На правах рукописи

Чан Куанг Выонг

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Владимир - 2017

Работа выполнена на кафедре математики ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Научный руководитель:
Солдатов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:
Псху Арсен Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа и теории функций, Кабардино-балкарский государственный университет.

Жура Николай Андреевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, федеральное государственное бюджетное учреждение науки физический институт им. П.Н. Лебедева российской академии наук.

Ведущая организация: Южный федеральный университет.

Защита диссертации состоится 7 апреля 2017 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых по адресу: 600024, г. Владимир, проспект Строителей, д. 11, корп. 7 ВлГУ, ауд. 133. Факс (4992) 53-25-75, 33-13-91; e-mail: oid@vlsu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на официальном сайте www.vlsu.ru ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, с авторефератом на сайтах http://vak.ed.gov.ru и http://diss.vlsu.ru

Автореферат разослан «___» ________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.025.08 С.Б. Наумова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. В современном комплексном анализе важную роль играют краевые задачи теории аналитических функций и различные их обобщения – задачи нахождения аналитической в некоторой области функции по заданному соотношению между граничными значениями ее действительной и мнимой частей. Более точно, требуется найти аналитическую в области D функцию ϕ по краевому условию

$$\operatorname{Re} G\phi^{+} = f,$$

где ϕ^{+} означает граничное значение ϕ и заданная функция G всюду отлична от нуля.

Эта задача была поставлена Б. Риманом в 1857 г., однако он не указал каких-либо способов ее решения. Впервые ее исследование было дано Д. Гильбертом, который свел эту задачу к решению двух задач Дирихле для гармонических функций. По этой причине данную задачу называют задачей Римана – Гильберта (иногда просто задачей Гильберта).

Задача Римана – Гильберта тесно связана с так называемой задачей линейного сопряжения, постановка которой также восходит к Б. Риману. Пусть гладкий контур Γ ограничивает область D и D' есть дополнение к D на комплексной плоскости. Пусть функция ϕ аналитична на $D \cup D'$ и непрерывно продолжима на Γ со стороны D и D', соответствующие граничные значения обозначаем ϕ^{+} и ϕ^{-}. В этом случае ϕ также называют кусочно аналитической функцией с линией скачков Γ. Задача линейного сопряжения состоит в определении такой функции с конечным порядком на бесконечности по граничному условию

$$\phi^{+}(t) = G(t)\phi^{-}(t) + g(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $G(t)$ и $g(t)$ - заданные функции.

Можно показать, что при помощи аппарата интегралов типа Коши эта задача имеет решение, которое используется для исследования сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши на контуре Γ. Теория этих задач, как и сингулярных интегральных уравнений к середине прошлого столетия приобрела практически законченный вид, итог подведен в известных монографиях Ф.Д. Гахова и Н.И. Мусхелишвили, где приведена также подробная библиография.

Одним из естественных обобщений аналитических функций комплексного переменного $z = x+iy$ являются полианалитические (или $n-$ аналитические) функции $u(z)$, которые в области D комплексной плоскости удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^n u}{\partial \bar{z}^n} = 0. \tag{1}$$

Отметим, уравнение (1) при $n = 2$ называется также уравнением Бицадзе. При разделении действительной и мнимой частей этого уравнения получается эллиптическая система второго порядка, рассмотренная в известной работе А.В. Бицадзе.

Краевым задачам для полианалитических функций и их обобщений посвящены многочисленные исследования. Интерес к этим задачам объясняется связями с другими математическими областями (например, теорией дифференциальных уравнений с частными производными, теорией приближения функций), а также многообразными приложениями в математической физике и механике (см., например, Т. Рева, А. Юденков). Систематическое исследование краевых задач для полианалитических функций началось с работ В.С. Рогожина и М.П. Ганина, в которых рассматривалась задача нахождения 3-аналитической функции по трем краевым условиям. В дальнейшем эта теория развивалась многими авторами, большой вклад в нее внесли Ф.Д Гахов, И.А. Бикчантаев, В.А. Габринович, В.И. Жегалов, С.В. Левинский, В.И. Показеев, И.А. Соколов, К.М. Расулов и др.

Цель работы.

1. Исследовать задачу линейного сопряжения и одностороннюю краевую задачу для полианалимтических функций с помощью теории функций и интегралов типа Коши.

2. Построить явно по рекуррентной процедуре каноническую матрицу-функцию и с помощью нее исследовать задачу линейного сопряжения.

3. Дать описание полианалитических функций через J - аналитические функции.

4. Исследовать общую краевую задачу для полианалитических функций с помощью обобщенных интегралов типа Коши, связанных с $J-$ аналитическими функ-

циями.

Научная новизна.

1) Дано решение задачи линейного сопряжения и найдена формула ее индекса с помощью интегралов типа Коши.

2) Получено представление решения задачи линейного сопряжения и односторонней краевой задачи Римана - Гильберта через каноническую матрицу-функцию, которая построена в явном виде.

3) Найдено представление полианалитических функций через J - аналитические функции.

4) Исследована фредгольмова разрешимость общей краевой задачи для полианалитических функций с помощью $J-$ аналитических функций и найдена формула ее индекса.

Методы исследования. Для решения поставленных задач были использованы методы теории функций и функционального анализа, сингулярных интегральных уравнений, теория интегралов типа Коши, канонических матриц функции и J-аналитических функций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации имеют теоретический характер. Они могут быть использованы для последующего развития общей теории краевых задач для эллиптических систем.

Апробация работы. Наиболее значимые результаты диссертации докладывались на Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2015); на первой междууниверситетской конференции среднего Вьетнама, (Вьетнам, 2015), на научно- исследовательском семинаре по дифференциальным уравнениям (рук. проф. А.П. Солдатов), Белгород, 2014-2016, на Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2016).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [1]-[3], рекомендованных ВАК для опубликования основных научных результатов. Статьи выполнены совместно с научным руководителем А. П. Солдатовым. Здесь научному руководителю принадлежит постановка задач и выбор методик исследования, а соискателю – реализация указанных методик.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из двух глав, разбитых на параграфы, и списка литературы. Объем диссертации составляет 91 страниц, библиография – 47 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору А. П. Солдатову за постановку задач, поддержку и внимание к работе.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** приведен краткий обзор используемой литературы, изложены актуальность темы, цель работы, методы исследования, научная новизна, публикации по теме диссертации и личный вклад автора в совместные работы, апробация работы, значимость, структура и содержание работы.

Диссертационная работа состоит из двух глав. Первая глава основывается на традиционном подходе, связанным с представлением Гурса полианалитических функций через аналитические. Соответственно в ней рассматриваются задачи типа Римана-Гильберта и линейного сопряжения специального типа, которые с помощью указанного представления непосредственно сводятся к соответствующим задачам теории функций. Основной упор здесь сделан на описании случаев эффективного решения этих задач.

Первая глава состоит из пяти параграфов. Первый параграф посвящен обсуждению представления Гурса

$$u(z) = \phi_1(z) + \bar{z}\phi_2(z) + \frac{\bar{z}^2}{2!}\phi_3(z) + \ldots + \frac{\bar{z}^{n-1}}{(n-1)!}\phi_n(z) \qquad (2)$$

полианалитической функции u через набор $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ аналитических функций. По отношению к вектору

$$U = (U_1, \ldots, U_n), \quad U_k = \partial^{k-1}u/\partial\bar{z}^{k-1},$$

и треугольной матрице $P = (P_{ij})_1^n$, элементы которой равны нулю при $j < i$ и

$$P_{ij}(z) = \frac{\bar{z}^{j-i}}{(j-i)!}, \quad j \geq i,$$

это представление записывается в форме $U = P\phi$.

Второй параграф посвящен задаче линейного сопряжения

$$\left(\frac{\partial^{i-1} u}{\partial \bar{z}^{i-1}}\right)^+ - \sum_{j=1}^n B_{ij} \left(\frac{\partial^{j-1} u}{\partial \bar{z}^{j-1}}\right)^- = f_i, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{3}$$

на гладком контуре Γ для полианалитических функций, заданных в открытом множестве $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Решение ищется в классе Гельдера $C^\mu(\widehat{D})$, который определяется условием принадлежности $C^\mu(\overline{G})$ для любой ограниченной подобласти $G \subseteq D$. Кроме того, оно подчиняется поведению

$$U_j(z) = O(|z|^{\,l-j}) \text{ при } z \to \infty, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

на бесконечности, где целое число l задано.

С помощью подстановки $U = P\phi$ эта задача непосредственно сводится к задаче линейного сопряжения

$$\phi^+ - G\phi^- = g, \tag{5}$$

для аналитической в D вектор- функции $\phi \in C^\mu(\widehat{D})$ с матричным коэффициентом $G = P^{-1}BP$ и правой частью $g = P^{-1}f$, что приводит к следующему результату.

Теорема 2.4. *Пусть матрица – функция $B \in C^\mu(\Gamma)$ обратима. Тогда задача (1), (3) фредгольмова в классе функций, удовлетворяющих условию (4), ее коядро содержится в $C^\mu(\Gamma)$ и ее индекс æ дается формулой*

$$æ = \operatorname{Ind} B + nl - n(n-1)/2.$$

В третьем параграфе описывается хорошо известный подход решения задачи линейного сопряжения через канонические матрицы функции. Применительно к задаче (1), (3) он приводит к следующему результату.

Теорема 3.1. *Пусть $\widetilde{X}(z)$ – каноническая матрица- функция, отвечающая матричному коэффициенту $\widetilde{G} = (Q^+)^{-1}P^{-1}BPQ^-$, и $\widetilde{æ}_j$, $1 \leq j \leq n$, есть ее частные индексы.*

Тогда для разрешимости задачи (1), (3) необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $\widetilde{f} = (\widetilde{X}^+)^{-1}(Q^+)^{-1}P^{-1}f$ *удовлетворяла условиям ортогональности*

$$\int_\Gamma \widetilde{f}_k(t)\widetilde{q}_k(t)dt = 0, \quad 1 \le k \le n,$$

для всех многочленов $\widetilde{q}_k$ *степени* $\deg q_k \le -(l+\widetilde{æ}_k)-1$ *(многочлены отрицательной степени полагаются равными нулю). При выполнении этих условий общее решение этой задачи дается формулой*

$$u(z) = \sum_1^n \phi_j(z)\frac{\bar{z}^{j-1}}{(j-1)!}, \quad \phi(z) = Q(z)\widetilde{X}(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\widetilde{f}(t)dt}{t-z} + \widetilde{p}(z)\right],$$

где вектор- многочлен $\widetilde{p} = (\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_n)$ *удовлетворяет условию* $\deg \widetilde{p}_k \le l + \widetilde{æ}_k - 1, \quad 1 \le k \le n.$

Каноническую матрицу X, отвечающую коэффициенту G, можно построить эффективно далеко не для всех матриц G. Исключение составляет случай, когда эта матрица треугольна. В этом случае доказывается следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть матрица* $G \in C^\mu(\Gamma)$ *верхне- треугольна, т.е.* $G_{ij} = 0$ *при* $i > j$, *и* $G_{ii}(t) \ne 0, \ \ t \in \Gamma, \ \ 1 \le i \le n$. *Тогда каноническая - матрица* X *также верхне -треугольна и ее частные индексы* $æ_i = \mathrm{Ind} G_{ii}$.

Параграф 4 посвящен частному случаю $n = 2$ бианалитической функции. В этом случае каноническая матрица строится особенно просто.

Лемма 4.1. *Пусть в матрице* $G \in C^\mu(\Gamma)$ *вида*

$$G(t) = \begin{pmatrix} G_1(t) & G_0(t) \\ 0 & G_2(t) \end{pmatrix},$$

где $G_0(t) = B_0(t) + \bar{t}(B_1 - B_2)(t), G_1(t) = B_1(t), G_2(t) = B_2(t)$, *функции* G_1, G_2 *обратимы и, соответственно,* X_1, X_2 *– отвечающие им канонические функции. Тогда отвечающая* G *каноническая матрица – функция дается формулой*

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_1 Y \\ 0 & X_2 \end{pmatrix},$$

где по отношению к функции $\widetilde{G}_0 = (X_1^-)^{-1}X_2^- G_1^{-1}G_0$ *положено*

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\widetilde{G_0}(t)dt}{t-z}.$$

Соответственно этому задача (1), (3) с коэффициентом

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

допускает эффективное решение.

В еще более частном случае, когда $B_0 = 0$, это решение можно построить с помощью рекуррентной процедуры, не прибегая к канонической матрице.

Пусть $æ_k = \operatorname{Ind} B_k,\ k = 1, 2$, есть индекс Коши функции B_k и пусть скалярная каноническая функция X_k отвечает коэффициенту B_k. Положим

$$A(t) = \frac{\bar{t}[B_2(t) + B_1(t)]}{2B_2(t)}, \quad B(t) = \frac{\bar{t}[B_2(t) - B_1(t)]}{2B_2(t)}, \quad C(t) = \frac{B(t)X_1^+(t)}{X_0^+(t)},$$

и введем сингулярный оператор

$$(Nf_2)(t_0) = A(t_0)f_2(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{X_2^+(t_0)}{X_2^+(t)} \frac{f_2(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

Для целого n обозначим $P(n)$ класс многочленов $p(t)$ степени $\deg p \le n - 1$, полагая $P(n) = 0$ для $n \le 0$. Таким образом, $\dim P(n) = \max(0, n)$. Удобно еще для целого m ввести подпространство $P(n, m)$ всех многочленов $p \in P(n)$, для которых

$$\langle q, Cp \rangle = 0, \quad q \in P(m),$$

где здесь и ниже для краткости

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt.$$

Теорема 4.1. *Задача (1), (3), где $B_0 = 0$, разрешима тогда и только тогда, когда ее правые части f_1, f_2 удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\langle f_2, (X_2^+)^{-1} q_2 \rangle = 0, \quad q_2 \in P(-æ_2 - l + 1),$$
$$\langle f_1 - Nf_2, (X_1^+)^{-1} q_1 \rangle = 0, \quad q_1 \in P(-æ_1 - l, æ_2 + l - 1).$$

При выполнении этих условий все решения задачи описываются формулой

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left[\frac{X_1(z)}{X_1^+(t)} \frac{f_1(t) - (Nf_2)(t)}{t - z} + \frac{\bar{z}X_2(z)}{X_2^+(t)} \frac{f_2(t)}{t - z} \right] dt -$$

$$-\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \left[\frac{X_1(z)}{X_1^+(t)} \frac{B(t)X_2^+(t)p_2(t)}{t - z} \right] dt + X_1(z)p_1(z) + \bar{z}X_2(z)p_2(z)$$

с произвольными $p_1 \in P(æ_1 + l)$ *и* $p_2 \in P(æ_2 + l - 1)$.

Последний пятый параграф главы 1 посвящен односторонней задаче Римана - Гильберта для полианалитической функции u в области D, ограниченной ляпуновским контуром Γ. Эта задача определяется аналогичным (3) специальным краевым условием

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \left(\frac{\partial^{j-1} u}{\partial \bar{z}^{j-1}} \right)^{+} = f_i, \quad 1 \le i \le n. \tag{7}$$

Как обычно, решение ищется в классе $C^{\mu}(\overline{D})$, причем в случае бесконечной области D к (7) добавляется соответствующее поведение

$$U_j(z) = O(|z|^{l-j}) \text{ при } z \to \infty, \quad j = 1, \dots, n, \tag{8}$$

на бесконечности.

Исследование этой задачи опирается на следующую теоремы Н.И. Мусхелишвили о представлении аналитической функции интегралом типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t) dt}{t - z}, \quad z \in D,$$

с действительной плотностью.

Пусть контур Γ состоит из простых контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, причем в случае конечной области D контур Γ_m охватывает все остальные.

Теорема 5.1. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и ограничивает конечную область* D. *Тогда любая аналитическая в* D *вектор- функция* $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in C^{\mu}(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$, *единственным образом представима в виде*

$$\phi = I\varphi + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где $n-$ *вектор- функция* $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ *вещественна и удовлетворяет условиям*

$$\int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t = 0, \quad 1 \le j \le m - 1, \tag{10}$$

где $d_1 t$ *означает элемент длины дуги.*

Аналогичное предложение справедливо и для бесконечной области для аналитической функции ϕ, исчезающей на бесконечности. Единственное отличие состоит в том, что $\xi = 0$ в (9) и условие (10) рассматривается для всех $1 \le j \le m$.

Кроме того, важную роль играет следующее вспомогательное предложение.

Лемма 5.1. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$. *Тогда оператор* $K = S + \overline{S}$, *где* $\overline{S}\varphi = \overline{S\bar{\varphi}}$ *и черта справа означает комплексное сопряжение, представим в виде*

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{k(t_0,t)\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

с некоторой функцией $k(t_0,t) \in C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$, *которая тождественно равна нулю при* $t = t_0$.

При подстановке $U = P\phi$ задача (7) перейдет в классическую задачу Римана – Гильберта

$$\operatorname{Re} G\phi^+ = f,$$

для аналитической в D вектор- функции $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in C^\mu(\overline{D})$ с матричным коэффициентом $G = BP$. С помощью теоремы 5 эта задача редуцируется к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\operatorname{Re} G(\varphi + S\varphi) - 2(\operatorname{Im} G)\xi = 2f \tag{11}$$

относительно вещественной вектор- функции $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, которая вместе с дополнительными условиями (10) эквивалентна рассматриваемой задаче (11).

Теорема 5.2. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$, *ограничивает конечную область* D *и составлен из* m *компонент. Пусть матрица - функция* $B(t) \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *и* $\det B(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. *Тогда задача (7) фредгольмова и ее индекс* æ *дается формулой*

$$æ = -2\mathrm{Ind}\, B + (2-m)n.$$

Кроме того, по отношению к билинейной форме

$$(\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)d_1t,$$

где d_1t *означает элемент длины дуги, коядро задачи содержится в пространстве* $C^\mu(\Gamma)$ *вещественных функций вектор- функций.*

Аналогичная теорема справедлива и в случае бесконечной области.

Теорема 5.4. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$, *ограничивает бесконечную область* D *и составлен из* m *компонент. Пусть матрица - функция*

$B(t) \in C^\mu(\Gamma),\ \ 0 < \mu < \nu,$ *и* $\det B(t) \neq 0,\ \ t \in \Gamma$. *Тогда задача (7), (8) фредгольмова, ее коядро содержится в* $C^\mu(\Gamma)$ *и индекс* æ *дается формулой*

$$æ = -2\mathrm{Ind}\, B - mn - \sum_{j=1}^{n} (l - j + 1)^{-},$$

где напомним $2s^{\pm} = |s| \pm s$.

Вторая глава посвящена общим краевым задачам для полианалитических функций и основывается на подходе эллиптической теории, описанном А.П. Солдатовым. Этот подход связан с представлением полианалитических функций через так называемые $J-$ аналитические функции – решения эллиптических систем первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad (12)$$

где $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ и собственные значения матрицы J лежат в верхней полуплоскости.

При $J = i$ эта система переходит в классическое уравнение Коши - Римана, описывающее аналитические функции.

Впервые с этой точки зрения обобщения теории аналитическх функций уравнение (12) было исследовано А. Дуглисом в предположении, что матрица J треугольна и ее элементы зависят только от разности индексов. Функции ϕ, принимающие свои значения в классе таких матриц и удовлетворяющие (матричному) уравнению (12), были названы А. Дуглисом гипераналитическими. В дальнейшем это направление развивалось Д. Паскали, Д. Хорватц, Б. Боярским, Р. Гилбертом, Д. Хайлом и др.

Для решений уравнения (12) построен аналог теории аналитических функций, поэтому эти решения мы называем функциями, аналитическими по Дуглису. Этот материал кратко изложен в параграфе 7 главы 2 диссертации. Функции, аналитические по Дуглису удобны тем, что через них особенно просто выражаются решения эллиптических систем второго и более высокого порядка. Применительно к полианалитическим функциям, которые представляют собой решение эллиптического уравнения (1) это представление изложено в параграфе 6 главы 2.

Рассмотрим $n-$ вектор U, составленный из частных производных $(n-1)-$ го порядка решения уравнения (1), т.е.

$$U = (U_1, \dots, U_n), \quad U_k = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{k-1} \partial x^{n-k}}. \tag{13}$$

Основной результат этого параграфа состоит в следующем. Подстановка $U = T\phi$ с треугольной матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ i^2 & 2i & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ i^{n-1} & (n-1)i^{n-2} & [(n-1)(n-2)/2]i^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

переводит вектор U в решения системы (12) с клеткой Жордана

$$J = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & i \end{pmatrix}. \tag{14}$$

В параграфе 7 основной принцип распространения теории аналитических функций на функции, аналитические по Дуглису заключается в замене комплексного числа $z = x + iy$ на матрицу

$$z_J = x1 + yJ \tag{15}$$

где 1 означает здесь единичную матрицу и J- клетку Жордана (14). Роль интеграла типа Коши для J - аналитических функций играет интеграл

$$(I_J\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma dt_J (t-z)_J^{-1} \varphi(t), \quad z \in D,$$

где аналогично (15) выражение dt_J означает матричный дифференциал $d(\mathrm{Re}t)1 + d(\mathrm{Im}t)J$.

Теорема 7.1. *Пусть контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и* $D = \mathbb{C}\backslash\Gamma$. *Тогда если вектор- функция* $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *то* $J-$ *аналитическая в* D *функция* $\phi =$

$I_J\varphi$ исчезает на бесконечности, принадлежит классу $C^\mu(\widehat{D})$ и для ее граничных значений справедливы формулы Сохоцкого – Племеля

$$2\phi^{\pm} = \pm\varphi + S_J\varphi,$$

с сингулярным интегралом Коши

$$(S_J\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma dt_J(t-t_0)_J^{-1}\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma.$$

При этом I_J как линейный оператор ограничен $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\widehat{D})$.

Верно и обратное. Любая $J-$аналитическая в D функция $\phi \in C^\mu(\widehat{D})$, имеющая поведение $\phi(z) = O(|z|^{æ-1})$ при $z \to \infty$ с некоторым целым æ, единственным образом представима в виде $\phi = I_J\varphi + p$ с плотностью $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ и $J-$ аналитическим многочленом $p(z)$ комплексной переменной z, подчиненным условиям

$$p \in \mathcal{P}_{J,æ-1}, \quad \int_\Gamma dt_J\varphi(t)q(t) = 0,\ q \in \mathcal{P}_{J,-æ-1}. \tag{16}$$

Восьмой параграф посвящен задаче линейного сопряжения для произвольных (n-1) - го порядка

$$\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{k-1}\partial x^{n-k}}\right)^+ - \sum_{j=1}^{n} B_{kj}\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{j-1}\partial x^{n-j}}\right)^- = f_k, \quad 1 \le k \le n, \tag{17}$$

на гладком контуре Γ для полианалитических функций, заданных в открытом множестве $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$, (где D состоит из конечной D_1 и бесконечной D_0 областей).

Решение ищется в классе $C^{n-1,\mu}(\widehat{D})$, для которых

$$U_k = \frac{\partial^{n-1}u}{\partial y^{k-1}\partial x^{n-k}} \in C^\mu(\widehat{D}), U_k = O(|z|^{-n}) \text{ при } z \to \infty, 1 \le k \le n. \tag{18}$$

С помощью подстановки $U = T\phi$ задача (17) переходит в классическую задачу линейного сопряжения

$$\phi^+ - G\phi^- = g \tag{19}$$

с матричным коэффициентом $G = T^{-1}BT$ и правой частью $g = T^{-1}f$.

При указанной подстановке класс (18) переходит в класс $J-$ аналитических функций $\phi \in C^\mu(\widehat{D})$, подчиненных условию

$$\phi(z) = O(|z|^{-n}) \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{20}$$

Как и в параграфе 2 на основании теоремы 8, примененной к $\phi = I_J\varphi$, эта задача редуцируется к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений

$$\varphi + S_J\varphi + G(\varphi - S_J\varphi) = 2g,$$

где вектор- функция $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ подчинена второму условию (16) с $æ = 1 - n$ или, что равносильно, равенству нулю интегралов

$$\int_\Gamma t_J^k dt_J\varphi(t) = 0,\ 0 \le k \le n-2.$$

Теорема 8.1. *Пусть простой контур $\Gamma \in C^{1,\nu}$, матрица – функция $B \in C^\mu(\Gamma)$ обратима и $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Тогда задача (17) для полианалитических функций $u(z)$ фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\widehat{D})$, определяемый условиями (18), ее коядро содержится в $C^\mu(\Gamma)$ и индекс $æ = \operatorname{Ind} B$.*

Рассмотрим далее одностороннюю задачу аналогичного типа. Пусть область D конечна и ограничена простым гладким контуром. Задача состоит в отыскании решения $u \in C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ уравнения (1) по краевому условию

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n B_{kj} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{j-1} \partial x^{n-j}} \right)^+ = f_k, \quad 1 \le k \le n, \tag{21}$$

Как и выше с помощью подстановки $U = T\phi$ эта задача редуцируется к задаче Римана – Гильберта для $J-$аналитической функции ϕ

$$\operatorname{Re} G\phi^+ = f \tag{22}$$

с матричным коэффициентом $G = BT$.

Теорема 8.2. *Пусть простой контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и ограничивает конечную область D. Пусть матрица - функция $B(t) \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, и* $\det B(t) \ne 0$, $t \in \Gamma$.

Тогда задача (21) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ и ее индекс $æ$ дается формулой

$$æ = -2\operatorname{Ind} B + n^2. \tag{23}$$

При этом по отношению к билинейной форме в теореме 6 коядро задачи содержится в пространстве $C^\mu(\Gamma)$ вещественных функций вектор- функций.

Как и в параграфе 5, задачу (22) при дополнительном условии (20) можно рассмотреть и в бесконечной области D.

Теорема 8.3. *Пусть простой контур* Γ *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$ *и ограничивает бесконечную область* D. *Пусть матрица - функция* $B(t) \in C^{\mu}(\Gamma),\ 0 < \mu < \nu$, *и* $\det B(t) \neq 0,\ \ t \in \Gamma$.

Тогда задача (21) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ *и ее индекс* æ *дается формулой*

$$æ = -2\mathrm{Ind}\, B - n.$$

При этом по отношению к билинейной форме в теореме 6 коядро задачи содержится в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$ *вещественных функций вектор- функций.*

Последний девятый параграф главы 2 посвящен общей краевой задаче. Пусть конечная область D ограничена гладким простым контуром Γ и задана последовательность натуральных чисел $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_n \leq n$. Положим для краткости

$$\partial_1^i \partial_2^j u = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j},$$

и рассмотрим для уравнения (1) в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ общую краевую задачу вида

$$\mathrm{Re} \sum\nolimits_{i+j \leq l_k - 1} C_{k,ij} (\partial_1^i \partial_2^j u)^+ = f_k, \quad 1 \leq k \leq n, \tag{24}$$

с заданными непрерывными коэффициентами $C_{k,ij}$ на контуре Γ. Пусть $z = z(s) = x(s) + iy(s)$, $0 \leq s \leq s_\Gamma$, есть естественная параметризация контура Γ. Параметр s представляет собой длину дуги, отсчитываемую от фиксированной точки $z(0) \in \Gamma$ против часовой стрелки. В частности, s_Γ есть длина всего контура. Соответственно $e(t) = z'(s)$, $t = z(s)$, является единичным касательным вектором. В дальнейшем предполагается, что Γ принадлежит классу $C^{n-1,\nu}, 0 < \nu < 1$, который понимается по отношению к периодической функции $z(s)$. Таким образом, касательный вектор $e = e_1 + ie_2$ принадлежит классу $C^{n-2,\nu}(\Gamma)$ (по отношению к естественному параметру s на контуре), где принято соглашение $C^{0,\nu} = C^{\nu}$. Соответственно от коэффициентов $C_{k,ij}$ потребуем, чтобы они принадлежали классу $C^{n-l_k,\nu}(\Gamma)$, так что их можно $(n - l_k)-$ раз дифференцировать по параметру s, в частности,

$$C_{k,ij}^{(r)}[z(s)] = \frac{d^r}{ds^r} C_{k,ij}[z(s)] \in C^{n-l_k-r,\nu}(\Gamma), \quad 0 \leq r \leq n - l_k.$$

Рассмотрим операцию дифференцирования с определенной аддитивной постоянной:

$$(T\varphi)(t) = \varphi'(t) + \frac{1}{s_\Gamma}\int_\Gamma \varphi(t) d_1 t,$$

где $d_1 t$ означает элемент длины дуги. Заметим, что для любого натурального r оператор T^r действует по аналогичной формуле

$$(T^r\varphi)(t) = \varphi^{(r)}(t) + \frac{1}{s_\Gamma}\int_\Gamma \varphi(t) d_1 t,$$

поскольку

$$\int_\Gamma \varphi'(t) d_1 t = 0.$$

Лемма 9.1. *Оператор T обратим $C^1(\Gamma) \to C(\Gamma)$.*

Если некоторая функция $\varphi \in C^1(\Gamma)$ является граничным значением функции $v \in C^1(\overline{D})$, то по правилу дифференцирования производная φ' связана с частными производными v равенством

$$\varphi' = e_1(\partial_1 v)^+ + e_2(\partial_2 v)^+.$$

Если $v \in C^{r,\nu}(\Gamma),\ 1 \le r \le n-1$, то пользуясь этим равенством и правилом Лейбница дифференцирования произведения функции, получим

$$\varphi^{(r)} = (e_1\partial_1 + e_2\partial_2)^r v + \sum_{i+j \le r-1} A_{r,ij}(\partial_1^i \partial_2^j v)^+$$

с некоторыми коэффициентами $A_{r,ij} \in C^\nu(\Gamma)$. Здесь учтено, что функции e_1, e_2 принадлежат классу $C^{n-2,\nu}(\Gamma)$.

Введем функции B_{kj} с помощью тождеств

$$\sum_{i+j=l_k-1} C_{k,ij}\left[(e_1\xi_1 + e_2\xi_2)^{n-l_k}\xi_1^i\xi_2^j\right] = \sum_{j=1}^{n} B_{kj}\xi_1^{n-j}\xi_2^{j-1}, \quad 1 \le k \le n. \tag{25}$$

Теорема 9.1. *Пусть простой контур Γ принадлежит классу $C^{n-1,\nu}$ и ограничивает конечную область D. Пусть функции $C_{k,ij}$ в (24) принадлежат классу $C^{n-l_k-1,\mu}(\Gamma),\ 0 < \mu < \nu$, и матрица B, определяемая из равенства (25), обратима.*

Тогда задача (24) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ и ее индекс æ дается формулой (23).

Проиллюстрируем теорему на примере задачи

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial a^{k-1}}\right)^+ = f_k, \quad 1 \le k \le n, \tag{26}$$

где $a = a_1 + ia_2$ представляет собой комплекснозначную функцию на Γ и положено

$$\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial a^{k-1}}\right)^+ = [(a_1\partial_1 + a_2\partial_2)^{k-1}u]^+.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $l_k = k$ и в предположении $a \in C^{n-2,\nu}(\Gamma)$ условия теоремы 9.1 выполнены.

Теорема 9.2. *Пусть конечная область D ограничена простым контуром $\Gamma \in C^{n-1,\nu}$ и и функция $a_1 + ia_2 \in C^{n-2,\nu}$, $n \ge 2$.*

Тогда в предположении

$$(e_1a_2 - e_2a_1)(t) \ne 0, \quad t \in \Gamma, \tag{27}$$

задача (26) фредгольмова в классе $C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ и ее индекс æ дается формулой

$$æ = -n(n-1)\mathrm{Ind}\,(e_1a_2 - e_2a_1) + n^2. \tag{28}$$

На основании теоремы 9.2 отсюда следует заключение теоремы.

Если функции a_1, a_2 вещественны, то условие (27) равносильно тому, что вектор $a_1 + ia_2$ некасателен контуру Γ в каждой точке. В этом случае поскольку функция $e_1a_2 - e_2a_1$ вещественна, ее индекс Коши равен нулю, и формула (28) переходит в равенство $æ = n^2$. Например, к рассматриваемому типу относится задача

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial \nu^{k-1}}\right)^+ = f_k, \quad 1 \le k \le n,$$

с нормальной производной.

Особо рассмотрим случай постоянных функций $a_1 = 1/2$, $a_2 = i/2$, когда (26) переходит в задачу

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial^{k-1}u}{\partial \bar{z}^{k-1}}\right)^+ = f_k, \quad 1 \le k \le n,$$

рассмотренную в главе 1. Более точно, она соответствует задаче (7), (8) для единичной матрицы B. Поэтому на основании теоремы 5.2 эта задача фредгольмова и ее индекс равен n, где учтено, что в рассматриваемом случае простого контура следует в формуле индекса $\ae = -2\operatorname{Ind} B + (2-m)n$ положить $m = 1$. С другой стороны, функция $e_1 a_2 - e_2 a_1$ равна $ie/2$ и ее индекс Коши равен n, так что формула (28) дает равенство $\ae = -n(n-1) + n^2 = n$. Таким образом, теорема 9.2 полностью согласуется с теоремой 5.2.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Чан К.В. Обобщенные степенные ряды. // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. - 2012. - №11(130). - Выпуск 27. - С. 24-28.

[2] Солдатов А.П.,Чан К.В. Задача Римана-Гильберта для бианалитических функций. // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. - 2015. - №5(202). - Выпуск 38. - С. 83-88.

[3] Солдатов А.П.,Чан К.В. Задача линейного сопряжения для полианалитических функций. // Известия вузов. Математика, 2016, №12, с. 76–81.

[4] Солдатов А.П.,Чан К.В. Задача Римана-Гильберта для бианалитических функций. // Тезисы докладов Междунар. конф.сред. Вьетнама.: Изд-во БД. - 2015. № 1 - С. 38-39.

[5] Солдатов А.П.,Чан К.В. Задача Римана-Гильберта для бианалитических функций.// Тезисы докладов Междунар. конф., посв. памяти В. И. Ильина. - М.: Изд-во ВГУ. - 2015. - С. 209.

[6] Солдатов А.П.,Чан К.В. О треугольных канонических матрицах задачи линейного сопряжения// Тезисы докладов Междунар. конф., М.: Изд-во ВГУ. - 2016.

Подписано в печать 22.12.2016. Times New Roman.

Формат $60 \times 84/16$. Усл. п. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 185.

Оригинал-макет тиражирован в ИПК НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.