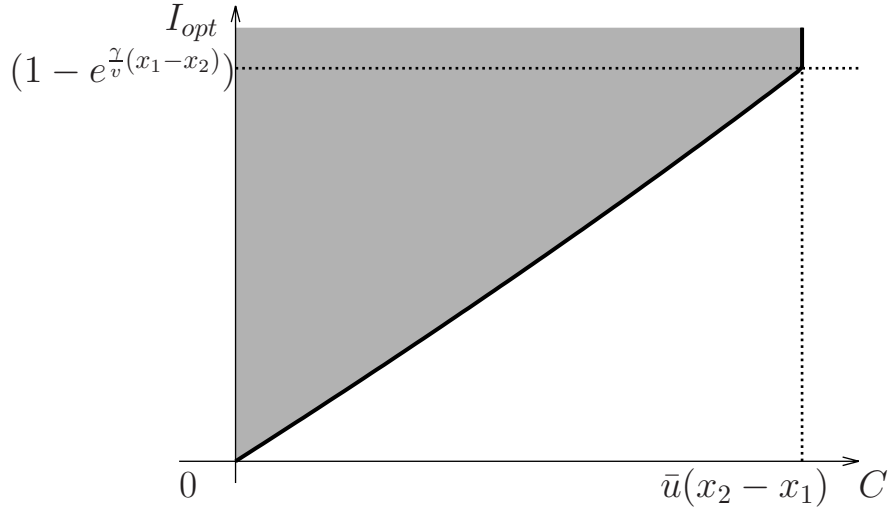


Рис. 2.15. Зависимость I_{opt} от C (при $a = 0$, $v = 0.5$, $\gamma = 0.05$, $[x_1, x_2] = [-1, 1]$)).

значений функционала в этой задаче затушевано на Рис. 2.15. Следовательно, задача P_1 разрешима лишь при $C \leq \bar{u}(x_2 - x_1)$ и минимум ее функционала достигается при той же структуре допустимого управления, что и в задаче P_2 . Искомое значение \bar{y} этого минимума вычисляется напрямую из условия (2.9), что приводит к уравнению

$$(\alpha - x_1)\bar{u} + (x_2 - \alpha)\gamma\bar{y} = C.$$

Подставим значение α и умножим все равенство на $\frac{\gamma}{v\bar{u}}$. Теперь, перенеся в правую часть слагаемые, не зависящие от \bar{y} , получим соотношение

$$\left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) \ln \left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) + \frac{\gamma(x_2 - x_1)}{v} \left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) = \frac{\gamma(x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}})}{v}.$$

Из него следует, что

$$\ln \left(\left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{v}} \right)^{\left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{v}}} = \frac{\gamma(x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}})}{v} e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{v}}$$

Откуда, используя правило $\ln a^a = b \Rightarrow a = \frac{b}{W(b)}$, получим

$$\left(1 - \frac{\gamma\bar{y}}{\bar{u}}\right) e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{v}} = \frac{\frac{\gamma(x_2-x_1-\frac{C}{\bar{u}})}{v} e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{v}}}{W\left(\frac{\gamma(x_2-x_1-\frac{C}{\bar{u}})}{v} e^{\frac{\gamma(x_2-x_1)}{v}}\right)},$$

и, следовательно,

$$\bar{y} = \frac{\bar{u}}{\gamma} \left(1 - \frac{\frac{\gamma}{v} (x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}})}{W \left(\frac{\gamma}{v} (x_2 - x_1 - \frac{C}{\bar{u}}) e^{\frac{\gamma}{v} (x_2 - x_1)} \right)} \right). \quad \blacksquare$$

ГЛАВА 3

ОПТИМИЗАЦИЯ ОТБОРА ИЗ ОДНОМЕРНОГО ПОТОКА

В этой главе для задач P_1 и P_2 , сформулированных ранее (в первой главе в пункте 1.4), дано аналитическое решение в одномерном случае при отсутствии выброса и течения, то есть при $\bar{u}_2 = C_2 = k_2 = 0$ и $v = 0$. Для удобства вычислений будем считать, что область D является симметричной относительно начала координат и представляет собой отрезок $[-b, b]$. В заданных условиях для задач P_1 и P_2 найдена структура оптимального управления в классах постоянных и измеримых функций. Эти результаты представлены в работах [7, 11, 37].

3.1. Модель билинейной реакции-диффузии

Сначала сформулируем задачу P_2 при положительных a и γ :

В классах постоянных и измеримых функций найти управление u , удовлетворяющее условию

$$0 \leq u \leq \bar{u} \quad (3.1)$$

и такое, что соответствующее ему решение y уравнения

$$a^2 y'' - (\gamma + u)y = uY \quad (3.2)$$

удовлетворяет ограничению

$$|y| \leq \bar{y} \quad (3.3)$$

и максимизирует функционал

$$J(u, y) = \int_{-b}^b u(x) dx.$$

Вне интервала $[-b, b]$ модельное уравнение является однородным

$$a^2 y'' = \gamma y$$

и его решение имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{\gamma}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{\gamma}}{a}x},$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

В силу ограниченности решения на бесконечности и знаков степени экспоненты, получим, что ограниченное решение уравнения (3.2) имеет вид

$$y(x) = \begin{cases} C_2 e^{\frac{\sqrt{\gamma}}{a}x}, & x \in (-\infty, -b), \\ f(x), & x \in [-b, b], \\ C_1 e^{-\frac{\sqrt{\gamma}}{a}x}, & x \in (b, +\infty), \end{cases}$$

где $f(x)$ - это решение уравнения (3.2) на интервале $[-b, b]$ с граничными условиями

$$y'(-b) = \frac{\sqrt{\gamma}}{a}y(-b), \quad y'(b) = \frac{\sqrt{\gamma}}{a}y(b). \quad (3.4)$$

Заметим, что согласно теореме существования Каратеодори (см., например, [5]), существует единственное непрерывное непрерывно дифференцируемое решение y уравнения (3.2), удовлетворяющее условию (3.4). Так как производная решения непрерывна, то его экстремум достигается при $y' = 0$. При этом знак второй производной совпадает со знаком величины $uY + (\gamma + u)y$ и, значит, при положительных y может достигаться лишь минимум. Из этого факта, а также из того, что $y(\pm\infty) = 0$, следует, что решение y неположительно на всей числовой оси и, более того, может обращаться в нуль лишь в случае $u \equiv 0, y \equiv 0$. Получаем, что ограничение (3.3) принимает вид

$$-\bar{y} \leq y.$$

Сформулируем теперь задачу P₁: Найти управление u , удовлетворяющее ограничению (3.1) и имеющее заданную ёмкость

$$\int_{-b}^b u(x)dx = C, \quad (3.5)$$

для которого соответствующее решение y задачи (3.2), (3.4) доставляет максимум функционала

$$I(u, y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} y(x). \quad (3.6)$$

3.1.1. Оптимальное постоянное управление Сначала решим задачи P_1 и P_2 в случае постоянного управления, то есть управления вида

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-b, b], \\ u, & x \in [-b, b], \end{cases} \quad (3.7)$$

где u - это константа, удовлетворяющая условию $0 \leq u \leq \bar{u}$.

Для задачи P_1 в силу условия (3.5) такое управление определяется однозначно и имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-b, b], \\ \frac{C}{2b}, & x \in [-b, b]. \end{cases}$$

Значит, решение задачи P_1 в классе постоянных управлений существует лишь при выполнении неравенства $C \leq 2\bar{u}b$ и совпадает с единственным допустимым управлением из этого класса.

Зависимость значения функционала I от общего объема управления C при оптимальном постоянном управлении изображена на Рис. 3.1.

Теорема 3.1. *Оптимальным в классе постоянных управлений в задаче P_2 является управление, задаваемое формулой (3.7), с u , получаемом из равенства*

$$\frac{uY}{\gamma + u} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{\gamma+u}b}{a} \right) + \sqrt{\gamma+u} \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{\gamma+u}b}{a} \right)} - 1 \right) = -\bar{y},$$

если

$$\frac{\bar{u}Y}{\gamma + \bar{u}} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{\gamma+\bar{u}}b}{a} \right) + \sqrt{\gamma+\bar{u}} \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{\gamma+\bar{u}}b}{a} \right)} - 1 \right) \leq -\bar{y},$$

и \bar{u} в противном случае.

Доказательство. Внутри интервала $[-b, b]$ уравнение (3.2) имеет вид

$$a^2 y'' = (\gamma + u)y + uY.$$

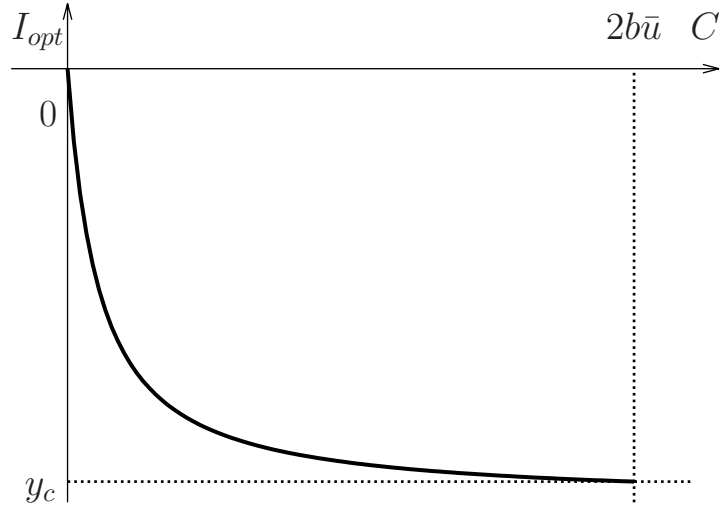


Рис. 3.1. Зависимость I_{opt} от C при постоянном управлении (при $a = 0.1$, $\gamma = 0.05$, $b = 1$).

Решение этого уравнения на данном интервале выглядит как

$$f(x) = C_3 e^{-\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}x} + C_4 e^{\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}x} - \frac{uY}{\gamma+u}.$$

Граничные условия (3.4) в точках $-b$ и b дают

$$C_3 = C_4 = \frac{uY}{\gamma+u} \frac{\sqrt{\gamma}}{(\sqrt{\gamma+u} + \sqrt{\gamma}) e^{\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b} - (\sqrt{\gamma+u} - \sqrt{\gamma}) e^{-\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b}},$$

и, в итоге,

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{uY}{\sqrt{\gamma+u}} \frac{\text{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right)}{\sqrt{\gamma} \text{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right) + \sqrt{\gamma+u} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right)} e^{\frac{\sqrt{\gamma}}{a}(b+x)}, & x \in (-\infty, -b), \\ \frac{uY}{\gamma+u} \left(\frac{\sqrt{\gamma} \text{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}x\right)}{\sqrt{\gamma} \text{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right) + \sqrt{\gamma+u} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right)} - 1 \right), & x \in [-b, b], \\ -\frac{uY}{\sqrt{\gamma+u}} \frac{\text{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right)}{\sqrt{\gamma} \text{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right) + \sqrt{\gamma+u} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right)} e^{\frac{\sqrt{\gamma}}{a}(b-x)}, & x \in (b, +\infty). \end{cases}$$

Данное решение имеет лишь одну точку экстремума $x_{extr} = 0$. Значение функции y в этой точке равно

$$y_{extr} = y(0) = \frac{uY}{\gamma+u} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} \text{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right) + \sqrt{\gamma+u} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right)} - 1 \right).$$

Вторая производная решения в этой точке равна $\frac{uY}{a^2} \frac{1}{\sqrt{\gamma} \text{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right) + \sqrt{\gamma+u} \text{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}}{a}b\right)}$ и положительна. Следовательно, функция y имеет в точке $x = 0$ минимум.

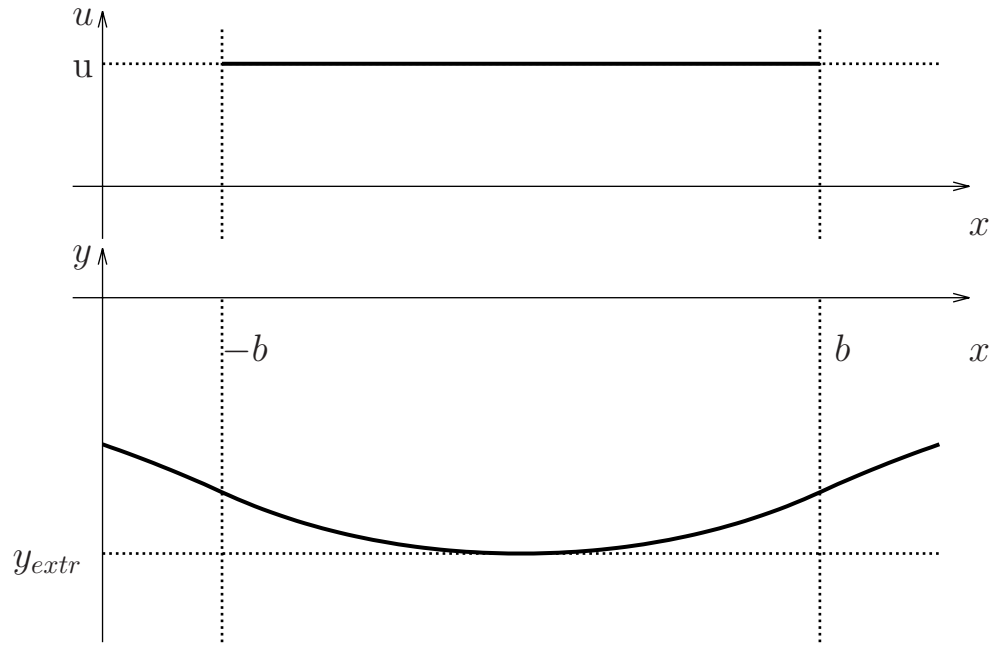


Рис. 3.2. Постоянное управление и соответствующее ему решение (при $a = 1$, $\gamma = 0.5$, $b = 1$).

Частная производная этого минимума по u равна

$$\frac{\partial y_{extr}}{\partial u} = \frac{\gamma}{u(\gamma+u)} y_{extr} - \frac{uY}{\gamma+u} \frac{\sqrt{\gamma}}{2a\sqrt{\gamma+u}} \frac{(a+\sqrt{\gamma}b) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}b}{a}\right) + b\sqrt{\gamma+u} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}b}{a}\right)}{\left(\sqrt{\gamma} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}b}{a}\right) + \sqrt{\gamma+u} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+u}b}{a}\right)\right)^2}$$

и отрицательна. При $u \rightarrow \infty$ значение y_{extr} стремится к $-Y$. Значит, существует единственное постоянное управление (3.7), доставляющее максимум функционалу (3.6), точнее

$$u = \begin{cases} \bar{u}, & y_c \geq -\bar{y}, \\ \tilde{u}, & y_c < -\bar{y}, \end{cases}$$

где $y_c = y_{extr}|_{u=\bar{u}}$, а \tilde{u} вычисляется из равенства

$$\frac{\tilde{u}Y}{\gamma + \tilde{u}} \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\gamma+\tilde{u}}b}{a}\right) + \sqrt{\gamma+\tilde{u}} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\gamma+\tilde{u}}b}{a}\right)} - 1 \right) = -\bar{y}. \quad \blacksquare$$

На Рис. 3.2 изображены график постоянного управления сверху и соответствующее ему решение уравнения (3.2) внизу, а Рис. 3.3 иллюстрирует зависимость от \bar{y} значения функционала J – ёмкости выброса при оптимальном постоянном управлении.

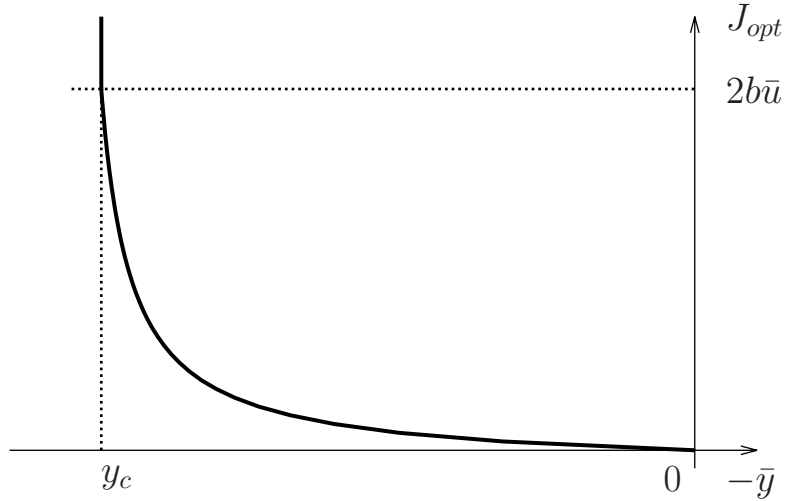


Рис. 3.3. Зависимость J_{opt} от \bar{y} при постоянном управлении (при $a = 0.1$, $\gamma = 0.05$, $b = 1$).

Понятно, что в случае $y_c \geq -\bar{y}$ оптимальным управлением не только в классе постоянных, а также измеримых управлений, будет управление с максимальным допустимым значением \bar{u} .

Рассмотрим далее ситуацию, когда $y_c < -\bar{y}$.

3.1.2. Оптимальное измеримое управление Найдем теперь решение задач P_1 и P_2 для управлений из класса измеримых функций, предполагая, что y_c , вычисленное выше, меньше ограничения $-\bar{y}$. Отметим, что для измеримого управления u решение по-прежнему является непрерывной дифференцируемой функцией, производная которой на концах отрезка $[-b, b]$ удовлетворяет равенствам (3.4).

Теорема 3.2. В случае $\bar{y} < \frac{Y}{2}$ оптимальное измеримое управление в задаче P_2 кусочно-постоянно и имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-b, b), \\ \bar{u}, & x \in [-b, \alpha) \cup (\beta, b], \\ \frac{\gamma \bar{y}}{Y - \bar{y}}, & x \in [\alpha, \beta], \end{cases} \quad (3.8)$$

где

$$\alpha = -b + \frac{a}{\sqrt{\gamma + \bar{u}}} \left(\operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{\gamma \bar{u}} Y}{\bar{u}(Y - \bar{y}) - \gamma \bar{y}} - \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{\gamma}{\bar{u}}} \right), \beta = -\alpha \quad (3.9)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы полезна

Лемма 3.3. *Ограниченное решение y уравнения (3.2), соответствующее оптимальному управлению задачи P_2 , принимает минимальное возможное допустимое значение, то есть выходит на ограничение $y = -\bar{y}$. Более того, при замене пары (u, y) на интервале $[\alpha, \beta]$ между крайними левой и правой точками с нулевой производной решения на пару $(\frac{\gamma \bar{y}}{Y - \bar{y}}, -\bar{y})$, значение функционала J не уменьшается т.к. выполнено неравенство*

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx \leq \frac{(\beta - \alpha) \gamma \bar{y}}{Y - \bar{y}}. \quad (3.10)$$

Утверждение леммы обоснуем ниже, а сейчас воспользуемся ей для доказательства теоремы.

Обозначим как α, β соответственно крайнюю левую и крайнюю правую точки с нулевой производной решения и покажем, каким должно быть оптимальное управление и соответствующее ему решение на интервалах, прилегающих к точкам $-b$ и b . Для этого рассмотрим сначала левый интервал $[-b, \alpha)$, а рассуждения на правом проведем аналогично.

Вспомним, что в точке α решение y удовлетворяет условию $y'(\alpha) = 0$, а в точке $-b$ - условию $y'(-b) = \frac{\sqrt{\gamma}}{a} y(-b)$ и формализуем полученную задачу в терминах принципа максимума Понтрягина, обозначая функцию y как y_1 и введя новую функцию $y_2 = y'$ (см., например, [9, 31, 35]):

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \frac{\gamma + u}{a^2} y_1 + \frac{Y}{a^2} u, \end{cases} \quad (3.11)$$

Теперь необходимо найти измеримое управление u , максимизирующее значе-

ние функционала

$$J = \int_{-b}^{\alpha} u(x) dx$$

при прежнем ограничении на управление

$$0 \leq u \leq \bar{u}$$

и условию, что решение полученной системы удовлетворяет фазовому ограничению

$$y_1 \geq -\bar{y}, \quad (3.12)$$

и граничным условиям

$$y_2(-b) = \frac{\sqrt{\gamma}}{a} y_1(-b), \quad y_2(\alpha) = 0. \quad (3.13)$$

Замечание. Фазовое ограничение (3.12) является ограничением второго порядка и удовлетворяет условию регулярности (это означает, что вторая производная функции $y_1 + \bar{y}$ по x содержит управление u в явном виде и частная производная $\frac{\partial}{\partial u} (y_1 + \bar{y})''$ отлична от нуля при $y_1 = -\bar{y}$). Далее, в силу того, что ограничение будет нарушено вблизи любой точки, где оно активно (т.е. $y_1 = -\bar{y}$), но производная решения отлична от нуля (т.е. $y_2 \neq 0$), а также того факта, что α – это самая левая точка с нулевой производной решения, то можно сделать вывод, что ограничение неактивно (т.е. $y_1 > -\bar{y}$) на всем интервале $[-b, \alpha)$.

Воспользуемся принципом максимума Понтрягина для решения поставленной задачи. Для этого введем функции Гамильтона

$$H = H(u, y, \lambda) = u + \lambda_1 y_2 + \lambda_2 \left(\frac{\gamma + u}{a^2} y_1 + \frac{Y}{a^2} u \right)$$

и Лагранжа

$$L = L(u, y, \lambda, \mu, \nu) = H + \mu_1(\bar{u} - u) + \mu_2 u,$$

где λ , $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, - сопряженная функция, а μ , $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ - векторная функция, определяемые с помощью следующих соотношений:

$$\begin{cases} \lambda'_1 = -\frac{\partial L}{\partial y_1} = -\frac{\gamma+u}{a^2}\lambda_2, \\ \lambda'_2 = -\frac{\partial L}{\partial y_2} = -\lambda_1, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad \mu_1(\bar{u} - u) = \mu_2 u = 0.$$

Выпишем необходимое условие экстремума в форме принципа максимума в точках, где управление u является производной своего интеграла:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 1 + \frac{y_1 + Y}{a^2}\lambda_2 - \mu_1 + \mu_2 \equiv 0.$$

Принимая во внимание граничные условия (3.13) и неактивность ограничения (3.12) вблизи границы, получим следующие граничные условия на сопряженный вектор:

$$\begin{aligned} \lambda_1(-b) &= -\frac{\sqrt{\gamma}}{a}\lambda_2(-b) \\ \lambda_1(\alpha^-) &= \lambda_1(\alpha^+) + \eta, \quad \eta \geq 0 \\ \lambda_2(\alpha^-) &= \lambda_2(\alpha^+), \end{aligned} \quad (3.15)$$

Оценим поведение фазовых переменных и компонент сопряженного вектора на интервале $[-b, \alpha]$. Для этого вычислим производные отношений $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ и $\frac{y_2}{y_1}$. Получим

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)' = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{\gamma+u}{a^2}, \quad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{\gamma+u}{a^2} + \frac{uY}{a^2 y_1} - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2.$$

Вспоминая, что в левой точке интервала $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{\gamma}{a}$, а $\frac{y_2}{y_1} = \frac{\gamma}{a}$, а так же тот факт, что $y_1 > -Y$ всюду на \mathbb{R} , имеем

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)' < 0, \quad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' > 0 \quad (3.16)$$

при любом допустимом управлении u .

Известно, что на граничной дуге (α, β) функция переключения $1 + \frac{y_1+Y}{a^2}\lambda_2$ и ее производная $\frac{y_2\lambda_2 - (y_1+Y)\lambda_1}{a^2}$ равны нулю и, значит

$$\lambda_1(\alpha^+) = 0, \quad \lambda_2(\alpha^+) = \frac{a^2}{\bar{y} - Y} < 0.$$

В силу условия (3.15) в точке α получаем, что функция λ_1 слева от нее положительна, а λ_2 – отрицательна. Далее, из (3.14) следует, что λ_1 растет, а λ_2 убывает. Используя данные соображения, а также условие (3.15) в точке $-b$ и (3.16), получим неравенство

$$\lambda_1 \geq -\frac{\sqrt{\gamma}}{a}\lambda_2$$

для компонент сопряженного вектора, а из соображений отрицательности фазовой переменной y_1 и ее производной y_2 , граничного условия (3.13) в точке $-b$ и второго неравенства из (3.16) – оценку

$$y_2 \geq \frac{\sqrt{\gamma}}{a}y_1$$

для фазовых переменных на интервале $[-b, \alpha]$.

Для оценки функции переключения на этом интервале воспользуемся соображениями ее непрерывности и оценим производную

$$\left(1 + \frac{y_1 + Y}{a^2}\lambda_2\right)' = \frac{1}{a^2}(y_2\lambda_2 - (y_1 + Y)\lambda_1) \leq \frac{\sqrt{\gamma}}{a^3}(2y_1 + Y)\lambda_2 < 0$$

при $2y_1 > -Y$.

Значит, функция переключения, убывая, приближается к нулю на интервале $[-b, \alpha)$ и, таким образом, положительна. Получаем, что $\mu_1 - \mu_2 > 0$ и, следовательно, $u \equiv \bar{u}$ на $[-b, \alpha)$.

Мы показали, что слева от выхода решения на границу $-\bar{y}$ управление принимает свое максимальное значение. Путём подстановки такого управления в систему (3.11) и решения ее совместно с (3.13) и условием $y_1(\alpha) = -\bar{y}$ получим, что точка α выхода на границу может быть вычислена как

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{\gamma + \bar{u}}} \left(\operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{\gamma \bar{u}} Y}{\bar{u}(Y - \bar{y}) - \gamma \bar{y}} - \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{\gamma}{\bar{u}}} \right) - b.$$

Согласно лемме 3.3 найденное решение может быть продолжено вдоль границы вплоть до точки $\beta = -\alpha$, рассуждения справа от которой проводятся аналогичным образом. Получим, что оптимальное управление имеет вид (3.8) и является кусочно-постоянным.

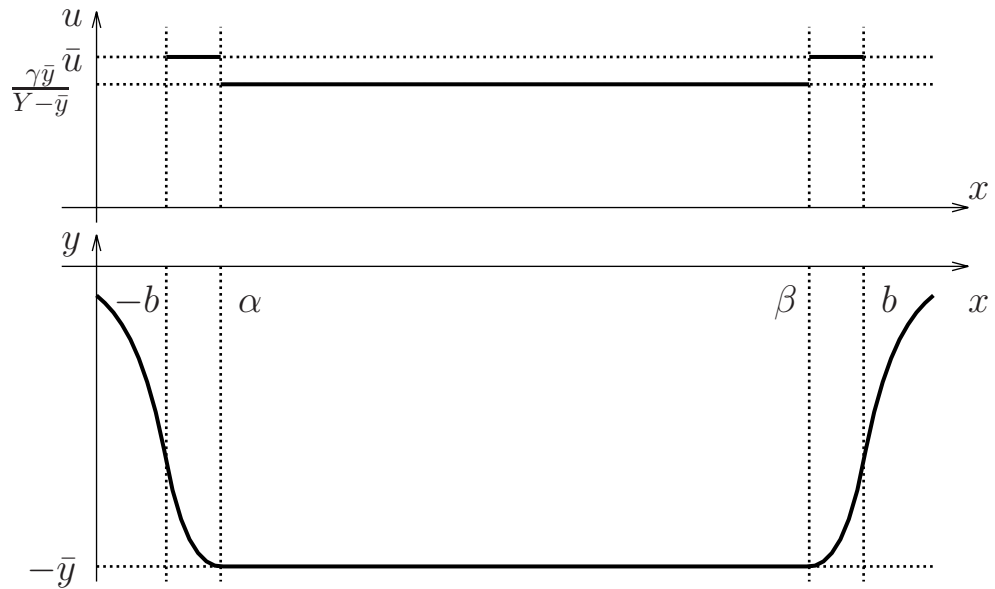


Рис. 3.4. Оптимальное управление и соответствующее ему решение (при $a = 0.1$, $\gamma = 0.9$, $b = 1$).

Теорема 3.2 доказана по модулю леммы. ■

На Рис. 3.4 изображен график оптимального управления и соответствующего ему решения при некоторых (академических) значениях параметров.

Доказательство леммы 3.3 Допустим, что решение, соответствующее оптимальному управлению, всюду больше $-\bar{y}$. В силу того, что постоянное управление с максимальным значением не является допустимым, найдется множество точек положительной меры на $[-b, b]$, на котором $u < \bar{u}$. Возьмем отрезок $[\alpha, \beta] \subset (-b, b)$, где мера таких точек положительна.

Теперь при малом $\theta > 0$ рассмотрим управление \tilde{u} , $\tilde{u} = u + \theta(\bar{u} - u)\chi_{[\alpha, \beta]}$, и соответствующее ему решение задачи (3.2), (3.4). Легко проверить, что это решение представляется в виде

$$\tilde{y} = y + \theta y_1 + \dots,$$

где y_1 — непрерывная на отрезке $[-b, b]$ функция, дифференцируемая вблизи его концов в силу выбора $[\alpha, \beta]$, а многоточие обозначает члены более

высокого порядка по θ . Очевидно, что при достаточно малом θ решение \tilde{y} также не принимает значения $-\bar{y}$, и, следовательно, управление \tilde{u} является допустимым. Полученное управление доставляет большее значение целевого функционала в силу

$$J(\tilde{u}, \tilde{y}) - J(u, y) = \int_{-b}^b [\tilde{u}(x) - u(x)] dx = \theta \int_{\alpha}^{\beta} [\bar{u}(x) - u(x)] dx > 0.$$

Это противоречит предположению о том, что управление u было оптимальным. Значит решение y должно принимать свое минимальное значение. Таким образом, справедливо первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения также допустим противное, а именно, что для оптимального управления u и соответствующего ему решения y задачи (3.2), (3.4) имеем $y'(\alpha) = y'(\beta) = 0$, $-b < \alpha < \beta < b$, но y отлично от $-\bar{y}$ на множестве ненулевой меры внутри отрезка $[\alpha, \beta]$. В силу уравнения (3.2) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 (y'(\beta) - y'(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} a^2 y''(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} ((\gamma + u(x))y(x) + u(x)Y) dx = \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \gamma y(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} u(x) (y(x) + Y) dx \geq -\gamma \bar{y}(\beta - \alpha) + (Y - \bar{y}) \int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx. \end{aligned}$$

Значит, выполнено неравенство (3.10) и переход на $[\alpha, \beta]$ к паре $(\frac{\gamma \bar{y}}{Y - \bar{y}}, -\bar{y})$ увеличивает значение функционала. Это противоречит оптимальности исходного управления u и доказывает лемму. ■

Нетрудно посчитать, что получаемое при оптимальном измеримом управлении значение J_{opt} функционала задачи P_2 равно

$$J_{opt} = \frac{2a}{\sqrt{\gamma + \bar{u}}} \left(\bar{u} - \frac{\gamma \bar{y}}{Y - \bar{y}} \right) \left[\operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{\gamma \bar{u}} Y}{\bar{u}(Y - \bar{y}) - \gamma \bar{y}} - \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{\gamma}{\bar{u}}} \right] + \frac{2b\gamma \bar{y}}{Y - \bar{y}}.$$

Оно зависит от величины \bar{y} нелинейно и растет с ростом \bar{y} в силу

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{opt}}{\partial \bar{y}} &= 2 \frac{a\sqrt{\gamma \bar{u}} \sqrt{\gamma + \bar{u}} Y}{\sqrt{\gamma \bar{u} Y^2 + (\bar{u}(Y - \bar{y}) - \gamma \bar{y})^2}} + \\ &+ 2 \left(b - \frac{a}{\sqrt{\gamma + \bar{u}}} \left(\operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{\gamma \bar{u}} Y}{\bar{u}(Y - \bar{y}) - \gamma \bar{y}} - \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{\gamma}{\bar{u}}} \right) \right) \frac{\gamma Y}{(Y - \bar{y})^2} > 0. \end{aligned}$$

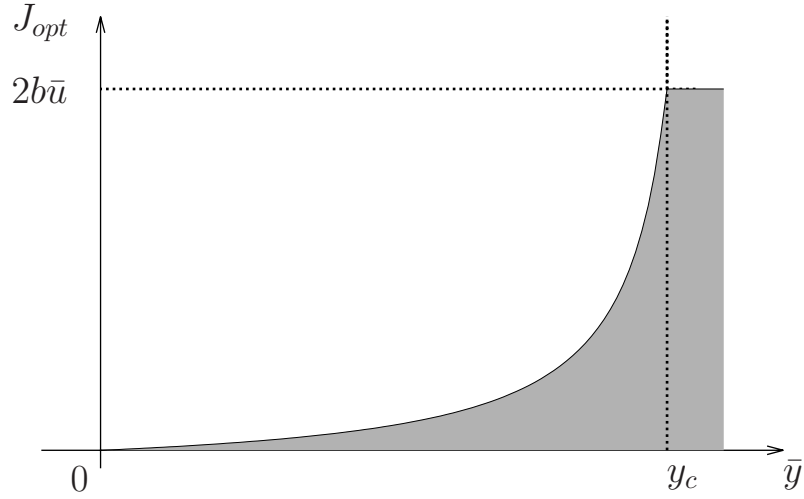


Рис. 3.5. Зависимость J_{opt} от \bar{y} при измеримом управлении (при $a = 0.1$, $\gamma = 0.05$, $b = 1$).

Эту зависимость при некоторых академических значениях параметров иллюстрирует Рис. 3.5. Отметим, что в силу оптимальности соответствующего управления, значение J_{opt} функционала является максимальным и, следовательно, значения функционалов, соответствующих остальным допустимым управлениям, находятся в области, затушеванной на рисунке.

Теорема 3.4. *Оптимальным измеримым управлением в задаче P_1 является управление*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-b, b], \\ \bar{u}, & x \in [-b, \alpha) \cup (\beta, b], \\ \frac{\gamma\bar{y}}{Y-\bar{y}}, & x \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

где значения α и β определяются равенствами (3.9), а величина \bar{y} , задающая оптимальное значение функционала I_{opt} этой задачи, вычисляется согласно равенству

$$\frac{2a}{\sqrt{\gamma + \bar{u}}} \left(\bar{u} - \frac{\gamma\bar{y}}{Y - \bar{y}} \right) \left[\operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{\gamma\bar{u}Y}}{\bar{u}(Y - \bar{y}) - \gamma\bar{y}} - \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{\gamma}{\bar{u}}} \right] + \frac{2b\gamma\bar{y}}{Y - \bar{y}} = C.$$

Доказательство. При заданном допустимом управляющем воздействии зависимость значения функционала задачи P_1 от величины C является обратной к зависимости величины J от \bar{y} . При этом множество возможных

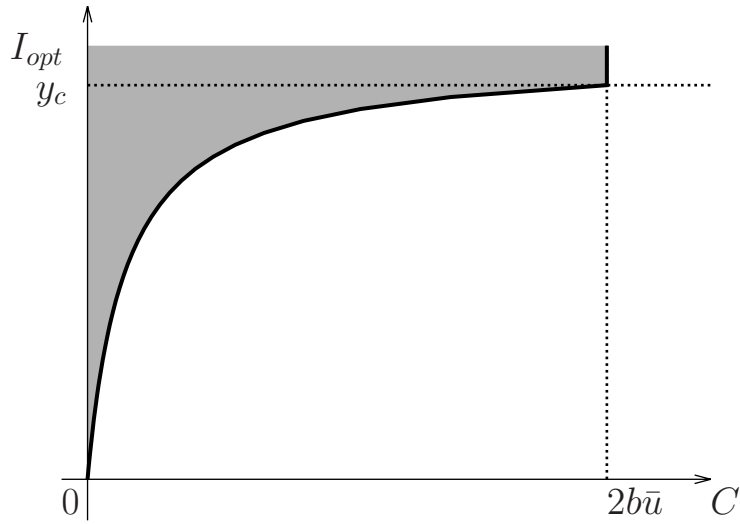


Рис. 3.6. Зависимость I_{opt} от C (при $a = 0.1$, $\gamma = 0.05$, $b = 1$).

значений функционала в этой задаче затушевано на Рис. 3.6. Следовательно, задача P_1 разрешима лишь при $C \leq 2b\bar{u}$ и максимум ее функционала достигается при той же структуре допустимого управления, что и в задаче P_2 . Искомое значение \bar{y} этого максимума вычисляется напрямую из условия $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx = C$, что приводит к уравнению

$$(\alpha - b + b - \beta)\bar{u} + (\beta - \alpha)\frac{\gamma\bar{y}}{Y - \bar{y}} = C.$$

Подставим в это уравнение значения α и β из (3.9) и получим равенство из условия теоремы. ■

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.
2. Давыдов А.А., Пастрес Р., Петренко И.А. Одномерное распределение выброса загрязнения в одномерный поток // Труды Института математики и механики. — 2010. — Т. 16, № 5. — С. 30–35.
3. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи математических наук. — 1962. — Т. 17. — С. 3 – 146.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (4-е издание). — М.: Наука, 1971.
6. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. — М.: Мир, 1983.
7. Кукшина Е.О., Целоусова И.А. Алгоритм и программный продукт для усредненной оптимизации распределенных систем // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов, Суздаль. — 2007. — С. 36.
8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
9. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1983.
10. Павлова М.Ф., Тимербаев М.Р. Пространства Соболева (теоремы вложения). — 2010.
11. Петренко И.А. Оптимизация емкости завода аквакультуры при наличии экологических ограничений // Международная конференция Дифференциальные уравнения и топология, посвященная 100-летию со дня

- рождения Льва Семеновича Понтрягина. Тезисы докладов. — 2008. — С. 384–385.
12. Петренко И.А. Минимизация воздействия загрязняющих выбросов путем перераспределения их источников // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов, Суздаль. — 2009. — С. 187.
 13. Петренко И.А. Оптимизация распределенного выброса загрязняющего вещества в поток воды // Вооружение. Технология. Безопасность. Управление. Материалы IV межотраслевой конференции с международным участием. Часть 1. — 2009. — Р. 229–239.
 14. Петренко И.А. Теорема существования и система оптимальности для задачи, описываемой уравнением эллиптического типа с интегральным функционалом // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов, Суздаль. — 2011. — С. 166–167.
 15. Петренко И.А. Разрешимость задачи оптимального управления для транспортного уравнения с минимаксным функционалом // Международная конференция «АНАЛИЗ и ОСОБЕННОСТИ», посвященная 75-летию Владимира Игоревича Арнольда: Тезисы докладов, Москва. — 2012. — С. 87–89.
 16. Петренко И.А. Теорема существования решения задачи оптимального управления для транспортного уравнения с интегральным функционалом // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: Тезисы докладов, Суздаль. — 2012. — С. 138.
 17. Петренко И.А. Модель изменения концентрации вещества в потоке жидкости // Международная конференция по математической теории управления и механике: Тезисы докладов, Суздаль. — 2013. — С. 188–189.

18. Петренко И.А., Тимофеева В.А. Решение задачи оптимизации, описываемой уравнением эллиптического типа с интегральным функционалом // Международная конференция «Управление и оптимизация неголономных систем»: Тезисы докладов, Переславль-Залесский. — 2011. — С. 29–30.
19. Тихомиров В.М., Фурсиков А.В.. Существование решения экстремальных задач. — 2003.
20. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
21. An advection-diffusion-reaction model for the estimation of fish movement parameters from tagging data, with application to skipjack tuna (*katsuwonus pelamis*) / J.R. Silbert, J. Hampton, D.A. Fournier, P.J. Bills // Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences. — 1999. — Vol. 56. — P. 925–938.
22. Allaire G. Shape Optimization by the Homogenization Method. — Springer, 2002. — ISBN: 9780387952987.
23. Aronson D.G. Non-negative solutions of linear parabolic equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. — 1968. — Vol. 22. — P. 607–694.
24. Beck M.B. Real-time Control of Water Quality and Quantity. — IIASA, 1978.
25. Beck M.B., Latten A., Tong R.M. Modelling and Operational Control of the Activated Sludge Process in Wastewater Treatment. — IIASA, 1978.
26. Bogobowicz A., Sokołowski J. Modelling and control of water quality in a river section // System Modelling and Optimization. — 1984. — Vol. 59. — P. 403–414.
27. Domenico P.A., Schwartz F.W. Physical and Chemical Hydrogeology. — Wiley, 1997.
28. Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains / A. Dall’Aglio, V. De Cicco, D. Giachetti, J.-P. Puel // Nonlinear Differential Equations and Applications. — 2004.

29. Ferreira J.G. Ecwin—an object-oriented ecological model for aquatic ecosystems // *Ecological Modelling*. — 1995. — Vol. 79. — P. 21–34.
30. Ferreira J.G., Hawkins A.J.S., Bricker S.B. Management of productivity, environmental effects and profitability of shellfish aquaculture—the farm aquaculture resource management (farm) model // *Aquaculture*. — 2007. — Vol. 264. — P. 160–174.
31. Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson R.G. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints // *Society for Industrial and Applied Mathematics*. — 1995. — Vol. 37. — P. 181–218.
32. Karlsen K.H. Notes on weak convergence. — 2006.
33. Loucks D.P., van Beek E. *Water Resources Systems Planning and Management. An Introduction to Methods, Models and Applications*. — UNESCO Publishing, 2005.
34. Mathematical modelling to assess the carrying capacity for multi-species culture within coastal waters / P. Duarte, R. Meneses, A.J.S. Hawkins et al. // *Ecological Modelling*. — 2003. — Vol. 168. — P. 109–143.
35. Maurer H., Zowe J. First and second-order necessary and sufficient conditions for infinite-dimensional programming problems // *Mathematical Programming*. — 1979. — Vol. 16. — P. 90–110.
36. On the lambert w function / R. Corless, G. Gonnet, D. Hare et al. // *Advances in Computational Mathematics*. — 1996. — Vol. 5. — P. 329—359.
37. Optimization of shellfish production carrying capacity at a farm scale. / D. Brigolin, A. Davydov, R. Pastres, I. Petrenko // *Applied Mathematics and Computation*. — 2008. — Vol. 204. — P. 532–540.
38. Partial differential equations in ecology: Spatial interactions and population dynamics / E.E Holmes, M.A Lewis, J.E Banks, R.R Veit // *Ecology*. — 1994. — Vol. 75(1). — P. 17–29.

39. Petrenko I.A. Aquaculture and water quality: modeling and control // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: Тезисы докладов, Суздаль. — 2010. — С. 231–232.
40. Rellich F. Ein satz über mittlere konvergenz // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse. — 1930. — Vol. 1930. — P. 30–35.
41. Stampacchia G. Equations elliptiques du second order à coefficients discontinus // Les Presses de l'Université de Montréal. — 1966. — no. 16.